گرادیان تابع $f(x,y)$**:** اگر f یک تابع دومتغیره باشد، آنگاه گرادیان f برداری است که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\nabla f(x,y) = \langle D_1 f(x,y), D_2 f(x,y)\rangle$$

اگر رویه S نمایش تابع $Z = f(x,y)$ باشد آنگاه ∇f در هر نقطه روی این سطح، برداری است عمود بر سطح به سمت خارج.

قاعده زنجیره‌ای برای مشتقات جزئی (حالت اول) : اگر $Z = f(x,y)$ یک تابع مشتق‌پذیر و $x = g(t)$ و $y = h(t)$ به‌طوری‌که g و h توابع مشتق‌پذیر باشند در این صورت Z نسبت به t مشتق‌پذیر است و داریم

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

مثال ۱. *اگر $z = x^2y + 3xy^4$ و $x = \cos t$ و $y = \sin 2t$ آنگاه*

$$\frac{dz}{dt} = (2xy + 3y^4)(-\sin t) + (x^2 + 12xy^3)2\cos t$$

$$= (2\cos t\sin 2t + 3\sin^4 2t)(\ sint) + (\cos^2 t + 12\cos t\sin^3 2t)2\cos t$$

قاعده زنجیره‌ای (حالت دوم): اگر $z = f(x,y)$مشتق‌پذیر و $x = g(s,t)$ و $y = h(s,t)$ که g و h توابع مشتق‌پذیرند در این صورت

$$\frac{dz}{ds} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

مثال ۲. *اگر $z = f(s^2 - t^2, t^2 - s^2)$ و f یک تابع مشتق‌پذیر، نشان دهید*

$$t\frac{\partial f}{\partial s} + s\frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

حل: فرض کنید $x = s^۲ - t^۲$ و $y = t^۲ - s^۲$. داریم:

$$\frac{df}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}(۲s) + \frac{\partial f}{\partial y}(-۲s) \qquad (۱)$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}(-۲t) + \frac{\partial f}{\partial y}(۲t) \qquad (۲)$$

$$۱,۲ \Longrightarrow t\frac{\partial f}{\partial s} + s\frac{\partial f}{\partial t} = (۲st\frac{\partial f}{\partial x} - ۲st\frac{\partial f}{\partial y}) + (-۲st\frac{\partial f}{\partial x} + ۲st\frac{\partial f}{\partial y}) = ۰$$

مشتق ضمنی : فرض کنید $F(x,y,z) = ۰$ یک تابع مشتق‌پذیر باشد در این صورت z نسبت به xو y مشتق‌پذیر است و داریم :

$$\frac{dz}{dx} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

مثال ۳. *فرض کنید* $x^۳ + y^۳ + z^۳ + ۴xyz = -۱$. *مطلوبست محاسبه*

$$\frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial x}$$

حل : فرض کنید $F(x,y,z) = x^۳ + y^۳ + z^۳ + ۴xyz + ۱$ داریم

$$\frac{dz}{dx} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{۳x^۲ + ۶yz}{۳z^۲ + ۶xy}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{۳y^۲ + ۶xz}{۳z^۲ + ۶xy}$$

معادله صفحه مماس بر رویه یک رویه:

اگر رویه S توسط معادله $z = f(x,y)$ بیان شود و f دارای مشتقات جزئی پیوسته باشد در این صورت معادله صفحه مماس بر رویه در نقطه $(x_۰, y_۰)$ واقع بر آن به صورت زیر است.$z_۰ = f(x_۰, y_۰)$.

$$z - z_۰ = D_۱ f(x_۰, y_۰)(x - x_۰) + D_۲ f(x_۰, y_۰)(y - y_۰) = ۰$$

اگر رویه توسط $F(x,y,z) = c$ بیان شود، آنگاه معادله صفحه مماس رویه در نقطه $(x_۰, y_۰, z_۰)$ واقع بر آن به صورت زیر است.

$$D_۱ F(x_۰, y_۰, z_۰)(x - x_۰) + D_۲ F(x_۰, y_۰, z_۰)(y - y_۰) + D_۳ F(x_۰, y_۰, z_۰)(z - z_۰) = ۰$$

مثال ۴. *نشان دهید معادله صفحه مماس بر بیضی‌گون* $\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}+\frac{z^۲}{c^۲}=۱$ *در نقطه* $(x_∘,y_∘,z_∘)$ *واقع بر آن به صورت*

$$F(x,y,z)=\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}+\frac{z^۲}{c^۲},\qquad D_۱F=\frac{۲x}{a^۲}\qquad D_۲F=\frac{۲y}{b^۲}\qquad D_۳F=\frac{۲z}{c^۲}$$

$$\frac{۲x_∘}{a^۲}(x-x_∘)+\frac{۲y_∘}{b^۲}(y-y_∘)+\frac{۲z_∘}{c^۲}(z-z_∘)=∘$$

چون نقطه روی رویه است

$$\Longrightarrow \frac{۲x_∘x}{a^۲}+\frac{۲y_∘y}{b^۲}+\frac{۲z_∘z}{c^۲}=\frac{۲x_∘^۲}{a^۲}+\frac{۲y_∘^۲}{b^۲}+\frac{۲z_∘^۲}{c^۲}=۲$$

$$\Longrightarrow \frac{x_∘x}{a^۲}+\frac{y_∘y}{b^۲}+\frac{z_∘z}{c^۲}=۱$$

ماکزیمم و مینیمم توابع چندمتغیره :

تعریف ۱. *تابع* $f(x,y)$ *در* (a,b) ***دارای ماکریمم نسبی (یا مینیمم نسبی)*** *است اگر برای هر* (x,y) *در یک همسایگی* (a,b) *داشته باشیم* $f(x,y)\leqslant f(a,b)$ *(* $f(x,y)\geqslant f(a,b)$*یا). مقدار* $f(a,b)$ ***ماکزیمم نسبی (مینیمم نسبی)*** f *نامیده می‌شود.*

دو سوال مطرح می‌شود.

۱. ماکزیمم و مینیمم نسبی در چه نقاطی اتفاق می‌افتند ؟

۲. چگونه تشخیص دهیم که f در (a,b) دارای ماکزیمم نسبی یا مینیمم نسبی یا هیچکدام می‌باشد؟

جواب سوال ۱ توسط قضیه زیر داده می‌شود.

قضیه ۲. *اگر* $f(x,y)$ *در* (a,b) *ماکزیمم یا مینیمم نسبی داشته باشد و مشتقات جزئی* f *در* (a,b) *موجود باشند، آنگاه* $D_۱f(a,b)=∘, D_۲f(a,b)=∘$.

تعریف ۳. *نقطه (a,b) یک نقطه بحرانی تابع f نامیده می‌شود اگر مشتقات جزئی f در a موجود نباشند یا درصورت وجود $D_1 f(a,b) = 0$ و $D_2 f(a,b) = 0$. برای بدست آوردن ماکزیمم و مینیمم نسبی باید نقاط بحرانی تابع f را بدست آوریم.*

جواب سوال ۲ در قضیه زیر داده می‌شود.

قضیه ۴. *(آزمون مشتق دوم) فرض کنیم مشتقات جزئی مرتبه ۲ f در یک همسایگی (a,b) پیوسته باشند و همچنین $D_1 f(a,b) = 0$ و $D_2 f(a,b) = 0$ ، قرار می‌دهیم*

$$A = f_{xx}(a,b), \quad B = f_{yy}(a,b), \quad C = f_{x,y}(a,b), \quad D = AB - C^2$$

داریم :

1. *اگر $D > 0$ و $A > 0$، آنگاه f در (a,b) دارای مینیمم نسبی است.*
2. *اگر $D > 0$ و $A < 0$، آنگاه f در (a,b) دارای ماکزیمم نسبی است.*
3. *اگر $D < 0$، آنگاه f در (a,b) نه مینیمم و نه ماکزیمم دارد.*
4. *اگر $D = 0$ ، با این آزمون نمی‌توان نظر داد.*

اگر $D < 0$، آنگاه (a,b) را نقطه زینی f نامیده می‌شود.

توجه: قضیه فوق در صورتی به کار می‌رود که بحرانی بودن تابع f در (a,b) به خاطر عدم وجود مشتقات جزئی نباشد .در این صورت باید از تعریف استفاده کنیم.

مثال ۵. *نقاط بحرانی تابع $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$ را مشخص کنید و معین کنید هرکدام چه نوع نقطه‌ای می‌باشد ؟*

حل: چون مشتقات جزئی f موجودند پس برای بدست آوردن نقاط بحرانی ریشه‌های مشتقات جزئی را بدست می آوریم.

$$\begin{cases} D_1 = 4x^3 - 4y = 0 \\ D_2 = 4y^3 - 4x \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x^3 - y = 0 \rightarrow y = x^3 \\ y^3 - x = 0 \rightarrow x^9 - x = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow x(x^8 - 1) = 0 \rightarrow\rightarrow x = 0, x = 1, x = -1$$

$$x = 0 \to y = 0 \to p_1(0,0), \quad x = 1 \to y = 1 \to p_2(1,1)$$
$$x = -1 \to y = -1 \to p_3(-1,-1).$$
$$A = f_{xx} = 12x^2, \quad B = 12y^2, \quad D = -4$$

نتیجه	$D = AB - C^2$	B	A	نقاط
نقطه زینی	-4	0	0	$p_1(0,0)$
مینیمم نسبی	$144 - 4$	12	12	$p_2(1,1)$
مینیمم نسبی	-4	12	12	$p_3(-1,-1)$

ماکزیمم و مینیمم مطلق توابع چند متغیره :

اگر $D \subseteq \mathbb{R}^n$ یک ناحیه بسته و کراندار باشد و f روی D پیوسته باشد در این صورت f روی D ماکزیمم و مینیمم مطلق خود را اختیار می‌کند یعنی وجود دارد نقاط $x_1, x_2 \in D$ که $f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_2)$ برای هر $x \in D$.

حال سوال این است چگونه ماکزیمم و مینیمم مطلق f را روی D بدست آوریم ؟ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

۱. نقاط بحرانی f را که درون ناحیه D می‌باشند بدست می‌آوریم.

۲. نقاط بحرانی f روی مرز D را نیز بدست می‌آوریم.

۳. مقدار f در نقاط بدست آمده در قسمت ۱و۲ را محاسبه می‌کنیم و بیشترین مقدار آن ماکزیمم f و کمترین مقدار آن مینیمم f روی D است .

برای بدست آوردن نقاط بحرانی روی مرز D : معمولا مرز D توسط تابع $g(x) = c$ بیان می‌شود و لذا باید نقاط بحرانی f را تحت شرط $g = c$ بدست آوریم.

مثال ۶. *نشان دهید مستطیلی با محیط معلوم، مربع دارای بیشترین مساحت است ؟*

حل : باید ماکزیمم تابع $f(x,y) = xy$ تحت شرط $2x + 2y = p$ (p عددی ثابت) بدست آوریم.

$$\begin{cases} f = xy \\ x + y = \frac{p}{2} \to y = \frac{p}{2} - x \end{cases}$$

$$f(x,y)=h(x)=x(\frac{p}{۲}-x)=\frac{p}{۲}x-x^{۲}$$
$$h^{'}(x)=\frac{p}{۲}-۲x=۰\Longrightarrow x=\frac{p}{۴}\longrightarrow y=\frac{p}{۴}$$

پس xy وقتی ماکزیمم دارد که $x=y=\frac{p}{۴}$. در این صورت ماکزیمم مساحت $\frac{p^{۲}}{۱۶}$ است. همانطور که در این مثال می‌بینیم باید یکی از متغیرها را براساس قضیه از شرط $g=c$ محاسبه کنیم یا به تعبیر ساده‌تر g را در f قرار می‌دهیم.

مثال ۷. *ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x,y)=x^{۳}+xy^{۲}$ را روی ناحیه $D=\{(x,y):\quad x^{۲}+y^{۲}\leqslant ۱\}$ محاسبه می‌کنیم.*

حل :

$$\nabla f=(۰,۰)\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}۳x^{۲}+y^{۲}=۰\\ ۲xy=۰\to x=۰\quad or\quad y=۰\end{array}\right.$$

پس $(۰,۰)$ نقطه بحرانی f درون D است.

$$\left\{\begin{array}{l}f=x^{۳}+y^{۲}x\\ x^{۲}+y^{۲}=۱\end{array}\right.\qquad f=x^{۳}+y^{۲}x=x(x^{۲}+y^{۲})=x=h(x)$$

لذا f روی مرز D به صورت تابع یک متغیره $h(x)$ است که $-۱\leqslant x\leqslant ۱$ است.
و لذا بیشترین مقدار f روی مرز D، ۱و کمترین مقدار آن ۱− است.
مقدار f در نقطه بحرانی $(۰,۰)$ برابر صفر است. پس ماکزیمم f برابر ۱ است و مینیمم آن ۱− است .

همواره جایگذاری g در f ساده نمی‌باشد. لذا روش ضرایب لاگرانژ را مطرح می‌کنیم.

قضیه ۵. *(ضرایب لاگرانژ) اگر تابع f در نقطه $(x_{۰},y_{۰})$ تحت شرط $g=c$ دارای ماکزیمم و مینیمم نسبی باشد در این صورت عدد λ وجود دارد به طوری که $(x_{۰},y_{۰})$ جواب دستگاه $\left\{\begin{array}{l}\nabla f=\lambda\nabla g\\ g=c\end{array}\right.$ است (لازم مشتقات جزئی f و g موجود و پیوسته باشند.)*

روش ضرایب لاگرانژ برای بدست آوردن ماکزیمم و مینیمم تابع $f(x,y,z)$ تحت شرط $g(x,y,z)=k$:

۱. مقادیر (x,y,z)و λ به گونه‌ای بدست می آوریم که جواب دستگاه $\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g = c \end{cases}$ باشند.

۲. مقدار f را در این نقاط محاسبه می‌کنیم، بیشترین مقدار ماکزیمم f تحت شرط g و کمترین مقدار مینیمم f تحت شرط g است .

مثال ۸. *نقاطی روی کره $x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=۴$ بیابید که نزدیکترین و دورترین نقطه تا نقطه‌ی $(۳,۱,-۱)$ باشند.*

حل : فرض کنیم (x,y,z) نقطه‌ای دلخواه روی کره باشد،

$$d(x,y,z)=\sqrt{(x-۳)^{۲}+(y-۱)^{۲}+(z+۱)^{۲}}$$

باید ماکزیمم و مینیمم تابع d را تحت شرط $x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=۴$ بدست آوریم.چون رادیکال صعودی است پس d وقتی ماکزیمم یا مینیمم است که $d^{۲}$ ماکزیمم یا مینیمم باشد،(با این کار مشتقات ساده‌تری داریم.) پس ماکزیمم و مینیمم تابع $f=d^{۲}=(x-۳)^{۲}+(y-۱)^{۲}+(z+۱)^{۲}$ را تحت شرط $x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=۴$ بدست می آوریم. داریم

$$\begin{cases} \nabla f=\lambda\nabla g \\ x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=۴ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} D_{۱}f=\lambda D_{۱}g \\ D_{۲}f=\lambda D_{۲}g \\ D_{۳}f=\lambda D_{۳}g \\ x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=۴ \end{cases} \rightarrow (*) \begin{cases} ۲(x-۳)=۲\lambda x \\ ۲(y-۱)=۲\lambda y \\ ۲(z+۱)=۲\lambda \\ x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=۴ \end{cases}$$

دستورالعمل مشخص برای حل دستگاه $(*)$ وجود ندارد. معمولا از معادلات اول سعی می‌کند x و y و z را براساس λ محاسبه کنندو سپس با جایگذاری در $g=c$ λرا محاسبه نمایند.

$$\Longrightarrow x=\frac{۳}{۱-\lambda} \qquad \Longrightarrow y=\frac{۱}{۱-\lambda}$$

$$\Longrightarrow z=\frac{-۱}{۱-\lambda} \qquad \Longrightarrow (\frac{۳}{۱-\lambda})^{۲}+(\frac{۱}{۱-\lambda})^{۲}+(\frac{-۱}{۱-\lambda})^{۲}=۴$$

$$\Longrightarrow \frac{۱۱}{(۱-\lambda)^{۲}}=۴ \Longrightarrow (۱-\lambda)^{۲}=\frac{۱۱}{۴} \longrightarrow \lambda=۱\pm\frac{\sqrt{۱۱}}{۲}$$

$$\lambda = \frac{\sqrt{11}}{2}+1 \Rightarrow x = \frac{6}{\sqrt{11}}, y = \frac{2}{\sqrt{11}}, z = \frac{-2}{\sqrt{11}} \longrightarrow (\frac{6}{\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}}, \frac{-2}{\sqrt{11}}) = p_1$$

$$\lambda = 1-\frac{\sqrt{11}}{2} \Rightarrow x = \frac{-6}{\sqrt{11}}, y = \frac{-2}{\sqrt{11}}, z = \frac{2}{\sqrt{11}} \longrightarrow (\frac{-6}{\sqrt{11}}, \frac{-2}{\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}}) = p_2$$

p_1 و p_2 نقاط بحرانی اند . توجه کنیم هیچ آزمونی به‌کار نمی‌رود و فقط مقدار f دراین نقاط محاسبه می‌شود. با قرار دادن p_1 و p_2 در f بسادگی می‌بینیم که $f(p_1)$ کمترین مقدار و $f(p_2)$ بیشترین مقدار دارد. یعنی p_2 دورترین نقطه روی کره از نقطه $(3, 1, -1)$ و p_1 نزدیکترین نقطه به آن است.

مثال ۹. *فرض کنید*

$$D = \{(x, y) : \quad x^2 + y^2 \leqslant 16\}$$

مشخص کننده یک دیسک فلزی باشد .درجه حرارت روی D توسط تابع $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2 - 4x - 5$ *مشخص می‌شود. گرمترین و سردترین نقطه روی دیسک را بیابید.*

حل: باید ماکزیمم و مینیمم مطلق f را روی D بیابیم.

$$\nabla f = (0, 0)$$

$$\to (4x - 4, 6y) = (0, 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 4 = 0 & \to \quad x = 1 \\ 6y = 0 & \to \quad y = 0 \end{cases}$$

$\longrightarrow p_1(1, 0) \quad D$ نقطه درون

حال نقاط روی مرز D را پیدا می‌کنیم.

$$\Rightarrow \begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g = c \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 4x - 4 = 2\lambda x \\ 6y = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 16 \end{cases} \longrightarrow (2 - \lambda)x = 2 \to x = \frac{2}{2 - \lambda}$$

$$\longrightarrow y = 0 \quad or \quad \lambda = 3$$

$y = 0 \longrightarrow x^2 + 0 = 16 \to x = 4$ یا $x = -4 \to p_2(4, 0), p_3(-4, 0)$

$$\lambda = ۳ \longrightarrow x = \frac{۲}{۲-۳} = -۲ \to y^۲ = ۱۲ \to y = \pm\sqrt{۱۲} = ۲\sqrt{۳}$$

$$\to p_۴(-۲, ۲\sqrt{۳}), p_۵(-۲, -۲\sqrt{۳})$$

دستگاه جواب دیگری ندارد.

باید مطمئن شویم همه جواب‌ها را بدست آورده ایم. هیچ آزمونی نیاز نیست فقط مقدار f را در این نقاط محاسبه می‌کنیم.

$$f(p_۱) = f(۱, ۰) = ۲ - ۴ - ۵ = -۷, \quad f(p_۲) = f(۴, ۰) = ۳۲ - ۱۶ - ۵ = ۱۱$$

$$f(p_۳) = f(-۴, ۰) = ۳۲ + ۱۶ - ۵ = ۴۳, \quad f(p_۴) = f(-۲, ۲\sqrt{۳}) = ۸ + ۲۴ + ۸ - ۵ = ۳۵$$

$$f(p_۵) = f(-۲, -۲\sqrt{۳}) = ۸ + ۲۴ + ۸ - ۵ = ۳۵$$

پس بیشترین مقدار f برابر ۴۳ و کمترین مقدار آن ۷− است. لذا سردترین نقطه دیسک درون آن نقطه $(۱, ۰)$ با درجه حرارت ۷− و گرمترین نقطه ، نقطه $(-۲, -۲\sqrt{۳})$ روی مرز است D با درجه حرارت ۴۳ است.