Subject:
Year. Month. Day.

تمرین: اگر (a_n) دنباله‌ای کراندار و $\alpha \in \mathbb{R}$ باشد، آنگاه

$$\alpha \le \liminf a_n \iff \forall \varepsilon>0 : \exists N\in\mathbb{N} : \forall n\ge N : a_n > \alpha-\varepsilon$$

حل: ■ ابتدا فرض کنیم $\alpha \le \liminf a_n$.

بنابراین، برای هر $\varepsilon>0$، $\alpha-\varepsilon < \alpha \le \liminf a_n$. یعنی $\alpha-\varepsilon < \liminf a_n$.

از طرفی، $\liminf a_n = \sup\limits_k \inf\limits_{n\ge k} a_n$. پس،

$$\exists k\in\mathbb{N} ; \quad \alpha-\varepsilon < \inf_{n\ge k} a_n \le \liminf a_n$$

قرار می‌دهیم $N=k$. داریم:

$$\forall n\ge N : \quad \alpha-\varepsilon < \inf_{n\ge k} a_n \le a_n$$

بنابراین، ثابت کردیم

$$\forall \varepsilon>0 : \exists N\in\mathbb{N} : \forall n\ge N : a_n > \alpha-\varepsilon$$

■ حال، فرض کنیم

$$\forall \varepsilon>0 : \exists N\in\mathbb{N} : \forall n\ge N : a_n > \alpha-\varepsilon$$

از تعریف بالا نتیجه می‌گیریم

$$\forall n\ge N : \quad b_n = \inf\{a_k : k\ge n\} \ge \alpha-\varepsilon$$

پس، با توجه به اینکه $b_n \le \liminf a_n = \sup\{b_n : n\in\mathbb{N}\}$، داریم:

$$\forall \varepsilon>0 : \liminf a_n \ge \alpha-\varepsilon$$

پس، می‌توان نتیجه گرفت $\alpha \le \liminf a_n$.

[چرا که در غیر این صورت، $\alpha > \liminf a_n$ و لذا $\varepsilon>0$ وجود دارد که $\alpha > \alpha-\varepsilon > \liminf a_n$ ✗]

Subject:

Year. Month. Day.

تمرین: اگر a_n دنباله‌ای کراندار و $\alpha \in \mathbb{R}$ باشد، آنگاه

$$\liminf a_n \le \alpha \iff \forall \varepsilon>0 : \forall N \in \mathbb{N} : \exists n \in \mathbb{N},\ n \ge N : a_n < \alpha+\varepsilon$$

حل: ■ ابتدا فرض کنیم $\liminf a_n \le \alpha$.

برای هر $\varepsilon>0$، $\alpha+\varepsilon > \alpha \ge \liminf a_n = \sup\limits_{N} \inf\limits_{n\ge N} a_n$

پس، برای هر $N \in \mathbb{N}$، $\alpha+\varepsilon > \inf\limits_{n \ge N} a_n$

پس، طبق خاصیت Inf، $\exists n \in \mathbb{N},\ n \ge N : \inf\limits_{n\ge N} a_n \le a_n < \alpha+\varepsilon$

بنابراین، ثابت کردیم $\forall \varepsilon>0 : \forall N \in \mathbb{N} : \exists n \in \mathbb{N},\ n \ge N : a_n < \alpha+\varepsilon$

■ حال، فرض می‌کنیم $\forall \varepsilon>0 : \forall N \in \mathbb{N} : \exists n \in \mathbb{N},\ n \ge N : a_n < \alpha+\varepsilon$

از طرفی، می‌دانیم $\forall N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N},\ n \ge N : a_n \ge b_N = \mathrm{Inf}\{a_k : k \ge N\}$

از دو رابطه بالا نتیجه می‌گیریم:

$$\forall \varepsilon>0 : \forall N \in \mathbb{N} : b_N < \alpha+\varepsilon$$

بنابراین، $\forall \varepsilon>0 : \liminf a_n = \sup\{b_N : N \in \mathbb{N}\} \le \alpha+\varepsilon$

از این رو، می‌توان نتیجه گرفت $\liminf a_n \le \alpha$.

چرا که در غیر این صورت: $\liminf a_n > \alpha$ لذا: $\varepsilon>0$ وجود دارد $\liminf a_n > \alpha+\varepsilon > \alpha$ {خ.ف.