Subject:
Year. Month. Day.

تمرین : آیا می‌توان گفت برای هر $\alpha \in R$ ، عدد حقیقی r وجود دارد به طوری که $\alpha = r^*$ ؟

حل : $\left. \begin{array}{l} \forall \alpha \in R ; \alpha \subseteq R \\ \forall \alpha \in R ; \alpha \neq Q \Rightarrow \exists x_0 \in Q ; \forall y \in \alpha ; x_0 > y \Rightarrow \text{یک کران بالا دارد} \end{array} \right\} \xRightarrow[\text{حقیقی}]{\text{اصل کمال اعداد}} \exists r \in R ; r = Sup(\alpha)$

ابتدا نشان می‌دهیم $\alpha \subseteq r^*$.

فرض کنیم $x \in \alpha$. چون $r = Sup(\alpha)$ ، r کوچکترین کران بالای α بوده و $\forall y \in \alpha ; r \geq y$

پس $x \leq r$.

فرض کنیم $x = r$. در این صورت x یک کران بالای α بوده و $\forall y \in \alpha ; y \leq x$

که این مطلب با توجه به اینکه α یک برش ددکیند بوده ، $x \in \alpha$ ، غیرممکن است. بنابراین ، $x < r$.

یعنی $x \in r^*$.

پس $\alpha \subseteq r^*$.

حال نشان می‌دهیم $r^* \subseteq \alpha$

فرض کنیم $x \in r^*$ و نیز $x \notin \alpha$ (فرض خلف)

$x \notin \alpha \xRightarrow[\text{برش ددکیند}]{\alpha \text{ یک}} \forall y \in \alpha ; x > y \Rightarrow$ x یک کران بالای α است

از طرفی، چون $x \in r^*$ ، داریم $x < r$. یعنی یک کران بالای کوچکتر از $Sup(\alpha)$ برای α

وجود دارد که این یک تناقض است. پس فرض خلف باطل بوده و نتیجه می‌شود $x \in \alpha$.

بنابراین، $\gamma^* \subseteq \alpha$.

و به طور کلی $\alpha = \gamma^*$. $\blacksquare$