زیردنباله‌های مکمل :

می‌خواهیم نشان دهیم

۱- اگر تعدادی نامتناهی زیردنباله‌ی مکمل a_n کراندار باشند، دنباله a_n لزوماً کراندار نیست.

۲- اگر تعدادی نامتناهی زیردنباله‌ی مکمل a_n همگرا به α باشند، دنباله a_n لزوماً همگرا نیست.

■ برای این منظور، ابتدا نشان می‌دهیم مجموعه اعداد اول (P) بی‌کران است.

فرض خلف: فرض کنیم P از بالا کراندار باشد. پس $\alpha \in \mathbb{R}$ وجود دارد به طوری که $\forall p \in P\ ;\ p \leq \alpha$

از طرفی، $\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ n \leq \alpha \Rightarrow n \leq [\alpha]$. بنابراین، تعداد اعداد طبیعی کوچکتر یا مساوی α برابر $[\alpha]$ است. چون $P \subseteq \mathbb{N}$، تعداد اعداد اول کوچکتر یا مساوی α نیز، حداکثر برابر $[\alpha]$ است. اما طبق فرض، همه اعداد اول کوچکتر یا مساوی α می‌باشند. بنابراین $Card(P) \leq [\alpha]$. این مطلب غیرممکن است. چون طبق قضیه اقلیدس، مجموعه اعداد اول نامتناهی است.

■ برای هر عدد طبیعی $n \geq 2$، طبق قضیه اساسی حساب، می‌توان n را به شکل حاصل‌ضرب یگانه از اعداد اول نوشت؛ کوچکترین عامل اول n را با p_n نمایش می‌دهیم. (قرارداد $p_1 = 2$)

۱- تعریف می‌کنیم

$$a_n = p_n$$

اگر برای هر $k \in \mathbb{N}$، n_{p_k} را kامین عدد طبیعی در نظر بگیریم که کوچکترین عامل اول آن برابر p است، آنگاه $\{n_{p_k}\}$ یک زیردنباله از دنباله‌ی اعداد طبیعی بوده و درنتیجه، $a_{n_{p_k}}$ یک زیردنباله از a_n خواهد بود.

برای هر $k \in \mathbb{N}$، $a_{n_{p_k}} = p$. پس، برای هر $k \in \mathbb{N}$، $|a_{n_{p_k}}| \leq p$. یعنی $a_{n_{p_k}}$ یک زیردنباله کراندار است.

از طرفی، به ازای همه‌ی اعداد اول p، $a_{n_{p_k}}$ها زیردنباله‌های مکمل a_n هستند. پس، a_n تعدادی نامتناهی زیردنباله مکمل دارد که هریک از آن‌ها کراندارند. اما a_n کراندار نیست؛ چراکه اگر a_n کراندار باشد،

$$\exists M > 0 : \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq M \quad (*)$$

همان طور که نشان دادیم مجموعه اعداد اول بی‌کران است. پس، عدد اول p وجود دارد به طوری که $p > M$. اما کوچکترین عامل اول p، همان p است. پس، $a_p = p$. یعنی $|a_p| > M$ که این متناقض با فرض (*) است. پس، a_n نمی‌تواند کراندار باشد.

۲- تعریف می‌کنیم $a_n = \frac{P_n}{n}$

برای هر عدد اول p، زیردنباله $a_{n_{p_k}}$ را مشابه بخش ۱ تعریف می‌کنیم.

برای هر عدد اول p، هر $k \in \mathbb{N}$، $a_{n_{p_k}} = \frac{p}{n_{p_k}}$. لذا $\lim_{k \to \infty} a_{n_{p_k}} = 0$.

همان طور که در بخش ۱ گفته شد، به ازای همه اعداد اول p، $a_{n_{p_k}}$ ها زیردنباله‌های مکمل a_n هستند. پس، a_n به تعداد نامتناهی زیردنباله مکمل همگرا به صفر دارد. اما a_n همگرا به صفر نیست؛ چرا که اگر $a_n \to 0$،

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N > 0 : \forall n > N : |a_n - 0| < \varepsilon$$

به ویژه، برای $\varepsilon = 1$،

$$\exists N_0 > 0 : \forall n > N_0 : |a_n - 0| < 1 \quad (*')$$

چون مجموعه اعداد اول بی‌کران است، عدد اول p وجود دارد به طوری که $p > N_0$. اما کوچکترین عامل اول p، همان p است. پس، طبق تعریف دنباله a_n، $a_p = \frac{p}{p} = 1$. بنابراین، $|a_p - 0| \not< 1$ که این متناقض با فرض $(*')$ است. پس، a_n همگرا به صفر نیست.