فصل ۴

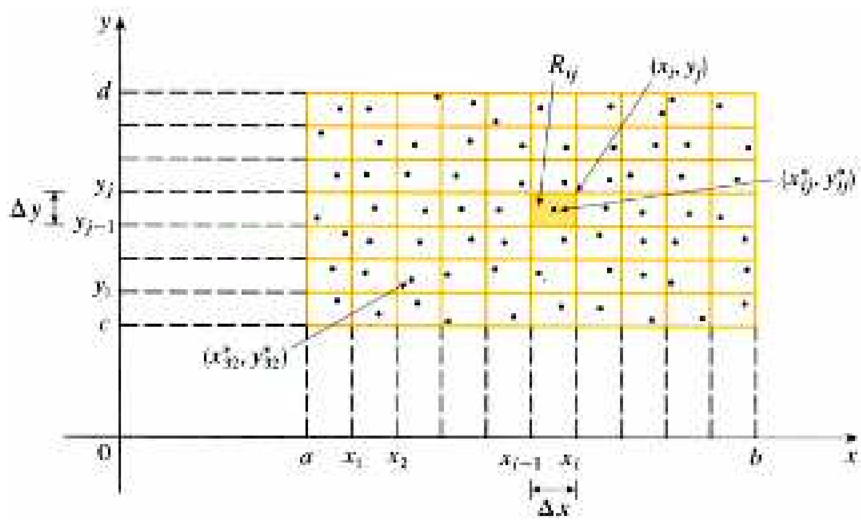
انتگرال چندگانه:

۱- انتگرال دوگانه:

تعریف: فرض کنیم $D \subseteq R^{۲}$ یک ناحیه ی بسته و کران دار باشد و f روی D کران دار باشد، برای سادگی فرض کنیم که D یک مستطیل است

$$D = [a,b] \times [c,d]$$

یک افراز مانند P برای D برابر حاصلضرب افرازهای $P_۱$ و $P_۲$ برای $[a,b]$ و $[c,d]$ است.



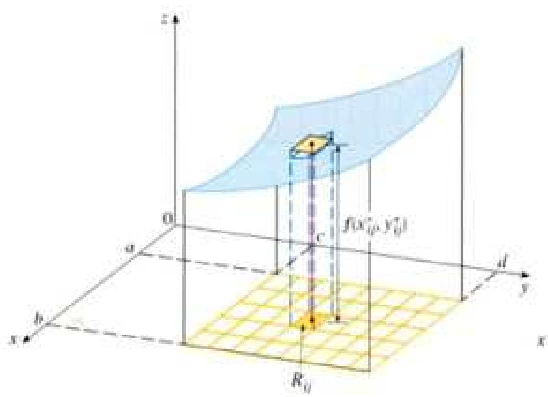
$$\Delta A_{ij} = \Delta x_i \,.\, \Delta y_j \quad = \text{مساحت } R_{ij}$$

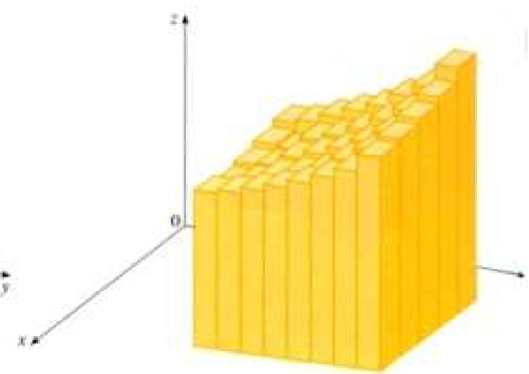
$$M_{ij} = \sup\{f(x,y) : (x,y) \in [x_{i-۱}, x_i] \times [y_{j-۱}, y_j]\}$$
$$m_{ij} = \inf\{f(x,y) : (x,y) \in [x_{i-۱}, x_i] \times [y_{j-۱}, y_j]\}$$
$$\|P\| = \max\{\Delta A_{ij} \quad , \quad ۱ \le i \le n \,,\, ۱ \le j \le n\}$$

$$V(P,f) = \sum_{i=۱}^{n} \sum_{j=۱}^{m} M_{ij}\, \Delta A_{ij} \quad \text{و} \quad L(P,f) = \sum_{i=۱}^{n} \sum_{j=۱}^{m} m_{ij}\, \Delta A_{ij}$$

انتگرال بالایی f روی D را به صورت زیر تعریف می کنیم.

اگر نقطه دلخواه (x_{ij}^*, y_{ij}^*) را در هر R_{ij} انتخاب کنیم، آنگاه می توانیم هر قسمت از رویه را که بالای R_{ij} قرار دارد به صورت مکعب مستطیل های باریکی در نظر بگیریم مطابق شکل





قرار می دهیم.

$$S(p, f) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) DA_{ij}$$

که در آن $S(p, f)$ مجموع حجم مکعب مستطیل ها می باشد.

تعریف: اگر $\lim\limits_{\|P\|\to 0} S(p, f)$ موجود و متناهی باشد آن مقدار حد را انتگرال دوگانه f روی D نامیده و به $\iint\limits_D f(x, y)\, dA$ نشان می دهیم.

$$\lim_{\|P\|\to 0} V(p, f) = \overline{\iint\limits_D} f\,.dA. \qquad *$$

و انتگرال پایینی f روی D مشابهاً به صورت زیر تعریف می شود

$$\lim_{\|P\|\to 0} L(p,f) = \underline{\iint_D} f\,.dA. \qquad *$$

تعریف: اگر $\underline{\iint_D} f\,.dA = \overline{\iint_D} f\,.dA$ آن گاه f را روی D انتگرال پذیر می نامیم و انتگرال f روی D به صورت های زیر نشان می دهیم

$$\iint_D f\,.dA = \iint_D f\,.dxdy \quad .$$

اگر $D \subseteq R^n$ یک جعبه n بعدی باشد، آنگاه

$$D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n]$$

و f روی D کران دار باشد آن گاه انتگرال f روی D مشابه فوق تعریف می شود، و به صورت

$$\int_D f\,.\,dx$$

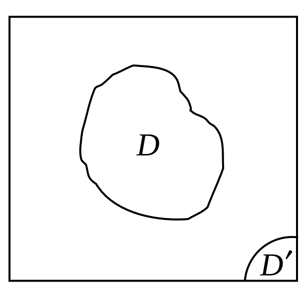
نشان داده می شود.

اگر $D \subseteq R^3$ آن گاه

$$\int_D f\,.\,dx = \iiint_D f\,.dV = \iiint_D f\,.dx\,dy\,dz$$

نکته: اگر $D \subseteq R^n$ بسته و کران دار دلخواه باشد و چون D کران دار است پس در یک جعبه n بعدی

مانند D' جای دارد.



تعریف می کنیم

$$F(X)=\begin{cases} f(x) & if \quad X\in D \\ \circ & if \quad X\in D'-D \end{cases}$$

و

$$\int_{D} f\,.dx=\int_{D'} F\,.dx$$

قضیه: اگر تابع f روی ناحیه ی بسته و کران دار D در R^n پیوسته باشد آن گاه f روی D انتگرال پذیر است.

بنابراین در این درس همواره فرض بر این است که f پیوسته باشد لذا نیازی به بررسی انتگرال پذیری نمی باشد فقط روشهای محاسبه ی انتگرال مورد نظر می باشد.

خواص انتگرال چندگانه

فرض کنید $D\subseteq R^n$ بسته و کران دار باشد و f و g روی D انتگرال پذیر باشند. آنگاه

۱) $\int_{D}(f\pm g)\,dx=\int_{D} f\,dx\pm\int_{D} g\,dx$.

۲) اگر $f(x)\le g(x)$ برای هر $x\in D$ آن گاه $\int_{D} f.\,dx\le\int_{D} g.\,dx$.

۳) $\int_{D}\alpha f\,dx=\alpha\int_{D} f\,.\,dx$ برای هر عدد حقیقی α.

۴) $\int_{D} dx=\mu(D)$ که در آن $\mu(D)$ اندازه ی D است.

(اگر $D\subseteq R$ باشد آن گاه $\mu(D)$ برابر طول D است، اگر $D\subseteq R^{۲}$ باشد آن گاه $\mu(D)$ مساحت D است اگر $D\subseteq R^{۳}$ آن گاه $\mu(D)$ برابر حجم D است.)

۵) اگر $D = D_1 \cup D_2 \cup \ldots \cup D_k$ به طوری که $D_i \cap D_j = \phi$ (می توانند مرز مشترک داشته باشند) وقتی که $i \neq j$ در این صورت انتگرال روی اجتماع برابر است با:

$$\int_D f \,.\, dx = \int_{D_1} f \,.\, dx + \ldots + \int_{D_k} f \,.\, dx$$

۶) اگر $D \subseteq R^2$ و $f(x,y) \geq 0$ برای هر $(x,y) \in D$ آن گاه $\int_D f \,.dA$ برابر است با حجم ناحیه ی محدود بین رویه ی $z = f(x,y)$ و D .

(انتگرال دوگانه همواره حجم نمی دهد اما اگر $f \geq 0$ باشد آن گاه حجم را محاسبه می کند.)

۷) تعبیر کلی (کاربردی) برای انتگرال های nگانه به صورت زیر است:

اگر تابع f مشخص کننده ی چگالی ماده ای در هر نقطه از جسم D باشد آن گاه $\int_D f \,.\, dx$ مشخص کننده ی کل ماده ی موجود در جسم D است.

۸)
$$\left| \int_D f \,.\, dx \right| \leq \int_D |f| dx \quad .$$

۹) اگر f روی ناحیه ی بسته و کران دار $D \subseteq R^n$ پیوسته باشد آن گاه نقطه ی $x_0 \in D$ وجود دارد به طوری که :

$$\int_D f \,.\, dx = f(x_0)\mu(D) \quad .$$

۱۰) میانگین تابع f روی D برابر است با

$$\frac{\int_D f \,.\, dx}{\mu(D)} \quad .$$

روش های محاسبه ی انتگرال های چندگانه:

الف) انتگرال دوگانه: برای محاسبه ی انتگرال $\iint_D f \,.dA$ بر اساس وضعیت ناحیه ی D چهار حالت داریم:

۱- D یک مستطیل است $\quad D=[a,b]\times[c,d]$

$$\iint_D f\,.dx.dy=\int_c^d(\int_a^b f\,.dx).dy$$

برای محاسبه انتگرال نسبت به هر یک از متغیرها، متغیر دیگر را ثابت در نظر می‌گیریم.

پرسش) آیا می توان گفت $\int_a^b(\int_c^d f\,.dy).dx=\int_c^d(\int_a^b f\,.dx).dy$ ؟

در حالت کلی جواب منفی است ولی قضیه ی فوبینی مهم می باشد.

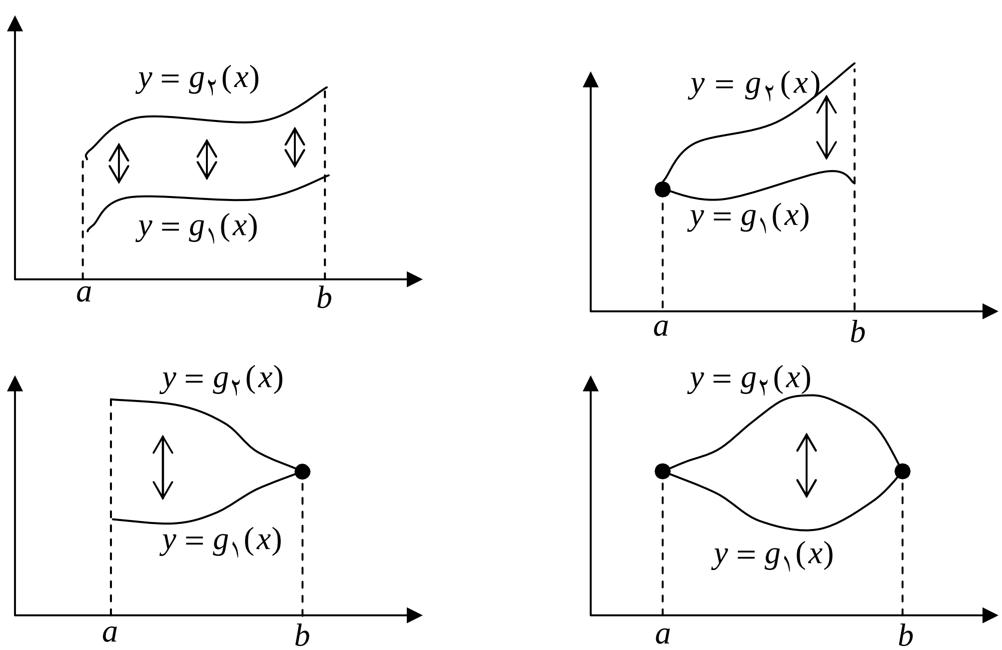
قضیه (قضیه فوبینی): اگر f روی D پیوسته باشد آن گاه داریم

$$\iint_D f\,.dx\,dy=\iint_D f\,.dy\,dx$$

مثال) مطلوبست محاسبه $\int_۰^۱\int_۱^۲(x^۲y+y^۲)\,dx\,dy$

$$\int_۰^۱(\int_۱^۲(x^۲y+y^۲)\,dx\,dy=\int_۰^۱\left(\int_۱^۲(x^۲y+y^۲)\,dx\right)dy=\frac{۷}{۶}+\frac{۱}{۳}$$

۲- در ناحیه ی D ، y بین منحنی های $g_۱(x)$ و $g_۲(x)$ قرار دارد و $a\le x\le b$.



(۴)

در این حالت داریم $\quad \iint\limits_D f\,.dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{g_1}^{g_2} f\,.dy \right) dx$.

مثال:

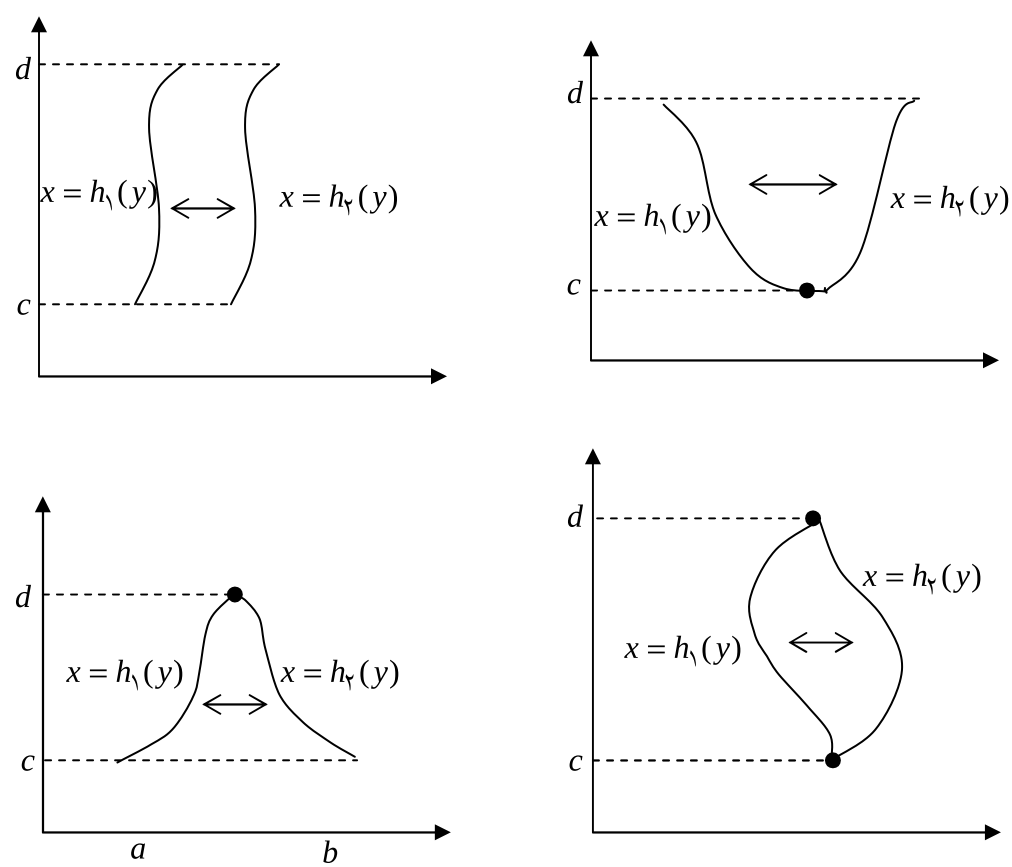
$$I = \int_0^1 \int_x^{x^2} (yx + x^2)\,dy\,dx = \int_0^1 \left(\int_x^{x^2} (yx + x^2)\,dy \right) dx$$

$$I = \int_0^1 \left(\left(\frac{y^2}{2} x + x^2 y \right]_x^{x^2} \right) dx \quad \Rightarrow \quad I = \int_0^1 \left(\frac{x^5}{2} + x^4 - \frac{x^3}{2} - x^3 \right) dx$$

$$= \left[\frac{x^6}{12} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{8} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 \quad \Rightarrow \quad I = \frac{1}{12} + \frac{1}{5} - \frac{1}{8} - \frac{1}{4} = \frac{-11}{120}$$

اگر جواب منفی شد همان منفی قابل قبول است.

۳- در ناحیه ی D ، x بین دو منحنی بر اساس y قرار دارد. $\qquad h_1(y) \leq x \leq h_2(y)$



در این حالت : $$\iint_D f\,.dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f\,.dx \right) dy$$

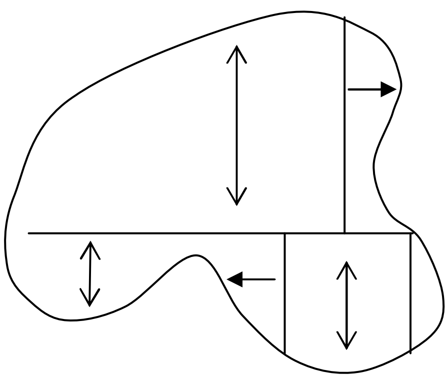
مثال) مطلوبست محاسبه $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{e^y}^{\sin y} x\,dx\,dy \right.$.

حل:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{e^y}^{\sin y} x\,dx \right) dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{x^2}{2}\right)_{e^y}^{\sin y} dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin^2 y}{2} - \frac{e^{2y}}{2}\right) dy$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 2y)\,dy - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2y}\,dy = \left(\frac{1}{4}\left(y - \frac{1}{2}\sin 2y\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left(\frac{1}{4}e^{2y}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\right)$$

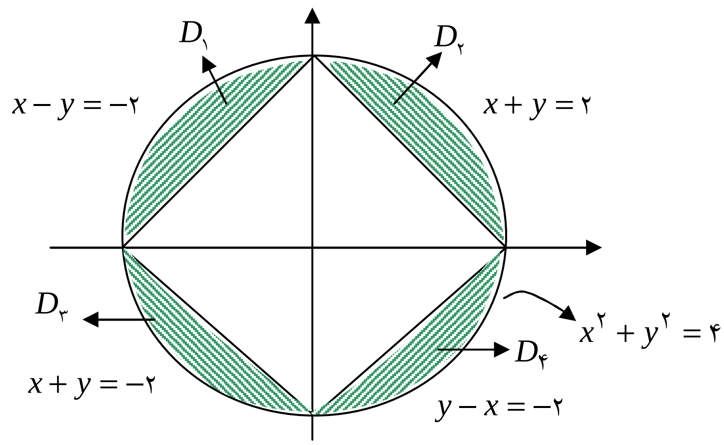
$$I = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{4}e^{\pi} + \frac{1}{4}$$



۴- اگر D یک ناحیه ی دلخواه باشد آن گاه می توان D را به صورت اجتماع تعدادی متناهی از ناحیه ی اول و دوم و سوم نوشت و سپس انتگرال روی D را با توجه به قضایا به صورت مجموع انتگرال ها روی ناحیه های فوق نوشت.

در عمل برا ی این حالت از روش تغییر متغیر یا روش های دیگر استفاده خواهیم کرد.

مثال: مطلوبست محاسبه $\iint_D x\,dx\,dy$ که در آن D ناحیه خارج لوزی و درون دایره است، مطابق شکل



$$I=\iint_{D_1} x\,dx\,dy+\iint_{D_2} x\,dx\,dy+\iint_{D_3} x\,dx\,dy+\iint_{D_4} x\,dx\,dy$$

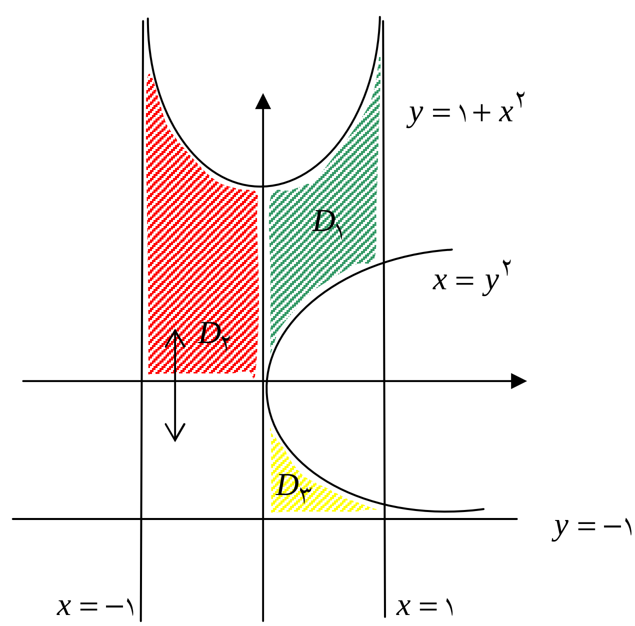
$$I=\int_{0}^{2}\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{y-2} x\,dx\,dy+\int_{0}^{2}\int_{y-2}^{\sqrt{4-y^2}} x\,dx\,dy+\int_{-2}^{0}\int_{-y-2}^{-\sqrt{4-y^2}} x\,dx\,dy+\int_{-2}^{0}\int_{y+2}^{\sqrt{4-y^2}} x\,dx\,dy=0$$

از ابتدا می توانستیم حدس بزنیم که چون $f(x,y)=x$ یک تابع فرد است و ناحیه ی انتگرال نیز یک ناحیه ی متقارن است، بنابراین انتگرال صفر است.

مثال) انتگرال زیر را محاسبه کنید:

$$\iint_D x\,dx\,dy$$

که در آن ناحیه ی محدود به منحنی های $y=1+x^2$ و $x=y^2$ ، $x=-1$ ، $y=-1$ و $x=1$ می باشد.



$$\iint x\,dx\,dy = \iint_{D_1} x\,dx\,dy + \iint_{D_2} x\,dx\,dy + \iint_{D_3} x\,dx\,dy$$

$$\iint_D x\,dx\,dy = \int_{-1}^{0}\int_{-1}^{1+x^2} x\,dy\,dx + \int_{0}^{1}\int_{\sqrt{x}}^{1+x^2} x\,dy\,dx + \int_{0}^{1}\int_{-1}^{-\sqrt{x}} x\,dy\,dx$$

$1-\ \int_0^1\int_y^1 e^{x^2}\,dx\,dy$

$2-\ \iint_D e^{x^2+y^2}\,dx\,dy\ ,\ \ D=\left\{(x,y)=1\le x^2+y^2\le 4\right\}$

تکنیک های محاسبه ی انتگرال

الف: تعویض ترتیب انتگرال گیری .

ب: روش تغییر متغیر.

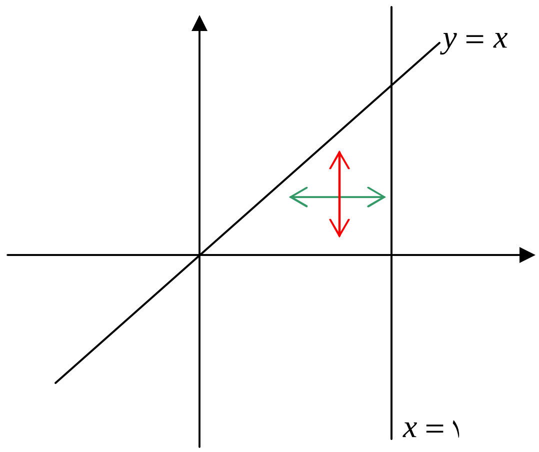
الف: روش تعویض ترتیب انتگرال گیری:

این روش در صورتی استفاده می شود که تابع f روی D پیوسته و محاسبه انتگرال f حداقل نسبت به یکی از متغیرها ساده باشد. برای محاسبه ی انتگرال و تعیین ترتیب انتگرال حتماً باید ناحیه ی انتگرال گیری رسم شود و حدود جدید با توجه به شکل تعیین شود این روند در مثال توضیح داده می شود:

مثال: انتگرال $\int_0^1\int_y^1 e^{x^2}\,dx\,dy$ را محاسبه کنید.

حل: با توجه به فرم انتگرال ابتدا باید نسبت به x انتگرال بگیریم، اما انتگرال نسبت به x ساده نمی باشد ولی محاسبه ی انتگرال نسبت به y ساده می باشد لذا روش تعویض ترتیب انتگرال گیری را به کار می بریم.

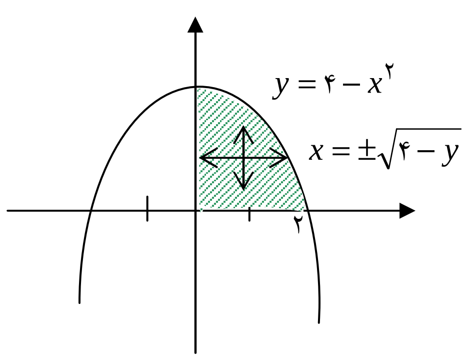
تعیین حدود جدید حتماً باید از روی شکل باشد از روی انتگرال نمی توان تعویض کرد (در این روش حالت دوم به سوم تبدیل می شود و بالعکس)



$$I=\int_0^1\int_0^x e^{x^2}\,dy\,dx=\int_0^1 (e^{x^2}y)_0^x\,dx$$

$$I=\int_0^1 xe^{x^2}\,dx=\frac{1}{2}e^{x^2}\Big]_0^1=\frac{1}{2}(e-1)$$

مسأله ی ۱۹۶) مطلوبست محاسبه ی $I=\int_0^2\int_0^{4-x^2}\frac{x\,e^{2y}}{(4-y)}\,dy\,dx$



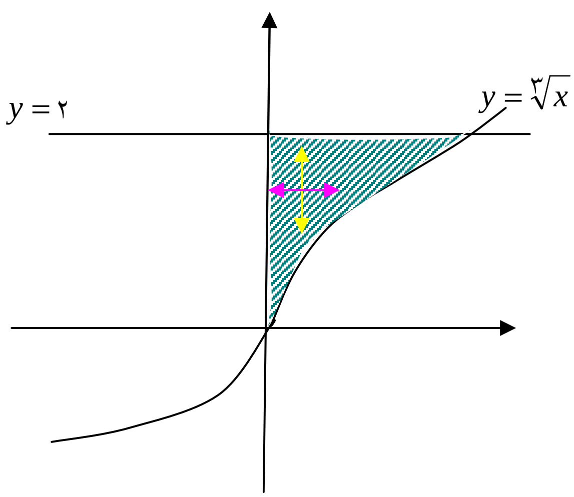
$$I=\int_{0}^{2}\int_{0}^{4-x^2}\left(\frac{xe^{2y}}{4-y}\right)dy\,dx$$

$$I=\int_{0}^{4}\int_{0}^{\sqrt{4-y}}\frac{xe^{2y}}{4-y}\,dx\,dy$$

$$I=\int_{0}^{4}\left(\frac{1}{2}x^2\frac{e^{2y}}{4-y}\right)_{0}^{\sqrt{4-y}}dy=\frac{1}{2}\int_{0}^{4}e^{2y}\,dy$$

$$I=\left(\frac{1}{4}e^{2y}\right]_{0}^{4}=\frac{1}{4}(e^{8}-1)$$

مثال: انتگرال $\int_{0}^{8}\int_{\sqrt[3]{x}}^{2}\frac{1}{y^4+1}\,dy\,dx$ را محاسبه کنید.



$$\int_{0}^{8}\int_{\sqrt[3]{x}}^{2}\frac{dy\,dx}{y^4+1}$$

$$I=\int_{0}^{2}\int_{0}^{y^3}\frac{dx}{y^4+1}dy=\int_{0}^{2}\left(\frac{x}{1+y^4}\right)_{0}^{y^3}dy$$

$$I=\int_{0}^{2}\frac{y^3}{1+y^4}dy=\frac{1}{4}Ln(y^4+1)\Big]_{0}^{2}=\frac{1}{4}Ln17$$

ب: روش تغییر متغیر: از روش تغییر متغیر به دو منظور استفاده می شود:

۱- ساده کردن فرمول تابع f برای محاسبه ی انتگرال.

۲- ساده ناحیه ی انتگرال گیری.

در برخی مسائل هر دو هدف مورد نظر است.

قضیه تغییر متغیر برای توابع یک متغیره به صورت زیر است.

قضیه (تغییر متغیر در انتگرال معین) : اگر $x:[c,d]\to[a,b]$ یک تابع یک به یک و پوشا به طوری که x' در هر نقطه از $[c,d]$ موجود و پیوسته باشد، آنگاه

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_c^d f(u)\,du \ .$$

مثال: انتگرال $\int_۱^{\sqrt{۲}} xe^{x^۲}\,dx$ را محاسبه کنید.

حل: تعریف می کنیم $x:[۰,۲]\to[۰,\sqrt{۲}]$ به صورت $x=\sqrt{u}$.

داریم $du=۲x\,dx$.

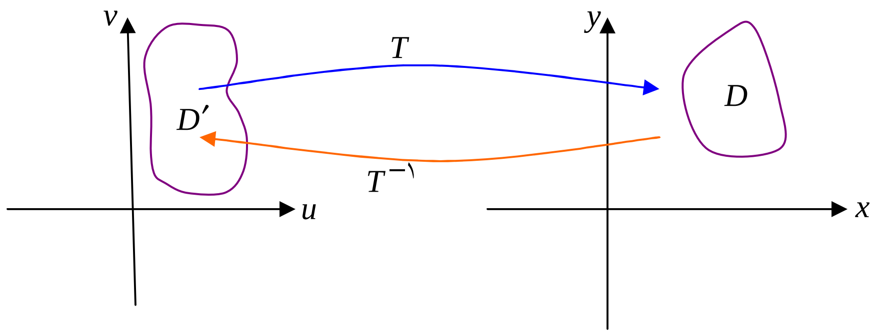
لذا

$$\int_۱^{\sqrt{۲}} xe^{x^۲}\,dx=\frac{۱}{۲}\int_۰^۲ e^u\,du=\frac{۱}{۲}(e^u)_۰^۲=\frac{۱}{۲}(e^۲-۱)\ .$$

برای بیان قضیه تغییر متغیر در انتگرالهای دوگانه و سه گانه نیاز به مفاهیم و تعاریف زیر داریم.

تعریف: یک تبدیل روی R^n عبارت است از تابعی که دامنه و برد آن هر دو زیر مجموعه R^n باشند.

اگر T یک تبدیل یک به یک باشد آنگاه تابع معکوس آن یعنی $T^{-۱}$ نیز یک تبدیل روی R^n است.

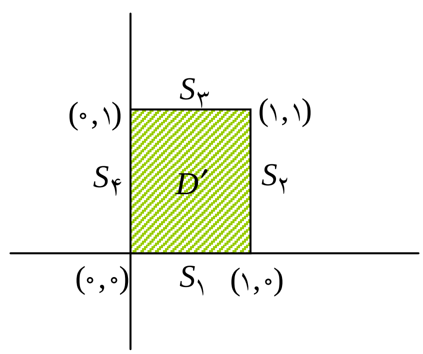


مثال: فرض کنید T تبدیل تعریف شده روی R^2 به صورت

$$T(u,v)=(u^2-v^2,\ 2uv)$$

تصویر ناحیه S در صفحه ی xy را به دست آورید که در آن

$$S=\{(u,v)\mid 0<u\leq 1\ \ ,\ \ 0\leq v\leq 1\}$$



حل: برای به دست آوردن تصویر S کافی است مشخص کنیم مرزهای D' به چه منحنی هایی در صفحه ی xy منتقل می شود.

$$S_1: v=0\ \Rightarrow\ x=u^2\ \ ,\ \ y=0$$

چون $0\leq u\leq 1$ است پس تصویر S_1 پاره خط $0\leq x\leq 1$ و $y=0$ خواهد بود.

$$S_۲ : u = ۱ \Rightarrow x = ۱ - v^۲ \ , \ y = ۲v \Rightarrow x = ۱ - \frac{y^۲}{۴}$$

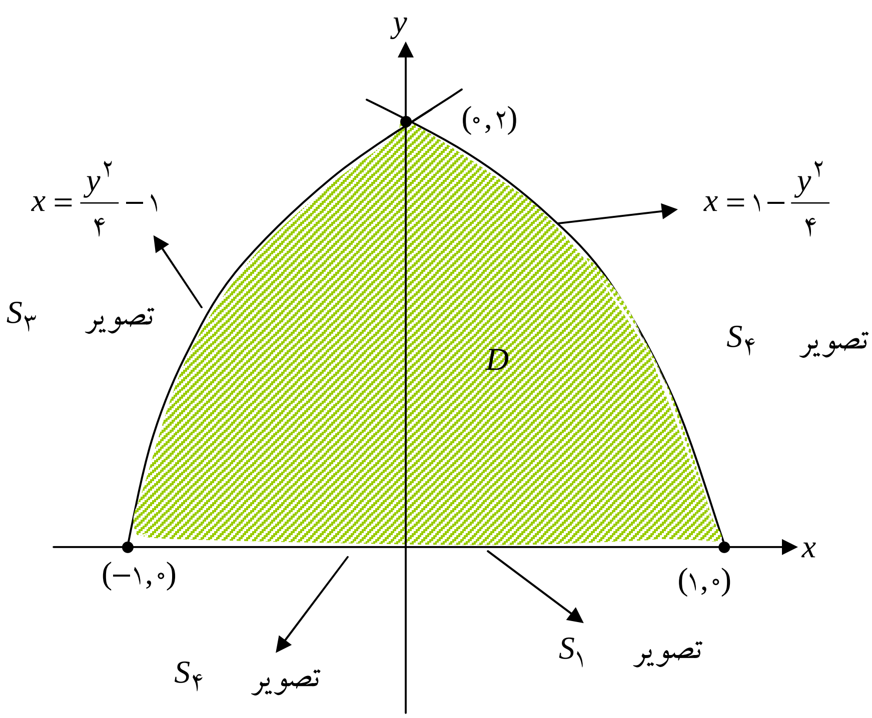
پس تصویر $S_۲$ تحت T منحنی $x = ۱ - \frac{y^۲}{۴}$ است.

$$S_۳ : v = ۱ \ , \ (۰ \le u \le ۱) \Rightarrow x = u^۲ - ۱ \ , \ y = ۲u$$

پس تصویر $S_۳$ تحت T منحنی $x = \frac{y^۲}{۴} - ۱$ است.

$$S_۴ : u = ۰ \ , \ (۰ \le v \le ۱) \Rightarrow x = -v^۲ \ , \ y = ۰ \Rightarrow -۱ \le x \le ۰$$

تصویر $S_۴$ قطعه خط $-۱ \le x \le ۰$ و $y = ۰$ است.



تعریف: اگر T یک تبدیل روی R^n باشد به طوری که مشتقات جزئی هر یک از مؤلفه های T موجود باشد، آنگاه ژاکوبین T که با نماد $j(T)$ نشان داده می شود به صورت زیر تعریف می شود.

$$j(T)=\frac{\partial(x_1,x_2,\dots,x_n)}{\partial(u_1,u_2,\dots,u_n)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_1}\\ \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_2}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ \frac{\partial x_1}{\partial u_n} & \frac{\partial x_2}{\partial u_n} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_n}\end{vmatrix}.$$

- اگر T یک تبدیل روی R^2 باشد آنگاه

$$T:(u,v)\to(x,y)$$
$$T(u,v)=\big(x(u,v),y(u,v)\big)$$

و لذا

$$j(T)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\frac{\partial x}{\partial u}.\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}.\frac{\partial y}{\partial u}.$$

- اگر T یک تبدیل روی R^3 باشد آنگاه

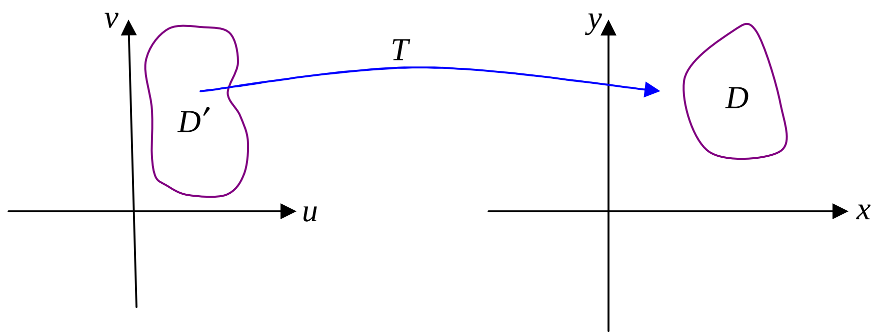
$$T:(u,v,w)\to(x,y,z)$$
$$T(u,v,w)=\big(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)\big)$$

و در نتیجه

$$j(T)=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v}\\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w}\end{vmatrix}.$$

قضیه (تغییر متغیر در انتگرال دوگانه) : فرض کنیم T یک تبدیل یک به یک با مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته باشد (از مرتبه ی c^{1} باشد) به طوری که ناحیه D' در صفحه ی uv را به روی ناحیه D در صفحه xy منتقل می کند و $j(T) \neq 0$. همچنین فرض کنیم f روی D پیوسته باشد. در این صورت

$$\iint_{D} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D'} f\left(x(u,v), y(u,v)\right).\left| j(T) \right| du\,dv.$$



چند سؤال اساسی در ارتباط با روش تغییر متغیر مطرح می شود که به ترتیب به آن ها جواب می دهیم:

۱- چه عباراتی را U و V در نظر بگیریم؟ برای این منظور از عبارت های ظاهر شده در فرمول تابع (یا در فرمول ناحیه ی D استفاده می کنیم)

۲- با انتخاب u و v در قسمت بالا ما در حقیقت فرمول T^{-1} را داریم لـذا بـرای محاسـبه ی ژاکـوبین از روابط

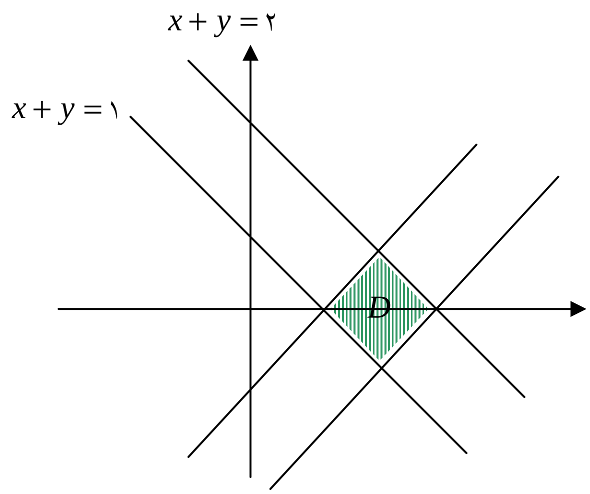
$$j(T) = \frac{1}{j(T^{-1})} \quad , \quad j(T^{-1}) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} \quad .$$

استفاده می کنیم.

مثال: مطلوبست محاسبه ی $\iint_{D} (x+y)\,dx\,dy$

که در آن D ناحیه ی محدود به خطوط $x+y=۱$، $x+y=۲$، $x-y=۱$ و $x-y=۲$.

حل:



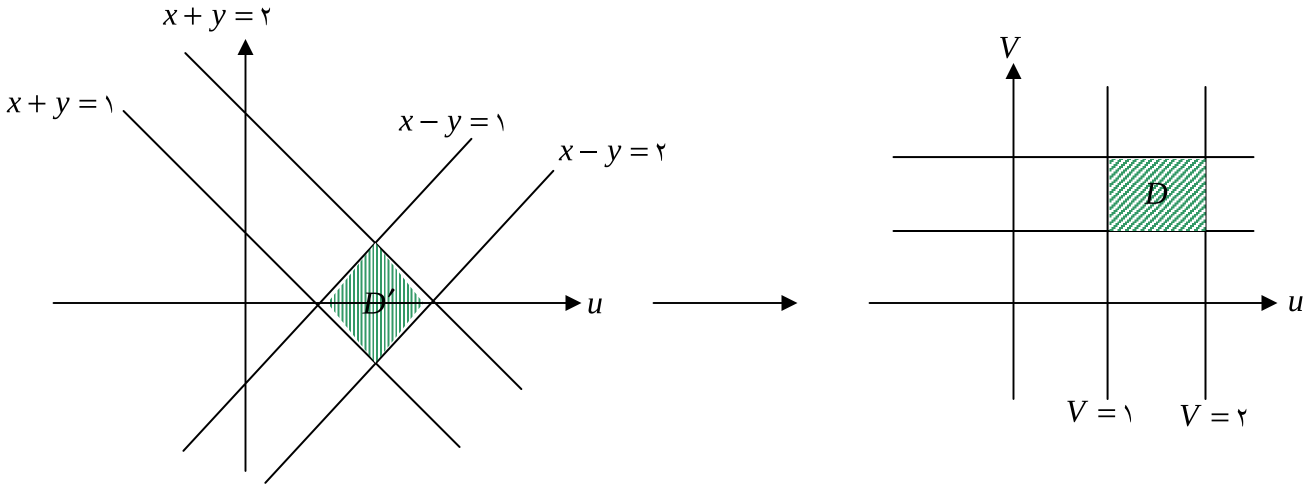
$$u=x+y \ , \ V=x-y$$

$$j(T^{-۱})=\begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & -۱ \end{vmatrix}=-۲$$

$$j(T)=\frac{-۱}{۲}$$

حال این سؤال مطرح می شود حدود ناحیه ی D' را چگونه تعریف کنیم؟ برای این منظور کافی است منحنی تصویر هر یک از مرزهای D را تحت $T^{-۱}$ در ناحیه ی u و v رسم کنیم.

ناحیه ی بسته ی ایجاد شده توسط این منحنی های ناحیه ی D' خواهد بود اگر چند ناحیه ی بسته تشکیل شد برای تشخیص این که کدام یک از آن ها D' است کافی است نقطه ای درون ناحیه ی D انتخاب کنیم و بررسی کنیم این نقطه توسط $T^{-۱}$ به درون کدام یک از ناحیه ها منتقل می شود آن ناحیه D' خواهد بود.



$$I=\frac{۱}{۲}\int_{۱}^{۲}\int_{۱}^{۲} U\,dU\,dV=\frac{۱}{۲}\int_{۱}^{۲} dV \ .\ \int_{۱}^{۲} U\ .\ dU=\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۲}(۴-۱)\right)=\frac{۳}{۴}\quad .$$

قضیه: اگر $f(x,y)=g(x)h(y)$ و $D=[a,b]\times[c,d]$ (D مستطیل باشد)

$$\int_{a}^{b}\int_{c}^{d} f.dx\ dy=\int_{a}^{b} g(x)\,dx\ .\ \int_{c}^{d} h(y)\,dy$$

مثال: مطلوبست محاسبه $I=\iint_{G} x\,dA$ ،

که در آن G ناحیه ی محصور بین منحنی های $xy=۱$ ، $xy=۳$ ، $x(۱-y)=۲$ و $x(۱-y)=۱$ است.

$$T^{-۱}=\begin{vmatrix} u=xy \\ v=x(۱-y)\end{vmatrix} \qquad j^{-۱}(T)=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} y & ۱-y \\ x & -y\end{vmatrix}=-xy-x(۱-y)$$

$$=-xy-x+xy=-x$$

اگر در ژاکوبین دوباره x و y ظاهر شد ابتدا در داخل انتگرال قرار می دهیم. در بسیاری از موارد داخل انتگرال ساده می شود. داریم

$$I = \iint x \,.\, \left|\frac{-۱}{x}\right| du\, dv = \int_{۱}^{۲}\int_{۱}^{۳} du\, dv = (۳-۱)(۲-۱) = ۲$$

تغییر متغیر قطبی در انتگرال دوگانه

- یکی از تغییر متغیرهای مهم تغییر متغیر در مختصات قطبی است.

$$T:(r,\theta) \longrightarrow (r\cos\theta, r\sin\theta)$$
$$T^{-۱}:(x,y) \to (\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}\;,\; \tan^{-۱}(\frac{y}{x}))$$

ژاکوبین تبدیل قطبی برابر r است.

$$j(T) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

سؤال) چه موقع از تغییر متغیر قطبی استفاده کنیم؟

اگر عباراتی شامل $x^{۲}+y^{۲}$ یا $\tan^{-۱}(\frac{y}{x})$ در فرمول تابع یا در فرمول ناحیه ی انتگرال گیری ظاهر شد

بهتر است از تغییر متغیر قطبی استفاده کنیم.

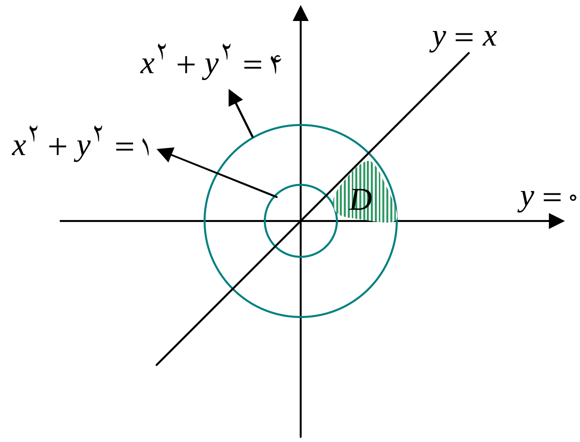
مثال: انتگرال زیر را حساب کنید.

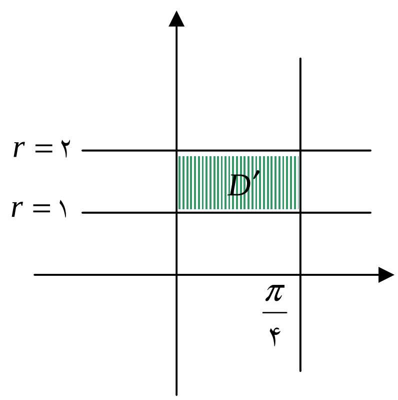
$$I = \iint_D e^{x^{۲}+y^{۲}}\, dx\, dy$$

که در آن D ناحیه ی

$$D = \left\{(x,y):\quad ۱ \le x^{۲}+y^{۲} \le ۴ \;,\; ۰ \langle\; y \le x\right\}$$

است را محاسبه کنید.





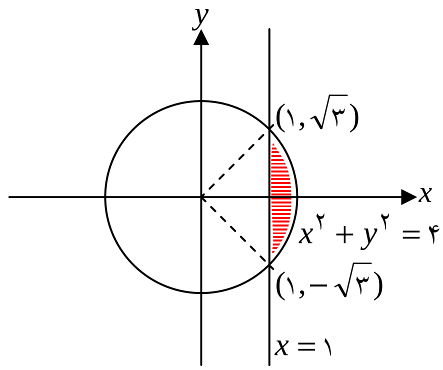
$$y = ۰ \Rightarrow \tan^{-۱}(\frac{۰}{x}) = ۰$$
$$\theta = ۰$$
$$y = x \rightarrow \theta = \tan^{-۱}(\frac{y}{x}) = \tan^{-۱}(۱)$$
$$\theta = \frac{\pi}{۴}$$
$$I = \int_۰^{\frac{\pi}{۴}} \int_۱^۲ e^{r^۲} r dr d\theta = \int_۰^{\frac{\pi}{۴}} d\theta \, . \int_۱^۲ e^{r^۲} \, . \, r dr = \frac{\pi}{۴} (\frac{۱}{۲} e^{r^۲})_۱^۲$$

نکته: تمام خطوطی که از مبدأ می گذرند برای تعیین حدود θ است.

مثال) انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\iint_D \tan^{-۱}(\frac{y}{x}) dx\, dy$$

که در آن D ناحیه ی بین خط $x = ۱$ و دایره ی $x^۲ + y^۲ = ۴$ وقتی که $x \geq ۱$ می باشد.



$$x=۱ \Rightarrow r\cos\theta=۱ \Rightarrow r=\sec\theta$$

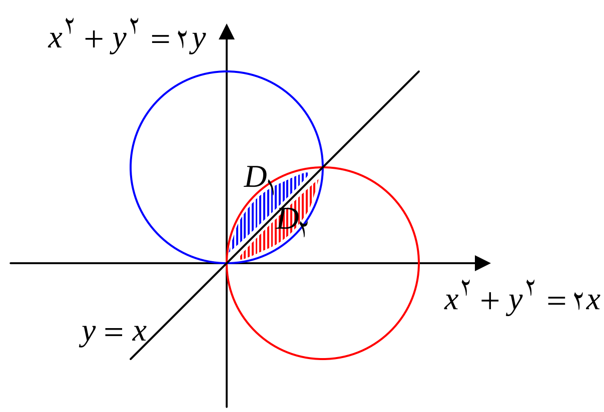
$$x^۲+y^۲=۴ \Rightarrow r^۲=۴ \Rightarrow r=۲$$

$$\begin{cases} x=۱ \\ x^۲+y^۲=۴ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (۱,\sqrt{۳}) \\ (۱,-\sqrt{۳}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \theta=\tan^{-۱}(\frac{\sqrt{۳}}{۱})=\frac{\pi}{۳} \\ \theta=\tan^{-۱}(\frac{-\sqrt{۳}}{۱})=\frac{-\pi}{۳} \end{cases}$$

$$I=\int_{\frac{-\pi}{۳}}^{\frac{\pi}{۳}}\int_{\sec\theta}^{۲} r\theta\, dr d\theta$$

مثال: مساحت بین دو دایره ی $x^۲+y^۲=۲x$ و $x^۲+y^۲=۲y$ را محاسبه کنید.



$$I=\iint\limits_{D_۱} dA+\iint\limits_{D_۲} dA$$

$$r^۲=۲r\cos\theta \quad \to \quad r=۲\cos\theta \quad , \quad x^۲+y^۲=۲y \Rightarrow r^۲=۲r\sin\theta$$
$$\Rightarrow r=\sin\theta$$

$$I_۱=\int_۰^{\frac{\pi}{۴}}\int_۰^{۲\sin\theta} r dr d\theta=\int_۰^{\frac{\pi}{۴}}\left(\frac{r^۲}{۲}\right)_۰^{۲\sin\theta} d\theta=\int_۰^{\frac{\pi}{۴}} ۲\sin^۲\theta\, d\theta=\int_۰^{\frac{\pi}{۴}}(۱-\cos ۲\theta)\, d\theta=\left[\theta-\frac{۱}{۲}\sin ۲\theta\right]_۰^{\frac{\pi}{۴}}=\frac{\pi}{۴}$$

$$I_۲=\int_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۲}}\int_۰^{۲\cos\theta} r dr d\theta=\int_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۲}}\left(\frac{r^۲}{۲}\right)_۰^{۲\cos\theta} d\theta=\int_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۲}} ۲\cos^۲\theta\, d\theta=\int_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۲}}(۱+\cos ۲\theta)\, d\theta=\left[\theta+\frac{۱}{۲}\sin ۲\theta\right]_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۲}}=\frac{\pi}{۲}-\frac{\pi}{۴}=\frac{\pi}{۴}$$

مثال) انتگرال $\iint\limits_D \frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}dx\,dy$ که در آن D ناحیه ی درون بیضی $\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}=۱$ است.

حل: قرار می دهیم

$$T=\begin{cases} x=au \\ y=bv \end{cases}$$

داریم $j(T)=ab$ و

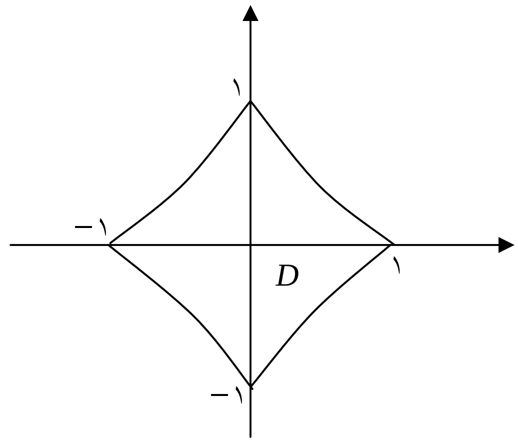
$$I=ab\iint\limits_{u^۲+v^۲\le ۱}(u^۲+v^۲)\,du\,dv$$

$$I=\int_۰^{۲\pi}\int_۰^{۱} ab\, r^۲ .\, r\, dr\, d\theta=ab\int_۰^{۲\pi} d\theta\int_۰^{۱} r^۳ dr=\frac{\pi ab}{۲}$$

مثال : مطلوبست محاسبه $\iint\limits_D \frac{۱}{(xy)^{۲/۳}}dA$ که در آن D ناحیه ی محصور به $x^{\frac{۲}{۳}}+y^{\frac{۲}{۳}}=۱$

است.

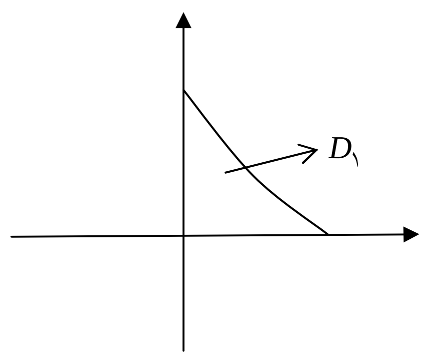
حل: در شکل ناحیه D مشخص شده است.



چون ناحیه D متقارن و f مثبت می باشد می توانیم بنویسیم

$$\iint_D \frac{۱}{(xy)^{۲/۳}}\,dA = ۴\iint_{D_۱} \frac{۱}{(xy)^{۲/۳}}\,dA$$

که در آن $D_۱$ به صورت



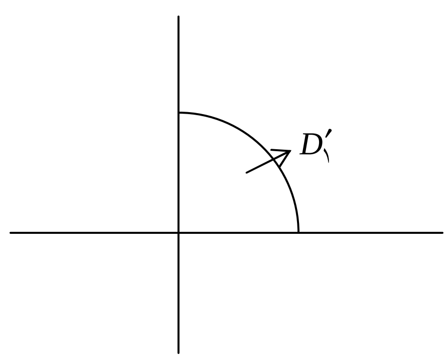
.

تبدیل T، را به صورت

$$T(u,v) = (u^۳, v^۳)$$

در نظر می گیریم داریم $j(T) = ۹u^۲v^۲$

تصویر ناحیه D تحت T به صورت



می باشد.

داریم

$$\iint\limits_{D_1} f\,.\,dA = \iint\limits_{D_1'} \frac{1}{u^2 v^2}\; 9u^2v^2\, du dv = \frac{9}{4}\pi$$

و لذا
$$\iint\limits_{D} f\,.\,dA = 9\pi$$

مسأله ی ۱۹۲ قسمت هـ) : مطلوبست محاسبه $\iint\limits_{D} (x-y)\sin(x^2-y^2)\, dA$

که در آن D ناحیه ی محدود به خطوط $x+y=2$ ، $y-x=1$ ، $y-x=-1$ و $x+y=0$ است.

حل: تبدیل T^{-1} را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$T^{-1}(x,y) = (x+y\,, x-y)\quad .$$

داریم
$$j^{-1}(T) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \;\Rightarrow\; j(T) = \frac{-1}{2}$$

در نتیجه

$$I = \iint\limits_{D} (x-y)\sin(x^2-y^2)\, dA = \int\limits_{D'} v\sin uv .\ \frac{1}{2}\ du\, dv$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}\int_{0}^{2} v\sin uv\, du\, dv = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}\left(-\cos uv\right)_{0}^{2} dv$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}\left(-\cos 2v + 1\right) du = \left(\frac{-1}{4}\sin 2v + \frac{v}{2}\right)_{-1}^{1} \quad .$$

روشهای محاسبه انتگرالهای سه گانه :

انتگرال سه گانه f روی ناحیه W را به صورت $\iiint\limits_{W} f\,.dv = \iiint\limits_{W} f\,.dx\,dy\,dz$ نشان می هیم.

براساس وضعیت ناحیه ی W در R^3 (پنج) حالت کلی زیر را داریم :

۱) $$W=[a,b]\times[c,d]\times[r,s]$$

در این حالت داریم :

$$\iiint_{w} f.dv=\int_{a}^{b}(\int_{c}^{d}(\int_{r}^{s} f.dz)\,dy)\ dx \quad .$$

۲) در این حالت z بین دو رویه ی $u_{1}(x,y)$ و $u_{2}(x,y)$ قرار دارد و (x,y)در ناحیه ی D که فصل مشترک دو رویه ی $u_{1}(x,y)$ و $u_{2}(x,y)$ است.

$$W=\begin{cases} u_{1}(x,y)\leq z\leq u_{2}(x,y) \\ (x,y)\in D \end{cases}$$

در این حالت داریم

$$\iiint_{W} f.dv=\iint_{D}(\int_{u_{1}}^{u_{2}} f.dz)\,dx\,dy$$

Dدر مسائل داده می شود یا ناحیه ی محدود به فصل مشترک دو رویه ی g_{1} و g_{2} است.

۳) y بین دو رویه ی $g_{1}(x,z)$ و $g_{2}(x,z)$ باشد

$$W=\begin{cases} g_{1}(x,z)\leq y\leq g_{2}(x,z) \\ (x,z)\in D \end{cases}$$

در این حالت داریم :

$$\iiint_{W} f.dv=\iint_{D}(\int_{g_{1}}^{g_{2}} f.dy)\,dx\,dz$$

۴) xبین دو رویه ی $g_{1}(y,z)$ و $g_{2}(y,z)$ باشد.

$$W=\left|\begin{array}{l} g_{1}(y,z)\le x\le g_{2}(y,z) \\ (y,z)\in D \end{array}\right.$$

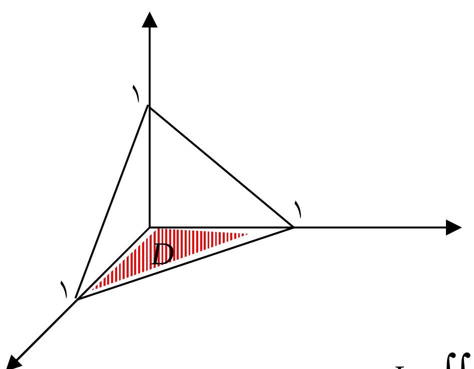
در این حالت داریم :

$$\iiint_{w} f.dv=\iint_{D}\left(\int_{g_1}^{g_2} f.dx\right)dy\,dz$$

۵) W یک ناحیه ی دلخواه باشد. در این حالت می توان W را به صورت تعداد متناهی از حالت های قبلی تقسیم کرد و سپس انتگرال را به صورت مجموع انتگرال f روی هر یک از ناحیه ها نوشت.

مثال: انتگرال $\iiint_{w} x\,dv$

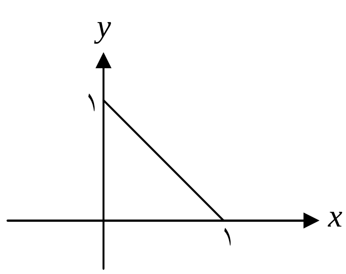
که درآن W ناحیه محدود به صفحات مختصات و صفحه $x+y+z=1$ واقع در $\frac{1}{8}$ اول فضا است را محاسبه کنید.



$$0\le z\le 1-x-y$$

$$I=\iiint_{w} x\,dv=\iint_{D}\left(\int_{0}^{1-x-y} x\,dz\right)dA$$

$$I=\iint_{D}\left((xz)\Big]_{0}^{1-x-y}\right)dA=\int_{0}^{1}\int_{0}^{1-x}\left(x-x^{2}-xy\right)dy\,dx$$

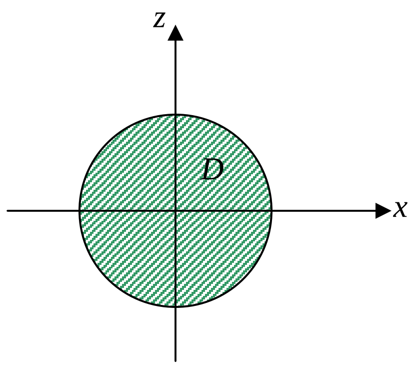


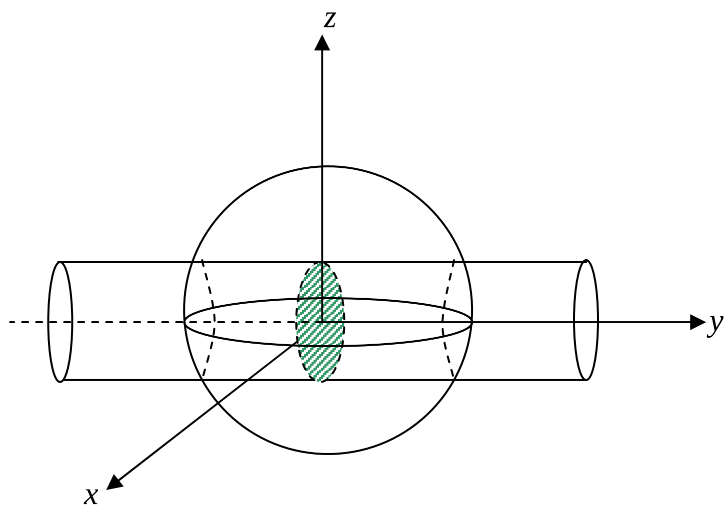
$$=\int_{0}^{1}\left(xy-x^{2}y-\frac{xy^{2}}{2}\right)_{0}^{1-x}dx$$

$$=\int_{0}^{1}\left[x(1-x)-x^{2}(1-x)-\frac{1}{2}x(1-x)^{2}\right]dx$$

مثال: مطلوبست محاسبه ی حجم ناحیه W که در آن W ناحیه ی داخل استوانه $x^۲+z^۲=۱$ و درون کره ی $x^۲+y^۲+z^۲=۴$ و $y\geq ۰$ است.

(نقش استوانه این است که D را مشخص کند یا مرز D را مشخص سازد)





$$
\begin{aligned}
V &= \iiint_{w} dV = \iint_{D} \left(\int_{۰}^{\sqrt{۴-x^۲-z^۲}} dy \right) dx\, dz \\
&= \iint_{D} \sqrt{۴-x^۲-z^۲}\, dx\, dz \\
&= \int_{۰}^{۲\pi} \int_{۰}^{۱} \left(\sqrt{۴-r^۲} \right) r\, dr\, d\theta = \int_{۰}^{۲\pi} d\theta \,.\, \int_{۰}^{۱} r\sqrt{۴-r^۲}\, dr
\end{aligned}
$$

تکنیک های محاسبه ی انتگرال سه گانه :

همانند انتگرال دوگانه، تکنیک های محاسبه ی انتگرال سه گانه دوتا می باشد :

۱- تبدیل حالتهای W به یکدیگر (تعویض ترتیب انتگرال گیری) .

از آن جائی که این روش مستلزم رسم ناحیه ی انتگرال گیری می باشد و رسم رویه ها (توابع) در $R^۳$ ساده نمی باشد، لذا خیلی مورد توجه ما نیست.

۲- روش تغییر متغیر :

همانند انتگرال دوگانه از تغییر متغیر به دو منظور استفاده می کنیم :

۱- ساده کردن فرمول تابع f .

۲- ساده کردن ناحیه ی انتگرال گیری.

قضیه تغییر متغیر به صورت زیر است :

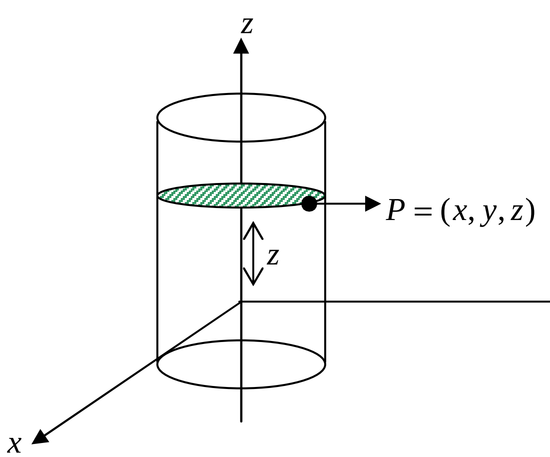
قضیه : فرض کنیم T یک تبدیل با مشتقات جزئی مرتبه ی اول پیوسته (از مرتبه ی c^1) باشد به طوری که ناحیه ی W' در فضای uvw را بر روی ناحیه ی W در صفحه ی xyz منتقل می کند و $j(T) \neq 0$. همچنین فرض کنیم f روی W پیوسته و T یک به یک باشد. در این صورت

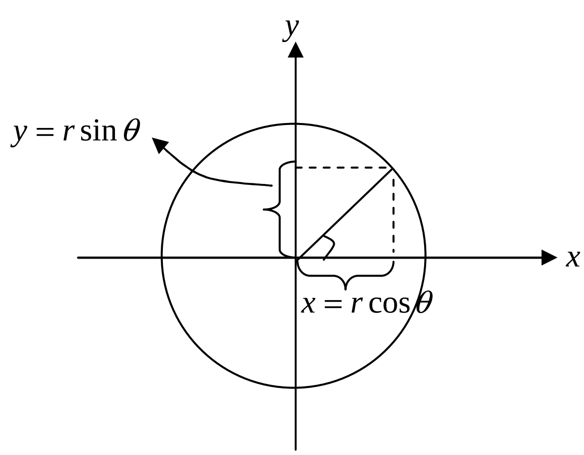
$$\iiint_{W} f\,.dv = \iiint_{W'} f\left(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\right).\left| j(T) \right| dudvdw \;.$$

از آنجائی که در تغییر متغیرهای دلخواه رسم ناحیه ی W'مستلزم رسم رویه های مرزی W'می باشد، لذا تغییر متغیرهای کلی مورد نظر ما نمی باشد. فقط دو تغییر متغیر عمده یعنی تغییر متغیر در مختصات کروی و تغییر متغیر در مختصات استوانه ای مورد توجه می باشند.

الف) مختصات استوانه ای :

فرض کنیم نقطه ی $P(x,y,z)$واقع بر استوانه ی $x^2+y^2=r^2$ باشد





داریم:

$$T\,(r,\theta,z)=(\,r\cos\theta, r\sin\theta, z)\quad .$$

اگر استوانه در امتداد محور yها باشد، آنگاه y ثابت است و xو z با استفاده از مختصات قطبی بدست می‌آیند.

اگر استوانه در امتداد محور xها باشد، آنگاه x ثابت است و y و z با استفاده از مختصات قطبی بدست می‌آیند.

در حقیقت می توان گفت مختصات استوانه ی تعمیم مختصات قطبی در $R^{۳}$ می باشد.

$$T:\ (r,\theta,z)\rightarrow(x,y,z)$$

$$T(r,\theta,z)=(r\cos\theta, r\sin\theta, z)$$

$$T^{-۱}(x,y,z)=(\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}\,,\tan^{-۱}(\frac{y}{x}),z)$$

$$j(T)=\begin{vmatrix}\cos\theta & \sin\theta & ۰\\ -r\sin\theta & r\cos\theta & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱\end{vmatrix}=r$$

حال این سؤال مطرح می شود که چه موقع از مختصات استوانه ای در انتگرال **۳** گانه استفاده می کنیم :

اگر هر یک از مؤلفه های $T^{-۱}$ یا عباراتی شامل آنها در فرمول f یا در فرمول ناحیه ی انتگرال گیری ظاهر شد، بهتر است از تغییر متغیر استوانه ای استفاده کنیم.

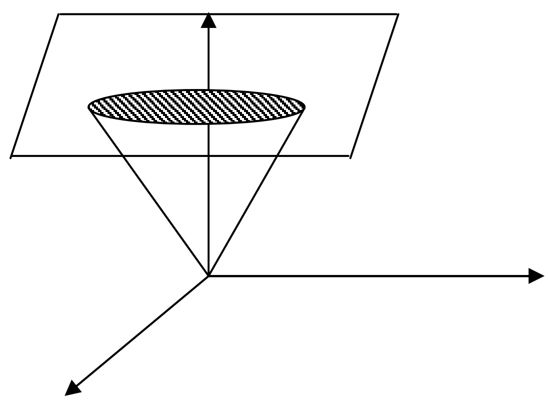
همچنین اگر $\tan^{-۱}\left(\frac{y}{x}\right)$ یا $\tan^{-۱}\left(\frac{y}{z}\right)$ یا $\tan^{-۱}\left(\frac{x}{z}\right)$ در فرمول تابع یا در ناحیه ی انتگرال گیری ظاهر شود، بهتر است از تغییر متغیر استوانه ای استفاده کنیم. به طور خلاصه در کاربرد مختصات استوانه‌ای ابتدا

نسبت به یکی از متغیرها انتگرال می گیریم و در انتگرال دوگانه حاصل تغییر متغیر قطبی را انجام می دهیم.

مثال: $\iiint x^۲y^۲\, dv$، که در آن W محدود به مخروط $z=\sqrt{x^۲+y^۲}$ و صفحه ی $z=a>\circ$ می باشد را با استفاده از مختصات استوانه ای محاسبه کنید.

$$V=\iiint x^۲y^۲dv=\iint_D\Big(\int_{\sqrt{x^۲+y^۲}}^{a}x^۲y^۲dz\Big)\,dA$$

$$V=\iint_{\substack{D\\ x^۲+y^۲\le a^۲}}x^۲y^۲\left(a-\sqrt{x^۲+y^۲}\right)dx\,dy$$

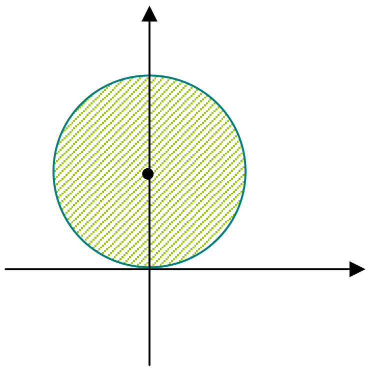


$$V=\int_\circ^{۲\pi}\int_\circ^{a}r^۴\sin^۲\theta\cos^۲\theta(a-r)(r)\,dr\,d\theta=\int_\circ^{۲\pi}\sin^۲\theta\cos^۲ d\theta\,.\int_\circ^{a}r^۵(a-r)dr$$

$$V=\frac{۱}{۴}\int_\circ^{۲\pi}\left(\sin^۲ ۲\theta\right)^۲.\,d\theta.\left(\frac{ar^۶}{۶}-\frac{r^۷}{۷}\right)_\circ^a\quad .$$

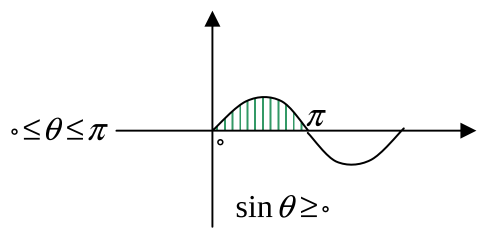
ب) $$\iiint_W\left(x^۳+y^۳\right)dV$$

که در آن T محدود به استوانه ی $x^2+y^2=y$ و سهمی گون $z=x^2+y^2$ و صفحه ی $z=0$ است.



$$I=\iint_D \left(\int_0^{x^2+y^2} (x^3+y^3)\, dz \right) dx\, dy$$

$$I=\iint_D \left(x^3+y^3\right)\left(x^2+y^2\right) dx\, dy$$



$$x^2+y^2=y$$
$$r^2=r\sin\theta$$
$$r=\sin\theta$$

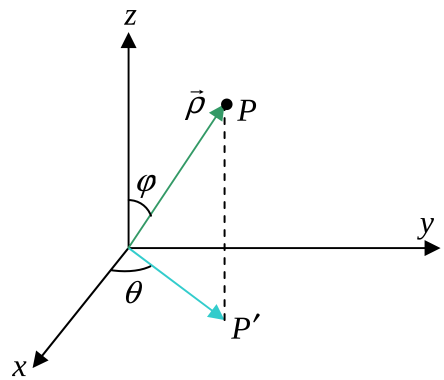
$$I=\int_0^{2\pi}\int_0^{\sin\theta}\left(r^3\cos^3\theta+r^3\sin^3\theta\right).r^2.r\,dr\,d\theta$$

$$\Rightarrow I=\int_0^{\pi}\int_0^{\sin\theta}\left(\cos^3\theta+\sin^3\theta\right).\,r^6.\,dr\,d\theta=\frac{1}{7}\int_0^{\pi}\left(\cos^3\theta+\sin^3\theta\right)\sin^7\theta\,d\theta$$

مختصات کروی :

فرض کنیم $P(x,y,z)$ نقطه ای روی کره ی $x^2+y^2+z^2=a^2$ باشد. ابتدا مختصات کروی را نسبت به محور z ها می نویسیم.

فرض کنیم φ زاویه ای است که بردار op با محور z ها می سازد و θ زاویه ای که op' با محور x ها می سازد که در آن op' تصویر op در صفحه xy است قرار می دهیم، $\rho=\|op\|$ و $u=\|op'\|$ داریم



$$\begin{cases} z = \rho\cos\varphi \\ u = \rho\sin\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = u\cos\theta \\ y = u\sin\theta \end{cases}$$

$$T:(\rho,\theta,\varphi)\to(x,y,z)$$

$$T:\left| \begin{array}{l} x = \rho\sin\varphi\cos\theta \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta \\ z = \rho\cos\varphi \end{array} \right.$$

حدود φ وابسته به z است. و $\circ \le \varphi \le \pi$ است.

حدود θ وابسته به x و y است و مانند مختصات قطبی می باشد.

$$T^{-1}:(x,y,z) \;\to\; (\rho,\theta,\varphi)$$

$$T^{-1}: \begin{cases} \rho = \sqrt{x^{2}+y^{2}+z^{2}} \\ \varphi = \tan^{-1}\left(\dfrac{u}{z}\right) = \tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{x^{2}+y^{2}}}{z}\right) \\ u = \rho\sin\varphi = \sqrt{x^{2}+y^{2}} \\ \theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right) \end{cases}$$

اگر φ زاویه ای باشد که با محور xها ساخته می شود در اینصورت جای x و z در روابط بالا عوض می-

شوند.

حال این سوال مطرح می شود در چه موقعی از مختصات کروی استفاده کنیم :

هر موقع در انتگرال مورد نظر عباراتی مانند $x^۲+y^۲+z^۲$ ، $\sqrt{x^۲+y^۲}$ ، $\tan^{-۱}\left(\frac{\sqrt{x^۲+y^۲}}{z}\right)$ و یا

عباراتی شامل این ها در فرمول تابع f یا در فرمول ناحیه ی انتگرال گیری ظاهر شود، بهتر است از

مختصات کروی استفاده کنیم .

ژاکوبین مختصات کروی به صورت زیر است :

$$j(T)=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \rho} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\theta & \sin\varphi\sin\theta & \cos\varphi \\ -\sin\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta & ۰ \\ \rho\cos\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta & -\rho\sin\varphi \end{vmatrix}$$

$$=\rho^۲\sin\varphi$$

مثال: انتگرال $\iiint\limits_{W} e^{(x^۲+y^۲+z^۲)}\,dV$ را وقتی که W ناحیه محدود به کره واحد است را محاسبه کنید.

حل:

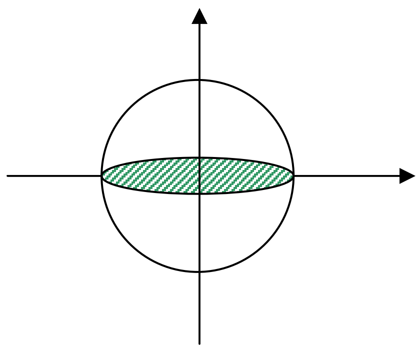
$$\iiint\limits_{W} e^{(x^۲+y^۲+z^۲)^{\frac{۳}{۲}}}\,dV =$$

$$=\int_۰^{۲\pi}\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\int_۰^{۱} e^{\rho^۳}\,.\,\rho^۲\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$$

$$=۲\pi\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\sin\varphi\,d\varphi\,.\int_۰^{۱} e^{\rho^۳}\,.\,\rho^۲ d\rho$$

$$=۲\pi\left(-\cos\varphi\right)_۰^{\frac{\pi}{۲}}\,.\,\left(\frac{۱}{۳}e^{\rho^۳}\right)_۰^{۱}\quad .$$

که در آن w کره ی واحد است.



$$I=\int_{۰}^{۲\pi}\int_{۰}^{\pi}\int_{۰}^{۱} e^{\left(\rho^{۲}\right)^{\frac{۳}{۲}}}\varphi\,\rho^{۲}\sin\varphi\,dp\,d\varphi\,d\theta$$

$$I=\int_{۰}^{۲\pi}d\theta.\int_{۰}^{\pi}\varphi\sin\varphi\,d\varphi.\int_{۰}^{۱}\rho^{۲}e^{\rho^{۳}}\,d\rho$$

$$I=۲\pi\left[-\varphi\cos\varphi+\sin\varphi\right]_{۰}^{\pi}.\left(\frac{۱}{۳}(e-۱)\right)$$

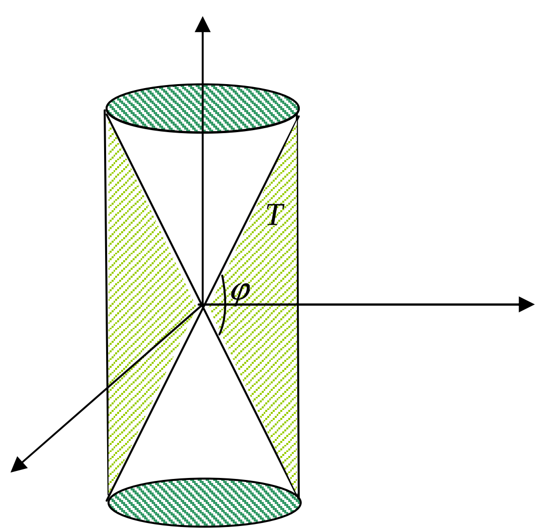
در مختصات کروی مخروط در ناحیه ی انتگرال گیری همواره مشخص کننده ی حدود زاویه ی φ است.

مثال: انتگرال

$$\iiint_{T}\frac{۱}{x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}}\,dV$$

که در آن T محدود به استوانه $x^{۲}+y^{۲}=۴$ و مخروط $x^{۲}+y^{۲}=z^{۲}$ است را محاسبه کنید.

حل: مخروط حدود φ و استوانه حدود x و y را مشخص می کند.



$$I=\int_{0}^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\int_{0}^{\frac{2}{\sin\varphi}}\frac{1}{\rho^2}\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$$

$$\varphi=\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right)=\tan^{-1}(1)\quad\Rightarrow\qquad\varphi=\frac{\pi}{4}\quad \text{و}\quad \phi=\frac{3\pi}{4}$$

چون $0\le\varphi\le\pi$ می باشد.

برای این که حدود ρ را مشخص کنیم، خطوطی را از مبدأ رسم می کنیم و بررسی می کنیم که ابتدا و انتهای این خطوط درون W به چه رویه هایی محدود است. این رویه را در مختصات کروی می نویسیم و حدود ρ را محاسبه می کنیم.

$$x^2+y^2=4$$

$$\rho^2\sin^2\varphi=4\ \underset{\sin\varphi>0}{\overset{\rho>0}{\rightarrow}}\ \rho\sin\varphi=2\rightarrow\rho=\frac{2}{\sin\varphi}\qquad 0\le\rho\le\frac{2}{\sin\varphi}$$

$$I=\int_{0}^{2\pi}d\theta\ .\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\left(\int_{0}^{\frac{2}{\sin\varphi}}\sin\varphi\,d\rho\right)d\varphi$$

$$=2\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}2d\varphi=4\pi\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)=2\pi^2$$

مثال: مطلوبست محاسبه

$$I=\iiint_W\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)dV$$

که در آن W ناحیه درون بیضی گون

$$\frac{x^{۲}}{a^{۲}}+\frac{y^{۲}}{b^{۲}}+\frac{z^{۲}}{c^{۲}}=۱$$

است.

حل:

$$T:\begin{cases} x=au \\ y=bv \\ z=cw \end{cases} \quad \Rightarrow \quad j(T)=abc$$

$$I=\iiint_{u^{۲}+v^{۲}+w^{۲}\leq ۱}(u^{۲}+v^{۲}+w^{۲})\,abc\;du\,dv\,dw$$

$$I=abc\int_{۰}^{۲\pi}\int_{۰}^{\pi}\int_{۰}^{۱}\rho^{۲}.\,\rho^{۲}\sin\varphi.\,d\rho\,d\varphi\,d\theta=abc\int_{۰}^{۲\pi}d\theta\;.\;\int_{۰}^{\pi}\sin\varphi\;.\;d\varphi\;.\;\int_{۰}^{۱}\rho^{۴}d\rho$$

$$I=abc\,(۲\pi)\,(-\cos\varphi]_{۰}^{x})\,(\frac{\rho^{۵}}{۵}\Big]_{۰}^{۱})=\frac{۴}{۵}\pi\,abc$$

مثال: حجم محصور بین صفحات $x+y+z=۱$ و $x+y+z=۲$ و استوانه ی $x^{۲}+z^{۲}=۱$ را محاسبه کنید.

حل:

$$V=\iiint_{W}dV$$

$$V=\iint_{\substack{D \\ x^{۲}+z^{۲}\leq ۱}}\left(\int_{۱-z-x}^{۲-z-x}dy\right)dx\,dz$$

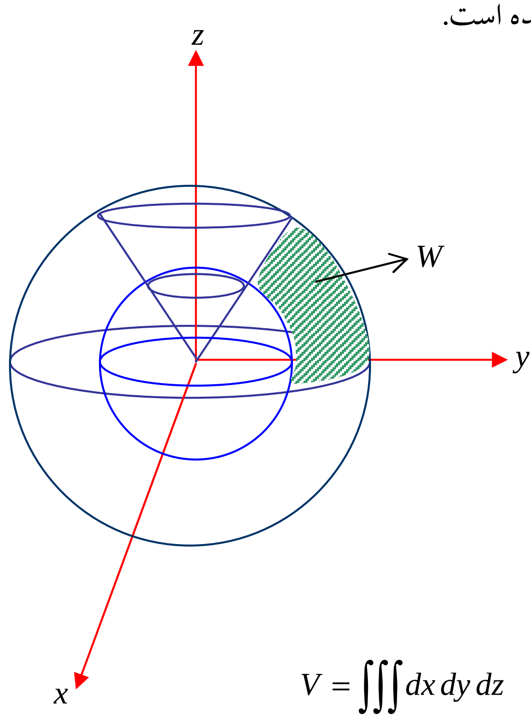
$$V=\iint_{D}(۲-z-x-۱+z+x)\,dx\,dz=\iint_{D}dx\,dz=$$ مساحت دایره ای به شعاع ۱

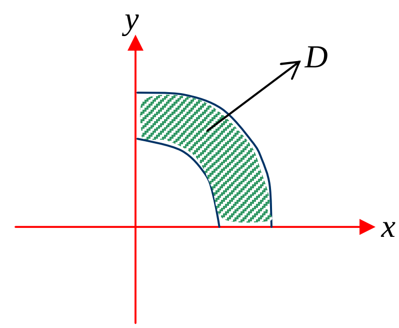
$$V=\pi \quad .$$

مثال: انتگرال
$$I=\iiint_T \frac{dv}{\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}}$$

که در آن T ناحیه ی بین دو کره ی $x^۲+y^۲+z^۲=۱$ و $x^۲+y^۲+z^۲=e$ و خارج از مخروط $z^۲=x^۲+y^۲$ می باشد. واقع در $\frac{۱}{۸}$ اول فضا می باشد را محاسبه کنید.

حل: ناحیه W و D در شکلهای زیر مشخص شده است.





$$V=\iiint_W dx\,dy\,dz$$
$$=\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\int_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۲}}\int_۰^{\sqrt{e}}\frac{۱}{\rho}\,.\,\rho^۲\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$$
$$=\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}d\theta.\int_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۲}}\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi.\int_۱^{\sqrt{e}}\rho\,d\rho$$
$$=\frac{\pi}{۲}(-\cos\varphi)_{\pi/۴}^{\pi/۲}\,.\,(\frac{\rho^۲}{۲})_۱^{\sqrt{e}}\,.$$

مثال: مسأله ی ۲۲۳)

حجم ناحیه محدود به استوانه های $y^۲=۴-۳x$ و $y^۲=x$ و صفحات $z=۹$ و $z=-۹$ بدست آورید :

استوانه همیشه حدود x و y را مشخص می سازد.

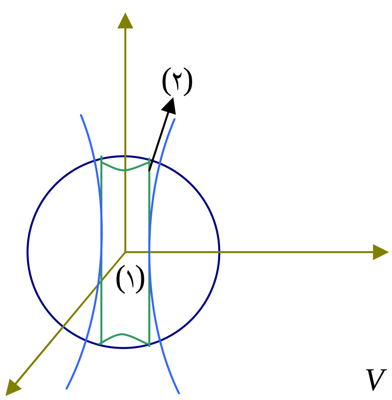
$$V=\iiint_{w} dx\,dy\,dz=\iint_{D}\left(\int_{-۹}^{۹} dz\right)\,dx\,dy=\iint_{D} ۱۸\,dx\,dy$$

$$V=\int_{-۱}^{۱}\left(\int_{y^۲}^{\frac{۴}{۳}-\frac{۱}{۳}y^۲} dx\right) dy$$

$$\begin{cases} x=y^۲ \\ x=\frac{۴}{۳}-\frac{۱}{۳}y^۲ \end{cases} \Rightarrow y^۲=\frac{۴}{۳}-\frac{۱}{۳}y^۲ \;\rightarrow y^۲=۱ \quad \Rightarrow y=\pm ۱$$

مثال: مسأله ی ۲۲۹

با استفاده از مختصات استوانه ای حجم ناحیه T شامل مبدأ و محدود به هذلولی گون $x^۲+y^۲-z^۲=۱$ و کره ی $x^۲+y^۲+z^۲=۳$ را پیدا کنید.

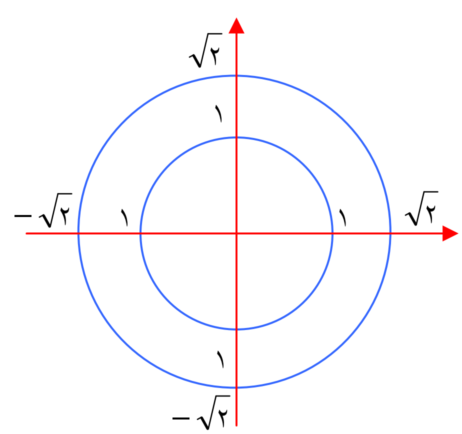


$$V=\iiint_{T} dV=۲\iiint_{T} dV=۲\left[\iiint_{T_۱} dV+\iiint_{T_۲} dV\right]$$

$$z\rangle ۰$$

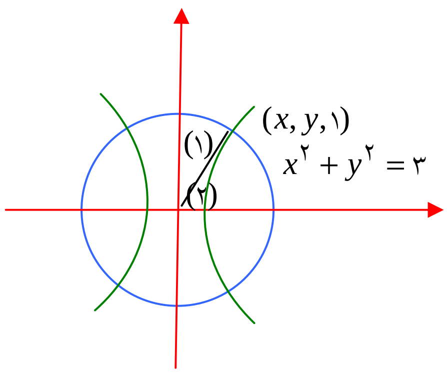
$$V=۲\left[\iint_{x^۲+y^۲\le ۱}\left(\int_{۰}^{\sqrt{۳-x^۲-y^۲}} dz\right)dx\,dy+\iint_{D_۲}\left(\int_{\sqrt{x^۲+y^۲-۱}}^{\sqrt{۳-x^۲-y^۲}} dz\right) dx\right.$$

$$D_۲=\left|\begin{array}{c} x^۲+y^۲+z^۲=۳ \\ x^۲+y^۲-z^۲=۱ \\ \hline x^۲+y^۲=۲ \end{array}\right.$$



$$V=۲\left[\int_{۰}^{۲\pi}\int_{۰}^{۱}\sqrt{۳-r^{۲}}\,.r.dr\,d\theta+\int_{۰}^{۲}\int_{۱}^{\sqrt{۲}}\left(\sqrt{۳-r^{۲}}-\sqrt{r^{۲}-۱}\right).r.dr\,d\,\theta\right]$$

حل: (با استفاده از مختصات کروی)



$$\left|\begin{array}{l} x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=۳ \\ x^{۲}+y^{۲}-z^{۲}=۱ \end{array}\right. \quad \underset{z=\pm۱}{\Rightarrow} x^{۲}+y^{۲}=۲$$

$$\varphi=\tan^{-۱}\left(\frac{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}}{z}\right)=\tan^{-۱}\left(\sqrt{۲}\right)=\alpha$$

$$x^{۲}+y^{۲}-z^{۲}=۱$$

$$\rho^{۲}\cos\varphi=\rho^{۲}\sin^{۲}\varphi-۱$$

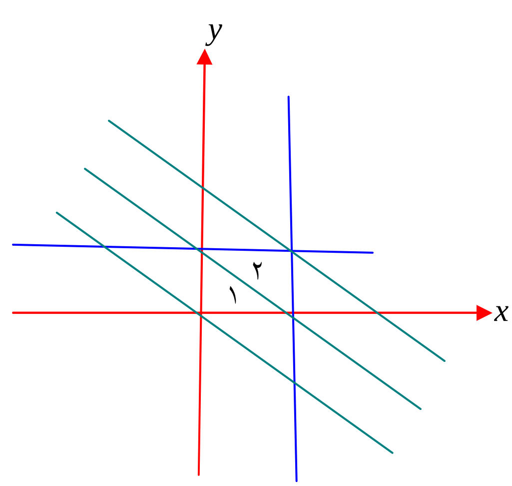
$$\rho=g(\varphi)$$

$$V=۲\left[\int_{۰}^{۲\pi}\int_{۰}^{\alpha}\int_{۰}^{\sqrt{۳}}\rho^{۲}\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta+\int_{۰}^{۲\pi}\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{۲}}\int_{۰}^{g(\varphi)}\rho^{۲}\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta\right]$$

مثال: انتگرال زیر را حساب کنید.

$$\int_{۰}^{۱}\int_{۰}^{۱}[x+y]dx\,dy$$

$$\begin{array}{r} ۰\le x\le ۱ \\ ۰\le y\le ۱ \\ ۰\le x+y\le ۲ \end{array} \rightarrow \left|\begin{array}{lll} ۰\le x+y < ۱ & \rightarrow & [x+y]=۰ \\ ۱\le x+y < ۲ & & [x+y]=۱ \\ x+y=۲ & & [x+y]=۲ \end{array}\right.$$



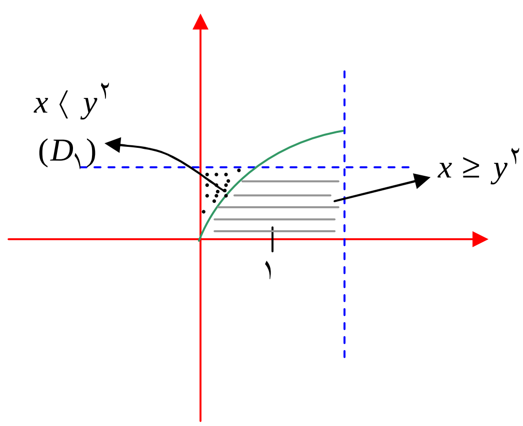
مثال) انتگرال زیر را حساب کنید.

$$\iint_D \left| x-y^{۲} \right| dx\,dy \qquad D=[۰,۲]\times[۰,۱]$$

$$\left| x-y^{۲} \right| = \begin{cases} x-y^{۲} & : if \quad x-y^{۲} \geq ۰ \quad \Rightarrow \quad x \geq y^{۲} \\ y^{۲}-x & : if \quad x-y^{۲} < ۰ \quad \Rightarrow \quad x < y^{۲} \end{cases}$$

ابتدا قدرمطلق را با استفاده از تعریف حذف می کنیم.

برداشتن قدرمطلق (یا جزء صحیح) باعث شکستن ناحیه می شود.



$$I=\iint_{D_۱} (y^{۲}-x)\; dx\,dy + \iint_{D_۲} (x-y^{۲})\; dx\,dy$$

$$I=\int_۰^۱ \left(\int_۰^{y^۲} (y^{۲}-x)\; dx\right) dy + \int_۰^۱ \left(\int_{y^۲}^۱ (x-y^{۲})\; dx\,dy\right) + \int_۰^۱\int_۱^۲ (x-y^{۲})\; dx\,dy$$