بالاخره، می‌گوییم که *وابستگی خطی* و *استقلال خطی* برای بردارها در فضا درست مثل بردارها در صفحه تعریف می‌شوند (ر.ک. صفحهٔ ۱۰۵۷). می‌توان نشان داد که هر *چهار بردار در فضا وابستهٔ خطی‌اند* و *سه بردار در فضا مستقل خطی‌اند اگر و فقط اگر غیر همصفحه باشند*. مثلاً، بردارهای $\mathbf{a}_1 = (0, 1, 1)$، $\mathbf{a}_2 = (1, 0, 1)$، $\mathbf{a}_3 = (1, 1, 0)$ غیر همصفحه می‌باشند (چرا؟)؛ و درنتیجه، مستقل خطی می‌باشند. این را می‌توان با نشان دادن اینکه $\mathbf{0}$ تساویهای $c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + c_3\mathbf{a}_3 = \mathbf{0}$ $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ راایجاب می‌کندامتحان نمود.

مسائل

بردارهای $\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$ و $2\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$ را در هر حالت بیابید.

۱. $\mathbf{a} = (1, -2, 4), \mathbf{b} = (3, 2, -1)$

۲. $\mathbf{a} = (4, 0, 7), \mathbf{b} = (2, 5, 0)$

۳. $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}, \mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

۴. $\mathbf{a} = -\mathbf{j} + \mathbf{k}, \mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{k}$

بردار $\overrightarrow{AB}$ را با نقاط انتهایی داده شده بیابید.

۵. $A = (-3, 2, 5), B = (4, 1, -1)$

۶. $A = (7, 0, 3), B = (6, 2, 9)$

۷. $A = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}), B = (-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{6})$

۸. $A = (13, -11, 5), B = (15, 17, -9)$

۹. نقطهٔ پایان بردار $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ را درصورتی بیابید که نقطهٔ شروعش $(1, 2, -3)$ باشد؟

۱۰. نقطهٔ شروع بردار $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$ را درصورتی بیابید که نقطهٔ پایانش $(-4, 0, 5)$ باشد.

اندازهٔ بردار داده شده را بیابید.

۱۱. $\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$

۱۲. $2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

۱۳. $6\mathbf{i} - 9\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

۱۴. $-4\mathbf{i} + 12\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$

حاصلضرب نقطه‌ای $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ بردارهای داده شده را یافته، و زاویهٔ بین آنها را نیزپیداکنید.

۱۵. $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}, \mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

۱۶. $\mathbf{a} = 12\mathbf{i} - 5\mathbf{k}, \mathbf{b} = 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

۱۷. $\mathbf{a} = (1, 1, -1), \mathbf{b} = (-1, 1, 1)$

۱۸. $\mathbf{a} = (12, -15, 16), \mathbf{b} = (2, 2, 1)$

۱۹. مقدار t را طوری بیابید که بردارهای $\mathbf{a} = t\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ و $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} - t\mathbf{k}$ متعامد باشند.

۲۰. مقادیر s و t را طوری بیابید که بردارهای $\mathbf{a} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + s\mathbf{k}$ و $\mathbf{b} = t\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ موازی باشند.

$\text{proj}_{\mathbf{b}}\, \mathbf{a}$ را به ازای بردارهای داده شدهٔ $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ حساب کنید.

۲۱. $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{i} - \mathbf{k}, \mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{k}$

۲۲. $\mathbf{a} = -2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \mathbf{b} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$

۲۳. $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}, \mathbf{b} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

۲۴. $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j}, \mathbf{b} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$

آیا یک بردار می‌تواند زوایای داده شده را به عنوانِ زوایای هادی داشته باشد؟

۲۵. $45°, 45°, 60°$ ۲۶. $90°, 150°, 60°$ ۲۷. $45°, 60°, 120°$

آیا یک بردار می‌تواند با دوتا از سه محور مختصات مثبت زوایای داده شده را بسازد؟

۲۸. $30°, 45°$ ۲۹. $150°, 30°$ ۳۰. $60°, 60°$

کسینوسهای هادی و زوایای هادی بردار داده شده را بیابید.

۳۱. $2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$

۳۲. $12\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$

۳۳. $6\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

۳۴. $-15\mathbf{i} + 16\mathbf{j} + 12\mathbf{k}$

۳۵. برداری با هر سه محور مثبت مختصات زاویهٔ حادهٔ θ می‌سازد. θ را بیابید.

۳۶. مکعبی بردارهای $2\mathbf{i}$ ، $2\mathbf{j}$ ، و $2\mathbf{k}$ را به عنوان سه یال خود دارد. زاویهٔ بردار واصل از مبداء O تا مرکز وجه جلو مکعب با بردار واصل از O تا مرکز وجه بالایی را بیابید.

۳۷. در یک کارت مربع شکل یکی از اقطارش رسم شده است، و نیز دو خط دیگر در آن ترسیم شده که کارت را به سه نوار مستطیلی همنهشت تقسیم کرده‌اند. سپس کارت در امتداد اضلاع نوارهای مستطیلی تاخورده و به یک منشور مثلث القاعدهٔ منتظم تبدیل شده است. تازدن سبب شده تا قطر یک مسیر چندضلعی مرکب از سه پاره‌خط گردد، بر هر وجه جانبی منشور یکی. زاویهٔ بین دوپاره‌خط متوالی این مسیر را بیابید.

۳۸. بردار $\mathbf{b} = (4, 2, 3)$ را به صورت ترکیبی‌خطی از بردارهای $\mathbf{a}_1 = (0, 1, 1)$ ، $\mathbf{a}_2 = (1, 0, 1)$ و $\mathbf{a}_3 = (1, 1, 0)$ بیان کنید.

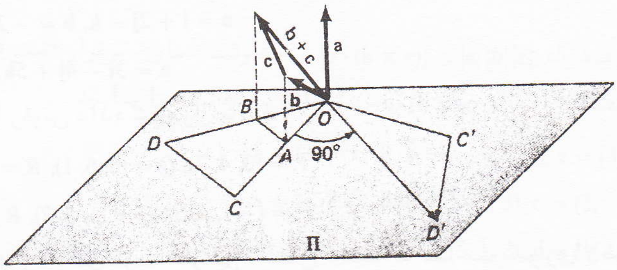
۳۹. یک پایهٔ غیرمتعامد در فضا مثال بزنید.

و این فرمول درصورت صفر بودن هر دو اسکالر p و q نیز برقرار می‌ماند.

برای اثبات قوانین پخشپذیری

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \times \mathbf{c}), \qquad (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}), \tag{۱۷}$$

فرض‌کنیم بردارهای $\mathbf{a}$ ، $\mathbf{b}$، و $\mathbf{b} + \mathbf{c}$ دارای نقطهٔ شروع مشترک O بوده، و Π صفحهٔ مار بر O عمود بر $\mathbf{a}$ مثل شکل ۲۲ باشد. عمودهای مرسوم از نقاط پایان $\mathbf{b}$ و $\mathbf{b} + \mathbf{c}$ بر Π این صفحه را در نقاط A و B قطع می‌کنند. با بزرگ‌کردن مثلث OAB به وسیلهٔ عامل $|\mathbf{a}|$، مثلث OCD به دست می‌آید ("بزرگ‌سازی درصورت $|\mathbf{a}| > 1$ عملا" کوچک‌سازی است، واگر $|\mathbf{a}| = 1$، OCD بر OAB منطبق می‌شود). سپس OCD را به اندازهٔ $90°$ حول O در صفحهٔ Π می‌چرخانیم،



شکل ۲۲

این دوران OCD را به مثلث همنهشت $OC'D'$ می‌برد، و از دو جهت دوران ممکن جهتی را اختیار می‌کنیم که بردارهای $\overrightarrow{OC}$، $\overrightarrow{OC'}$، و $\mathbf{a}$ یک دستگاه راست‌دست تشکیل می‌دهند. از شکل واضح است که

$$\overrightarrow{OD'} = \overrightarrow{OC'} + \overrightarrow{C'D'}. \tag{۱۸}$$

اما

$$\overrightarrow{OC'} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \qquad \overrightarrow{OD'} = \mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}), \qquad \overrightarrow{C'D'} = \mathbf{a} \times \mathbf{c},$$

و با گذاردن این عبارات در (۱۸) فرمول اول (۱۷) به‌دست می‌آید. برای به‌دست‌آوردن فرمول دوم، از فرمول اول و پاد مشتقپذیری حاصلضرب خارجی استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} &= -[\mathbf{c} \times (\mathbf{a} + \mathbf{b})] = -[(\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + (\mathbf{c} \times \mathbf{b})] \\ &= -(\mathbf{c} \times \mathbf{a}) - (\mathbf{c} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}).\end{aligned}$$

مسائل

حاصلضرب خارجی $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ بردارهای داده شده را بیابید.

۱. $\mathbf{a} = 3\mathbf{k}, \mathbf{b} = -2\mathbf{j}$

۲. $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}, \mathbf{b} = \mathbf{j} - \mathbf{k}$

۳. $\mathbf{a} = (0, 2, 1), \mathbf{b} = (1, 0, 2)$

۴. $\mathbf{a} = (10, 0, 5), \mathbf{b} = (0, -2, 6)$

۵. $\mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}, \mathbf{b} = 3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

۶. $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}, \mathbf{b} = -\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$

۷. $\mathbf{a} = (1, 3, 4), \mathbf{b} = (2, 6, -3)$

۸. $\mathbf{a} = (9, -7, 1), \mathbf{b} = (8, 5, -2)$

مساحت متوازی‌الاضلاع پیموده شده به‌وسیلهٔ بردارهای داده شده را بیابید.

۹. $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}, \mathbf{b} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$

۱۰. $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}, \mathbf{b} = -6\mathbf{k}$

مساحت مثلث با رئوس داده شده را بیابید.

۱۱. $P = (3, 4, 7), Q = (0, 6, 1), R = (5, -2, 4)$

۱۲. $P = (-1, 4, 5), Q = (1, 3, 7), R = (2, 5, 6)$

۱۳. با استفاده از حاصل‌ضرب خارجی، نشان دهید که مساحت متوازی‌الاضلاع پیموده شده به‌وسیلهٔ اقطار متوازی‌الاضلاع P دوبرابر مساحت خود P است.

۱۴. نشان دهید که به ازای بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ دلخواه، $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2$.

بردار یکه‌ای بیابید که بر هر دو بردار داده شده عمود باشد.

۱۵. $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j}, \mathbf{b} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$

۱۶. $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{k}, \mathbf{b} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

۱۷. $\mathbf{a} = (2, 0, -1), \mathbf{b} = (-2, 1, 0)$

۱۸. $\mathbf{a} = (3, 1, 2), \mathbf{b} = (-1, 3, -1)$

۱۹. آیا $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{c}$، که در آن $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$، تساوی $\mathbf{b} = \mathbf{c}$ را ایجاب می‌کند؟ پاسخ خود را توضیح دهید.

۲۰. نشان دهید که $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|$. چه وقت تساوی برقرار است؟

دترمینان داده شده را حساب کنید.

۲۱. $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}$

۲۲. $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}$

۲۳. $\begin{vmatrix} x & 1 \\ x^2 & x \end{vmatrix}$

۲۴. $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{vmatrix}$

۲۵. $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$

۲۶. $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$

۲۷. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$

۲۸. $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$

۲۹. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & 6 \\ 6 & 0 & 5 \end{vmatrix}$

۳۰. $\begin{vmatrix} 4 & 5 & 11 \\ -2 & -3 & 1 \\ 3 & 8 & -2 \end{vmatrix}$

۳۱. $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & c & d \\ 0 & e & 0 \end{vmatrix}$

۳۲. $\begin{vmatrix} a & x & x \\ x & b & x \\ x & x & c \end{vmatrix}$

۳۳. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$.

۳۴. نشان دهید که $|\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})| \le |\mathbf{a}||\mathbf{b}||\mathbf{c}|$. چه وقت تساوی برقرار است؟

حاصل‌ضرب سه‌گانهٔ اسکالر $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ بردارهای داده شده را بیابید.

۳۵. $\mathbf{a}=(1,-1,3), \mathbf{b}=(-2,2,1), \mathbf{c}=(3,-2,5)$

۳۶. $\mathbf{a}=(1,2,5), \mathbf{b}=(1,-1,3), \mathbf{c}=(3,-6,-1)$

۳۷. $\mathbf{a}=(-4,2,1), \mathbf{b}=(-5,1,2), \mathbf{c}=(-1,-1,1)$

۳۸. $\mathbf{a}=(2,-1,6), \mathbf{b}=(3,-5,1), \mathbf{c}=(4,-7,1)$

۳۹. نشان دهید که $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{a})=\mathbf{b}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{a})=0$. با استفاده از این نشان دهید یک دترمینان 3×3 درصورتی صفر است که دو سطرش یکسان باشند.

۴۰. با استفاده از این امر که تعویض دو سطر یک دترمینان علامتش را تغییر می‌دهد، ثابت کنید که $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a})=\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$.

آیا بردارهای داده شده همصفحه‌اند؟ جوابتان را توضیح دهید.

۴۱. $\mathbf{a}=(-1,2,2), \mathbf{b}=(2,-3,1), \mathbf{c}=(-4,7,3)$

۴۲. $\mathbf{a}=(3,-2,1), \mathbf{b}=(2,1,2), \mathbf{c}=(3,-1,-4)$

۴۳. نشان دهید که چهار نقطهٔ $A=(1,2,-1)$ ، $B=(0,1,5)$ ، $C=(-1,2,1)$ و $D=(2,1,3)$ همصفحه‌اند.

حجم متوازی‌السطوح پیموده شده به‌وسیلهٔ بردارهای داده شده را بیابید.

۴۴. $\mathbf{a}=\mathbf{i}\times\mathbf{j}, \mathbf{b}=\mathbf{j}\times\mathbf{k}, \mathbf{c}=\mathbf{k}\times\mathbf{i}$

۴۵. $\mathbf{a}=(1,3,-1), \mathbf{b}=(-2,1,2), \mathbf{c}=(3,5,-2)$

۴۶. $\mathbf{a}=(-4,5,0), \mathbf{b}=(6,2,5), \mathbf{c}=(2,1,7)$

۴۷. حجم چهار وجهی به رئوس $A=(-1,2,1)$ ، $B=(5,5,4)$ ، $C=(2,3,-1)$ و $D=(1,4,3)$ را بیابید.

۴۸. حاصل‌ضرب سه‌گانه به شکل $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ **حاصل‌ضرب سه‌گانهٔ برداری** نام دارد. توجه کنید که $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ برخلاف $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ که اسکالر است بردار می‌باشد. با محاسبهٔ مستقیم تحقیق کنید که $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$. وقتی به شکل

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$$

نوشته شود، " قاعدهٔ بک ـ کب" نام دارد و فرمول مفیدی است که ارزش حفظ کردن دارد.

حاصل‌ضربهای سه‌گانهٔ برداری $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ و $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ را به ازای بردارهای داده‌شده حساب کنید.

۴۹. $\mathbf{a} = (2, 1, 3), \mathbf{b} = (1, -2, 2), \mathbf{c} = (1, 1, 1)$

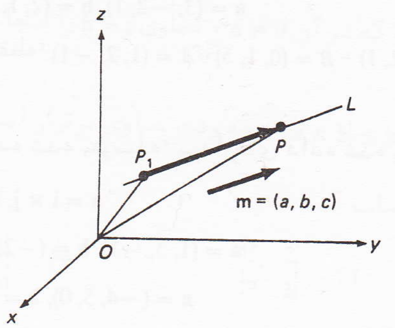
۵۰. $\mathbf{a} = (4, 0, 5), \mathbf{b} = (0, -1, 6), \mathbf{c} = (1, 2, 0)$

۵۱. $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j}, \mathbf{b} = \mathbf{j} + \mathbf{k}, \mathbf{c} = \mathbf{i} + \mathbf{k}$

۵۲. ذره‌ای با بار q با سرعت $\mathbf{v}$ در میدان مغناطیسی $\mathbf{B}$ تحت اثر نیروی $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ قرار دارد. فرض کنید، همانند در سیکلوترون، میدان مغناطیسی ثابت و بر صفحهٔ حرکت ذره عمود باشد. نشان‌دهید ذره یک مسیر مستدیر به شعاع mv/qB طی می‌کند، که‌در آن $v = |\mathbf{v}|$ ، $B = |\mathbf{B}|$ ، و m جرم ذره است. نشان دهید این مسیر با تندی زاویه‌ای qB/m ، به نام **فرکانس سیکلوترون**، توصیف می‌شود.

۱۲.۴ خطوط و صفحات در فضا

معادلات پارامتری خطوط. خط L در فضا به‌وسیلهٔ نقطهٔ ثابت $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ بر L و بردار ناصفر $\mathbf{m} = (a, b, c)$ موازی L منحصراً" معین می‌شود. در این صورت، همانطور که شکل ۲۳ نشان داده، نقطهٔ P بر L واقع است اگر وفقط اگر بردارهای $\overrightarrow{P_1P}$ و $\mathbf{m} = (a, b, c)$



شکل ۲۳