

به نام نالی الله

- تمرین تحویلی سری اول
- درس نظریه گراف – آقای دکتر عین الله زاده
- دانشگاه صنعتی اصفهان – ترم بهار ۱۴۰۲/۱۴۰۳

- مهلت تحویل: دوشنبه ۱۴ / ۱۲ / ۱۴۰۲
- ارادتمند شما سعید حمیدی

تمرینات تحویلی

Exercises

1. Let  $S$  be a set of  $n$  points in the plane, the distance between any two of which is at least one. Show that there are at most  $3n$  pairs of points of  $S$  at distance exactly one.

2. TUR'AN Graph

A  $k$ -partite graph is complete if any two vertices in different parts are adjacent. A simple complete  $k$ -partite graph on  $n$  vertices whose parts are of equal or almost equal sizes (that is,  $\lfloor n/k \rfloor$  or  $\lceil n/k \rceil$ ) is called a Tur'an graph and denoted  $T_{k,n}$ .

- a. Show that  $T_{k,n}$  has more edges than any other simple complete  $k$ -partite graph on  $n$  vertices.
- b. Determine  $e(T_{k,n})$ .

3. Show that:

- a) every path is bipartite,
- b) a cycle is bipartite if and only if its length is even.

- 4.

- a) Show that if  $G$  is simple and  $\delta > \frac{1}{2}(n - 2)$ , then  $G$  is connected.
- b) For  $n$  even, find a disconnected  $\frac{1}{2}(n - 2)$ -regular simple graph.

☑ تمرینات امتیازی (حل آن‌ها و همچنین ارائه پاسخ آن‌ها در کلاس حل تمرین، به عنوان امتیاز برای شما در نظر گرفته می‌شود. توجه نمایید که پاسخگویی به سوالات امتیازی، الزامی نیست ولی برای فهم درس به شدت مفید است.)

1. Let  $G$  be a simple graph. Show that  $m \leq \binom{n}{2}$ , and determine when equality holds.  
-----
2. Let  $G[X,Y]$  be a simple bipartite graph, where  $|X| = r$  and  $|Y| = s$ . Show that  $m \leq rs$ .  
-----
3. Show that, for any graph  $G$ ,  $\delta(G) \leq d(G) \leq \Delta(G)$ .  
-----

### راهنمایی:

<b>m</b>	تعداد یال (اندازه گراف)
<b>n</b>	تعداد رأس (مرتبه گراف)
<b>simple graph</b>	گراف ساده (بدون یال موازی و طوقه)
<b>bipartite graph</b>	گراف دو بخشی (افراز مجموعه‌ی رئوس گراف به دو بخش به طوری که هر رأس با رئوس موجود در بخش خودش غیرمجاور است.)
<b>path</b>	مسیر (یک گراف ساده است که رئوس آن را می‌توان در یک دنباله خطی به گونه‌ای مرتب کرد که اگر دو رأس در دنباله متوالی باشند، مجاور باشند و در غیر اینصورت غیرمجاور باشند.)
<b>cycle</b>	دور (یک دور با سه رأس یا بیشتر، یک گراف ساده است که رئوس آن را می‌توان در یک دنباله دایره‌ای شکل به گونه‌ای مرتب کرد که اگر دو رأس در دنباله متوالی باشند، در مجاورت یکدیگر باشند و در غیر اینصورت غیرمجاور باشند.)
<b>Length of cycle or path</b>	طول دور یا مسیر (تعداد یال‌های موجود در دور یا مسیر) ☑ توجه: طول یک دور یا یک مسیر براساس تعداد یال‌هایش که یک عدد طبیعی می‌باشد، ممکن است زوج یا فرد باشد.
<b><math>\delta(G)</math></b>	مینیمم درجه‌های رئوس گراف
<b><math>d(G)</math></b>	میانگین درجه‌های رئوس گراف
<b><math>\Delta(G)</math></b>	ماکسیمم درجه‌های رئوس گراف
<b>k-partite graph</b>	گراف k-بخشی