مسائل فصل دوم

مسائل ستاره دار، تکالیف تحویلی هستند.

۱. فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی همگرا به a باشد. ثابت کنید دنباله ی $\{|a_n|\}_{n\in\mathbb{N}}$ نیز همگرا به $|a|$ است. با مثالی نشان دهید که امکان دارد دنباله ی $\{|a_n|\}_{n\in\mathbb{N}}$ همگرا بوده، حال آنکه دنباله ی $\{a_n\}$ واگرا است.

۲. فرض کنید $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنباله از اعداد حقیقی بوده، مجموعه ی $\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq b_n\}$ مجموعه‌ای متناهی باشد. ثابت کنید که $\{a_n\}$ همگرا است اگر و تنها اگر $\{b_n\}$ همگرا باشد و در این حالت $\lim a_n = \lim b_n$.

۳. فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای همگرا باشد. اگر مجموعه ی $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ مجموعه‌ای متناهی باشد ثابت کنید $N \in \mathbb{N}$ وجود دارد که برای هر $n \geq N$، $a_n = a_N$. به عبارت دیگر، از مرتبه‌ای به بعد دنباله ثابت است.

(*۱) فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله ای حقیقی و همگرا به a و $\{b_n\}$ دنباله ای حقیقی و همگرا به b باشد و برای هر $n \in \mathbb{N}$، $a_n \leq b_n$. نشان دهید $a \leq b$.

(*۲) فرض کنید $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنباله از اعداد حقیقی باشند با این خاصیت که برای هر $n \in \mathbb{N}$، $|a_n - b_n| < \frac{۱}{n}$. ثابت کنید که $\{a_n\}$ همگرا است اگر و تنها اگر $\{b_n\}$ همگرا باشد.

۴. فرض کنید $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دنباله هایی باشند که $\{a_n\}$ به عددی ناصفر همگراست و $\{a_nb_n\}$ همگراست. ثابت کنید دنباله ی $\{b_n\}$ نیز همگراست.

۵. مشخص کنید دنباله های داده شده همگراست یا خیر.

الف) $\sqrt{n+۱} - \sqrt{n}$

ب) $\dfrac{n!}{n^n}$

ج) $\dfrac{۱ \times ۳ \times ۵ \times \ldots \times (۲n-۱)}{n!}$

۶. حد دنباله های داده شده را پیدا کنید.

الف) $(\sqrt[n]{n} - ۱)^n$

ب) $\sum_{k=۱}^{n} \dfrac{۱}{\sqrt{n^۲ + k}}$

ج) $\dfrac{۲^n + n^۲}{۵^n - n}$

۷. با استفاده از قضیه ی فشردگی ثابت کنید هریک از دنباله های زیر همگراست.

الف) $\{\dfrac{sinn}{n}\}$

ب) $\{\dfrac{n^۳}{۲^n}\}$

ج) $\{\dfrac{۳^n}{n!}\}$

۸. فرض کنید برای هر $n \in \mathbb{N}$، $a_n = \sum_{k=۱}^{n} \frac{۱}{k+n}$. ثابت کنید که دنباله ی $\{a_n\}$ همگرا است.

۹. با استفاده از تعریف ثابت کنید که $\{\frac{n}{n+۳}\}$ دنباله ای کوشی است.

۱۰. به ازای هر عدد طبیعی مانند n فرض کنید $a_n = \sum_{k=۱}^{n} \frac{۱}{k^k}$. با استفاده از تعریف ثابت کنید که $\{a_n\}$ دنباله ای کوشی است.

۱۱. فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله ی بازگشتی با دستور $a_۱ = ۲$ و $a_n = \frac{a_{n-۱}}{۲} + \frac{۵}{a_{n-۱}}$، برای $n \geq ۲$ باشد. ثابت کنید این دنباله همگرا است و حد آن را پیدا کنید.

۱۲. ثابت کنید دنباله ی $\{a_n\}$ با دستور $a_n = \sum_{k=۱}^{n} \frac{(-۱)^k}{k}$ دنباله‌ای کوشی و در نتیجه همگرا است.

۱۳. فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی و $r \in \mathbb{R}$ عددی با شرط $۰ < r < ۱$ باشد. اگر برای هر $n \in \mathbb{N}$،

$$|a_{n+۱} - a_n| \leq r|a_n - a_{n-۱}|$$

ثابت کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای کوشی و در نتیجه همگرا است.

۱۴. دنباله ی بازگشتی زیر را در نظر بگیرید.

$$a_{n+۲} = \frac{۱}{۲}(a_{n+۱} + a_n) \quad (n \geq ۱ \quad , \quad a_۱ \neq a_۲ \quad , \quad a_۱ > ۰, a_۲ > ۰)$$

با استفاده از تمرین قبل نشان دهید این دنباله کوشی و درنتیجه همگراست. همچنین نشان دهید مقدار حد دنباله برابر است با $\frac{۱}{۳}(a_۱ + ۲a_۲)$.

(*۳) ثابت کنید دنباله ی $\{a_n\}$ با دستور $a_n = (-۱)^n + \frac{۱}{n}$ در شرط کوشی صدق نکرده، در نتیجه این دنباله واگرا است.

۱۵. فرض کنید $\{I_n\}$ دنباله‌ای از بازه‌های بسته و کراندار در $\mathbb{R}$ باشد. اگر برای هر $n \in \mathbb{N}$، $I_{n+۱} \subseteq I_n$ ثابت کنید $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$. (راهنمایی: فرض کنید $I_n = [a_n, b_n]$)

(*۴) فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله ای بازگشتی به صورت زیر باشد

$$۰ < a_۱ < ۱ \quad , \quad a_{n+۱} = ۱ - \sqrt{۱ - a_n} \quad (n \geq ۱)$$

نشان دهید $\{a_n\}$ دنباله ای نزولی و همگرا به صفر بوده و دنباله ی $\frac{a_{n+۱}}{a_n}$ همگرا به $\frac{۱}{۲}$ است.

۱۶. فرض کنید دنباله های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ کراندار باشند. ثابت کنید که دنباله های $\{a_n + b_n\}$، $\{a_n - b_n\}$ و $\{a_n b_n\}$ کراندارند.

(*۵) فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای کراندار باشد با این خاصیت که هر زیردنباله ی همگرای آن، همگرا به عدد a باشد. (توجه کنید این جمله بدان معنی نیست که هر زیردنباله ی $\{a_n\}$ همگرا باشد.) ثابت کنید که $\{a_n\}$ همگرا است.

(*۶) فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله ای از اعداد حقیقی واگرا به ∞ باشد.
الف) ثابت کنید $\{x_n\}$ از پایین کراندار است.
ب) فرض کنید به ازای هر n، $a_n \geq x_n$. ثابت کنید $\{a_n\}$ به ∞ واگراست.
ج) فرض کنید $\{b_n\}$ دنباله ای همگرا باشد. ثابت کنید $\{x_n + b_n\}$ به ∞ واگراست.

۱۷. فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد.
الف) اگر $\{a_n\}$ از بالا بی‌کران باشد ثابت کنید این دنباله حاوی زیردنباله‌ای صعودی و واگرا به $+\infty$ است.
ب) اگر $\{a_n\}$ از پایین بی‌کران باشد ثابت کنید این دنباله زیردنباله‌ای نزولی و واگرا به $-\infty$ دارد.

(۷*) فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای همگرا به a باشد. ثابت کنید دنباله ی $\{(-1)^n a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ همگرا است اگر و تنها اگر $a = 0$.

۱۸. فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله ای از اعداد حقیقی باشد. فرض کنید زیردنباله های $\{a_{2n}\}$ و $\{a_{2n-1}\}$ به یک عدد همگرا باشند. ثابت کنید $\{a_n\}$ همگراست.

۱۹. حد بالا و حد پایین هریک از دنباله های زیر را تعیین کنید.

الف) $(-1)^n(1+\frac{1}{n})$

ب) $\frac{n}{3} - [\frac{n}{3}]$

ج) $n\sin(\frac{n\pi}{3})$

د) $\cos n$

ه) $(1+\frac{1}{n})\cos n\pi$

و) $\sin(\frac{n\pi}{2})\cos(\frac{n\pi}{2})$

ز) $(-1)^n\frac{n}{(1+n)^n}$

ح) $[5\sin n]$

۲۰. فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله ای حقیقی و واگرا و $|a_n| \to a \in \mathbb{R}$. ثابت کنید $a \neq 0$ و $\liminf a_n + \limsup a_n = 0$.

۲۱. اگر $\{a_n\}$دنباله ای باشد که در آن هر $a_n > 0$ است، ثابت کنید

$$\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

۲۲. فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله ای حقیقی باشد و برای هر$n \in \mathbb{N}$، $z_n = \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$. نشان دهید

$$\liminf a_n \leq \liminf z_n \leq \limsup z_n \leq \limsup a_n$$

۲۳. فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای کراندار باشد و $\lambda \in \mathbb{R}$. ثابت کنید

$$\liminf \lambda a_n = \begin{cases} \lambda \liminf a_n & \lambda \geq 0 \\ \lambda \limsup a_n & \lambda < 0 \end{cases} \quad \text{و} \quad \limsup \lambda a_n = \begin{cases} \lambda \limsup a_n & \lambda \geq 0 \\ \lambda \liminf a_n & \lambda < 0 \end{cases}$$

۲۴. فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله ای از اعداد حقیقی نامنفی باشد و $k \in \mathbb{N}$. نشان دهید

$$\limsup a_n^k = (\limsup a_n)^k \quad , \quad \limsup \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\limsup a_n}$$

روابط مشابهی نیز برای inf داریم.

۲۵. فرض کنید $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنباله ی کراندار از اعداد حقیقی باشند. نشان دهید

$$\liminf a_n + \liminf b_n \leq \liminf(a_n + b_n) \leq \limsup(a_n + b_n) \leq \limsup a_n + \limsup b_n$$

۲۶. دنباله های $a_n = (-۱)^n$ و $b_n = (-۱)^{n+۱}$ را درنظر بگیرید. عددهای

$$\limsup(a_n + b_n) \quad , \quad \limsup a_n + \limsup b_n$$

و نیز عددهای

$$\limsup(a_n b_n) \quad , \quad (\limsup a_n)(\limsup b_n)$$

را مقایسه کنید.

(۸*) الف) فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای کراندار و $\{b_n\}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی نامنفی و همگرا به b باشد. ثابت کنید که

$$\liminf(a_n b_n) = b \liminf a_n \quad \text{و} \quad \limsup(a_n b_n) = b \limsup a_n$$

ب) اگر دنباله های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دنباله هایی نامنفی از اعداد حقیقی باشند و $b_n \to b$، آنگاه

$$\limsup(a_n + b_n) = \limsup a_n + b \quad , \quad \liminf(a_n + b_n) = \liminf a_n + b$$

(۹*) فرض کنید $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دنباله هایی همگرا باشند و دنباله های $\{m_n\}$ و $\{M_n\}$ را این طور تعریف کنید: به ازای هر n، $m_n = \min\{a_n, b_n\}$ و $M_n = \max\{a_n, b_n\}$. ثابت کنید دنباله های $\{m_n\}$ و $\{M_n\}$ همگرا هستند.