

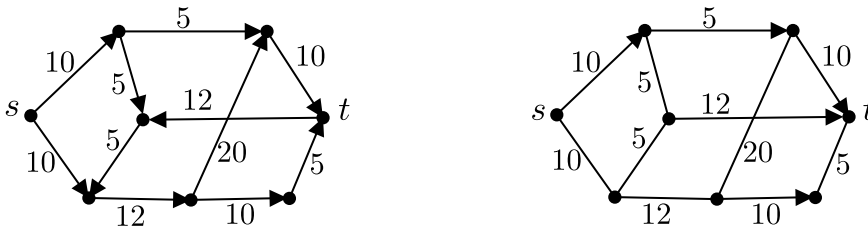
امتحان پایان ترم نظریه گراف (خرداد 1403)

**توجه:** لطفاً در همه سؤالات محاسباتی، پاسخ ارائه شده را به صورت کامل توجیه کنید. در صورتی که اثبات کاملی ندارید، استدلال شهودی خود را بیان کنید. از همه قضایای بیان شده در طول درس می‌توانید در اثبات‌ها استفاده کنید.

1. مفاهیم شبکه و جریان را تعریف کنید و قضیه بیشترین جریان-کمترین برش را بیان کنید.

2. مقادیر  $\lambda(x, y)$  و  $\kappa(x, y)$  را برای دو رأس غیر مجاور در گراف ساده  $G$ ، تعریف کنید.

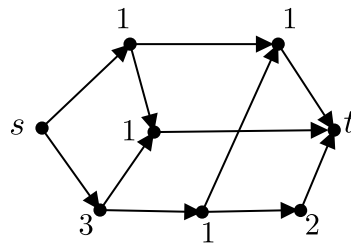
3. الف) مقدار ماکزیمم جریان را برای دو شبکه زیر تعیین کنید:



(جهت جریان در یال‌هایی که جهت برای آن تعیین نشده است، می‌تواند در هر دو جهت ممکن باشد. سعی کنید این حالت را به حالت شبکه جهت‌دار که در درس یاد گرفته‌اید، تبدیل کنید.)

ب) حالتی کلی‌تر از قضیه ماکزیمم جریان-مینیمم برش را برای شبکه‌هایی که یال‌های جهت‌دار و بدون جهت دارند، بیان کنید. این حالت کلی‌تر را اثبات کنید.

4. الف) فرض کنید در شبکه زیر که برای انتقال آب از  $s$  به  $t$  در نظر گرفته شده است، هیچ کدام از لوله‌ها (یال‌ها) محدودیتی در میزان جریان عبوری در جهت مشخص شده ندارند. اما هر مرکز توزیع (رأس) میانی، یک ظرفیت محدود برای عبور جریان دارد که در شکل مشخص شده است. (یعنی جمع جریان ورودی به هر رأس میانی، حداکثر برابر مقدار مشخص شده در شکل است) حداکثر اندازه جریانی که می‌توان از منبع به چاه منتقل کرد، را مشخص کنید:



ب) الگوریتمی ارائه دهید که مسائل مشابه قسمت قبل را در حالت کلی حل کند. (راهنمایی: هر شبکه به صورت بالا با محدودیت ظرفیت رؤس را به شبکه‌ای استاندارد در قضیه فورد-فولکرسون تبدیل کنید که جریان در شبکه جدید با شبکه اصلی معادل باشد.)

ج) فرض کنید  $G$  یک گراف و  $x, y$  دو رأس غیرمجاور در آن باشند.  $G$  را به عنوان یک شبکه با منبع  $x$  و چاه  $y$  در

نظر بگیرید که هر رأس آن ظرفیت 1 دارد (مانند حالت الف) و یال های آن ظرفیت نامحدود دارند. مقدار بزرگترین جریان و کوچکترین برش را در این شبکه بررسی کنید. (این مقادیر با چه ناوردهایی که قبل می شناسید، برابر است؟)

**5.** صورت قضیه ازدواج هال و قضیه کونینگ را بیان کنید.

**6.** در دانشکده 6 شورا با اعضای زیر داریم که  $a_i$  ها زن و  $b_i$  ها مرد هستند.

$$C_1 = \{a_1, a_2, b_2\}, C_2 = \{a_3, a_4, b_2\}, C_3 = \{b_1, b_2, b_3\}, \\ C_4 = \{a_1, a_3, a_4\}, C_5 = \{a_2, a_3, b_2\}, C_6 = \{a_1, a_2, a_4\}.$$

می خواهیم از اعضای هر یک از این شوراها یک نماینده در مجمع دانشکده تعیین کنیم به صورتی که هر نفر حداکثر یک شورا را در مجمع نمایندگی کند.

**الف)** آیا این کار امکان پذیر است؟

**ب)** آیا می توان این نماینده ها را به روشی انتخاب کرد که حداکثر 3 نماینده زن و حداکثر 3 نماینده مرد انتخاب شده باشد؟

**ج)** برای حالت کلی مسأله مشابه قسمت قبل، یک شرط لازم و کافی همانند قضیه هال ارائه کنید. (یعنی فرض کنید به دنبال سیستم های نمایندگی متمایزی باشیم که تعداد نماینده های زن و مرد در آن سقف مشخصی داشته باشد. **راهنمایی:** هم می توانید مسأله را به یک مسأله تطابق کامل تبدیل کنید و هم یک شبکه برای این مسأله طراحی کنید.)

**موفق باشید.**

