تمرینات فصل چهارم

۱. فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعی پیوسته بر $\mathbb{R}$ باشد.

الف) با مثالی نشان دهید که اگر U زیرمجموعه‌ای باز باشد آنگاه $f(U)$ لزوما باز نخواهد بود.

ب) با مثالی نشان دهید که اگر C زیرمجموعه‌ای بسته باشد آنگاه $f(C)$ لزوما بسته نخواهد بود. اگر به علاوه، C کراندار نیز باشد آیا می‌توان بسته بودن $f(C)$ را نتیجه گرفت.

ج) با مثالی نشان دهید تصویر وارون هر زیرمجموعهٔ فشرده تحت f لزوما فشرده نیست.

۲. فرض کنید $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ تابعی پیوسته بر این بازه باشد. اگر برای هر $x\in[a,b]$ قرار دهیم

$$m(x):=\inf\{f(t)\mid t\in[a,x]\} \quad \text{و} \quad M(x):=\sup\{f(t)\mid t\in[a,x]\}$$

نشان دهید دو تابع $m,M:[a,b]\to\mathbb{R}$ نیز بر این بازه پیوسته هستند.

۳. فرض کنید $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ تابعی پیوسته بر این بازه باشد. اگر $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ موجود و متناهی باشد نشان دهید f بر $[0,+\infty)$ تابعی کراندار است.

۴. فرض کنید $P:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ یک تابع چندجمله‌ای باشد. اگر P بر $\mathbb{R}$ کراندار باشد ثابت کنید P تابع ثابت است.

۵. فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعی پیوسته بر $\mathbb{R}$ باشد.

الف) اگر $A\subset\mathbb{R}$ کراندار باشد نشان دهید که $f(A)$ نیز مجموعه‌ای کراندار است.

ب) اگر $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ دنباله‌ای کراندار باشد نشان دهید که دنبالهٔ $\{f(a_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ نیز کراندار است.

ج) اگر $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ دنباله‌ای کراندار و f تابعی صعودی باشد ثابت کنید که $\liminf f(a_n)=f(\liminf a_n)$ و $\limsup f(a_n)=f(\limsup a_n)$.

د) برای زیرمجموعهٔ دلخواه A از $\mathbb{R}$ نشان دهید که $f(\overline{A})\subseteq\overline{f(A)}$. با مثالی نشان دهید که تساوی لزوما برقرار نیست.

هـ) اگر $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ دنباله‌ای کوشی باشد ثابت کنید $\{f(a_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ نیز کوشی است.

و) اگر $A\subset\mathbb{R}$ کراندار باشد ثابت کنید f بر A پیوستهٔ یکنواخت است.

۶. تابع $f:A\to\mathbb{R}$ را بر A تابعی لیپشیتس (Lipschitz) نامیم هرگاه $C>0$ وجود داشته باشد که

$$\forall x,y\in A,\quad |f(x)-f(y)|\le C|x-y|$$

ثابت کنید اگر f بر A لیپشیتس باشد آنگاه بر این مجموعه پیوستهٔ یکنواخت است. مثالی از یک تابع پیوستهٔ یکنواخت بر مجموعه‌ای مناسب ارائه دهید که لیپشیتس نباشد.

۷. گوییم تابع $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ بر بازهٔ $[a,b]$ دارای نقطهٔ ثابت است اگر $c\in[a,b]$ وجود داشته باشد که $f(c)=c$. نشان دهید اگر f بر این بازه پیوسته باشد و $f([a,b])\subset[a,b]$ آنگاه f بر این بازه یک نقطهٔ ثابت خواهد داشت.

۸. فرض کنید $I\subset\mathbb{R}$ بازه‌ای از اعداد و $f:I\to\mathbb{R}$ تابعی پیوسته بر آن باشد. اگر f یک به یک باشد ثابت کنید f بر I اکیدا یکنوا است.

۹. فرض کنید $f:A\to\mathbb{R}$ بر A پیوسته باشد. همچنین فرض کنید K زیرمجموعه‌ای فشرده از A بوده، برای هر $x\in K$، $f(x)>0$. نشان دهید که عدد $m>0$ وجود دارد که برای هر $x\in K$، $f(x)>m$. با مثالی نشان دهید که شرط فشرده بودن K را نمی‌توان با شرط ضعیف‌تر بسته بودن جایگزین کرد.

۱۰. فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعی پیوسته بر $\mathbb{R}$ باشد. اگر $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty}f(x)$ وجود داشته باشند (و متناهی باشند) ثابت کنید f بر $\mathbb{R}$ پیوستهٔ یکنواخت است. با مثالی نشان دهید عکس این خاصیت لزوما برقرار نیست.

۱۱. فرض کنید $f:A\to\mathbb{R}$ بر A پیوستهٔ یکنواخت باشد. نشان دهید اگر $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ دنباله‌ای کوشی باشد آنگاه $\{f(a_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ نیز دنباله‌ای کوشی خواهد بود. با مثالی نشان دهید اگر f صرفا بر A پیوسته باشد آنگاه این خاصیت لزوما برقرار نخواهد بود.