از طرفی، طبق فرض، B بسته نیز می‌باشد. لذا B فشرده است.

تمرین ۴_۹: $B \subseteq \mathbb{R}$ بسته است، بنابراین، B^c باز است و چون $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ پیوسته است، $f^{-1}(B^c)$ نیز باز خواهد بود. از طرفی، $f^{-1}(B^c) = [f^{-1}(B)]^c$ بنابراین، $[f^{-1}(B)]^c$ باز است.

لذا، $f^{-1}(B)$ بسته است.

تمرین ۴_۱۰: فرض خلف: فرض کنیم $f(D)$ ناهمبند باشد. در این صورت، زیرمجموعه‌های ناتهی A، B از $\mathbb{R}$ وجود دارند به طوری که $A \cap \overline{B} = \overline{A} \cap B = \emptyset$ و $f(D) = A \cup B$

در این صورت،

$D \subseteq f^{-1}(f(D)) = f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \Rightarrow D = D \cap (f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B))$

$\Rightarrow D = (D \cap f^{-1}(A)) \cup (D \cap f^{-1}(B))$

■ $D \cap f^{-1}(B) \neq \emptyset$ و $D \cap f^{-1}(A) \neq \emptyset$ زیرا اگر مثلاً $D \cap f^{-1}(A) = \emptyset$،

آنگاه، $D = D \cap f^{-1}(B)$ پس، $D \subseteq f^{-1}(B)$ لذا $f(D) \subseteq f(f^{-1}(B)) \subseteq B$.

یعنی، $A \cup B \subseteq B$ بنابراین، $A \subseteq B$ چون $B \subseteq \overline{B}$، پس $A \subseteq \overline{B}$، $A \cap \overline{B} = A$.

از این رو، $A = \emptyset$ که می‌دانیم چنین نیست پس، $D \cap f^{-1}(A) \neq \emptyset$.

به طور مشابه، $D \cap f^{-1}(B) \neq \emptyset$

■ حال نشان می‌دهیم $\overline{(D \cap f^{-1}(A))} \cap (D \cap f^{-1}(B)) = (D \cap f^{-1}(A)) \cap \overline{(D \cap f^{-1}(B))} = \emptyset$

فرض خلف: فرض کنیم $\overline{(D \cap f^{-1}(A))} \cap (D \cap f^{-1}(B)) \neq \emptyset$ در این صورت، چون

$$\overline{(D \cap f^{-1}(A))} \cap (D \cap f^{-1}(B)) \subseteq (D \cap f^{-1}(A)) \cap (\overline{D} \cap \overline{f^{-1}(B)})$$
$$= (D \cap \overline{D}) \cap (f^{-1}(A) \cap \overline{f^{-1}(B)})$$
$$\subseteq f^{-1}(A) \cap \overline{f^{-1}(B)}$$

پس، $f^{-1}(A) \cap \overline{f^{-1}(B)} \neq \emptyset$ یعنی وجود دارد $a \in \mathbb{R}$ به طوری که $a \in f^{-1}(A) \cap \overline{f^{-1}(B)}$

پس، $a \in f^{-1}(A)$ ، $a \in \overline{f^{-1}(B)}$.

چون $a \in f^{-1}(A)$ ، $f(a) \in A$. (I)

حال نشان می‌دهیم $f(a) \in \bar{B}$ یعنی نشان می‌دهیم $\forall r>0;\ N_r(f(a)) \cap B \neq \emptyset$

فرض کنید $r>0$ داده شده باشد. چون f در a پیوسته است، $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ پس برای $r>0$

$$\exists \delta>0;\ \forall x \in \underbrace{D_f}_{\mathbb{R}} \cap N_\delta(a);\ f(x) \in N_r(f(a)) \quad (*)$$

از فرض، $a \in \overline{f^{-1}(B)}$ پس، $N_\delta(a) \cap f^{-1}(B) \neq \emptyset$

$$\Rightarrow \exists y \in \mathbb{R};\ y \in N_\delta(a),\ y \in f^{-1}(B)$$
$$\overset{(*)}{\Rightarrow} \exists y \in \mathbb{R};\ f(y) \in N_r(f(a)),\ f(y) \in B$$
$$\Rightarrow N_r(f(a)) \cap B \neq \emptyset$$

پس، $f(a) \in \bar{B}$. (II)

طبق روابط (I) و (II)، $f(a) \in A \cap \bar{B}$. تناقض است با $A \cap \bar{B} = \emptyset$. این تناقض

نشان می‌دهد فرض خلف باطل بوده و حکم برقرار است یعنی $(D \cap f^{-1}(A)) \cap \overline{(D \cap f^{-1}(B))} = \emptyset$

به طریق مشابه، $\overline{(D \cap f^{-1}(A))} \cap (D \cap f^{-1}(B)) = \emptyset$.

بنابراین، D به صورت اجتماع دو مجموعه از هم جدا شده نوشته می‌شود. لذا D ناهمبند است که

این مطلب با فرض اولیه (همبند بودن D) در تناقض است پس، فرض خلف باطل بوده و حکم برقرار است

یعنی، $f(D)$ همبند است.