بسمه تعالی

تمارین جمع‌بندی نظریه گراف

خرداد ۱۴۰۳

---

۱. تعداد دورهای به طول 5 در گراف پترسون را بشمارید.

۲. گراف کانوی: گرافی ۹۹ رأسی است که هر دو رأس مجاور در آن، دقیقاً یک همسایه مشترک دارند و هر دو رأس غیرمجاور در آن، دقیقاً دو همسایه مشترک دارند.
نشان دهید، هر گراف کانوی منتظم است. درجه رئوس آن را هم به دست آورید.

۳. تعداد زیردرخت‌های فراگیر در گراف حاصل از حذف یک یال دلخواه از گراف کامل nـرأسی (K_n) را بیابید.

۴. برای پیدا کردن مسیر پروازی با کمترین هزینه، یک الگوریتم ارائه کنید. (این مسأله را در کلاس توضیح دادیم. مسأله به این صورت است که قصد سفر در یک روز خاص از مبدأ مشخص به مقصد مشخص دیگری با استفاده از هواپیما داریم. فرض می کنیم که داده زمان نشست و برخواست همه پروازها را به همراه هزینه داریم. همچنین ممکن است برای یک سفر از چند پرواز متوالی استفاده کنیم. با یک جستجوی ساده در اینترنت می توانید مثال های متنوعی را از این مسأله ببینید. در ضمن می‌توانید برای حل این مسأله از الگوریتم‌های معرفی شده در کلاس استفاده کنید.)

۵. برای هر سه عدد طبیعی $a \geq b \geq c$، یک گراف ساده G بسازید که

$$\delta(G) = a, \kappa'(G) = b, \kappa(G) = c.$$

۶. مسأله: فرض کنید دو دنباله $(p_1, \ldots, p_m)$ و $(q_1, \ldots, q_n)$ از اعداد طبیعی داده شده است. می‌خواهیم ببینیم آیا یک گراف دوبخشی G با بخش‌های X, Y وجود دارد که دنباله درجات رئوس بخش X برابر با $(p_1, \ldots, p_m)$ و دنباله درجات رئوس بخش Y برابر با $(q_1, \ldots, q_n)$ باشد؟

۱. برای حل این مسأله یک شبکه طراحی کنید که وجود جریانی با اندازه خاص در آن، معادل با وجود گراف دوبخشی با درجات خواسته باشد.

۲. با استفاده از قضیه «ماکزیمم جریان‌ـمینیمم برش»، یک شرط لازم و کافی برای دنباله های $(p_1, \ldots, p_m)$ و $(q_1, \ldots, q_n)$ ارائه کنید که جواب مسأله بالا مثبت باشد. (اگر حالت کلی برایتان سخت است، حالت های دنباله های کوچکتر، مثلاً حداکثر ۳ عضوی را حل کنید.)

۷. اثباتی برای قضیه منگر در حالت یالی، با استفاده از قضیه «ماکزییم جریان‌ـمینیمم برش» ارائه کنید. (قضیه منگر یالی: $\kappa'(x, y) = \lambda'(x, y)$.)

۸. فرض کنید در یک سیستم انتخاب رشته، تعداد m دانشجو برای پذیرش در n رشته با شماره های 1 تا n فرم پر کرده اند به صورتی که مجموعه رشته های انتخاب‌شده توسط دانشجویان $S_1, \ldots, S_m$ است. (یعنی دانشجوی شماره i زیرمجموعه S_i از $\{1, \ldots, n\}$ را به عنوان رشته های مورد علاقه انتخاب کرده است.) از طرف دیگر می دانیم که برای هر $1 \leq i \leq n$، ظرفیت پذیرش در رشته i ام برابر با c_i است.

با استفاده از این داده‌ها شرطی لازم و کافی ارائه کنید که به هر دانشجو بتوان رشته ای از انتخاب های خودش نسبت داد که در هیچ رشته‌ای بیش از ظرفیت آن دانشجو پذیرش نشود. (می توانید از قضیه هال و یا ماکزیمم جریان استفاده کنید. شرط به دست‌آمده چیزی شبیه شرط هال است.)