تمرین: نشان دهید دنباله $a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ همگراست.

حل: ابتدا نشان می‌دهیم دنباله a_n یک دنباله کوشی است. بنابراین نشان می‌دهیم

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists N>0 : \forall m,n > N : |a_m - a_n| < \varepsilon$$

فرض کنید $\varepsilon>0$ داده شده باشد؛ با فرض $m>n$

$$|a_m - a_n| = \left|\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right| = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \dots + \frac{1}{m!} < \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \dots + \frac{1}{2^{m-1}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2^n}\left(1 - \frac{1}{2^{m-n}}\right)}{1 - \frac{1}{2}} < \frac{\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon \Rightarrow 2^{n-1} > \varepsilon^{-1} \Rightarrow n > \log_2 \varepsilon^{-1} + 1$$

قرار می‌دهیم