بسمه تعالی

## دانشگاه صنعتی اصفهان، دانشکده علوم ریاضی، مجموعه مسائل در مبانی آنالیز ریاضی

---

# مسائل فصل اول

---

مسائل ستاره دار، تکالیف تحویلی هستند.
فرض کنید $F$ یک میدان مرتب با عضو خنثی جمع $0_F$ و عضو خنثی ضرب $1_F$ باشد.

(*۱) برای $a,b,c,d \in F$ با فرض $0_F \leq a \leq b$ و $0_F \leq c \leq d$ ثابت کنید که $a \cdot c \leq b \cdot d$.

۱. برای $a,b \in F$ اگر $a^2 + b^2 = 0_F$ نشان دهید که $a = b = 0_F$.

۲. برای هر $a \in F$ با شرط $a \geq 0_F$ نشان دهید که $1_F + a$ وارون‌پذیر است و داریم $(1_F + a)^{-1} < 1_F$.

(*۲) برای $a,b,c \in F$ با شرط $a,b,c \geq 0_F$ نشان دهید که

$$(1_F + a)^{-1} \cdot a \leq (1_F + b)^{-1} \cdot b + (1_F + c)^{-1} \cdot c$$

(*۳) برای $n \in \mathbb{N}$، عضو $\overbrace{1_F + \cdots + 1_F}^{n}$ را با نماد $n1_F$ یا صرفا $\mathbf{n}$ نشان می‌دهیم. نشان دهید که این عضو وارون‌پذیر است و $\mathbf{n}^{-1} < 1_F$. نشان دهید که $\overbrace{\mathbf{n}^{-1} + \cdots + \mathbf{n}^{-1}}^{n} = 1_F$. ( عضو $\mathbf{n}^{-1} \in F$ را برای سهولت با همان نماد متعارف $\frac{1}{n}$ نشان می‌دهیم.)

(∗۴) برای $a,b\in F$ با فرض $a<b$ نشان دهید که $\frac{a+b}{۲}:=\frac{۱}{۲}\cdot(a+b)$ بین $a$ و $b$ قرار دارد.

۳. فرض کنید $\lambda\in F$ عضوی با شرط $o_F<\lambda<۱_F$ باشد. برای $a,b\in F$ با شرط $a<b$ نشان دهید که $a<\lambda\cdot a+(۱_F-\lambda)\cdot b<b$.

۴. فرض کنید $a,b\in F$. اگر برای هر $c\in F$ با شرط $c>o_F$ داشته باشیم $a<b+c$ نشان دهید که $a\leq b$.

۵. هریک از حکم های زیر رابدون استفاده از اصل موضوع کمال ثابت کنید.
این حکم ها را می‌توان ویژگی ارشمیدسی عددهای گویا نامید.
الف) اگر $a$ و $b$ عددهایی گویا و مثبت باشند، آنگاه عددی طبیعی مانند $n$ وجود دارد که $na>b$.
ب) به ازای هر عدد طبیعی مانند $n$، عددی گویا مانند $r$ وجود دارد که $r>n$.
ج) به ازای هر عدد گویا مانند $x$، عددی صحیح مانند $n$ وجود دارد که $n\leq x<n+۱$ .
د) به ازای هر عدد گویا و مثبت مانند $x$، عددی طبیعی مانند $n$ وجود دارد که $\frac{۱}{n}<x$.

۶. فرض کنید $s$ و $t$ عددهایی حقیقی باشند که $t-s>۱$. ثابت کنیدعددی صحیح مانند $p$ وجود دارد که $s<p<t$.

۷. اگر $a<x<b$، آنگاه ثابت کنید $|x|<\max\{|a|,|b|\}$.

۸. عدد حقیقی مثبت $x$، اعداد صحیح $m$ و $m\prime$ و اعداد طبیعی $n$ و $n\prime$ مفروضند.
اگر $\frac{m}{n}=\frac{m\prime}{n\prime}$، آنگاه نشان دهید $\sqrt[n]{x^m}=\sqrt[n\prime]{X^{m\prime}}$ .

۹. ثابت کنید مجموعه‌ی $\{x\in\mathbb{R}\mid ۱۰\sqrt{x}-x>۰\}$ کراندار است.

۱۰. ثابت کنید مجموعه‌ی $\{x\in\mathbb{R}\mid x^۲-۲۵x>۰\}$ بی کران است.

(∗۵) سوپریمم مجموعه‌ی $\{x\mid ۳x^۲+۳<۱۰x\}$ را پیدا کنید.

۱۱. فرض کنید $F$ یک میدان مرتب باشد. برای $a\in F$ اگر $A:=\{x\in F\mid x<a\}$ نشان دهید که این مجموعه در $F$ از بالا کراندار است و $\sup A=a$. نشان دهید که $A$ از پایین کراندار نیست.

۱۲. فرض کنید $a$ و $b$ دو عدد حقیقی با شرط $a<b$ باشند. اگر
$$A:=\{x\in\mathbb{Q}\mid a<x<b\}$$
با ذکر دلیل مقادیر $\sup A$ و $\inf A$ را در میدان $\mathbb{R}$ تعیین کنید.

۱۳. فرض کنید $x$ عددی حقیقی باشد. نشان دهید

$$x = \sup\{r \in \mathbb{Q} \mid r < x\} = \inf\{s \in \mathbb{Q} \mid x < s\}$$

(۶*) در میدان اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ ثابت کنید که مجموعه‌ی $\mathbb{N} = \{۱, ۲, ۳, \cdots\}$ از بالا بیکران است.

۱۴. فرض کنید $A$ مجموعه ای کراندار و ناتهی باشد و $S$ زیرمجموعه ای ناتهی از $A$. ثابت کنید

$$\inf A \leq \inf S \leq \sup S \leq \sup A$$

۱۵. فرض کنید $A$ و $B$ مجموعه هایی کراندار و ناتهی باشند. ثابت کنید

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\} \quad , \quad \inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$$

۱۶. فرض کنید $\{A_i\}_{i \in I}$ خانواده ای ناتهی از زیرمجموعه های ناتهی $\mathbb{R}$ باشد. اگر مجموعه‌ی $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ از بالا کراندار باشد، ثابت کنید $\sup A = \sup_{i \in I}(\sup A_i)$. حکم مشابهی برای inf داریم.

۱۷. فرض کنید $A$ زیرمجموعه‌ای غیر تهی از اعداد حقیقی مثبت باشد با این خاصیت که

$$\exists c > ۰, \ \forall x \in A, \quad x > c$$

اگر $\frac{۱}{A} := \{\frac{۱}{x} \mid x \in A\}$ نشان دهید که مجموعه‌ی $\frac{۱}{A}$ از بالا کراندار است و $\sup \frac{۱}{A} = \frac{۱}{\inf A}$.

۱۸. فرض کنید $A$ و $B$ دو زیرمجموعه‌ی کراندار از اعداد حقیقی باشند.

الف) اگر

$$A - B := \{x - y \mid x \in A, \ y \in B\} \quad , \quad A + B := \{x + y \mid x \in A, \ y \in B\}$$

نشان دهید که

$$\sup(A - B) = \sup A - \inf B \quad \text{و} \quad \sup(A + B) = \sup A + \sup B$$

رابطه‌ی مشابهی را برای بزرگترین کران پایین نیز بیان و اثبات کنید.

ب) فرض کنید به علاوه $A$ و $B$ زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی نامنفی باشند. اگر $AB := \{xy \mid x \in A, \ y \in B\}$ نشان دهید که $\sup(AB) = \sup A \ \sup B$. با مثالی نشان دهید که شرط نامنفی بودن اعضای دو مجموعه‌ی $A$ و $B$ برای حصول نتیجه‌ی فوق ضروری است.

۱۹. فرض کنید $A$ یک زیرمجموعه‌ی ناتهی کراندار $\mathbb{R}$ باشد و $m$ و $M$ به ترتیب inf و sup آن را نشان دهد. ثابت کنید $M - m = \sup\{x - y \mid x, y \in A\} = \sup\{|x - y| \mid x, y \in A\}$.

۲۰. فرض کنید $A \subset \mathbb{R}^+$ ناتهی و از بالا کراندار باشد. به ازای عدد طبیعی $n$ قرار می‌دهیم $A^{(n)} = \{x^n \mid x \in A\}$. در این صورت نشان دهید

$$\sup A^{(n)} = (\sup A)^n$$

حکم مشابهی نیز برای $\inf$ داریم.

(*۷) فرض کنید $A$ زیرمجموعه‌ای غیرتهی و کراندار از اعداد حقیقی باشد. برای عدد ثابت $\lambda \in \mathbb{R}$ قرار می‌دهیم $\lambda A := \{\lambda x \mid x \in A\}$. نشان دهید که مجموعه‌ی اخیر نیز کراندار است و

$$\sup(\lambda A) = \begin{cases} \lambda \sup A & \lambda \geq ۰ \\ \lambda \inf A & \lambda < ۰ \end{cases} \quad , \quad \inf(\lambda A) = \begin{cases} \lambda \inf A & \lambda \geq ۰ \\ \lambda \sup A & \lambda < ۰ \end{cases}$$

۲۱. فرض کنید $A$ و $B$ دو زیرمجموعه‌ی غیر تهی از اعداد حقیقی باشند و
$$\forall x \in A,\ \forall y \in B, \quad x < y$$

الف) نشان دهید که $\sup A \leq \inf B$.
ب) اگر به علاوه $A \cup B = \mathbb{R}$ نشان دهید که $\sup A = \inf B$.

(*۸) برای مجموعه‌ی $A := \{(-۱)^n + \frac{۱}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ مقادیر $\inf A$ و $\sup A$ را با ذکر دلیل تعیین کنید.

۲۲. اگر $A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid [\frac{x}{n}] = ۱\}$، نشان دهید $\bigcup_{n=۱}^{m} A_n = [۱, ۲m)$.

(*۹) فرض کنید $a$ یک عدد حقیقی مثبت باشد. ثابت کنید که
$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (۰, \frac{a}{n}] = \emptyset \quad , \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (۰, a^n] = \emptyset$$

در حالت کلی، اگر $A := \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی مثبت باشد با این خاصیت که $\inf A = ۰$ نشان دهید که $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (۰, a_n] = \emptyset$.

۲۳. فرض کنید $F$ یک میدان مرتب و $A$ زیرمجموعه ای از آن و $m = \inf A$ باشد. نشان دهید به ازای هر $m\prime > m$، عضو $a \in A$ وجود دارد به طوریکه $m \leq a < m\prime$.

۲۴. فرض کنید $F$ یک میدان مرتب و $A$ زیرمجموعه ای از آن و $M = \sup A$ باشد. نشان دهید به ازای هر $M\prime < M$، عضو $b \in A$ وجود دارد به طوریکه $M\prime < b \leq M$.