می‌دهد. بنابر فرض این پوشش حاوی زیرپوشش متناهی است. فرض کنیم $x_1, \ldots, x_n$ نقاطی در $A$ باشند که

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} N_{r_i}(x_i)$$

که در آن $r_i := r_{x_i}$. اگر قرار دهیم $r := \min\{r_i \mid i = 1, \ldots, n\}$ آنگاه

$$\forall i = 1, \ldots, n, \quad N_r(p) \cap N_{r_i}(x_i) = \emptyset$$

و در نتیجه $N_r(p) \cap A = \emptyset$. پس $N_r(p) \subset A^c$. به این ترتیب، هر نقطه از $A^c$ درونی است. ■

آنچه را در این فصل مشاهده کردیم در قضیهٔ زیر خلاصه می‌کنیم.

**قضیه ۳.۴.۸** *فرض کنیم $A \subset \mathbb{R}$ زیرمجموعه‌ای غیر تهی باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادل هستند.*

*الف) هر دنباله از نقاط $A$ زیردنباله‌ای همگرا در $A$ دارد. (یعنی $A$ فشرده است.)*

*ب) هر پوشش باز $A$ حاوی زیرپوششی متناهی است.*

*ج) $A$ بسته و کراندار است.*

بعدا در بحث فضاهای متریک مشاهده می‌کنیم که مفهوم فشردگی بر اساس خاصیت (ب) قضیهٔ قبل تعریف خواهد شد. در این حالت، معادل بودن دو ویژگی (الف) و (ب) در هر فضای متریک برقرار خواهد بود. همچنین با داشتن هر یک از دو خاصیت اخیر می‌توانیم ثابت کنیم مجموعهٔ مورد بررسی بسته و کراندار است. ولی در یک فضای متریک دلخواه هر زیرمجموعهٔ بسته و کراندار لزوما فشرده نیست.

تذکر: سوالاتی که با علامت (*) مشخص شده اند برای تکلیف سوم می باشند.

## تمرینات فصل سوم

۱. فرض کنید $A := (-1, 2] \cap \mathbb{Q}$. مطلوبست تعیین مجموعه‌های $A^\circ$، $A'$ و $\overline{A}$.

(*) ۲. سه مجموعه با ساختارهایی متفاوت مثال بزنید که نه باز باشند و نه بسته.

۳. فرض کنید $A$ مجموعه‌ای بسته و کراندار از اعداد حقیقی باشد. ثابت کنید که $\inf A$ و $\sup A$ متعلق به این مجموعه است.

(*) ۴. فرض کنید $A$ مجموعه‌ای باز و $B$ مجموعه‌ای بسته باشد. ثابت کنید که $A \setminus B$ مجموعه‌ای باز و $B \setminus A$ مجموعه‌ای بسته است.

۵. الف) فرض کنید $A$ مجموعه‌ای غیر تهی باشد. ثابت کنید که مجموعهٔ نقاط حدی این مجموعه، یعنی $A'$، مجموعه‌ای بسته است.

ب) توضیح دهید که چرا مجموعه‌ای مانند $A$ وجود ندارد که $A' = \{\frac{۱}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

۶. فرض کنید $A$ مجموعه‌ای کراندار باشد. ثابت کنید که هر یک از مجموعه‌های $A'$ و $\overline{A}$ نیز کراندار خواهند بود.

۷. فرض کنید $A$ غیرتهی باشد. ثابت کنید که مجموعه نقاط حدی دو مجموعهٔ $A$ و $\overline{A}$ با یکدیگر برابر هستند.

۸. برای دو زیرمجموعهٔ $A$ و $B$ از $\mathbb{R}$ روابط زیر را ثابت کنید.

الف) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$　　ب) $(A \cup B)^\circ \supseteq A^\circ \cup B^\circ$

ج) $\overline{(A \cap B)} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$　　د) $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$

با مثال‌هایی نشان دهید که در بندهای (ب) و (ج) تساوی بین طرفین لزوما برقرار نیست.

۹. هر یک از گزاره‌های زیر را اثبات یا با مثالی نقض رد کنید.

الف) برای خانوادهٔ $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ از زیرمجموعه‌های $\mathbb{R}$، $\overline{(\bigcup_{n=۱}^{\infty} A_n)} = \bigcup_{n=۱}^{\infty} \overline{A_n}$.

ب) برای دو زیرمجموعهٔ $A$ و $B$ از $\mathbb{R}$ اگر $\overline{A} \subset \overline{B}$ آنگاه $A' \subset B'$.

ج) فرض کنیم $B$ زیرمجموعه‌ای متناهی از مجموعهٔ $A$ باشد. آنگاه $(A \setminus B)' = A'$.

۱۰. برای زیرمجموعهٔ غیرتهی $A$ از $\mathbb{R}$ و $p \in \mathbb{R}$، فاصلهٔ نقطهٔ $p$ تا مجموعهٔ $A$، با نماد $\operatorname{dist}(p, A)$، را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\operatorname{dist}(p, A) = \inf\{|p - x| \mid x \in A\}$$

الف) با مثالی نشان دهید که از $\operatorname{dist}(p, A) = ۰$ لزوما رابطهٔ $p \in A$ به دست نمی‌آید.

ب) ثابت کنید که $\operatorname{dist}(p, A) = ۰$ اگر و تنها اگر $p \in \overline{A}$.

ج) برای $r > ۰$ نشان دهید که مجموعهٔ $\{x \in \mathbb{R} \mid \operatorname{dist}(x, A) < r\}$ مجموعه‌ای باز در برگیرندهٔ $A$ است.

۱۱. فرض کنید $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ دنباله‌ای همگرا به $a$ باشد. نشان دهید که مجموعهٔ $A := \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{a\}$ مجموعه‌ای فشرده است.

۱۲. نشان دهید مجموعهٔ $A$ فشرده است اگر و تنها اگر هر زیرمجموعهٔ نامتناهی از آن نقطه‌ای حدی در $A$ داشته باشد.