فصل پنجم:

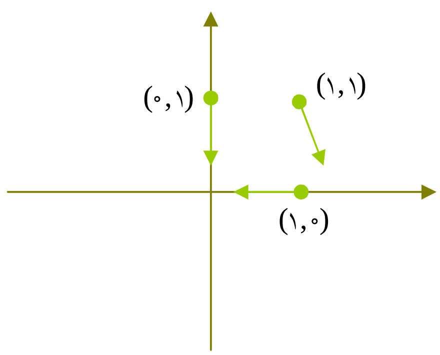
آنالیز برداری

تعریف : اگر $F : D \subseteq R^n \to R^n$ ،آن گاه F را یک میدان برداری می نامیم.

مثال: $F(x,y)=\left(x^{۲},y^{۲}\right)$

یک میدان برداری تابعی است که به هر نقطه از فضای R^n یک بردار نسبت می‌دهد.

مثال: $F(x,y)=(-x,-y)$



مثالهایی از میدانهای برداری :

- میدان جاذبه زمین ۲- میدان مغناطیسی ۳- میدان حاصل از نیروی وارد شده بر یک جسم

اگر $F=\left(f_{۱},f_{۲},\dots,f_n\right)$ یک میدان برداری باشد آن گاه هر یک از مؤلفه‌های F یعنی f_i ها یک تابع n متغیره است.

بررسی خواص حدود و پیوستگی میدان‌ها بر می گردد به خواص مشابه برای هر یک از مؤلفه ها، مثلاً مشتق جزئی F نسبت به متغیر x_i به صورت زیر است

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}=\left(\frac{\partial f_{۱}}{\partial x_i},\frac{\partial f_{۲}}{\partial x_i},\dots,\frac{\partial f_n}{\partial x_i}\right)$$

همچنین مشتق کل F در صورت مشتق‌پذیر بودن یک ماتریس $n\times n$ به صورت

$$DF = \begin{bmatrix} \nabla f_۱ \\ \nabla f_۲ \\ \vdots \\ \nabla f_n \end{bmatrix}_{n\times n}$$

است.

اگر $D \subseteq R^۲$ یک ناحیه باشد و $F : D \to R^۲$ یک میدان برداری آنگاه می توانیم F را به صورت

$$\begin{aligned} F(x,y) &= P(x,y)\,\boldsymbol{i} + Q(x,y)\,\boldsymbol{j} \\ &= \langle\, P(x,y), Q(x,y)\,\rangle \end{aligned}$$

که در آن P و Q توابع دو متغیره روی D می باشند بنویسیم. در این حالت اگر F مشتق پذیر باشد، ماتریس مشتق آن به صورت

$$DF = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial P}{\partial x} & \dfrac{\partial P}{\partial y} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} & \dfrac{\partial Q}{\partial y} \end{pmatrix}$$

اگر $F : D \subseteq R^۳ \to R^۳$ یک میدان برداری باشد، می توانیم F را به صورت

$$F(x,y,z) = P(x,y,z)\boldsymbol{i} + Q(x,y,z)\,\boldsymbol{j} + R(x,y,z)\boldsymbol{k}$$

که در آن P و Q و R توابع حقیقی سه متغیره روی D می باشند بنویسیم.

مثال:

$$F(x,y,z) = xyz\,\boldsymbol{i} + xe^{yz}\,\boldsymbol{j} + e^{x^۲ + y^۲ + z^۲}\,\boldsymbol{k}$$

- اگر $f : D \subseteq R^۳ \to R$ تعریف شده باشد آنگاه

$$\nabla f(x,y,z) = f_x(x,y,z)\boldsymbol{i} + f_y(x,y,z)\,\boldsymbol{j} + f_z(x,y,z)\boldsymbol{k}$$

را یک میدان گرادیان وابسته به تابع f می نامیم.

تعریف: میدان برداری F را یک میدان برداری پایدار می نامیم در صورتی که تابع حقیقی f موجود باشد به طوری که $F=\nabla f$. در این صورت تابع f را تابع پتانسیل میدان F می نامیم.

مثال: میدان جاذبه زمین که به صورت

$$F(x,y,z)=\frac{-mMG_x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}i+\frac{-mMG_y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}j+\frac{-mMG_z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}k$$

یک میدان پایدار با تابع پتانسیل $f(x,y,z)=\frac{mMG}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ است.

مثال: $F(x.y)=(ye^{xy},xe^{xy})$

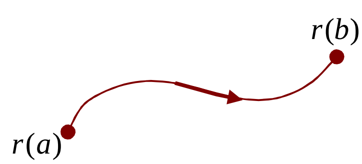
یک میدان برداری پایدار با تابع پتانسیل $f(x.y)=e^{xy}$ است.

انتگرال منحنی الخط :

اگر C یک منحنی باشد که توسط تابع برداری $r(t):[a,b]\to R^n$ داده شده باشد، آن گاه :

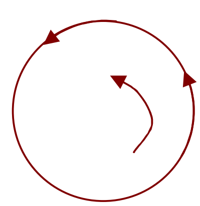
الف) C یک منحنی هموار است اگر برای هر t در $[a,b]$ ، r' پیوسته و $r'(t)\neq 0$.

ب) جهت منحنی C از نقطه ی ابتدا به انتهاست یعنی از $r(a)$ به $r(b)$.

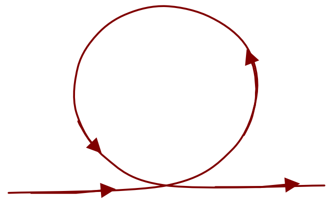


پ) منحنی C بسته است اگر نقطه ی ابتدا و انتها بر هم منطبق باشند یعنی $r(a)=r(b)$.

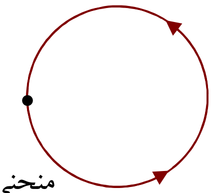
جهت یک منحنی بسته خلاف جهت حرکت عقربه های ساعت است. این جهت را جهت مثبت می نامیم.



ت) منحنی C ساده است اگر خودش را قطع نکند (غیر از نقاط ابتدا و انتها)



منحنی غیر ساده

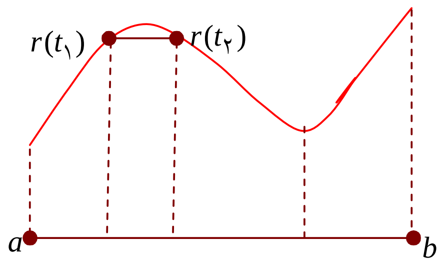


منحنی ساده

انتگرال یک تابع چند متغیره روی منحنی :

فرض کنید C یک منحنی توسط تابع $r(t)=[a,b]\to R^n$ باشد و $f:D\subseteq R^n\to R$ تعریف شده باشد و روی منحنی C کران دار باشد تعریف می کنیم:

$$P=\{t_0=a < t_1 < t_2 < \dots < t_n\}$$



جمع های جزیی f روی منحنی C نسبت به افراز P به صورت زیر

$$s(P,f,r)=\sum_{i=0}^{n} f(t_i^*)\Delta r(t_i)$$

که در آن $\Delta r(t_i)=\|r(t_i)-r(t_{i-1})\|$

و t_i^* نقطه ی دلخواه در فاصله ی $[t_{i-1},t_i]$ است.

تعریف: اگر $\lim\limits_{\|p\|\to 0} s(p,f,r)$ موجود و متناهی باشد مقدار حد را انتگرال f روی C نامیده و با علامت $\int_C f.ds$ نشان می دهیم.

قضیه: اگر f روی C پیوسته باشد، آن گاه انتگرال پذیر است. برای محاسبه ی انتگرال نیز با شرط پیوسته بودن $r'(t)$ فرمول ساده ی

$$\int_C f.ds = \int_a^b f\left(r(t)\right).\left|r'(t)\right|dt$$

را خواهیم داشت.

اثبات : فرض کنیم $r(t)=\left(x(t),y(t),z(t)\right)$

$$\sum f\left(r(t_i^*)\right)\|\Delta r_i(t)\| = \sum f\left(r(t_i^*)\right)\|\ r(t_i)-r(t_{i-۱})\ \|$$
$$= \sum f\ \left(r(t_i^*)\right)\left((x_{t_i}-x_{t_{i-۱}})^{۲}+(y_{t_i}-y_{t_{i-۱}})^{۲}+(z_{(t_i)}-z_{t_{i-۱}})^{۲}\right)^{\frac{۱}{۲}}$$

طبق قضیه مقدار میانگین داریم :

$$= \sum f\left(r(t_i^*)\right)\left[(x'_{(t_{i۱})})^{۲}+(y'_{(t_{i۲})})^{۲}+(z'_{(t_{i۳})})^{۲}\right]^{\frac{۱}{۲}}$$

و با حد گیری داریم.

$$\lim_{\|P\|\to ۰}\sum f\ \left(r(t_i^*)\right)\ \left|r'(t_{i۱})\right|.\Delta t = \int_a^b f(r(t).\left|r'(t)\right|dt\ .$$

مثال: فرض کنید C منحنی $r(t)=\left(\cos t,\sin t,t\right)$ $\left(۰\le t\le ۲\pi\right)$ و $f=\left(x,y,z\right)=xy+z$ اسـت.

مطلوبست محاسبه ی $\int_C f.ds$.

حل: داریم

$$r'(t)=\left(-\sin t,\cos t,۱\right)$$
$$\Rightarrow\quad \left|r'(t)\right|=\sqrt{۲}$$

و لذا

$$\int_C f.ds = \int_۰^{۲\pi}\left(\cos t\sin t+t\right)\sqrt{۲}\ dt = \int_۰^{۲\pi}\left(\frac{۱}{۲}\sin ۲t+t\right)\sqrt{۲}\,dt$$
$$= \sqrt{۲}\left(\frac{-۱}{۴}\cos ۲t+\frac{۱}{۲}t^{۲}\Big]_۰^{۲\pi}\right)$$

خواص انتگرال منحنی الخط: فرض کنید f و g توابع پیوسته و $C_۱$ و $C_۲$ منحنی هـای همـوار باشند.

$$\int_{C_1} (f \pm g)\, ds = \int_{C_1} f\, ds \pm \int_{C_1} g\, ds \qquad (1$$

$$\left| \int_{C_1} f \,.\, ds \right| \leq \int_{C_1} |f|\, ds \qquad (2$$

۳) اگر برای هر X روی C_1 ، $f(X) \leq g(X)$ ، آنگاه $\int_{C_1} f \,.\, ds \leq \int_{C_1} g \,.\, ds$

$$\int_{-C_1} f \,.\, ds = -\int_{C_1} f \,.\, ds \qquad (4$$

که در آن $-C_1$ همان منحنی C_1 است که در جهت عکس یعنی از $r(b)$ به $r(a)$ طی شده است.

۵) $\int_{C_1} ds = C_1$ طول قوس

۶) L طول منحنی C_1 است. $\int_{C_1} f \,.\, ds = f(X_0).L$

۷) اگر $C = C_1 \cup C_2$ ، آنگاه، $\int_{C} f \,.\, ds = \int_{C_1} f \,.\, ds + \int_{C_2} f \,.\, ds$

با استفاده از خاصیت (۷) می توان در صورتی که منحنی C در تعداد متناهی نقطه هموار نباشد آن گاه C را به صورت اجتماع تعداد متناهی منحنی هموار نوشته و سپس انتگرال را حساب کرد.

مثلاً برای محاسبه ی انتگرال روی یک مربع و یا یک مثلث یا به طور کلی منحنی که از تعداد متناهی خط شکسته تشکیل می شود.

کاربرد انتگرال منحنی الخط: اگر تابع f مشخص کننده ی چگالی ماده ای در هر نقطه از یک سیم باشد (به عنوان یک منحنی) باشد آن گاه انتگرال $\int_{C} f.ds$ کل ماده ی موجود در سیم را محاسبه می کند.

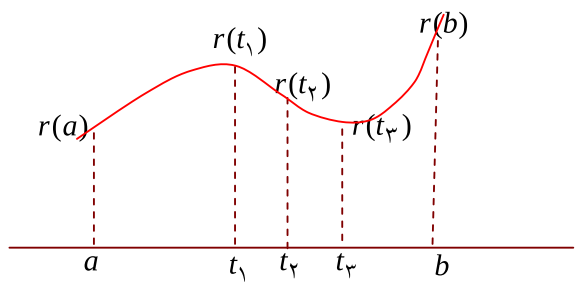
- اگر C مشخص کننده مرز یک ناحیه و f مشخص کننده ارتفاع حصار در هر نقطه از C باشد آنگاه $\int_C f.ds$ مساحت حصار را محاسبه می کند.

- **انتگرال میدان برداری F روی منحنی C**

انتگرال یک میدان برداری روی منحنی (محاسبه کار انجام شده توسط میدان F روی منحنی C).

می دانیم کار انجام شده توسط نیروی ثابت F برای حرکت یک جسم از نقطه P به نقطه Q توسط $W = F.d$ که در آن d طول پاره خط PQ است محاسبه می شود.

حال اگر $F : D \subseteq R^n \to R^n$ یک میدان برداری باشد و C یک منحنی که در D جای دارد. برای محاسبه کار انجام شده توسط F روی C به صورت زیر عمل می کنیم.



$$P = \{t_0 = a < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b\}$$

$$S(F,P,r) = \sum_{i=1}^{n} F(r(t_i^*)) \cdot (r(t_i) - r(t_{i-1}))$$

اگر $\lim_{\|P\| \to 0} S(F,P,r)$ موجود و متناهی باشد آن گاه مقدار حد را انتگرال میدان F روی منحنی C نامیده و با انتگرال $\int_C F.dr$ نشان می دهیم.

قضیه : اگر میدان F روی C پیوسته باشد آن گاه F روی C انتگرال پذیراست.

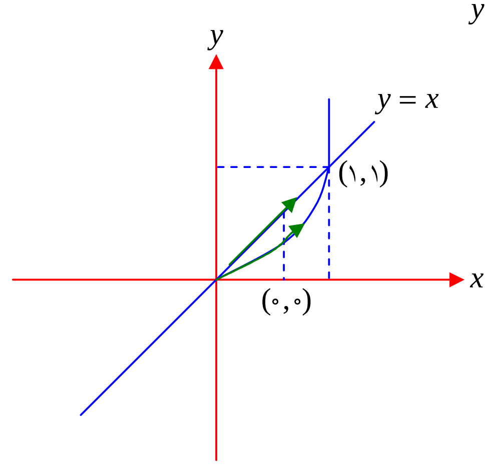
قضیه : اگر C یک منحنی هموار و F روی C پیوسته باشد آن گاه

$$\int_C F\,.dr = \int_a^b F\left(r(t)\right).\,r'(t)\,dt \quad .$$

مثال: فرض کنید $F(x,y)=\left(x^{۲}+y\,,xy\right)$ مطلوبست محاسبه ی کار انجام شده توسط میدان F بین دو نقطه ی $(۰,۰)$ و $(۱,۱)$

الف) روی مسیر $y=x$

ب) روی مسیر $y=x^{۲}$



روی مسیر الف) $\qquad C: y=x$

$$r(t)=(t,t) \ ، \quad t\in[۰,۱]$$

$$r'(t)=(۱,۱)$$

$$W=\int_{C_۱} F\,.dr=\int_۰^۱ F(t,t).(۱,۱)\,dt \to W=\int_۰^۱ (t^{۲}+t,t^{۲})\,.\,(۱,۱)\,dt$$

$$W=\int_۰^۱ (۲t^{۲}+t)\,dt=\frac{۲}{۳}t^{۳}+\frac{۱}{۲}t^{۲}\Big]_۰^۱=\frac{۲}{۳}+\frac{۱}{۲}$$

ب) $\qquad t\in[۰,۱] \qquad r(t)=(t,t^{۲}) \quad \to \quad r'(t)=(۱,۲t)$

$$W=\int_{C_۲} F\,.dr=\int_۰^۱ F(t,t^{۲})\,.\,(۱,۲t)\,dt=\int_۰^۱ (t^{۲}+t^{۲},t^{۳})\,.\,(۱,۲t)\,dt$$

$$W=\int_{0}^{1}(2t+2t^{4})\,dt=\left[2\frac{t^{3}}{3}+\frac{2}{5}t^{5}\right]_{0}^{1}=\frac{2}{3}+\frac{2}{5}$$

همانطور که می بینیم کار انجام شده روی دو مسیر متفاوت یکسان نمی باشد، لذا نتیجه می گیریم کار انجام شده توسط میدان F بین دو نقطه به مسیر طی شده بستگی دارد. در قسمت های آینده شرایطی را معرفی خواهیم کرد که تحت آن شرایط کار انجام شده به مسیر بستگی ندارد.

$$F:R^{3}\to R^{3}$$

$$F(x,y,z)=(M(x,y,z),N(x,y,z),P(x,y,z))$$

$$C:r(t)=(x(t),y(t),z(t))$$

$$r'(t)=(x'(t),y'(t),z'(t))$$

$$F(r(t))\,.\,r'(t)\,.\,dt=(M(r(t)),N(r(t)),P(r(t)))\,.(x'(t)dt\,,\underbrace{y'(t)dt}_{dy}\,,\underbrace{z'(t)dt}_{dz})$$

$$\Rightarrow\int_{C}F.dr=\int_{C}Mdx+Ndy+Pdz$$

$$if\quad F:R^{2}\to R^{2}\qquad\Rightarrow\qquad\int_{C}F.dr=\int_{C}Mdx+Ndy$$

مثال: انتگرال

$$I=\oint_{C}\frac{xdy-ydx}{x^{2}+y^{2}}$$

که در آن C دایره ای به مرکز مبدأ و شعاع a می باشد را محاسبه کنید.

حل: داریم

$$C:r(t)=(a\cos t,a\sin t)\ ,\ 0\le t\le 2\pi\quad\Rightarrow$$

$$r'(t)=(-a\sin t\ ,\ a\cos t)$$

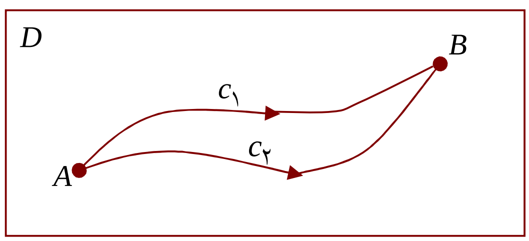
$$I=\int_{0}^{2\pi}\frac{a^{2}\sin^{2}t+a^{2}\cos^{2}t}{a^{2}\sin^{2}t+a^{2}\cos^{2}t}\ dt=\int_{0}^{2\pi}dt=2\pi$$

قضیه (قضیه اساسی حسابان) : فرض کنید C یک منحنی هموار در ناحیه ی D است و همچنین میدان F روی D از مرتبه ی C^1 است. اگر F یک میدان گرادیان با تابع پتانسیل f باشد، آنگاه :

$$\int_C F.dr = f(r(b)) - f(r(a))$$

نتیجه : اگر $F : D \subseteq R^3 \to R^3$ یک میدان برداری با تابع پتانسیل f باشد به طوری که مشتقات جزئی F روی D پیوسته اند، آنگاه کار انجام شده توسط F بین دو نقطه A و B در D به مسیر طی شده بین A و B در D بستگی ندارد، و داریم :

$$W = f(B) - f(A)$$



در این جا دو سوال مطرح می شود.

۱- چگونه تشخیص دهیم یک میدان گرادیان یا یک میدان پایدار است؟

۲- چگونه تابع پتانسیل F را محاسبه کنیم؟

تعریف: اگر $F(x,y,z) = P(x,y,z)\,i + Q(x,y,z)\,j + R(x,y,z)\,k$ یک میدان برداری روی R^3 باشد به طوری که مشتقات جزئی P و Q و R موجود باشند، آنگاه کرل میدان F میدان برداری تعریف شده به صورت

$$curl\,F = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)i + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)j + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)k \quad .$$

است.

عملگر مشتق دلتا (∇) را به صورت

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k$$

معرفی می کنیم.

$$curl\, F = \nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \quad .$$

قضیه: اگر $F : R^{۳} \to R^{۳}$ یک میدان برداری باشد که مؤلفه های آن دارای مشتقات جزئی پیوسته باشند و $curl\ F = ۰$ ، آنگاه F یک میدان برداری پایدار است.

نتیجه: اگر $F : R^{۲} \to R^{۲}$ و $F(x, y) = P(x, y) i + Q(x, y) j$ به طوری که P و Q دارای مشتقات جزئی پیوسته باشند و $\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = ۰$ ، آنگاه F یک میدان پایدار است.

تعریف: اگر $F(x, y, z) = P(x, y, z) i + Q(x, y, z) j + R(x, y, z) k$ یک میدان برداری روی $R^{۳}$ باشد به طوری که $\frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial P}{\partial x}$ و $\frac{\partial R}{\partial z}$ موجود باشند آنگاه دیورژانس F به صورت

$$div\ F = \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \quad .$$

تعریف می شود.

با توجه به عملگر دلتا داریم:

$$div\ F = \nabla .\, F$$

قضیه: اگر $F(x, y, z) = P(x, y, z) i + Q(x, y, z) j + R(x, y, z) k$ یک میدان برداری روی $R^{۳}$ به طوری که P و Q و R دارای مشتقات جزئی مرتبه دوم پیوسته می باشند، آنگاه

$$div(curl\, F) = ۰ \quad .$$

مثال: (مسأله ی ۲۳۸) انتگرال

$$\int_{\gamma} \left(۳x^۲y+y^۳\right)dx+\left(x^۳+۳xy^۲\right)dy$$

را محاسبه کنید.

که در آن γ قسمتی از خم $y=xe^{x-۱}$ است که نقطه $(۰,۰)$ را به $(۱,۱)$ وصل می کند.

حل: داریم $M=۳x^۲y+y^۳ \quad , \quad N=x^۳+۳xy^۲$

چون $\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial M}{\partial y}$ است پس میدان یک میدان پایدار است.

برای محاسبه ی تابع پتانسیل از تعریف استفاده می کنیم.

$$F=\nabla f \quad \Rightarrow \quad (M,N)=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} M=\dfrac{\partial f}{\partial x} & \Rightarrow f(x,y)=\int M\,dx+g(y) \\ N=\dfrac{\partial f}{\partial y} \end{cases}$$

برای محاسبه ی g از برابری $N=\frac{\partial f}{\partial y}$ استفاده می کنیم.

$$M=\frac{\partial f}{\partial x}=۳x^۲y+y^۳ \quad \Rightarrow \quad f=\int\left(۳x^۲y+y^۳\right)dx+g(y)=x^۳y+y^۳x+g(y)$$

$$N=\frac{\partial f}{\partial y}=x^۳+۳y^۲x+g'(y)=x^۳+۳xy^۳ \quad \Rightarrow \quad g'(y)\Rightarrow g(y)=C$$

$$f(x,y)=x^۳+y^۳x+C$$

$$\int_C F.dr=f(۱,۱)-f(۰,۰)=۲$$

روش ساده تر برای محاسبه ی تابع پتانسیل :

بین M و N تابعی که دارای بیشترین جملات (نسبت به جمع و متغیرهای ظاهر شده) است را انتخاب می کنیم از آن تابع نسبت به متغیر نظیر انتگرال می گیریم و بررسی می کنیم برای این که مشتق آن نسبت به سایر متغیرها، برابر مؤلفه های نظیر باشد چه چند جمله ای باید اضافه شود.

$$M = 3x^2 y + y^3$$

$$N = x^3 + 3xy^2$$

$$f = \int N\,dy = x^3 y + xy^3$$

از تابع f نسبت به x مشتق می گیریم

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 y + y^3 = M$$

نیازی به اضافه کردن جملاتی غیر از عدد ثابت نمی باشد پس

$$.\ f(x, y) = 3x^2 y + y^3 + C$$

مثال: نشان دهید میدان F تعریف شده به صورت $F(x, y, z) = \left(yze^{xy}, xze^{xy}, e^{xy} + 2z\right)$ یک میدان گرادیان است و تابع پتانسیل Fرا بدست آورید.

حل: $M\ (x, y, z) = y\,z\,e^{xy}$, $N(x, y, z) = x\,z\,e^{xy}$ و $P(x, y, z) = e^{xy} + 2z$.

P را انتخاب می کنیم و

$$f = \int P\,d\,z = \int (e^{xy} + 2z)\,d\,z = z\,e^{xy} + z^2\ .$$

همچنین داریم:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y\,z\,e^{xy} = M$$

و

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x\,z\,e^{xy} = N\ .$$

بنابراین نیازی به اضافه کردن جملات جدید نمی باشد پس تابع پتانسیل F به صورت $z\,e^{xy} + z^2 + C$ است.

مثـال: فـرض کنیـد C فـصل مـشترک کـره ی $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۱$ و اسـتوانه $y = \sin x$ اسـت و $F(x,y,z) = \left(۲xe^{x^۲+y^۲}, ۲ye^{x^۲+y^۲}, \cos ze^{\sin z}\right)$ مطلوبست محاسبه ی $\int_c F.dr$.

توجه داشته باشید که C نقطه ی $A(۰,۰,۱)$ را به نقطه ی $B(۰,۰,-۱)$ وصل می کند.

حل :

$$M = ۲xe^{x^۲+y^۲} \quad \text{و} \quad N = ۲ye^{x^۲+y^۲} \quad \text{و} \quad P = \cos ze^{\sin z} \ .$$

داریم:

$$curLF = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ ۲xe^{x^۲+y^۲} & ۲ye^{x^۲+y^۲} & \cos ze^{\sin z} \end{vmatrix} = \left(۰,۰,۴xye^{x^۲+y^۲} - ۴xye^{x^۲+y^۲}\right) = (۰,۰,۰)$$

پس میدان F یک میدان پایدار است. برای محاسبه تابع پتانسیل F به صورت زیر عمل می کنیم.

$$f = \int M\,dx = \int ۲xe^{x^۲+y^۲}dx = e^{x^۲+y^۲}$$

و $$\frac{\partial f}{\partial y} = ۲ye^{x^۲+y^۲}dx = N$$

و $$\frac{\partial f}{\partial z} = ۰ \neq P \ .$$

لازم است جمله $e^{\sin z}$ را اضافه کنیم تا $\frac{\partial f}{\partial z} = P$ برقرار گردد.

پس $f(x,y,z) = e^{x^۲+y^۲} + e^{\sin z} + C$ تابع پتانسیل میدان F اسـت. طبـق قـضیه اساسـی حـسابان، مقدار انتگرال برابر است با

$$f(۰,۰,-۱) - f(۰,۰,۱) = ۱ + e^{-\sin ۱} - ۱e^{\sin ۱} \ .$$

مثال) فرض کنید $$F(x,y) = \left(\frac{-y}{x^۲+y^۲}, \frac{x}{x^۲+y^۲}\right)$$

الف) $curlF$ را محاسبه کنید.

ب) $\oint_C f.dr$ را حساب کنید که در آن C دایره ی واحد است.

پ) چه نتیجه ای می گیرید:

الف) $$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{-x^{۲}-y^{۲}+۲y^{۲}}{(x^{۲}+y^{۲})^{۲}}-\frac{x^{۲}+y^{۲}-۲x^{۲}}{(x^{۲}+y^{۲})^{۲}}=۰$$

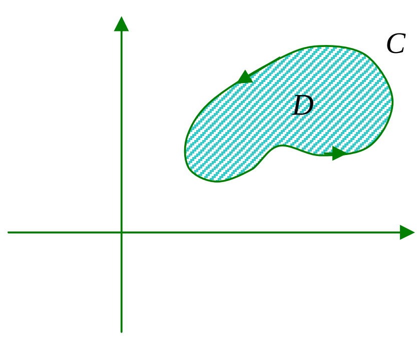
ب) C دایره ی واحد است پس:
$$C:r(t)=(\cos t,\sin t)\quad t\in[۰,۲\pi]$$

$$\oint F.dr=\int_C m\,dx+N\,dy=\int_{۰}^{۲\pi}\frac{(-\sin t)(-\sin t)\,dt+(\cos t)(\cos t)\,dt}{\cos^{۲}t+\sin^{۲}t}=\int_{۰}^{۲\pi}dt=۲\pi$$

پ) نتیجه می گیریم برای گرادیان بودن میدان شرط $cur\,LF=۰$ شرط کافی نمی باشد و در این مسأله چون هر ناحیه D که شامل دایره ی واحد است را در نظر بگیریم مبدأ را نیز در بردارد. و میدان F روی این ناحیه از مرتبه ی $C^{۲}$ نمی باشد.

قضیه گرین

قضیه گرین رابطه ی بین انتگرال منحنی الخط میدان برداری F روی مرز بسته C و ناحیه D محدود به مرز C را به صورت زیر بیان می کند. در اینجا F یک میدان دو بعدی است.



قضیه گرین: فرض کنید C یک منحنی ساده ی، بسته قطعه ای هموار در $R^{۲}$ باشد همچنین D یک ناحیه محدود به مرز C باشد اگر توابع دو متغیره ی P و Q دارای مشتقات جزئی پیوسته روی یک ناحیه ی باز شامل D باشد آن گاه:

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy \quad .$$

اگر

$$F = P(x,y)\,i + Q(x,y)\,j$$
$$\int_C F.dr = \iint_D curlf\,.dA$$

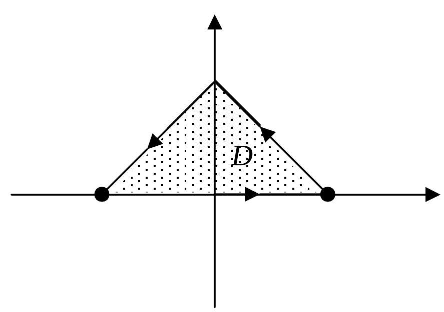
نکته : منحنی C می تواند یک منحنی قطعه ای هموار باشد یعنی اجتماع تعداد متناهی از منحنی های هموار باشد.

مثال: فرض کنید C مثلثی به رئوس $(-۱,۰)$، $(۱,۰)$، $(۰,۱)$باشد و :

$$F(x,y) = (۲y + e^{x^{۲}} ,\ x + e^{y^{۲}} \sin y)$$

مطلوبست محاسبه ی $\oint_c F.dr$

حل :



$$P(x,y) = ۲y + e^{x^{۲}}$$

$$Q(x,y) = x + e^{y^{۲}} \sin y$$

$$\oint_C F.dr = \iint (۱-۲)dx\,dy = -\iint dx\,dy = \frac{-۱}{۲}(۲\times۱) = -۱$$

مثال) به کمک قضیه گرین انتگرال

$$I = \oint_C \frac{xy^2}{1+x^2}\, dx + y\ln(1+x^2)\; dy$$

را محاسبه کنید.

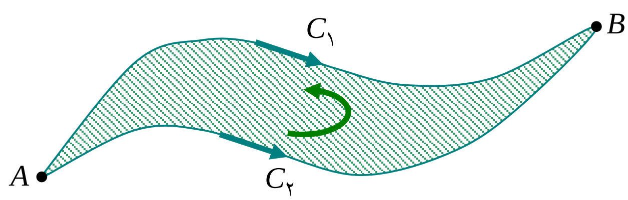
که در آن C دایره ی $x^2+y^2+2y=0$ است که در جهت مثبت پیموده شده است.

حل:

$$P = \frac{xy^2}{1+x^2} \quad , \quad Q = y\ln(1+x^2)$$

$$\oint_C \frac{xy^2}{1+x^2}\, dx + y\ln(1+x^2)\; dy = \iint_D \left(\frac{2xy}{1+x^2} - \frac{2xy}{1+x^2}\right) dx\, dy = 0$$

مثال: با استفاده از قضیه گرین ثابت کنید اگر F یک میدان گرادیان با تابع پتانسیل f باشد که f از مرتبه ی C^2 است آن گاه کار انجام شده توسط F بین دو نقطه به مسیر طی شده بین دو نقطه بستگی ندارد.



حل:

قرار می دهیم $C = C_2 \cup (-C_1)$ ، قضیه گرین را برای منحنی C به کار می بریم.

$$\oint_C F.dr = \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right)\, dx\, dy$$

چون

$$F = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

پس

$$Q=\frac{\partial f}{\partial y} \qquad , \qquad P=\frac{\partial f}{\partial x}$$

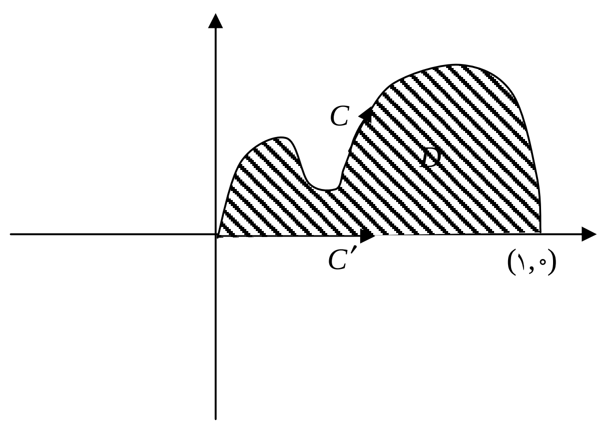
در نتیجه

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}$$
$$\frac{\partial^{2} f}{\partial x \partial y}-\frac{\partial^{2} f}{\partial y \partial x}=0$$

و لذا

$$\oint_{C} F.dr=\iint_{D}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right) dA=0$$
$$\Rightarrow \int_{C_1} F.dr=\int_{C_2} F.dr$$

مثال: مطلوبست محاسبه ی $\oint_{C}(x^{2}+e^{y^{2}})\,dy-(e^{x^{2}}-2xy+y)\,dx$ روی منحنی C داده شده در شکل در صورتی که بدانیم مساحت D برابر ۵ است.



ایده ی این مثال این است که در برخی مواقع که یک منحنی پیچیده داریم بهتر است یک منحنی ساده تر (پاره خط واصل بین دونقطه ابتدا و انتهای منحنی) استفاده کنیم و در منحنی بسته حاصل از

قضیه گرین استفاده کنیم. این راه حل در صورتی مفید است که انتگرال دوگانه داده شده باشد یا به راحتی قابل محاسبه باشد.

در این مثال پاره خط واصل بین مبدأ و نقطه ی $(1,0)$ محور x ها می باشد.

$$C_1 = C' \bigcup (-C)$$

$$Q = x^2 + e^{y^2} \quad , \quad P = -e^{x^2} + 2xy - y$$

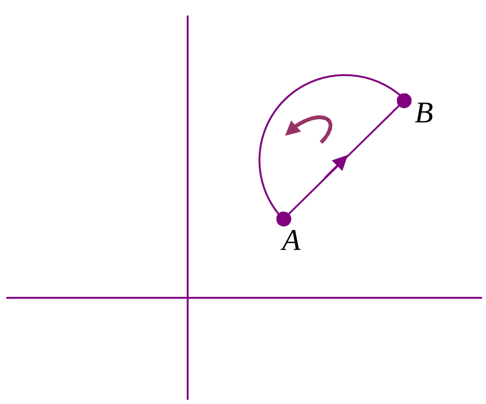
$$\oint_{C_1} (x^2 + e^{y^2})\, dy - (e^{x^2} - 2xy + y)\, dx$$
$$= \iint_D (2x - (2x - 1))\, dx\, dy = \iint_D dx\, dy = 5$$

اما

$$\oint_{C_1} F.dr = -\int_C F.dr + \int_{C'} F.dr$$
$$\Rightarrow \quad 5 = -\int_{C_1} F.dr + \int_0^1 (t^2+1)0 + e^{t^2}\, dt$$
$$-\int_{C_1} F.dr + \int_0^1 e^{t^2}\, dt = 5$$
$$\Rightarrow \quad \int_{C_1} F.dr = \int_0^1 e^{t^2}\, dt - 5 \quad .$$

در حالت کلی اگر دو نقطه ی A و B را داشته باشیم آن گاه معادله ی پاره خط واصل بین A و B به صورت زیر است.

$$\overrightarrow{r(t)} = tB + (1-t)A \quad , \quad t \in [0,1]$$



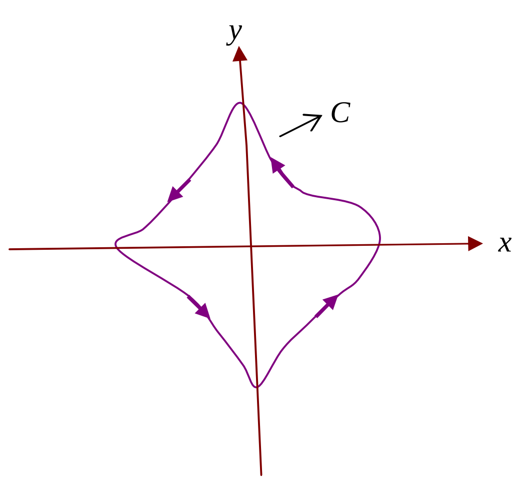
یکی از کاربردهای قضیه گرین استفاده از پاره خط واصل بین دو نقطه از منحنی و تبدیل منحنی به منحنی بسته است. حال این سؤال پیش می آید:

- اگر C یک منحنی ساده ی بسته باشد ولی میدان F در تعداد متناهی نقطه واقع بر C یا درون C از مرتبه ی $C^۱$ نباشد

به طور خلاصه اگر C یک منحنی ساده ی بسته باشد و میدان F در تعداد متناهی نقطه درون یا روی C از مرتبه ی $C^۱$ نباشد، در این صورت این نقاط را اگر درون C هستند با دایره هایی به مرکز آن ها جدا می‌کنیم به طوریکه این دوایر کاملاً درون C قرار گیرند و اگر این نقاط روی C هستند، با نیم دایره هایی درون C جدا کنیم. آن گاه با استفاده از قضیه گرین انتگرال روی منحنی خواسته شده برابر است با یک انتگرال دوگانه به علاوه مجموع انتگرال روی دایره ها و نیم دایره های حاصل. اگر در انتها، عبارت حاصل به شعاع دایره ها و نیم دایره ها وابسته بود، مجبوریم شعاع آن ها را به سمت صفر میل دهیم.

این روش در صورتی مفید است که انتگرال دوگانه حاصل صفر یا داده شده باشد.

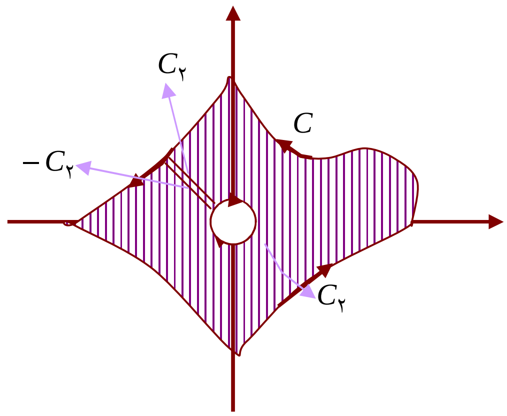
مثال: انتگرال $\oint_C \frac{x\,dy - y\,dx}{x^۲ + y^۲}$ را محاسبه کنید. که در آن C منحنی داده شده در شکل می باشد.



حل: میدان F به صورت

$$F(x,y) = \left(\frac{-y}{x^{۲}+y^{۲}}\ ,\ \frac{x}{x^{۲}+y^{۲}}\right)$$

است. F در مبدأ تعریف نشده است. لذا نقطه $(۰,۰)$ را توسط دایره ی $C_۱$ جدا می کنیم.



منحنی C' به صورت

$$C = C \cup C_۱ \cup (-C_۲) \cup (-C_۱)$$

در نظر می گیریم

با استفاده از قضیه گرین داریم

$$\oint_{C'} F.dr = ۰$$

و در نتیجه

$$۰ = \oint_{C} F.dr + \int_{C_۲} F.dr - \oint_{C_۱} F.dr - \int_{C_۲} F.dr$$

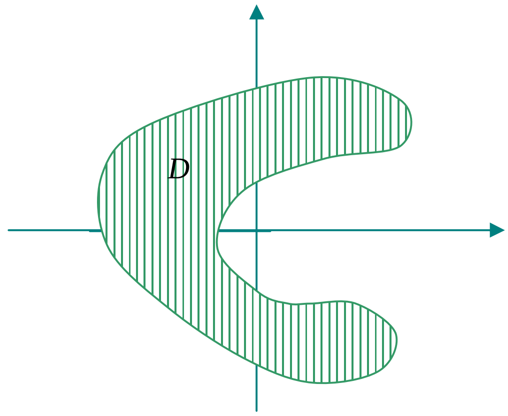
$$\int_{C} F.dr = \int_{C_۱} F.dr$$

$$\int_{C} F.dr = \int_{C_۱} F.dr = \int_{۰}^{۲\pi} \frac{a^{۲}\sin^{۲} tdt + a^{۲}\cos^{۲} tdt}{a^{۲}} = \int_{۰}^{۲\pi} dt = ۲\pi$$

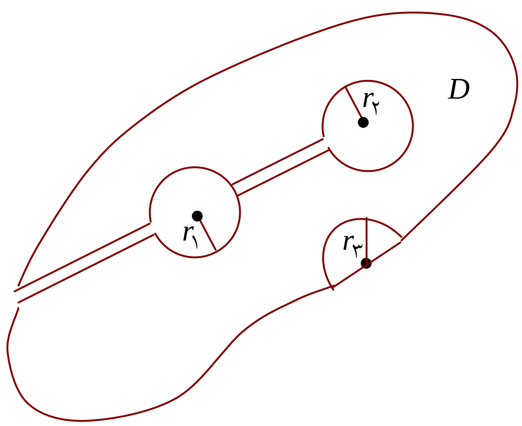
که در اینجا $C_۱ : r(t) = (a\cos t\ ,\ a\sin t)$ می باشد.

اگر ناحیه شامل مبدأ نباشد و مبدأ روی C نیز واقع نشود آنگاه

$$\int_C F.dr = 0$$



اگر میدان F در تعدادی متناهی نقطه روی مرز C یا درون C از مرتبه ی C^1 نباشد مطابق شکل عمل می کنیم.



در مثال قبل $$F(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

روی هر منحنی بسته که شامل مبدأ باشد مقدار انتگرال 2π است، ولی هر منحنی بسته که مبدأ روی یا درون آن نباشد مقدار انتگرال صفر است.

محاسبه ی مساحت ناحیه D با استفاده از قضیه گرین:

فرض کنیم D یک ناحیه ی بسته و کران دار در $R^۲$ محدود به منحنی قطعه ای هموار c باشد آن گاه با استفاده از قضیه گرین می توان مساحت D را حساب کرد

$$\oint_C F.dr = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy$$

اگر عبارت $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$ برابر با یک باشد آن گاه انتگرال دوگانه حاصل برابر مساحت D است.

۳ حالت در نظر می گیریم :

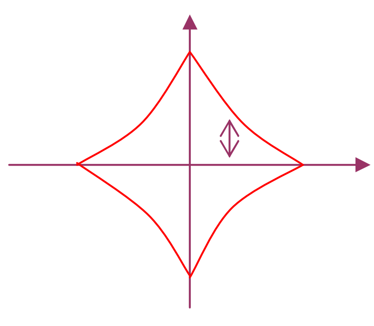
$$Q = x \quad , \quad P = ۰ \quad \Rightarrow \quad A(D) = \oint_C x\, dy \qquad (۱$$

$$Q = ۰ \quad , \quad P = -y \quad \Rightarrow \quad A(D) = \oint_C -y\, dx \qquad (۲$$

$$Q = x \quad , \quad P = -y \quad \Rightarrow \quad A(D) = \frac{۱}{۲} \oint_C x\, dy - y\, dx \qquad (۳$$

مثال: مساحت ناحیه محدود به منحنی $x^{\frac{۲}{۳}} + y^{\frac{۲}{۳}} = a^{\frac{۲}{۳}}$ ، $(a \rangle ۰)$ است را محاسبه کنید.

حل:



$$c : r(t) = (a\cos^۳ t, a\sin^۳ t) \qquad , \qquad t \in [۰, ۲\pi]$$

$$A(D) = \frac{۱}{۲}(۳a^۲)\int_۰^{۲\pi} (\cos^۴ t\sin^۲ t + \sin^۴ t\cos^۲ t)\, dt$$

$$A(D)=\frac{۳}{۲}a^{۲}\int_{۰}^{۲\pi}\sin^{۲}t\cos^{۲}t=\frac{۳}{۲}a^{۲}\int_{۰}^{۲\pi}\frac{۱}{۴}(\sin^{۲}۲t)\,dt=\frac{۳a^{۲}}{۸}\int_{۰}^{۲\pi}\frac{۱-\cos ۴t}{۴}\,dt$$

$$A(D)=(\frac{۳a^{۲}}{۱۶})(۲\pi)=\frac{۳a^{۲}\pi}{۸}$$

در بعضی از مسائل علی رغم اینکه C بسته است مجبوریم از روش مستقیم استفاده کنیم.

انتگرال سطح

سطوح پارامتری

می دانیم که یک خم مانند C در $R^{۳}$ را می توانیم توسط تابع برداری یک پارامتری $r(t)$ توصیف کنیم یعنی C توسط تابع

$$r(t)=(x(t),y(t),z(t) \quad , \quad t\in[a,b]$$

مشخص می شود.

مشابهاً می توانیم یک سطح مانند S را توسط تابع برداری $r(u,v)$ (v و u پارامتر می باشند) نمایش دهیم.

فرض کنیم

$$r(u,v)=x(u,v)i+y(u,v)\,j+z(u,v)k \qquad (۱)$$

یک تابع برداری تعریف شده روی ناحیه D در صفحه uv باشد. بنابراین x و y و z مؤلفه های تابع r می باشند که توابعی دو متغیره از متغیرهای u و v هستند.

اگر x و y و z توابع پیوسته باشند آنگاه مجموعه تمام نقاط $(x,y,z)\in R^{۳}$ که

$$x=x(u,v) \qquad و \qquad y=y(u,v) \qquad و \qquad z=z(u,v)$$

که در آن $(u,v)\in D$ ، سطح پارامتری S نامیده می شود.

معادلات

$$x = x(u,v) \quad \text{و} \quad y = y(u,v) \quad \text{و} \quad z = z(u,v)$$

را معادلات پارامتری سطح S می نامیم.

(رسم شکل)

دو گروه از خم های مفید روی سطح پارامتری S' وجود دارند یکی از آنها با قرار دادن $u = u_\circ$ که در آن $u_\circ$ عددی ثابت است و دیگری با قرار دادن $v = v_\circ$ که در آن $v_\circ$ یک عدد ثابت است حاصل می شود.

(رسم شکل)

فرض کنید $r(u_\circ, v_\circ)$ نقطه دلخواهی روی سطح پارامتری S' باشد. اگر قرار دهیم $u = u_\circ$، آنگاه $r(u_\circ, v)$ یک تابع برداری یک پارامتری بر اساس پارامتر خواهد بود. این تابع خم C_1 مطابق شکل را روی S' مشخص می کند. بردار مماس بر C_1 نقطه $r(u_\circ, v_\circ)$ توسط مشتق گیری از $r(u_\circ, v)$ نسبت به V حاصل می شود یعنی

$$r_v = \frac{\partial x}{\partial v}(u_\circ, v_\circ)\boldsymbol{i} + \frac{\partial y}{\partial v}(u_\circ, v_\circ)\,\boldsymbol{j} + \frac{\partial z}{\partial v}(u_\circ, v_\circ)\boldsymbol{k}$$

(رسم شکل)

مشابهاً اگر $v = v_\circ$ ، منحنی C_2 توصیف شده توسط $r(u, v_\circ)$ روی S' به دست می آید. بردار مماس بر C_2 در نقطه $r(u_\circ, v_\circ)$ به صورت

$$r_u = \frac{\partial x}{\partial u}(u_\circ, v_\circ)\boldsymbol{i} + \frac{\partial y}{\partial u}(u_\circ, v_\circ)\,\boldsymbol{j} + \frac{\partial z}{\partial u}(u_\circ, v_\circ)\boldsymbol{k}$$

تعریف: صفحه ای که شامل بردارهای $r_u(u_\circ, v_\circ)$ و $r_v(u_\circ, v_\circ)$ باشد صفحه مماس بر S' در نقطه $r(u_\circ, v_\circ)$ است. بردار نرمال این صفحه برابر $r_u \times r_v$ است.

بردار قائم سطح $\frac{\partial r}{\partial U} \times \frac{\partial r}{\partial V}$

تعریف: S یک سطح هموار است اگر برای هر نقطه روی این سطح داشته باشیم

$$\frac{\partial r}{\partial u}\times\frac{\partial r}{\partial v}\neq ۰$$

و پوسته باشد.

مثال: فرم پارامتری کره $x^۲+y^۲+z^۲=a^۲$ را بنویسید.

$$r(\varphi,\theta)=(a\sin\varphi\cos\theta, a\sin\varphi\sin\theta, a\cos\varphi)$$
$$(\varphi,\theta)\in[۰,\pi]\times[۰,۲\pi]=D$$

$$\frac{\partial r}{\partial\varphi}=(a\cos\varphi\cos\theta, a\cos\varphi\sin\theta, -a\sin\varphi)$$
$$\frac{\partial r}{\partial\theta}=(-a\sin\varphi\sin\theta, a\sin\varphi\cos\theta, ۰)$$
$$\frac{\partial r}{\partial\varphi}\times\frac{\partial r}{\partial\theta}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a\cos\varphi\cos\theta & a\cos\varphi\sin\theta & -a\sin\varphi \\ -a\sin\varphi\sin\theta & a\sin\varphi\cos\theta & ۰ \end{vmatrix}$$
$$\frac{\partial r}{\partial\varphi}\times\frac{\partial r}{\partial\theta}=(a^۲\sin^۲\varphi\cos\theta, a^۲\sin^۲\varphi\sin\theta, a^۲\sin\varphi\cos\varphi)$$
$$\left|\frac{\partial r}{\partial\varphi}\times\frac{\partial r}{\partial\theta}\right|=\sqrt{a^۴\sin^۴\varphi+a^۴\sin^۲\varphi\cos^۲\varphi}=a^۲\sin\varphi$$

تعریف: سطح S یک سطح قطعه ای هموار نامیده می شود اگر اجتماع تعداد متناهی سطح هموار باشد.

* **نکته:** اگر S توسط $z=g(x,y)$ داده شده باشد آنگاه فرم پارامتری S به صورت

$$r(x,y)=(x,y,g(x,y))$$

است.

$$\frac{\partial r}{\partial x}=(۱,۰,\frac{\partial g}{\partial x}) \qquad , \qquad \frac{\partial r}{\partial y}=(۰,۱,\frac{\partial g}{\partial y})$$

$$\frac{\partial r}{\partial x}\times\frac{\partial r}{\partial y}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ ۱ & ۰ & \frac{\partial g}{\partial x} \\ ۰ & ۱ & \frac{\partial g}{\partial y}\end{vmatrix}=(-\frac{\partial g}{\partial x},\frac{\partial g}{\partial y},۱)$$

اگر S یک سطح هموار تعریف شده توسط تابع برداری $r(u,v)$ باشد.

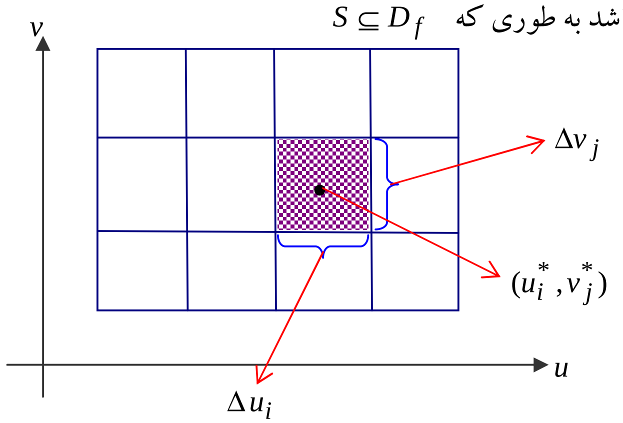
بردار $n=\dfrac{\frac{\partial r}{\partial u}\times\frac{\partial r}{\partial v}}{\left|\frac{\partial r}{\partial u}\times\frac{\partial r}{\partial v}\right|}$ را بردار یکانی قائم سطح می نامند.

محاسبه ی انتگرال تابع f روی سطح S :

فرض کنیم S یک سطح هموار تعریف شده توسط تابع

$$r(u,v)=\big(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\big) \quad \text{و} \quad (u,v)\in D.$$

تابع $f:D_f\subseteq R^{۳}\to R$ تعریف شده باشد به طوری که $S\subseteq D_f$



(رسم شکل)

فرض کنیم D یک مستطیل باشد و P یک افراز برای D باشد

$$P = p_1 \times p_2$$
$$P_1 = \{u_0 = a < u_1 < \ldots < u_n = b\}$$
$$P_2 = \{v_0 = c < v_1 < \ldots < v_n = d\}$$
$$I_{ij} = [u_{i-1}, u_i] \times [v_{j-1}, v_j]$$
$$S(P, f, r) = \sum_{i,j=1}^{n,m} f\left(r(u_i^*, v_i^*)\right) . \left| \frac{\partial r}{\partial U}(u_{i-1}, v_{j-1}) \times \frac{\partial r}{\partial V}(u_{i-1}, v_{j-1}) \right|$$

اگـر $\lim\limits_{\|P\| \to 0} S(P, f, r)$ موجـود و متنـاهی باشـد، آن گـاه مقـدار حـد را انتگـرال تـابع f روی

رویه ی S نامیده و با $\iint\limits_S f . d\partial$ یا $\iint\limits_S f . dS$ نشان می دهیم.

قضیه: اگر S یک سطح هموار باشد به طوری که $\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}$ یک تابع پیوسته باشد و همچنین تابع f

روی S پیوسته باشد در این صورت

$$\iint\limits_S f . d\partial = \iint\limits_D f\left(r(u, v)\right) . \left| \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right| du\, dv$$

مثال: انتگرال

$$\iint\limits_S z . d\delta$$

که در آن S قسمتی از مخروط $z^2 = x^2 + y^2$ واقع در نیم صفحه ی بالایی xy و زیر صفحه $z = 1$

است را محاسبه کنید.

$$S : z = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad 0 \le z \le 1$$

$x = z\cos\theta$ و $y = z\sin\theta$.

$$S : r(z,\theta) = (z\cos\theta, z\sin\theta, z) \ , \ (z,\theta) \in [۰,۱]\times[۰,۲\pi]$$

$$\frac{\partial r}{\partial z} = (\cos\theta, \sin\theta, ۱) \ , \ \frac{\partial r}{\partial z} = (-z\sin\theta, z\cos\theta, ۰)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial r}{\partial z} \times \frac{\partial r}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos\theta & \sin\theta & ۱ \\ -z\sin\theta & z\cos\theta & ۰ \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \left| \frac{\partial r}{\partial z} \times \frac{\partial r}{\partial \theta} \right| = z\sqrt{۲}$$

$$\iint\limits_S z \,.\, d\partial = \int_۰^۱ \int_۰^{۲\pi} z\sqrt{۲} \,.\, z\,.dz\,d\theta = \sqrt{۲}\int_۰^۱ z^۲ dz \,.\, \int_۰^{۲\pi} d\theta = \frac{\sqrt{۲}}{۳}(۲\pi)$$

خواص انتگرال سطح: فرض کنید f و g توابع انتگرال پذیر روی سطح S باشند آن گاه

۱) $$\iint\limits_S (f \pm g)\, d\partial = \iint\limits_S f\,.d\partial \pm \iint\limits_S g\, d\partial$$

۲) خاصیت صعودی بودن انتگرال

$$\forall (u,v) \in D : f\big(r(u,v)\big) \le g\big(r(u,v)\big) \ \Rightarrow \ \iint\limits_S f\,.d\partial \le \iint\limits_S g\,.d\partial$$

۳) $$\iint\limits_S d\partial = S \qquad \text{مساحت سطح}$$

۴) اگر $S = S_۱ U\, S_۲ U \ldots US_n$ که هر یک از S_iها هموار بوده و حداکثر در مرزها مشترک باشند آن گاه

$$\iint\limits_S f\,.d\delta = \iint\limits_{S_۱} f\,.\,d\delta + \ldots + \iint\limits_{S_n} f\,.\,d\delta$$

مثال: مساحت کره ی $x^۲ + y^۲ + z^۲ = a^۲$ را محاسبه کنید:

$$\text{مساحت } S = \iint\limits_S d\delta = \int_۰^{۲\pi} \int_۰^{\pi} a^۲ \sin\varphi\, d\varphi\, d\theta = ۴\pi a^۲$$

روش دوم: چون کره متقارن است:

$$\text{مساحت}\ \ S = ۲\int_{۰}^{۲\pi}\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} a^{۲}\sin\varphi\, d\varphi\, d\theta = ۴\pi a^{۲}(-\cos\varphi)\Big|_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} = ۴\pi a^{۲}$$

یکی از کاربردهای عمده ی انتگرال سطح عبارت است از:

اگر f مشخص کننده ی چگالی ماده ای در هر نقطه از رویه ی S باشد $\iint_S f\,.d\delta$ مقدار کل ماده را در سطح مشخص می کند.

- می دانیم بارهای الکتریکی روی سطح خارجی اجسام توزیع می شوند. اگر f مشخص کننده بار الکتریکی در هر نقطه S باشد آنگاه $\iint_S f\,.d\delta$ کل بار الکتریکی روی S را محاسبه می کند.

نکته: اگر رویه ی S توسط تابع $z = g(x,y)$ بیان شود آن گاه می توان فرم پارامتری S را به صورت

$$S : r(x,y) = \big(x, y, g(x,y)\big)$$

در نظر گرفت.

$$\frac{\partial r}{\partial x} = (۱,۰,\frac{\partial g}{\partial x}) \qquad , \qquad \frac{\partial r}{\partial y} = (۰,۱,\frac{\partial g}{\partial y})$$

$$(\frac{\partial r}{\partial x}\times\frac{\partial r}{\partial y}) = (-\frac{\partial g}{\partial x},-\frac{\partial g}{\partial y},۱) \quad\Rightarrow\quad \left|\frac{\partial r}{\partial x}\times\frac{\partial r}{\partial y}\right| = \sqrt{(\frac{\partial g}{\partial x})^{۲} + (\frac{\partial g}{\partial y})^{۲} + ۱}$$

$$\iint_S f\,.d\delta = \iint_D f\big(x,y,g(x,y)\big)\sqrt{g_x^{۲} + g_y^{۲} + ۱}\ dx\,dy$$

مثال: انتگرال $\iint_S z^{۲}.d\,\partial$ را که در آن S قسمتی از مخروط $z = \sqrt{x^{۲} + y^{۲}}$ است که بالای صفحه xy و زیر صفحه $z = ۱$ قرار دارد، محاسبه کنید.

حل:

$$z=\sqrt{x^{۲}+y^{۲}} \quad , \quad ۰\leq t\leq ۱$$
$$g(x,y)=\sqrt{x^{۲}+y^{۲}} \quad , \quad D=\{(x,y): x^{۲}+y^{۲}\leq ۱\}$$
$$\sqrt{gx^{۲}+gy^{۲}+۱}=\sqrt{\frac{x^{۲}}{x^{۲}+y^{۲}}+\frac{y^{۲}}{x^{۲}+y^{۲}}+۱}=\sqrt{۲}$$

$$\iint_S z^{۲}.\, d\partial =$$

$$\iint_D (x^{۲}+y^{۲})\sqrt{۲}\, dx\, xy=\sqrt{۲}\int_{۰}^{۲\pi}\int_{۰}^{۱} r^{۲}.\, rd\, rd\,\theta$$
$$\int_{۰}^{۱} r^{۳}.\, dr.\int_{۰}^{۲\pi} d\theta=\frac{\pi}{۲}$$

مثال: مساحت قسمتی از هذلولی گون یک پارچه $\frac{x^{۲}}{۴}+\frac{y^{۲}}{۹}-z^{۲}=۱$ را بین صفحات $z=۰$ و $z=-۱$ محاسبه کنید.

$$z^{۲}=\frac{x^{۲}}{۴}+\frac{y^{۲}}{۹}-۱ \quad \Rightarrow \quad z=\sqrt{\frac{x^{۲}}{۴}+\frac{y^{۲}}{۹}-۱}=g(x,y)$$

حل: S را به صورت زیر پارامتری می کنیم.

$$r(x,y)=(x,y,g(x,y))$$
$$\text{مساحت}=\iint_D \sqrt{g_x^{۲}+g_y^{۲}+۱}\quad dx\,dy$$

سطح جهت دار:

تعریف: سطح یا رویه ی S را یک سطح جهت دار می نامیم در صورتی که بتوان برای این سطح داخل و خارج تعریف کنیم (در مورد سطح بسته) یا اینکه چپ و راست سطح را تعریف کنیم.

(رسم شکل)

مثال: نوار موبیوس یک سطح بی جهت است.

(رسم شکل)

اگر S یک سطح هموار پارامتری شده توسط $r(u,v)$ باشد آن گاه بردار یکانی قائم بر سطح S که به

صورت $$n=\frac{r_u \times r_v}{\|r_u \times r_v\|}$$

تعریف می شود. مشخص کننده جهت سطح S خواهد شد.

جهت بردار n را جهت مثبت سطح می نامیم و جهت خلاف n را جهت منحنی S تعریف می کنیم.

مثال: برای یک کره بردار گرادیان در هر نقطه جهت مثبت کره است.

برای یک صفحه جهت بردار نرمال صفحه، جهت مثبت است.

نکته: اگر سطح S توسط $z=g(x,y)$ داده شده باشد آن گاه

$$n=\frac{(-g_x,-g_y,۱)}{\sqrt{g_x^۲+g_y^۲+۱}}$$

محاسبه ی انتگرال میدان F روی سطح S :

فرض کنید S یک سطح هموار پارامتری شده توسط تابع برداری $r(u,v)$ باشد F یک میدان برداری باشد که روی سطح S پیوسته است آن گاه انتگرال F روی سطح S در جهت بردار یکانی n به صورت زیر نشان داده و تعریف می شود.

$$\iint_S F.n.d\delta=\iint_D F(r(u,v)).(r_u \times r_v)du\,dv$$

یکی از کاربردهای محاسبه ی انتگرال میدان روی سطح، محاسبه ی شار (فلوی) خارج شده از سطح در جهت بردار قائم بر S است.

بیش تر خواص انتگرال سطح در مورد توابع حقیقی برای میدان های برداری نیز برقرار است از جمله انتگرال میدان F روی یک سطح قطعه ای هموار برابر است با مجموع انتگرال روی سطوح هموار.

و دوم این که انتگرال در خلاف جهت n یا در جهت منفی سطح برابر است با منهای انتگرال در جهت n .

نکته : اگر سطح S توسط $z=g(x,y)$ داده شده باشد که $(x,y)\in D$.

$$\iint_S F.n.d\delta=\iint_D F(x,y,g(x,y)).(-g_x,-g_y,١)dx\,dy$$

مثال:

فرض کنید $F=i-y^٢j-zk$ و S قسمتی از رویه ی $z=xy$ است که بالای مربع $٠\le y\le ٢$ و $٠\le x\le ٣$ قرار دارد. مطلوبست محاسبه ی $\iint_S F.n.d\delta$

حل: $g(x,y)=xy$

$$\iint_S F.n.d\delta=\int_٠^٣\int_٠^٢\left(١,-y^٢,-xy\right)(-y,-x,١)dx\,dy$$

مثال : شار (فلوی) میدان $F(x,y,z)=xy\vec{i}+y\vec{j}+(١-z)\vec{k}$ از رویه ی S به معادله ی $z=١-x^٢-y^٢$ واقع در بالای صفحه ی x,y را محاسبه کنید.

حل : داریم

$$I=\iint_S F.n.d\delta=\iint_D\left(xy,y^٢,x^٢+y^٢\right).(٢x,٢y,١)dx\,dy$$

$$I=\iint_{D:x^٢+y^٢\le ١}\left(٢x^٢y+٣y^٣+x^٢+y^٢\right)dx\,dy=\iint_{\substack{D\\x^٢+y^٢\le١}}\left(x^٢+y^٢\right)(١+٢y)\,dx\,dy$$

$$I=\int_٠^{٢\pi}\int_٠^١ r^٢(١+٢r\sin\theta).r.dr\,d\theta\Rightarrow I=\int_٠^{٢\pi}\int_٠^١ r^٣dr\,d\theta+\int_٠^{٢\pi}\int_٠^١ ٢r^٤\sin\theta\,drd\,\theta$$

$$I=\frac{٢\pi}{٤}=\frac{\pi}{٢}$$

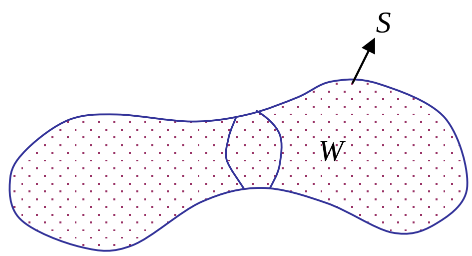
قضیه دیوژانس (قضیه گاوس) :

یادآوری: اگر $F(x,y,z)=\left(M(x,y,z),N(x,y,z),P(x,y,z)\right)$ آن گاه

$$divF=\nabla.F=\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z}$$

قضیه: فرض کنید $W\subseteq R^{۳}$ یک ناحیه با مرز S باشد به طوری که رویه ی S قطعه ای هموار و میدان F دارای مشتقات جزیی مرتبه اول پیوسته (از مرتبه $c^{۱}$) روی W و S باشد همچنین n بردار یکانی قائم بر S به سمت خارج است داریم:

$$\oiint_S F.n.d\delta=\iiint_W divF.dV$$



- اگر در انتگرال سطح، S یک سطح بسته بود بهتر است اول از قضیه دیوژانس استفاده کنیم.

مثال: فرض کنید $F(x,y,z)=(x,y,z)$ و C کره ی واحد باشد مطلوبست شار (فلوی) خارج شده توسط F از سطح S در راستای بردار قائم بر سطح

خارج شده از سطح یعنی در جهت مثبت (n) .

وارد شده به سطح یعنی در جهت منفی $(-n)$.

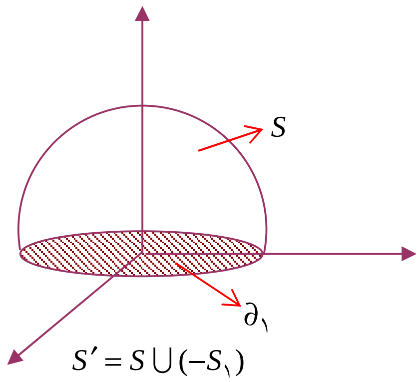
پاسخ:

$$\oiint_S F.n.d\delta=\iiint_{W=x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}\le ۱} divF\,dV=\iiint_W ۳.dV=(۳)(\frac{۴}{۳}\pi)=۴\pi$$

مثال: فرض کنید S سطح نیم کره ی بالایی کره ی واحد باشد و میدان F به صورت

$$F(x,y,z)=(e^{z^{۲}},\sin z^{۴},y^{۲}+x^{۲})$$

باشد.



مطلوبست محاسبه ی $\iint_S F.n.d\delta$.

حل:

$$\oint_{S'} F.n.d\delta = \iiint_W divF\ dV = \iiint_W dV =$$

$$\oint_{S'} F.n.d\delta = \int_S F.n.d\delta - \oint_{S_1} F.n.d\delta$$

بر

$$\iint_S F.n.d\delta = \iint_{S_1} F.n.d\delta$$

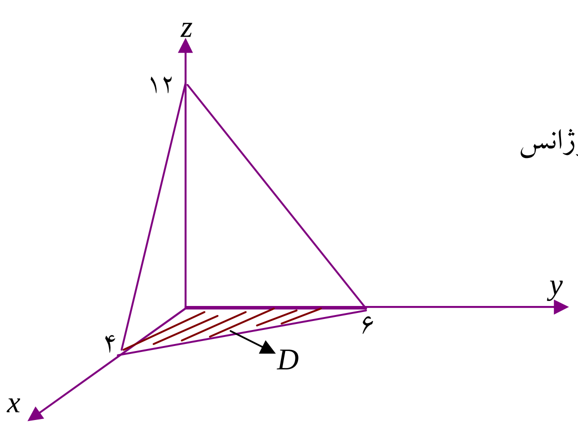
سطح $z=0$ است که (x,y) در دایره ی واحد تغییر می کند.

$$\iint_{S_1} F.n.d\delta = \iint_{x^2+y^2\le 1} (1,0,x^2+y^2)\ .\ (0,0,1)\,dx\,dy$$

$$= \iint_{x^2+y^2\le 1} (x^2+y^2)\ dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3 dr\,d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta\ .\ \int_0^1 r^3.\ dr = \frac{\pi}{2}$$

مثال: فرض کنید W یک ناحیه ی محدود به صفحات مختصات و صفحه ی $3x+2y+z=12$ باشد و $F(x,y,z)=(y^2x,3x,4y-x^2)$ مطلوبست محاسبه ی $\oiint_S F.n.d\delta$ که در آن S رویه مرز w است.



چون S یک سطح بسته است و شرایط قضیه ی دیوژانس برقرار است پس داریم:

$$\oiint_S F.n.d\delta = \iiint_w divF.dV$$

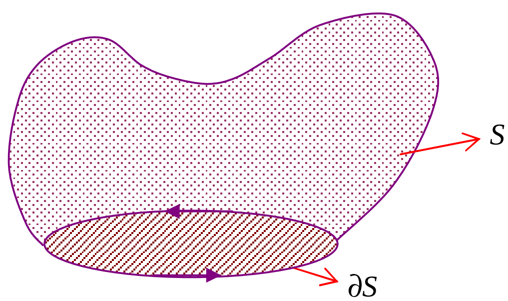
$$I=\oiint_{S} F.n.d\delta=\iiint_{w}(y^{۲}+۰+۰)\,dV=\iint_{D}\left(\int_{۰}^{۱۲-۳x-۲y} y^{۲}dz\right)dx\,dy$$

$$I=\iint_{D} y^{۲}(۱۲-۳x-۲y)\,dy\,dx=\int_{۰}^{۴}\int_{۰}^{۶-\frac{۳}{۲}x} y^{۲}(۱۲-۳x-۲y)\,dy\,dx$$

قضیه استوکس (تعمیم قضیه گرین در فضا) :

فرض کنید S یک سطح جهت دار قطعه ای هموار و مرز S که تا نماد ∂S نشان می دهیم یک منحنی قطعه ای هموار ساده باشد. اگر $F(x,y,z)$ یک میدان برداری باشد که مؤلفه های آن روی یک ناحیه شامل S و مرز آن از مرتبه ی $C^{۱}$ باشد (دارای مشتقات جزیی مرتبه ی اول پیوسته باشند) . آنگاه

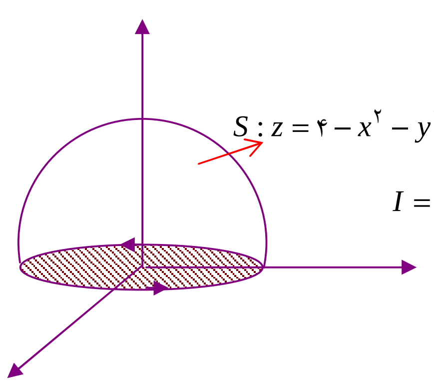
$$\oint_{\partial S} F.dr=\iint_{S} curlF.n.d\delta$$



(رسم شکل)

مثــــال: فــرض کنیــد $F(x,y,z)=(e^{z^{۲}},۴z-y,۸x\sin y)$ و S قــسمتی از ســهمی گــون $z=۴-x^{۲}-y^{۲}$ است که بالای صفحه ی xy قرار دارد مطلوبست محاسبه ی

$$\iint_{S} curlF.n.d\delta$$



$$I=\iint_{S} curlF.n.d\delta=\int F.dr$$

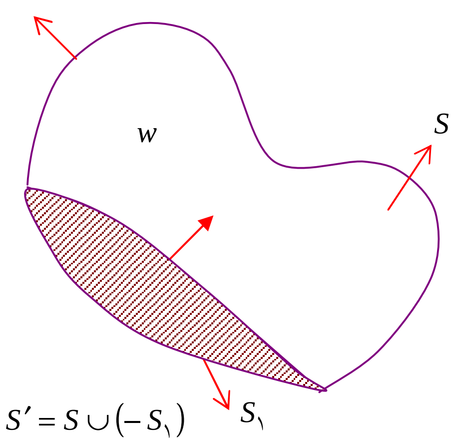
$$c:x^{۲}+y^{۲}=۴$$

$$c:(۲\cos\theta,۲\sin\theta,۰)\;,\;\theta\in[۰,۲\pi]$$

$$I=\int_{۰}^{۲\pi}\left[\left(۱,-۲\sin\theta,۸(۲\cos\theta)\sin(۲\sin\theta)\right)\right].\left(-۲\sin\theta,۲\cos\theta,۰\right)d\theta$$

$$I=\int_{۰}^{۲\pi}\left(-۲\sin\theta-۴\sin\theta\cos\theta\right)d\theta=\int_{۰}^{۲\pi}-۲\sin\theta\underbrace{(۱-۲\cos\theta)}_{V}\,d\theta=۰$$

نکته : همانند قضیه گرین در برخی مواقع برای محاسبه ی انتگرال یک میدان روی یک سطح که بسته نیست، نیز می توان از قضیه ی دیوژانس استفاده کرد. برای این منظور یک سطح ساده ی دیگر به سطح داده شده اضافه می کنیم و با استفاده از قضیه ی دیورژانس انتگرال های روی سطح بسته ی حاصل را محاسبه می کنیم.



$$\oiint_{S'}F.n.d\delta=\iiint_{w}divFdV$$

$$\iint_{S}F.n.d\delta-\iint_{S_{۱}}F.n.d\delta=\iiint_{w}divFdV$$

$$\Rightarrow\iint_{S}F.n.d\delta=\iiint_{w}divF.dV+\iint_{S_{۱}}F.n.d\delta$$

این روش در صورتی مفید است که محاسبه ی انتگرال سه گانه داده شده راحت باشد یا مقدار انتگرال سه گانه داده شده باشد.

مسأله ی ۲۴۵ قسمت ب: مساحت رویه S را محاسبه کنید:

S قسمتی از استوانه $x^{۲}+y^{۲}=ax$ است که در کره ی $x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=a^{۲}$ قرار دارد.

پاسخ:

$$\underbrace{(x-\frac{a}{۲})^{۲}}_{\frac{a}{۲}\cos\theta}+\underbrace{y^{۲}}_{\frac{a}{۲}\sin\theta}=\frac{a^{۲}}{۴}\qquad\qquad\sqrt{a^{۲}-x^{۲}-y^{۲}}\leq z\leq\sqrt{a^{۲}-(x^{۲}+y^{۲})}$$

$$S = ۲\int \sqrt{a^۲ - (x^۲ + y^۲)}\ dr \qquad *$$

$$c : x^۲ + y^۲ = ax$$

$$r^۲ = ar\cos\theta$$

$$r(\theta) = (\frac{a}{۲} + \frac{a}{۲}\cos\theta, \frac{a}{۲}\sin\theta)$$

$$* \quad S = ۲\int_{\circ}^{۲\pi} \sqrt{a^۲ - a(\frac{a}{۲} + \frac{a}{۲}\cos\theta)}\ .\ \underbrace{\sqrt{(\frac{a}{۲}\cos\theta)^۲ + (\frac{a}{۲}\sin\theta)^۲}\quad d\theta}_{r'(t)}$$

$$S = \int_{\circ}^{۲\pi} \sqrt{\frac{a^۲}{۲} - \frac{a^۲}{۲}\cos\theta}\ .\ \frac{a}{۲}\ d\theta$$

مثال: انتگرال زیر را با استفاده از مختصات کروی محاسبه کنید.

$$\int_{\circ}^{۲\pi}\int_{\circ}^{۱}\int_{\circ}^{\sqrt{۴-r^۲}} r\ .\ dr\, d\theta$$

پاسخ: r موجود در انتگرال مربوط به ژاکوبین است.

$$\circ \le z \le \sqrt{۴-r^۲} \quad \Rightarrow \quad \circ \le z \le \sqrt{۴-(x^۲+y^۲)}$$

$$\circ \le r \le ۱ \quad \Rightarrow \quad \circ \le x^۲ + y^۲ \le ۱$$

$$\circ \le \theta \le ۲\pi \quad \Rightarrow \quad \circ \le \theta \le ۲\pi$$

$$x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۴$$

$$x^۲ + y^۲ = ۱ \quad \Rightarrow \quad z = \pm\sqrt{۳}$$

$$\varphi = \tan^{-۱}(\frac{\sqrt{x^۲+y^۲}}{z}) = \tan^{-۱}(\frac{\sqrt{۳}}{۳}) \ \Rightarrow\ \varphi = \frac{\pi}{۶}$$

$$I = \int_{\circ}^{۲\pi}\int_{\circ}^{\frac{\pi}{۶}}\int_{\circ}^{۲} P^۲\sin\varphi dP\, d\varphi\, d\theta + \int_{\circ}^{۲\pi}\int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}}\int_{\circ}^{\csc\varphi} P^۲\sin\varphi dP\, d\varphi\, d\theta$$

$$x^۲ + y^۲ = ۱ \quad \Rightarrow \quad P^۲\sin\varphi = ۱$$

$$I = ۲\pi(-\cos\varphi\Big]_{\circ}^{\frac{\pi}{۶}})(\frac{P^۳}{۳}\Big]_{\circ}^{۲}) + ۲\pi\int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}}(\frac{P^۳}{۳}\Big]_{\circ}^{\csc\varphi})\sin\varphi\, d\varphi$$

$$I = ۲\pi(-\cos\varphi\Big]_{\circ}^{\frac{\pi}{۶}})(\frac{P^۳}{۳}\Big]_{\circ}^{۲}) + \frac{۲\pi}{۳}\int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}}\csc^۲\varphi\, d\varphi$$

مثال: با استفاده از قضیه استوکس انتگرال خطی $\int_C \vec{F}.dr$ را وقتی که $\vec{F}=-y\vec{i}+x^۲\vec{j}+z\vec{k}$ و

C منحنی بسته ای است که از برخورد استوانه $x^۲+y^۲=۱$ و صفحه ی $x+y+z=۱$ حاصل

می شود.

حل: S صفحه $x+y+z=۱$ در نظر می گیریم. لذا $z=۱-x-y$. که (x,y) درون دایره واحد

تغییر می کند.

طبق قضیه استوکس $\qquad \oint_C F.dr=\iint curlF.d\delta$

$$\forall\ curlF=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -y & x^۲ & z \end{vmatrix}=(۰,۰,۱+۲x)$$

$$\iint_S curlF.d\delta=\iint_{x^۲+y^۲\le ۱}(۰,۰,۱+۲x).(۱,۱,۱)\,dx\,dy$$

$$=\iint_{x^۲+y^۲\le ۱}(۱+۲x)\,dx\,dy=\int_۰^{۲\pi}\int_۰^{۱}(۱+۲r\cos\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

$$\int_۰^{۲\pi}\int_۰^{۱} r\,dr\,d\theta+\int_۰^{۲\pi}\cos\theta\,d\theta\int_۰^{۱}۲r\,dr=\pi+۰$$