تمرین ۸: فرض کنید $r \in \mathbb{Q}$ و $r^* = \{x \in \mathbb{Q} \,;\, x < r\}$

الف ـ نشان دهید $r^* \in R$.

حل: $\mathrm{I}.\ r^* \neq \emptyset \,,\, r^* \neq \mathbb{Q}$?

$$\left.\begin{array}{l} r \nless r \Rightarrow r \notin r^* \\ r \in \mathbb{Q} \end{array}\right\} \Rightarrow r^* \neq \mathbb{Q}$$

$$r-1 \in \mathbb{Q} \,,\, r-1 < r \Rightarrow r-1 \in r^* \Rightarrow r^* \neq \emptyset$$

$\mathrm{II}.\ \forall x \in r^* \,;\, \exists y \in r^* \,;\, y > x$?

$$\forall x \in r^* \,;\, x < r \Rightarrow x < \underbrace{x + \frac{r-x}{2}}_{y} < r \Rightarrow \exists y \in r^* \,;\, y > x$$

$\mathrm{III}.\ \forall x \in r^* \,;\, \text{If } y < x,\ y \in \mathbb{Q} \Rightarrow y \in r^*$?

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \forall x \in r^* \,;\, x < r \Rightarrow r - x > 0 \\ y < x \Rightarrow r - y > r - x \end{array}\right\} \Rightarrow r - y > 0 \Rightarrow y < r \\ y \in \mathbb{Q} \end{array}\right\} \Rightarrow y \in r^*$$

پس، $r^* \in R$.

ب ـ برای هر $r, s \in \mathbb{Q}$ نشان دهید $r^* = s^*$ اگر و تنها اگر $r = s$.

حل: فرض کنیم $r \neq s$. در این صورت،

$$\begin{cases} r < s \Rightarrow r < \frac{r+s}{2} < s \Rightarrow \frac{r+s}{2} \in s^* \,,\, \frac{r+s}{2} \notin r^* \Rightarrow r^* \neq s^* \\ \text{یا} \\ r > s \Rightarrow s < \frac{r+s}{2} < r \Rightarrow \frac{r+s}{2} \notin s^* \,,\, \frac{r+s}{2} \in r^* \Rightarrow r^* \neq s^* \end{cases}$$

نشان دادیم $r \neq s \Rightarrow r^* \neq s^*$ که معادل است با $r^* = s^* \Rightarrow r = s$.

حال فرض کنیم $r = s$. در این صورت،

$$\forall x \in \mathbb{Q};\ x \in r^* \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x < r \\ r = s \end{array}\right\} \Rightarrow x < s \Rightarrow x \in s^*$$

پس، $r^* \subseteq s^*$

به طور مشابه، $s^* \subseteq r^*$ و بنابراین، $r^* = s^*$.

بنابراین نشان دادیم $r = s \Rightarrow r^* = s^*$.

ج - برای هر $r, s \in \mathbb{Q}$ داریم $(r+s)^* = r^* + s^*$

حل

$$\forall x \in \mathbb{Q};\ x \in (r+s)^* \Rightarrow x < r+s \Rightarrow y = r - \frac{(r+s)-x}{2} < r,\ z = s - \frac{(r+s)-x}{2} < s$$

$$\Rightarrow y \in r^*,\ z \in s^*,\ x = y+z \Rightarrow x \in r^* + s^*$$

یعنی $(r+s)^* \subseteq r^* + s^*$

$$\forall x \in \mathbb{Q};\ x \in r^* + s^* \Rightarrow \exists y \in r^*,\ \exists z \in s^*;\ x = y+z$$

$$\left.\begin{array}{l} y \in r^* \Rightarrow y < r \\ z \in s^* \Rightarrow z < s \end{array}\right\} \Rightarrow x = y+z < r+s \Rightarrow x \in (r+s)^*$$

یعنی $r^* + s^* \subseteq (r+s)^*$

و به طور کلی نتیجه می‌شود $(r+s)^* = r^* + s^*$

د. برای هر $r, s \in \mathbb{Q}$ داریم $(rs)^* = r^* s^*$

حل: فرض کنیم $x \in \mathbb{Q}$، $x \in (rs)^*$. در این صورت، $x < rs$.

به منظور اثبات $(rs)^* \subseteq r^* s^*$ چهار حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

1) $r > 0$, $s > 0$

اگر $x \leq 0$، وجود دارد $y = \frac{r}{2} \in r^* \cap \mathbb{Q}^+$, $z = \frac{s}{2} \in s^* \cap \mathbb{Q}^+$ به طوری که $zy = \frac{rs}{4} > x$ زیرا

$\frac{rs}{4} > 0$ و $x \leq 0$. بنابراین، $x \in r^* s^*$.

اگر $x > 0$، فرض می‌دهیم $t^2 = \frac{rs}{x}$.

$$rs > x > 0 \Rightarrow \frac{rs}{x} > 1 \Rightarrow t^2 > 1 \Rightarrow |t| > 1 \Rightarrow \exists q \in \mathbb{Q} \; ; \; |t| > q > 1$$

در این صورت، $y = \frac{r}{q} \in r^* \cap \mathbb{Q}^+$, $z = \frac{s}{q} \in s^* \cap \mathbb{Q}^+$ وجود دارد به طوری که

$$zy = \frac{rs}{q^2} > \frac{rs}{t^2} = \frac{rs}{\frac{rs}{x}} = x$$

پس طبق تعریف، $x \in r^* s^*$.

2) $r = 0$ یا $s = 0$

در این صورت، $rs = 0$ و چون $x < rs$، داریم $x < 0$.

زیرا $r^* s^* = 0 = 0^*$ (طبق تعریف). پس چون $x < 0$، $x \in r^* s^*$.

3) $r > 0$ و $s < 0$

Subject:

Year. Month. Day.

$x < rs \Rightarrow -x > -rs = r(-s) \Rightarrow \exists t = \frac{rs-x}{2} \in \mathbb{Q}^+;\ -x-t = -x + \frac{x-rs}{2} = \frac{-x-rs}{2} > r(-s)$

زیرا $(-x-t) - r(-s) = \frac{rs-x}{2} > 0$ بنابراین، $-x-t > r(-s)$

از طرفی،

$$\left.\begin{aligned} &\forall y \in \mathbb{Q}^+ \cap r^*;\ 0<y<r \\ &\forall z \in \mathbb{Q}^+ \cap (-s)^*;\ 0<z<-s \end{aligned}\right\} \Rightarrow \forall y\in\mathbb{Q}^+\cap r^*,\ \forall z\in\mathbb{Q}^+\cap(-s)^*;\ 0<yz<r(-s)$$

بنابراین، با توجه به اینکه $-x-t > r(-s)$،

$\forall y \in \mathbb{Q}^+\cap r^*,\ \forall z\in\mathbb{Q}^+\cap(-s)^*;\ -x-t > yz$

پس، $\exists t\in\mathbb{Q}^+;\ -x-t \notin r^*\cdot(-s)^*$

در نتیجه $x \in -(r^*\cdot(-s)^*)$ یعنی $x \in -(r^*\cdot(-s^*))$ و بنا بر تعریف، $x\in r^*s^*$.

۲) $r<0$ و $s<0$

اگر $x<0$، وجود دارد $y=\frac{-r}{2}\in\mathbb{Q}^+\cap(-r)^*$ و $z=\frac{-s}{2}\in\mathbb{Q}^+\cap(-s)^*$ به طوری که $x<yz=\frac{rs}{4}$.

چرا که $\frac{rs}{4}>0$ و $x<0$. پس طبق تعریف، $x\in(-r)^*(-s)^*$ یا $x\in(-r^*)(-s^*)$ یعنی $x\in r^*s^*$.

اگر $x>0$، فرض می‌کنیم $t^2=\frac{(-r)(-s)}{x}$

$0<x<rs=(-r)(-s) \Rightarrow t^2=\frac{(-r)(-s)}{x}>1 \Rightarrow |t|>1 \Rightarrow \exists q\in\mathbb{Q};\ 1<q<|t|$

در این صورت، $y=\frac{-r}{q}\in(-r)^*\cap\mathbb{Q}^+$، $z=\frac{-s}{q}\in(-s)^*\cap\mathbb{Q}^+$ وجود دارد به طوری که

$yz = \frac{-r}{q}\times\frac{-s}{q}=\frac{(-r)(-s)}{q^2}>\frac{(-r)(-s)}{t^2}=x$

Subject:
Year. Month. Day.

پس، طبق تعریف، $x\in(-r)^*(-s)^*$ یعنی $x\in(-r^*)(-s^*)$ یا به عبارتی $x\in r^*s^*$

از بررسی این چهار حالت نتیجه می‌شود $r^*s^*\subseteq(rs)^*$.

■ برای $x\in \mathbb{Q}$ فرض می‌کنیم $x\in r^*s^*$

برای اثبات $(rs)^*\subseteq r^*s^*$ چهار حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

1) $r>0,\ s>0$

$$x\in r^*s^* \Rightarrow \exists z_0\in r^*\cap \mathbb{Q}^+,\ \exists y_0\in s^*\cap\mathbb{Q}^+;\ x<z_0y_0$$

$$\left.\begin{array}{l} z_0\in r^*\cap\mathbb{Q}^+ \Rightarrow 0<z_0<r \\ y_0\in s^*\cap\mathbb{Q}^+ \Rightarrow 0<y_0<s \end{array}\right\}\Rightarrow rs>z_0y_0$$

$$\Rightarrow x<rs \Rightarrow x\in(rs)^*$$

۲) $r=0$ یا $s=0$

$$\left.\begin{array}{l} r^*s^*=O=0^* \overset{x\in r^*s^*}{\Longrightarrow} x<0 \\ r=0 \text{ یا } s=0 \Longrightarrow rs=0 \end{array}\right\}\Rightarrow x<rs\Rightarrow x\in(rs)^*$$

۳) $r>0,\ s<0$

$$r^*s^*=-(r^*(-s^*))=-(r^*(-s)^*) \overset{x\in r^*s^*}{\Longrightarrow} x\in-(r^*(-s)^*)$$

$$\Rightarrow \exists t\in\mathbb{Q}^+;\ -x-t\notin r^*(-s)^* \overset{(I)}{\Longrightarrow} -x-t\notin(r(-s))^*$$

(I)؛ زیرا بنا بر قسمت قبل، $\forall p,q\in\mathbb{Q};\ (pq)^*\subseteq p^*q^*$

از طرفی $(r(-s))^* = \{x \in \mathbb{Q} ; x < r(-s)\}$ حال چون $-x-t \notin (r(-s))^*$ ، نتیجه می‌شود $-x-t \geq r(-s)$ (II)

چون $t>0$ ، $-x-t<-x$. پس با توجه به (II) ، $-x > r(-s)$ یعنی $-x>-rs$ یا به عبارتی ، $x<rs$.

بنابراین، $x \in (rs)^*$.

۴) $r<0$, $s<0$

$$x \in r^* s^* = (-r^*)(-s^*) = (-r)^*(-s)^* \Rightarrow \exists y \in (-r)^* \cap \mathbb{Q}^+ ,\ \exists z \in (-s)^* \cap \mathbb{Q}^+ ;\ x \leq zy$$

از طرفی،

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} y \in (-r)^* \cap \mathbb{Q}^+ \Rightarrow 0 < y < -r \\ z \in (-s)^* \cap \mathbb{Q}^+ \Rightarrow 0 < z < -s \end{array}\right\} \Rightarrow yz < (-r)(-s) = rs \\ x \leq yz \end{array}\right\} \Rightarrow x < rs \Rightarrow x \in (rs)^*$$

با بررسی این چهار حالت نتیجه می‌شود $r^*s^* \subseteq (rs)^*$.

بنابراین، $r^*s^* = (rs)^*$

تمرین: آیا برای هر برش داریم: $\exists r \in \mathbb{Q} ; \alpha = r^*$?

خیر؛ مثال نقض ← $\alpha = \{x \in \mathbb{Q} ; x<0$ یا $x^2<2\}$ یک برش دلخواه است که $\forall r \in \mathbb{Q} ; \alpha \neq r^*$