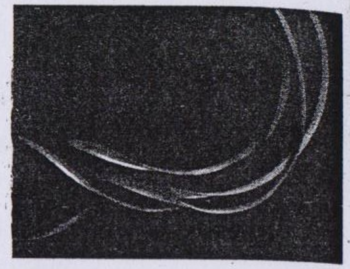


فصل ۹
دنباله‌ها، سری‌ها و سری‌های توانی

مارچ هر[1] ادامه داد: «پس باید منظورت را بگویی.»

آلیس شتابان پاسخ داد: «می‌گویم»؛ «حداقل، حداقل منظورم همان است که می‌گویم؛ می‌دانی که، این دو یکی هستند.»

هتر[2] گفت: «اصلاً هم یکی نیستند، زیرا درست مثل این است که بگویی «آنچه را می‌خورم می‌بینم» و «آنچه را می‌بینم می‌خورم» یکی هستند.»

لوییس کارول

آلیس در سرزمین عجایب

مقدمه. هر سری نامتناهی، مجموعی است که حاوی بینهایت جمله است. چون عمل جمع هر بار بین دو عدد انجام می‌گیرد، محاسبهٔ مجموع سری‌های نامتناهی الزاماً متضمن یافتن حد است. توابع پیچیده $f(x)$ را اغلب می‌توان با سری‌های متشکل از توابع ساده‌تر بیان کرد. برای مثال، بسیاری از توابع متعالی قبل را می‌توان به‌صورت سری‌هایی برحسب توان‌های x بیان کرد و از این رو، این توابع شبیه چندجمله‌ای‌هایی با درجهٔ بینهایت هستند. از این نوع سری‌ها می‌توان جمله‌به‌جمله مشتق و انتگرال گرفت. به‌علاوه، این سری‌ها نقش بسیار مهمی در مطالعهٔ حساب دیفرانسیل و انتگرال بازی می‌کنند.

۱.۹ دنباله‌ها و همگرایی

مقصود از **دنباله (یا دنبالهٔ نامتناهی)** فهرست مرتبی است که عضو ابتدا دارد ولی عضو انتها ندارد. برای ما، عنصرهای هر دنباله (که آنها را **جمله‌های** دنباله می‌نامیم) همواره اعدادی حقیقی هستند، با وجود اینکه بیشترِ بحث را می‌توان در مورد اعداد مختلط نیز به‌کار برد. دو مثال دربارهٔ دنباله‌ها عبارت‌اند از: $\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, \ldots\}$، دنبالهٔ اعداد صحیح مثبت و $\{-\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۴}, -\frac{۱}{۸}, \frac{۱}{۱۶}, \ldots\}$، دنبالهٔ توان‌های صحیح مثبت $-\frac{۱}{۲}$.

1. March Hare خرگوش تندپا

2. Hatter کلاهدوز

همان‌طور که در بالا دیدید، جمله‌های دنباله را معمولاً بین دو آکولاد { } فهرست می‌کنیم. نماد (...) این‌طور خوانده می‌شود: «و غیره».

دنبالهٔ نامتناهی، نوع خاص تابعی است که قلمرو آن مجموعه‌ای از اعداد صحیح است که از عدد صحیح معینی آغاز می‌شوند و تا بینهایت ادامه دارند. عدد صحیح آغازی معمولاً ۱ است و از این رو، قلمرو عبارت است از مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت. دنبالهٔ $\{a_۱, a_۲, a_۳, a_۴, \ldots\}$ تابعی مانند f است که به‌ازای هر عدد صحیح مثبت مانند n، مقدار $f(n) = a_n$ را اختیار می‌کند. هر دنباله را می‌توان به‌یکی از سه روش زیر مشخص کرد:

(یک) می‌توانیم چند جملهٔ اول را فهرست کنیم و سپس نماد ... را بنویسیم، ***مشروط بر اینکه الگوی ادامهٔ کار آشکار باشد.***

(دو) می‌توانیم فرمولی را برای محاسبهٔ **جملهٔ عمومی** a_n به‌صورت تابعی از n ارائه دهیم.

(سه) می‌توانیم فرمولی را برای محاسبهٔ جملهٔ a_n به‌صورت تابعی از جمله‌های قبل یعنی $a_۱$، $a_۲$، ...، $a_{n-۱}$ ارائه دهیم و تعدادی کافی از جمله‌های آغازی را نیز مشخص کنیم تا بتوان فرایند محاسبهٔ جمله‌های بالاتر را شروع کرد.

در هر یک از این حالت‌ها باید امکان محاسبهٔ هر جملهٔ دنباله وجود داشته باشد، حتی اگر لازم باشد نخست همهٔ جمله‌های قبل از آن را محاسبه کنیم.

مثال ۱ **(چند مثال دربارهٔ دنباله‌ها)**

(آ) $\{n\} = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, \ldots\}$

(ب) $\left\{\left(-\frac{۱}{۲}\right)^n\right\} = \left\{-\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۴}, -\frac{۱}{۸}, \frac{۱}{۱۶}, \ldots\right\}$

(پ) $\left\{\frac{n-۱}{n}\right\} = \left\{۰, \frac{۱}{۲}, \frac{۲}{۳}, \frac{۳}{۴}, \frac{۴}{۵}, \ldots\right\}$

(ت) $\{(-۱)^{n-۱}\} = \{\cos(n-۱)\pi\} = \{۱, -۱, ۱, -۱, ۱, \ldots\}$

(ث) $\left\{\frac{n^۲}{۲^n}\right\} = \left\{\frac{۱}{۲}, ۱, \frac{۹}{۸}, ۱, \frac{۲۵}{۳۲}, \frac{۳۶}{۶۴}, \frac{۴۹}{۱۲۸}, \ldots\right\}$

(ج) $\left\{\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^n\right\} = \left\{۲, \left(\frac{۳}{۲}\right)^۲, \left(\frac{۴}{۳}\right)^۳, \left(\frac{۵}{۴}\right)^۴, \ldots\right\}$

(چ) $\left\{\frac{\cos(n\pi/۲)}{n}\right\} = \left\{۰, -\frac{۱}{۲}, ۰, \frac{۱}{۴}, ۰, -\frac{۱}{۶}, ۰, \frac{۱}{۸}, ۰, \ldots\right\}$

(ح) $a_۱ = ۱, \qquad a_{n+۱} = \sqrt{۶ + a_n}, \qquad (n = ۱, ۲, ۳, \ldots)$

در این حالت داریم $\{a_n\} = \{۱, \sqrt{۷}, \sqrt{۶+\sqrt{۷}}, \ldots\}$. توجه داشته باشید که در اینجا فرمول **آشکاری** که a_n را صریحاً برحسب n به‌دست دهد وجود ندارد، ولی باز هم می‌توانیم a_n را به‌ازای هر مقدار دلخواه n محاسبه کنیم مشروط بر اینکه نخست همهٔ مقادیر قبل، یعنی $a_۲$، $a_۳$، ...، $a_{n-۱}$، محاسبه شوند.

(خ) $a_۱ = ۱, \qquad a_۲ = ۱, \qquad a_{n+۲} = a_n + a_{n+۱}, \qquad (n = ۱, ۲, ۳, \ldots)$

در اینجا داریم $\{a_n\} = \{۱, ۱, ۲, ۳, ۵, ۸, ۱۳, ۲۱, \ldots\}$. این دنباله را **دنبالهٔ فیبوناتچی**[1] می‌نامیم. از جملهٔ دوم به‌بعد، هر جمله مجموع دو جملهٔ قبل از خودش است. ■

در قسمت‌های (آ) تا (چ) از مثال ۱، فرمول‌های طرف چپ، جملهٔ عمومی هر دنبالهٔ $\{a_n\}$ را به‌صورت تابعی صریح از n تعریف می‌کنند. در قسمت‌های (ح) و (خ) می‌گوییم دنبالهٔ $\{a_n\}$ **به‌صورت بازگشتی** یا **استقرایی** تعریف شده است؛ هر جمله را به‌جای اینکه مستقیماً به‌صورت تابعی از n محاسبه کنیم باید پس از محاسبهٔ جمله‌های قبل به‌دست آوریم.

تعریف زیر، اصطلاحات متداول برای توصیف ویژگی‌های گوناگون دنباله‌ها را معرفی می‌کند.

تعریف ۱ **واژه‌هایی که دنباله‌ها را توصیف می‌کنند**

(آ) دنبالهٔ $\{a_n\}$ از **پایین به‌وسیلهٔ L کراندار** و L یک **کران پایین** برای $\{a_n\}$ است هرگاه به‌ازای هر $n = ۱, ۲, ۳, \ldots$، $a_n \geq L$. این دنباله از **بالا به‌وسیلهٔ M کراندار** و M یک **کران بالاست** هرگاه به‌ازای هر n، $a_n \leq M$.

دنبالهٔ $\{a_n\}$ **کراندار** است هرگاه هم از بالا و هم از پایین کراندار باشد. در این حالت ثابتی مانند K هست به‌طوری که به‌ازای هر $n = ۱, ۲, ۳, \ldots$، $|a_n| \leq K$. (می‌توانیم K را ماکسیموم M و $-L$ بگیریم.)

(ب) دنبالهٔ $\{a_n\}$ **مثبت** است هرگاه از پایین به‌وسیلهٔ صفر کراندار باشد، یعنی هرگاه به‌ازای هر $n = ۱, ۲, ۳, \ldots$، $a_n \geq ۰$؛ این دنباله **منفی** است هرگاه به‌ازای هر n، $a_n \leq ۰$.

(پ) دنبالهٔ $\{a_n\}$ **صعودی** است هرگاه به‌ازای هر $n = ۱, ۲, ۳, \ldots$، $a_{n+۱} \geq a_n$؛ این دنباله **نزولی** است هرگاه به‌ازای هر $n = ۱, ۲, ۳, \ldots$، $a_{n+۱} \leq a_n$. دنباله را **یکنوا** می‌نامیم هرگاه صعودی یا نزولی باشد. (ملاحظه می‌کنید که در اینجا این دو اصطلاح کلیتر از وقتی است که برای توابع به‌کار گرفته شدند. در آنجا برای توصیف این رفتار، اصطلاحات **غیرنزولی** و **غیرصعودی** را به‌کار بردیم. تمایز بین $a_{n+۱} > a_n$ و $a_{n+۱} \geq a_n$ آن‌قدر که برای توابع معین بر بازه‌ها مهم است، برای دنباله‌ها حائز اهمیت نیست.)

(ت) دنبالهٔ $\{a_n\}$ **متناوب** است هرگاه به‌ازای هر $n = ۱, ۲, \ldots$، $a_n a_{n+۱} < ۰$، یعنی هرگاه هر دو جملهٔ متوالی دارای علامت‌های مخالف باشند. توجه داشته باشید که در این تعریف فرض بر این است که به‌ازای هر n، $a_n \neq ۰$.

مثال ۲ **(توصیف چند دنباله)**

(آ) دنبالهٔ $\{n\} = \{۱, ۲, ۳, \ldots\}$ مثبت، صعودی و از پایین کراندار است. عدد ۱ یا هر عدد کوچکتر از آن، یک کران پایین دنباله است. این دنباله از بالا کراندار نیست.

---
1. Fibonacci

(ب) دنبالهٔ $\left\{\frac{n-1}{n}\right\} = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots\right\}$ مثبت، کراندار و صعودی است. صفر یک کران پایین و ۱ یک کران بالای آن است.

(پ) دنبالهٔ $\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\} = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\right\}$ کراندار و متناوب است. در اینجا $-\frac{1}{2}$ یک کران پایین و $\frac{1}{4}$ یک کران بالاست.

(ت) دنبالهٔ $\{(-1)^n n\} = \{-1, 2, -3, 4, -5, \ldots\}$ متناوب است ولی نه از بالا کراندار است و نه از پایین. ■

برای نشان دادن اینکه دنباله‌ای صعودی است کوشش کنید تا نشان دهید نابرابری $a_{n+1} - a_n \ge 0$ به‌ازای هر $n \ge 1$ برقرار است. اگر به‌ازای تابع مشتق‌پذیری مانند $f(x)$ داشته باشیم $a_n = f(n)$، برای اثبات غیرنزولی بودن f بر $[1, \infty[$ کافی است نشان دهیم که بر این بازه، $f'(x) \ge 0$. استفاده از رهیافت‌های مشابه برای اثبات نزولی بودن دنباله سودمند است.

مثال ۳ اگر $a_n = \frac{n}{n^2+1}$، نشان دهید که دنبالهٔ $\{a_n\}$ نزولی است.

حل. چون $a_n = f(n)$ که در آن $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ و به‌ازای $x \ge 1$،

$$f'(x) = \frac{(x^2+1)(1) - x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} \le 0$$

تابع $f(x)$ بر $[1, \infty[$ نزولی است و از این رو، $\{a_n\}$ نیز دنباله‌ای نزولی است. ■

دنبالهٔ $\left\{\frac{n^2}{2^n}\right\} = \left\{\frac{1}{2}, 1, \frac{9}{8}, 1, \frac{25}{32}, \frac{36}{64}, \frac{49}{128}, \ldots\right\}$ مثبت و بنابراین، از پایین کراندار است.

آشکارا به‌نظر می‌رسد که از جملهٔ چهارم به‌بعد، همهٔ جمله‌ها به‌طور مداوم کوچکتر می‌شوند. ولی $a_2 > a_1$ و $a_3 > a_2$. چون به‌ازای $n \ge 3$ داریم $a_{n+1} \le a_n$، می‌گوییم این دنباله **نهایتاً نزولی** است. قید **نهایتاً** را وقتی برای توصیف ویژگی‌ای از جمله‌های دنباله به‌کار می‌بریم که جمله‌های این دنباله، نه لزوماً از آغاز، بلکه از جایی به‌بعد واجد آن باشند. بدین‌سان، دنبالهٔ

$$\{n-100\} = \{-99, -98, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

نهایتاً مثبت است، با وجود اینکه ۹۹ جملهٔ اول آن منفی هستند. به‌همین ترتیب دنبالهٔ

$$\left\{(-1)^n + \frac{4}{n}\right\} = \left\{3, 3, \frac{1}{3}, 2, -\frac{1}{5}, \frac{5}{3}, -\frac{3}{7}, \frac{3}{2}, \ldots\right\}$$

نهایتاً متناوب است، با وجود اینکه چند جملهٔ اول آن یک در میان مثبت و منفی نیستند.

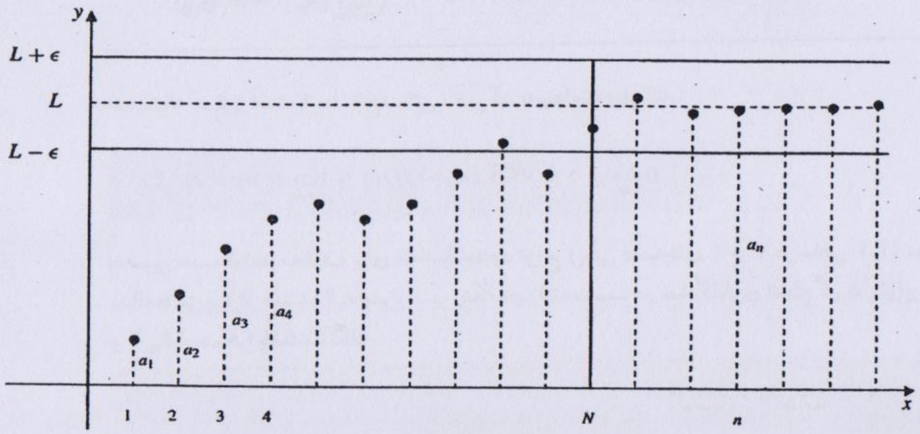
همگرایی دنباله‌ها

مفهوم همگرایی، مفهومی مرکزی در مطالعهٔ دنباله‌هاست. مفهوم حد دنباله، حالت خاصی از مفهوم حد تابع $f(x)$ به‌ازای $x \longrightarrow \infty$ است. می‌گوییم دنبالهٔ $\{a_n\}$ **به‌حد L همگراست** و می‌نویسیم $\lim_{n\to\infty} a_n = L$، مشروط بر اینکه با افزایش n به‌سوی ∞، فاصلهٔ a_n تا L بر خط حقیقی به‌صفر میل کند. این تعریف را به‌شرح زیر به‌طور صوریتر بیان می‌کنیم:

تعریف ۲ **حد دنباله**

می‌گوییم دنبالهٔ $\{a_n\}$ به‌حد L همگراست و می‌نویسیم $\lim_{n\to\infty} a_n = L$، هرگاه به‌ازای هر عدد حقیقی مثبت مانند ε عدد طبیعی مانند N (وابسته به ε) وجود داشته باشد به‌طوری که اگر $n \ge N$، آنگاه $|a_n - L| < \varepsilon$.

این تعریف را در شکل ۱.۹ به‌تصویر کشیده‌ایم.



شکل ۱.۹ یک دنبالهٔ همگرا

مثال ۴ نشان دهید که به‌ازای هر ثابت حقیقی c و هر $p > 0$، $\lim_{n\to\infty} \frac{c}{n^p} = 0$.

حل. فرض کنیم $\varepsilon > 0$ داده شده باشد. دراین‌صورت $\left|\frac{c}{n^p}\right| < \varepsilon$ هرگاه

$$n^p > \frac{|c|}{\varepsilon}$$

یعنی هرگاه $n \ge N$ که در آن N کوچکترین عدد صحیح بزرگتر از $(|c|/\varepsilon)^{1/p}$ است. بنابر تعریف ۲، $\lim_{n\to\infty} \frac{c}{n^p} = 0$. ■

هر دنبالهٔ دلخواه مانند $\{a_n\}$ یا به‌حدی متناهی مانند L همگراست یا واگـراست. یعنی یـا $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ وجود دارد (که در آن L عدد حقیقی است) یا $\lim_{n\to\infty} a_n$ وجود ندارد. اگر $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$، می‌گوییم این دنباله به ∞ واگراست؛ اگر $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ می‌گوییم این دنباله به $-\infty$ واگراست. اگر $\lim_{n\to\infty} a_n$ وجود نداشته باشد (و ∞ یا $-\infty$ هم نشود) فقط می‌گوییم دنباله واگراست.

مثال ۵ **(مثال‌هایی دربارهٔ دنباله‌های همگرا و واگرا)**

(آ) دنبالهٔ $\left\{\frac{n-1}{n}\right\}$ به ۱ همگراست؛ $\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)=1$.

(ب) دنبالهٔ $\{n\}=\{1, 2, 3, 4, \dots\}$ به ∞ واگراست.

(پ) دنبالهٔ $\{-n\}=\{-1, -2, -3, -4, \dots\}$ به $-\infty$ واگراست.

(ت) دنبالهٔ $\{(-1)^n\}=\{-1, 1, -1, 1, -1, \dots\}$ واگراست.

(ث) دنبالهٔ $\{(-1)^n n\}=\{-1, 2, -3, 4, -5, \dots\}$ واگراست (ولی نه به ∞ یا $-\infty$)، با وجود اینکه $\left(\lim_{n\to\infty}|a_n|=\infty\right)$.

حد دنباله هم‌ارز است با حد تابع، وقتی متغیر آن به‌بینهایت میل کند:

اگر $\lim_{x\to\infty} f(x)=L$ و $a_n=f(n)$، آنگاه $\lim_{n\to\infty} a_n=L$.

به‌همین سبب قواعد متعارف برای محاسبهٔ حدود توابع (یعنی قضیه‌های ۲ و ۴ در بخش ۲.۱) در مورد حدود دنباله‌ها نیز برقرار هستند، البته مشروط بر اینکه تغییرات مناسب در نمادگذاری انجام گیرد. بنابراین، اگر $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ همگرا باشند، آنگاه

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n \pm \lim_{n\to\infty}b_n\,,$$

$$\lim_{n\to\infty} c a_n = c\lim_{n\to\infty}a_n\,,$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \left(\lim_{n\to\infty}a_n\right)\left(\lim_{n\to\infty}b_n\right),$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim_{n\to\infty}a_n}{\lim_{n\to\infty}b_n} \qquad \left(\text{با فرض } \lim_{n\to\infty}b_n \neq 0\right)$$

اگر نهایتاً $a_n \le b_n$، آنگاه $\lim_{n\to\infty}a_n \le \lim_{n\to\infty}b_n$.

اگر نهایتاً $a_n \le b_n \le c_n$ و $\lim_{n\to\infty}a_n = L = \lim_{n\to\infty}c_n$، آنگاه $\lim_{n\to\infty}b_n = L$.

حد بسیاری از دنباله‌هایی را که صریحاً تعریف شده باشند می‌توان با استفاده از این ویژگی‌ها و با روش‌هایی نظیر آنچه برای حدودی مانند $\lim_{x\to\infty} f(x)$ در بخش ۳.۱ به‌کار بردیم محاسبه کرد.

مثال ۶ حد دنباله‌های زیر را محاسبه کنید:

(آ) $\left\{\frac{2n^2-n-1}{5n^2+n-3}\right\}$ ، (ب) $\left\{\frac{\cos n}{n}\right\}$ و (پ) $\left\{\sqrt{n^2+2n}-n\right\}$

حل.

(آ) صورت و مخرج عبارت a_n را بر بیشترین توان موجود n در مخرج، یعنی بر n^2، تقسیم می‌کنیم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-n-1}{5n^2+n-3}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-(1/n)-(1/n^2)}{5+(1/n)-(3/n^2)}=\frac{2-0-0}{5+0-0}=\frac{2}{5}$$

زیرا $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ و $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$. دنبالهٔ مفروض همگراست و حد آن $\frac{2}{5}$ است.

(ب) چون به‌ازای هر n داریم $|\cos n| \le 1$، پس به‌ازای هر $n \ge 1$

$$-\frac{1}{n} \le \frac{\cos n}{n} \le \frac{1}{n}$$

می‌دانیم که $\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{n}=0$ و $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$. بنابراین، با استفاده از مشابه دنباله‌ایِ قضیهٔ فشار، $\lim_{n\to\infty}\cos n/n=0$. پس، دنبالهٔ مفروض به ۰ همگراست.

(پ) در این دنباله، صورت و مخرج را (که برابر با ۱ است) در مزدوج عبارت واقع در صورت ضرب می‌کنیم:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+2n}+n\right)}{\sqrt{n^2+2n}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+(2/n)}+1}=1$$

پس دنبالهٔ مفروض به ۱ همگراست.

مثال ۷ مطلوب است محاسبهٔ $\lim_{n\to\infty} n\tan^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$.

حل. برای این مثال بهتر است جملهٔ nام دنباله را با تابع متناظرِ وابسته به‌متغیر حقیقی x جایگزین کنیم و به‌ازای $x \longrightarrow \infty$ از آن حد بگیریم. با استفاده از قاعدهٔ لوپیتال داریم:

$$\lim_{n\to\infty} n\tan^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)=\lim_{x\to\infty} x\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \qquad \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+(1/x^2)}\left(\frac{-1}{x^2}\right)}{-\left(\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}=1$$

قضیهٔ ۱ اگر $\{a_n\}$ همگرا باشد، آنگاه $\{a_n\}$ کراندار است.

اثبات. فرض کنیم $\lim_{n\to\infty} a_n = L$. بنابر تعریف ۲، به‌ازای $\varepsilon = 1$ عددی طبیعی مانند N هست به‌طوری که اگر $n > N$، آنگاه $|a_n - L| < 1$؛ بنابراین، به‌ازای هر چنین nای، $|a_n| < 1 + |L|$. (چرا این ادعا درست است؟) اگر K عبارت باشد از ماکسیموم اعداد $|a_1|$، $|a_2|$، ...، $|a_N|$ و $|L| + 1$، آنگاه به‌ازای هر $n = 1, 2, 3, \ldots$ داریم $|a_n| \le K$. پس $\{a_n\}$ کراندار است.

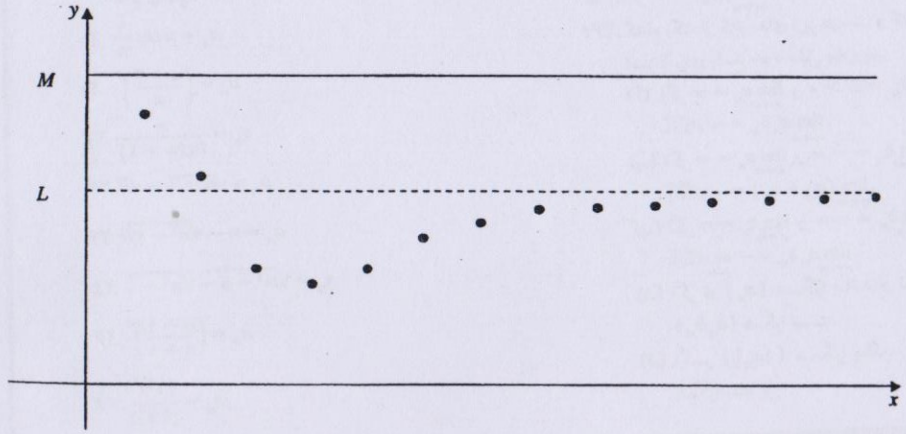
عکس قضیهٔ ۱ درست نیست؛ دنبالهٔ $\{(-1)^n\}$ کراندار هست ولی همگرا نیست.

ویژگی کمالِ دستگاه اعداد حقیقی (بخش پ.۱ را ببینید) را می‌توان به‌صورت زیر برحسب دنباله‌ها نیز فرمولبندی کرد:

دنباله‌های یکنوای کراندار، همگرا هستند

اگر دنبالهٔ $\{a_n\}$ از بالا کراندار و (نهایتاً) صعودی باشد، آنگاه همگراست. همین حکم برای دنبالهٔ از پایین کراندار و (نهایتاً) نزولی $\{a_n\}$ نیز برقرار است.

بدین‌سان، هر دنبالهٔ کراندار و نهایتاً یکنوا همگراست. (شکل ۲.۹ را ببینید.)



شکل ۲.۹ یک دنبالهٔ نهایتاً صعودی که از بالا کراندار است

مثال ۸ فرض کنیم a_n به‌طور بازگشتی به‌صورت

$$a_1 = 1,\quad a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

تعریف شده باشد. نشان دهید که $\lim_{n\to\infty} a_n$ وجود دارد و مقدار آن را بیابید.

حل. مشاهده می‌کنیم که $a_2 = \sqrt{6+1} = \sqrt{7} > a_1$. اگر $a_{k+1} > a_k$، آنگاه

$$a_{k+2} = \sqrt{6 + a_{k+1}} > \sqrt{6 + a_k} = a_{k+1}$$

و از این رو (با استفاده از استقرا) $\{a_n\}$ صعودی است. داریم $a_1 = 1 < 3$. اگر $a_k < 3$، آنگاه $a_{k+1} = \sqrt{6 + a_k} < \sqrt{6 + 3} = 3$ و از این رو (با استفاده از استقرا) به‌ازای هر n، $a_n < 3$. چون $\{a_n\}$ صعودی و از بالا کراندار است، از ویژگی کمال نتیجه می‌شود که $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ وجود دارد. با توجه به‌اینکه $\sqrt{6 + x}$ تابع پیوسته‌ای از x است، داریم

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{6 + a_n} = \sqrt{6 + \lim_{n\to\infty} a_n} = \sqrt{6 + a}$$

نکتهٔ ظریفی در حل این مثال هست که باید مورد توجه قرار گیرد. اثبات صعودی بودن $\{a_n\}$ نسبتاً آسان است، ولی چطور فهمیدیم که عدد ۳ (و نه عددی دیگر) را به‌عنوان کاندیدایی برای کران بالا اختیار کنیم؟ پاسخ این است که در حقیقت قسمت آخر را اول انجام دادیم و ثابت کردیم که *اگر* $\lim a_n = a$ وجود داشته باشد، *آنگاه* $a = 3$. دراین‌صورت این کاری با معنی است که کوشش کنیم و نشان دهیم که به‌ازای هر n، $a_n < 3$.

بدین‌سان، $a^2 = 6 + a$ یا $a^2 - a - 6 = 0$ یا $(a + 2)(a - 3) = 0$. این معادلهٔ درجه دوم دارای ریشه‌های $a = 3$ و -2 است. چون به‌ازای هر n داریم $a_n \ge 1$، باید $a \ge 1$. پس، $a = 3$ و $\lim_{n\to\infty} a_n = 3$. ■

مثال ۹ آیا دنبالهٔ $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$ همگراست یا واگراست؟

حل. اگر کوشش کنیم می‌توانیم نشان دهیم که در حقیقت دنبالهٔ مفروض صعودی و از بالا کراندار است. (تمرین ۳۲ در پایان همین بخش را ببینید.) در اینجا نیاز به‌این کار نیست زیرا بنا بر قضیهٔ ۶ در بخش ۴.۳ می‌دانیم که

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^1 = e$$

■

قضیهٔ ۲ اگر $\{a_n\}$ (نهایتاً) صعودی باشد، آنگاه یا از بالا کراندار و بنابراین همگراست، یا از بالا کراندار نیست و به‌بینهایت واگراست.

اثبات این قضیه را به‌عنوان تمرین به‌خواننده واگذار می‌کنیم. نتیجهٔ مشابهی نیز برای دنباله‌های (نهایتاً) نزولی داریم.

قضیهٔ زیر دو حد مهم را که در مطالعهٔ سری‌ها به‌طور مداوم به‌کار می‌روند به‌دست می‌دهد.

قضیهٔ ۳ (آ) اگر $|x| < 1$، آنگاه $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$.

(ب) اگر x عدد حقیقی دلخواهی باشد، آنگاه $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$.

اثبات. برای قسمت (آ) ملاحظه می‌کنیم که

$$\lim_{n\to\infty}\ln|x|^n = \lim_{n\to\infty} n\ln|x| = -\infty$$

زیرا به‌ازای $|x| < 1$ داریم $\ln|x| < 0$. بنابراین، با توجه به پیوستگی e^x

$$\lim_{n\to\infty}|x|^n = \lim_{n\to\infty} e^{\ln|x|^n} = e^{\lim_{n\to\infty}\ln|x|^n} = 0$$

چون $-|x|^n \le x^n \le |x|^n$، از قضیهٔ فشار نتیجه می‌شود که $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$.

برای قسمت (ب) فرض کنیم عدد صحیح N به‌گونه‌ای باشد که $|x| < N$. اگر $n > N$، آنگاه

$$\left|\frac{x^n}{n!}\right| = \frac{|x|}{1}\,\frac{|x|}{2}\,\frac{|x|}{3}\cdots\frac{|x|}{N-1}\,\frac{|x|}{N}\,\frac{|x|}{N+1}\cdots\frac{|x|}{n}$$

$$< \frac{|x|^{N-1}}{(N-1)!}\,\frac{|x|}{N}\,\frac{|x|}{N}\,\frac{|x|}{N}\cdots\frac{|x|}{N}$$

$$= \frac{|x|^{N-1}}{(N-1)!}\left(\frac{|x|}{N}\right)^{n-N+1} = K\left(\frac{|x|}{N}\right)^n$$

که در آن $K = \dfrac{|x|^{N-1}}{(N-1)!}\left(\dfrac{|x|}{N}\right)^{1-N}$ ثابتی مستقل از n است. چون $\dfrac{|x|}{N} < 1$، بنابر قسمت (آ) داریم $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{|x|}{N}\right)^n = 0$. بدین‌سان، $\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{x^n}{n!}\right| = 0$ و از این رو، $\lim_{n\to\infty}\dfrac{x^n}{n!} = 0$.

مثال ۱۰ مطلوب است محاسبهٔ $\lim_{n\to\infty}\dfrac{3^n+4^n+5^n}{5^n}$.

حل. ملاحظه می‌کنیم که بنابر قضیهٔ ۳ (آ)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+4^n+5^n}{5^n} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{3}{5}\right)^n + \left(\frac{4}{5}\right)^n + 1\right] = 0 + 0 + 1 = 1$$

تمرینات ۱.۹

در تمرین‌های ۱ تا ۱۳، تعیین کنید آیا دنبالهٔ مفروض (آ) کراندار (از بالا یا پایین) است، (ب) نهایتاً مثبت یا منفی است، (پ) صعودی، نزولی یا متناوب است و (ت) همگرا، واگرا، واگرا به ∞ یا $-\infty$ است.

۱. $\left\{\dfrac{2n^2}{n^2+1}\right\}$

۲. $\left\{\dfrac{2n}{n^2+1}\right\}$

۳. $\left\{4 - \dfrac{(-1)^n}{n}\right\}$

۴. $\left\{\sin\dfrac{1}{n}\right\}$

۵. $\left\{\dfrac{n^2-1}{n}\right\}$

۶. $\left\{\dfrac{e^n}{\pi^n}\right\}$

۷. $\left\{\dfrac{e^n}{\pi^{n/2}}\right\}$

۸. $\left\{\dfrac{(-1)^n n}{e^n}\right\}$

۹. $\left\{\dfrac{2^n}{n^n}\right\}$

۱۰. $\left\{\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}\right\}$

۱۱. $\left\{n\cos\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)\right\}$

۱۲. $\left\{\dfrac{\sin n}{n}\right\}$

۱۳. $\{1, 1, -2, 3, 3, -4, 5, 5, -6, \ldots\}$

در تمرین‌های ۱۴ تا ۲۹، حد دنبالهٔ $\{a_n\}$ را در صورت امکان محاسبه کنید.

۱۴. $a_n = \dfrac{5-2n}{3n-7}$

۱۵. $a_n = \dfrac{n^2-4}{n+5}$

۱۶. $a_n = \dfrac{n^2}{n^3+1}$

۱۷. $a_n = (-1)^n\dfrac{n}{n^3+1}$

۱۸. $a_n = \dfrac{n^2-2\sqrt{n}+1}{1-n-3n^2}$

۱۹. $a_n = \dfrac{e^n-e^{-n}}{e^n+e^{-n}}$

۲۰. $a_n = n\sin\dfrac{1}{n}$

۲۱. $a_n = \left(\dfrac{n-3}{n}\right)^n$

۲۲. $a_n = \dfrac{n}{\ln(n+1)}$

۲۳. $a_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

۲۴. $a_n = n-\sqrt{n^2-4n}$

۲۵. $a_n = \sqrt{n^2-n}-\sqrt{n^2-1}$

۲۶. $a_n = \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^n$

۲۷. $a_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$

۲۸. $a_n = \dfrac{n^2 2^n}{n!}$

۲۹. $a_n = \dfrac{\pi^n}{1+2^{2n}}$

۳۰. فرض کنیم $a_1 = 1$ و $a_{n+1} = \sqrt{1+2a_n}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. نشان دهید که دنبالهٔ $\{a_n\}$ صعودی و از بالا کراندار است. (*راهنمایی*: نشان دهید که عدد ۳ یک کران بالاست.) به‌این ترتیب نتیجه بگیرید که این دنباله همگراست و حد آن را بیابید.

*۳۱. تمرین ۳۰ را برای دنباله‌ای که به‌صورت $a_1 = 3,\ a_{n+1} = \sqrt{15+2a_n}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ تعریف شده است تکرار کنید. این بار باید یک کران بالا برای دنباله حدس بزنید.

*۳۲. فرض کنیم $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ و از این رو، $\ln a_n = n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$. با استفاده از ویژگی‌های تابع لگاریتمی نشان دهید که (آ) دنبالهٔ $\{a_n\}$ صعودی است و (ب) e یک کران بالا برای $\{a_n\}$ است.

*۳۳. قضیهٔ ۲ را ثابت کنید. همچنین، قضیهٔ مشابهی برای دنباله‌های نهایتاً نزولی بیان کنید.

۳۴. اگر $\{|a_n|\}$ کراندار باشد، ثابت کنید که $\{a_n\}$ نیز کراندار است.

۳۵. اگر $\lim_{n\to\infty}|a_n| = 0$، ثابت کنید که $\lim_{n\to\infty}a_n = 0$.

*۳۶. کدام یک از گزاره‌های زیر درست و کدام یک نادرست است؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید.

(آ) اگر $\lim_{n\to\infty}a_n = \infty$ و $\lim_{n\to\infty}b_n = L > 0$، آنگاه $\lim_{n\to\infty}a_n b_n = \infty$.

(ب) اگر $\lim_{n\to\infty}a_n = \infty$ و $\lim_{n\to\infty}b_n = -\infty$، آنگاه $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = 0$.

(پ) اگر $\lim_{n\to\infty}a_n = \infty$ و $\lim_{n\to\infty}b_n = -\infty$، آنگاه $\lim_{n\to\infty}a_n b_n = -\infty$.

(ت) اگر نه $\{a_n\}$ همگرا باشد و نه $\{b_n\}$، آنگاه $\{a_n b_n\}$ همگرا نیست.

(ث) اگر $\{|a_n|\}$ همگرا باشد، آنگاه $\{a_n\}$ نیز همگراست.

۲.۹ سری‌های نامتناهی

یک سری نامتناهی که معمولاً آن را به‌اختصار سری می‌نامیم، مجموعی صوری متشکل از تعدادی نامتناهی جمله است؛ برای مثال

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots$$

سری‌ای است که از جمع جمله‌های دنبالهٔ $\{a_n\}$ تشکیل شده است. این سری را به‌صورت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ نیز نشان می‌دهیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots$$

مثلاً

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \dots$$

گاهی لازم یا سودمند است که مجموع را با اندیس دیگری غیر از ۱ شروع کنیم:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = 1 + a + a^2 + a^3 + \dots$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n} = \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} + \dots$$

در سری اخیر ملاحظه می‌کنید که اگر با $n = 1$ شروع کرده بودیم، با مجموعی بی‌معنی مواجه می‌شدیم زیرا جملهٔ اول به‌ازای $n = 1$ نامعین است.

اگر لازم باشد می‌توانیم اندیس مجموع‌یابی را طوری تغییر دهیم که از مقدار دیگری شروع شود. این تعویض اندیس را می‌توان نظیر روش به‌کار رفته در مثال ۳ از بخش ۱.۵ به‌انجام رساند. مثلاً با استفاده از تعویض اندیس $n = m - 2$ می‌توانیم $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ را به‌صورت $\sum_{m=3}^{\infty} a_{m-2}$ بنویسیم. هر دو مجموع به‌بسط یکسانِ زیر منجر می‌شوند:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots = \sum_{m=3}^{\infty} a_{m-2}$$

جمع، عملی است که هر بار با دو عدد انجام می‌گیرد. اگر بخواهیم مجموع متناهی

$$a_1 + a_2 + a_3$$

را محاسبه کنیم، می‌توانیم نخست مجموع $a_1 + a_2$ را به‌دست آوریم و سپس a_3 را به‌حاصل بیفزاییم یا اینکه نخست $a_2 + a_3$ را محاسبه کنیم و سپس a_1 را به‌حاصل بیفزاییم. البته قانون شرکت‌پذیری برای جمع اطمینان می‌دهد که هر دو راه به‌جواب واحدی منجر می‌شوند. به‌همین دلیل نماد $a_1 + a_2 + a_3$ معنی دارد؛ در غیر این صورت مجبور بودیم بنویسیم $(a_1 + a_2) + a_3$ یا $a_1 + (a_2 + a_3)$. این استدلال را می‌توان به‌هر مجموع متناهی از جمله‌ها مانند $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ تعمیم داد، ولی چندان واضح نیست که در مورد مجموع تعدادی نامتناهی جمله مانند

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots$$

چه معنایی دارد. در اینجا دیگر مطمئن نیستیم که بتوان جمله‌ها را با هر ترتیب دلخواه با هم جمع کرد و باز هم جواب واحد به‌دست آورد. در حقیقت در بخش ۴.۹ خواهیم دید که در بعضی شرایط، اگر ترتیب جمله‌های سری را عوض کنیم مجموع سری واقعاً عوض می‌شود. تعبیر ما از یک مجموع نامتناهی این است که جمله‌ها

را مطابق الگوی زیر از چپ به‌راست دسته‌بندی و با هم جمع کنیم:

$$\dots((((a_1 + a_2) + a_3) + a_4) + a_5) + \dots$$

برای این منظور، دنبالهٔ جدید $\{s_n\}$، به‌نام **دنبالهٔ مجموع‌های جزئی** سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$، را به‌صورت مجموع n جملهٔ اول سری تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
s_1 &= a_1 \\
s_2 &= s_1 + a_2 = a_1 + a_2 \\
s_3 &= s_2 + a_3 = a_1 + a_2 + a_3 \\
&\vdots \\
s_n &= s_{n-1} + a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{j=1}^{n} a_j \\
&\vdots
\end{aligned}$$

در این وضع، مجموع این سری نامتناهی را برابر با حد دنبالهٔ مجموع‌های جزئی تعریف می‌کنیم.

تعریف ۳ همگرایی سری‌ها

می‌گوییم سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ به‌مجموع s همگراست و می‌نویسیم

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$$

هرگاه $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ که در آن s_n مجموع جزئی nام سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ است:

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{j=1}^{n} a_j$$

بدین‌سان، **سری** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراست اگر و فقط اگر **دنبالهٔ** مجموع‌های جزئی آن همگرا باشد. به‌همین ترتیب می‌گوییم سری مفروض به‌بینهایت واگراست، به‌منفی بینهایت واگراست یا صرفاً واگراست، هرگاه دنبالهٔ مجموع‌های جزئی آن این‌طور باشد. تأکید می‌کنیم که همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ به‌همگرایی دنبالهٔ $\{s_n\} = \{\sum_{j=1}^{n} a_j\}$ بستگی دارد و **نه** به‌همگرایی دنبالهٔ $\{a_n\}$.

سری هندسی

تعریف ۴ سری هندسی

هر سری به‌صورت $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots$ را که دارای جملهٔ nام $a_n = ar^{n-1}$ است یک **سری هندسی** می‌نامیم. عدد a، جملهٔ اول است. عدد r را **نسبت مشترک** سری می‌نامیم زیرا به‌ازای هر $n \geq 1$ برابر است با مقدار نسبت جملهٔ $(n+1)$ام به‌جملهٔ nام:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{ar^n}{ar^{n-1}} = r, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

مجموع جزئی nام سری هندسی، یعنی s_n، به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$s_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1}$$
$$rs_n = \qquad ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n$$

معادلهٔ دوم را از ضرب معادلهٔ اول در r به‌دست آورده‌ایم. اگر این دو معادله را از هم کم کنیم (با توجه به جمله‌هایی که آشکارا حذف می‌شوند) می‌بینیم که $s_n(1-r) = a - ar^n$. اگر $r \neq 1$، می‌توانیم رابطه اخیر را بر $(1-r)$ تقسیم کنیم و فرمولی را برای s_n به‌دست آوریم.

مجموع جزئی سری هندسی

اگر $r = 1$، آنگاه مجموع جزئی nام سری هندسی $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ عبارت است از $s_n = a + a + \cdots + a = na$. اگر $r \neq 1$، آنگاه

$$s_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

اگر $a = 0$، آنگاه به‌ازای هر n داریم $s_n = 0$ و از این رو $\lim_{n\to\infty} s_n = 0$. اکنون فرض کنیم $a \neq 0$. اگر $|r| < 1$، آنگاه $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$. بنابراین، $\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a}{1-r}$. اگر $r > 1$، آنگاه $\lim_{n\to\infty} r^n = \infty$. پس $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$ هرگاه $a > 0$ و $\lim_{n\to\infty} s_n = -\infty$ هرگاه $a < 0$. همین حکم برای $r = 1$ نیز برقرار است، زیرا در این حالت $s_n = na$. اگر $r \le -1$، $\lim_{n\to\infty} r^n$ وجود ندارد و به‌تبع آن، $\lim_{n\to\infty} s_n$ نیز وجود نخواهد داشت. بنابراین، نتیجه می‌گیریم که

$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$	به ۰ همگراست	هرگاه $a = 0$
	به $\frac{a}{1-r}$ همگراست	هرگاه $\lvert r\rvert < 1$
	به ∞ واگراست	هرگاه $r \ge 1$ و $a > 0$
	به $-\infty$ واگراست	هرگاه $r \ge 1$ و $a < 0$
	واگراست	هرگاه $r \le -1$ و $a \neq 0$

بعداً در همین فصل، هنگام بحث دربارهٔ سری‌های توانی، نمایش تابع $\frac{1}{1-x}$ به‌صورت مجموع یک سری هندسی یعنی

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \qquad (-1 < x < 1)$$

حائز اهمیت خواهد بود.

مثال ۱ (مثال‌هایی دربارهٔ سری هندسی و مجموع آن)

(آ) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$. در اینجا $a = 1$ و $r = \frac{1}{2}$. چون $|r| < 1$، پس سری همگراست.

(ب) $\pi - e + \frac{e^2}{\pi} - \frac{e^3}{\pi^2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \pi\left(-\frac{e}{\pi}\right)^{n-1} = \frac{\pi}{1-\left(-\frac{e}{\pi}\right)} = \frac{\pi^2}{\pi + e}$. در اینجا $a = \pi$ و $r = \frac{-e}{\pi}$. سری همگراست، زیرا $\left|\frac{-e}{\pi}\right| < 1$.

(پ) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{2})^{n-1} = 1 + 2^{1/2} + 2 + 2^{3/2} + \cdots = \infty$. این سری به ∞ واگراست، زیرا $a = 1 > 0$ و $r = \sqrt{2} > 1$.

(ت) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$. این سری واگراست، زیرا $r = -1$.

(ث) فرض کنیم $x = 0.323232\cdots = 0.\overline{32}$. دراین‌صورت

$$x = \frac{32}{100} + \frac{32}{100^2} + \frac{32}{100^3} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{32}{100}\left(\frac{1}{100}\right)^{n-1} = \frac{32}{100}\,\frac{1}{1-\frac{1}{100}} = \frac{32}{99}$$

این روش دیگری برای نمایش یک عدد اعشاریِ دوره‌ای به‌صورت نسبت دو عدد صحیح است (مثال ۱ در بخش پ.۱ را ببینید).

مثال ۲ اگر نرخ مؤثر ثابت سالانهٔ بهره ۵٪ باشد، امروز چقدر باید بپردازید تا مستمری‌ای که دریافت می‌کنید (آ) در پایان هر سال از ۱۰ سال آینده ۱۰۰۰ دلار و (ب) در پایان هر سال تا پایان عمر ۱۰۰۰ دلار باشد؟

حل. ارزش فعلی مبلغ ۱۰۰۰ دلاری که بناست در پایان هر سال از n سال آینده دریافت شود برابر است با $1000 \times \left(\frac{1}{1.05}\right)^n$ دلار (زیرا در مدت n سال، مبلغ A دلار به $A(1.05)^n$ دلار رشد می‌کند). بنابراین، ارزش فعلی همهٔ پرداخت‌های ۱۰۰۰ دلاریِ پایان هر سال از n سال آینده s_n دلار است که در آن

$$s_n = 1000\left[\frac{1}{1.05} + \left(\frac{1}{1.05}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{1.05}\right)^n\right]$$
$$= \frac{1000}{1.05}\left[1 + \frac{1}{1.05} + \left(\frac{1}{1.05}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{1.05}\right)^{n-1}\right]$$
$$= \frac{1000}{1.05}\,\frac{1-\left(\frac{1}{1.05}\right)^n}{1-\frac{1}{1.05}} = \frac{1000}{0.05}\left[1-\left(\frac{1}{1.05}\right)^n\right]$$

(آ) ارزش فعلی ۱۰ پرداخت آینده عبارت است از $s_{10} = 7721.73$ دلار.

(ب) ارزش فعلی پرداخت‌هایی که تا پایان عمر ادامه می‌یابند برحسب دلار عبارت است از

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1000}{0.05} = 20000$$

سری‌های ادغامی و سری همساز

مثال ۳ نشان دهید که سری

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n(n+۱)}=\frac{۱}{۱\times ۲}+\frac{۱}{۲\times ۳}+\frac{۱}{۳\times ۴}+\frac{۱}{۴\times ۵}+\cdots$$

همگراست و مجموع آن را بیابید.

حل. چون $\frac{۱}{n(n+۱)}=\frac{۱}{n}-\frac{۱}{n+۱}$، می‌توانیم مجموع جزئی s_n را به‌صورت زیر بنویسیم:

$$s_n=\frac{۱}{۱\times ۲}+\frac{۱}{۲\times ۳}+\frac{۱}{۳\times ۴}+\cdots+\frac{۱}{(n-۱)n}+\frac{۱}{n(n+۱)}$$

$$=\left(۱-\frac{۱}{۲}\right)+\left(\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۳}\right)+\left(\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۴}\right)+\cdots$$

$$\cdots+\left(\frac{۱}{n-۱}-\frac{۱}{n}\right)+\left(\frac{۱}{n}-\frac{۱}{n+۱}\right)$$

$$=۱-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۳}-\cdots-\frac{۱}{n}+\frac{۱}{n}-\frac{۱}{n+۱}$$

$$=۱-\frac{۱}{n+۱}$$

بنابراین، $\lim_{n\to\infty} s_n=۱$ و سری مفروض به ۱ همگراست:

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n(n+۱)}=۱$$

این، مثالی از **سری‌های ادغامی** است. علت این نامگذاری آن است که وقتی جمله‌های مجموع جزئی را به‌کسرهای جزئی تجزیه می‌کنیم بسیاری از جمله‌ها دوبه‌دو حذف می‌شوند و مجموع جزئی به‌صورت ساده‌ای در می‌آید. مثال‌های دیگری را نیز در تمرینات همین بخش آورده‌ایم. همان‌طور که این مثال‌ها نشان می‌دهند، روش کسرهای جزئی نه فقط در مبحث انتگرال، بلکه در سری‌ها نیز ابزار سودمندی است.

مثال ۴ نشان دهید که سری همساز

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n}=۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}+\cdots$$

به ∞ واگراست.

حل. اگر s_n مجموع جزئی nام سری همساز باشد، آنگاه

$$s_n=۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\cdots+\frac{۱}{n}$$

$=$ مجموع مساحت‌های مستطیل‌های سایه‌دار در شکل ۳.۹

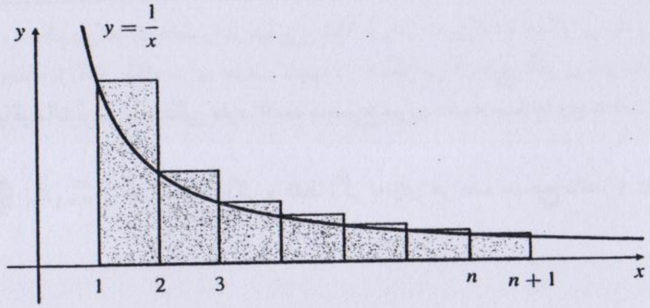
$>$ (مساحت زیر $y=\frac{۱}{x}$ از $x=۱$ تا $x=n+۱$)

$$=\int_{۱}^{n+۱}\frac{dx}{x}=\ln(n+۱)$$

چون $\lim_{n\to\infty}\ln(n+۱)=\infty$، پس $\lim_{n\to\infty}s_n=\infty$ و

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n}=۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\cdots$$

به ∞ واگراست.



شکل ۳.۹ یک مجموع جزئی سری همساز

در بخش‌های بعد، با سری همساز نیز مانند سری هندسی مکرراً مواجه خواهیم شد.

چند قضیه دربارهٔ سری‌ها

قضیهٔ ۴ اگر $\sum_{n=۱}^{\infty}a_n$ همگرا باشد، آنگاه $\lim_{n\to\infty}a_n=۰$.

اثبات. اگر $s_n=a_۱+a_۲+\cdots+a_n$، آنگاه $s_n-s_{n-۱}=a_n$. اگر $\sum_{n=۱}^{\infty}a_n$ همگرا باشد، حد $\lim_{n\to\infty}s_n=s$ وجود دارد و $\lim_{n\to\infty}s_{n-۱}=s$. پس $\lim_{n\to\infty}a_n=s-s=۰$.

تذکر. قضیهٔ ۴ برای درک سری‌های نامتناهی **بسیار مهم** است. دانشجویان غالباً یا با فراموش کردن این امر که ***سری‌ای که جمله‌هایش به‌صفر میل نمی‌کنند نمی‌تواند همگرا باشد***، یا با خلط این نتیجه با **عکس** آن (که این عکس، حکمی نادرست است) دچار اشتباه می‌شوند. عکس این قضیه می‌گوید اگر $\lim_{n\to\infty}a_n=۰$، آنگاه $\sum_{n=۱}^{\infty}a_n$ همگراست. سری همساز یک مثال نقض برای نشان دادن نادرستی این ادعاست: $\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}=۰$ ولی $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n}$ به ∞ واگراست.

هنگام بررسی همگرایی یک سری، نخستین پرسشی که باید از خود بپرسید این است که «آیا جملهٔ nام، به‌ازای $n\longrightarrow\infty$ به ۰ میل می‌کند؟» اگر پاسخ **منفی** باشد سری مفروض **همگرا نیست**. اگر پاسخ **مثبت** باشد سری مفروض ممکن است همگرا **باشد** ممکن است همگرا **نباشد**. اگر دنبالهٔ جمله‌های سری، یعنی $\{a_n\}$، به‌حد غیرصفری مانند L میل کند، آنگاه $\sum_{n=۱}^{\infty}a_n$ به‌بینهایت واگراست هرگاه $L>۰$ و به‌منهای بینهایت واگراست هرگاه $L<۰$.

مثال ۵ (آ) $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{n}{۲n-۱}$ به‌بینهایت واگراست، زیرا $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{۲n-۱}=\frac{۱}{۲}>۰$.

(ب) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\sin\left(\frac{1}{n}\right)$ واگراست، زیرا

$$\lim_{n\to\infty}\left|(-1)^n n \sin\frac{1}{n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin 1/n}{1/n} = \lim_{x\to 0+}\frac{\sin x}{x} = 1 \neq 0$$

قضیهٔ زیر حکم می‌کند که فقط رفتار **نهایی** دنبالهٔ $\{a_n\}$ تعیین‌کنندهٔ همگرایی $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ است. اگر تعدادی متناهی جمله از آغاز یک سری حذف کنیم، در همگرایی آن هیچ تأثیری نخواهد داشت؛ همگرایی سری فقط به **باقیماندهٔ** سری بستگی دارد. البته، مجموع سری به **همهٔ** جمله‌ها وابسته است.

قضیه ۵ $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ همگراست اگر و فقط اگر به‌ازای هر عدد صحیح مانند $N \geq 1$، $\sum_{n=N}^{\infty}a_n$ همگرا باشد.

قضیه ۶ اگر $\{a_n\}$ نهایتاً مثبت باشد، سری $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ یا همگراست (هرگاه مجموع‌های جزئی آن از بالا کراندار باشند) یا به ∞ واگراست (هرگاه مجموع‌های جزئی آن از بالا کراندار نباشند).

اثبات این دو قضیه را به‌عنوان تمرین به‌خواننده واگذار می‌کنیم. (تمرین‌های ۲۳ و ۲۴ در پایان همین بخش را ببینید.)

قضیهٔ زیر صرفاً فرمولبندیِ مجدد چند قانون متعارف در مبحث حد است.

قضیه ۷ اگر $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ به‌ترتیب به A و B همگرا باشند، آنگاه

(آ) $\sum_{n=1}^{\infty}ca_n$ (که در آن c یک ثابت است) به cA همگراست،

(ب) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$ به $A \pm B$ همگراست،

(پ) اگر به‌ازای هر $n = 1, 2, 3, \ldots$ داشته باشیم $a_n \leq b_n$، آنگاه $A \leq B$.

مثال ۶ مجموع سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+2^{n+1}}{3^n}$ را بیابید.

حل. سری مفروض برابر است با مجموع دو سری هندسی

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1/3}{1-(1/3)} = \frac{1}{2}$$

و

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{4/3}{1-(2/3)} = 4$$

بنابر قضیهٔ ۷ (ب)، مجموع آن $\frac{1}{2} + 4 = \frac{9}{2}$ است.

تمرینات ۲.۹

در تمرین‌های ۱ تا ۱۸، مجموع سری مفروض را بیابید یا نشان دهید که این سری واگراست (شاید هم به‌بینهایت یا منفی بینهایت). تمرین‌های ۱۱ تا ۱۴ سری‌هایی ادغامی هستند و برای آنها باید مانند مثال ۳ در همین بخش، روش کسرهای جزئی را به کار ببرید.

۱. $\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$

۲. $3-\frac{3}{4}+\frac{3}{16}-\frac{3}{64}+\ldots = \sum_{n=1}^{\infty}3\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

۳. $\sum_{n=5}^{\infty}\frac{1}{(2+\pi)^{2n}}$

۴. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5}{10^{3n}}$

۵. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-5)^n}{8^{2n}}$

۶. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{e^n}$

۷. $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{k+3}}{e^{k-3}}$

۸. $\sum_{j=1}^{\infty}\pi^{j/2}\cos(j\pi)$

۹. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3+2^n}{2^{n+2}}$

۱۰. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3+2^n}{3^{n+2}}$

۱۱. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{2\times 4}+\frac{1}{3\times 5}+\cdots$

۱۲. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{3\times 5}+\frac{1}{5\times 7}+\cdots$

۱۳. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{1}{1\times 4}+\frac{1}{4\times 7}+\frac{1}{7\times 10}+\cdots$

*۱۴. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{1\times 2\times 3}+\frac{1}{2\times 3\times 4}+\frac{1}{3\times 4\times 5}+\cdots$

۱۵. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$

۱۶. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+2}$

۱۷. $\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1/2}$

۱۸. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n+1}$

۱۹. عبارت ساده‌ای را برای مجموع جزئی nام سری $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ بیابید و با استفاده از آن نشان دهید که این سری واگراست.

۲۰. مجموع سری زیر را بیابید:

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4}+\cdots$$

۲۱. توپی پس از رها شدن و برخورد به‌زمین به‌اندازهٔ سه چهارم ارتفاع قبلی خود به‌بالا برمی‌گردد. اگر این توپ از ارتفاع ۲ متری رها شود و بتواند بینهایت بار بالا و پایین برود، کل مسافتی که تا لحظهٔ ایست می‌پیماید چقدر است؟

۲۲. اگر بانکی یک بار در سال بهرهٔ سادهٔ ۱۰ درصدی به‌حساب معینی بپردازد، موجودی این حساب در پایان هشتمین سال چقدر می‌شود، مشروط بر اینکه در آغاز هر سال از این هشت سال، ۱۰۰۰ دلار به‌حساب یاد شده واریز شود؟ (فرض کنید این حساب در آغاز موجودی نداشته باشد.)

*۲۳. قضیهٔ ۵ را ثابت کنید.

*۲۴. قضیهٔ ۶ را ثابت کنید.

*۲۵. قضیه‌ای مشابه قضیهٔ ۶ برای دنباله‌های نهایتاً منفی بیان کنید.

در تمرین‌های ۲۶ تا ۳۱، بگویید آیا گزارهٔ مفروض درست است یا نادرست؟ اگر درست است آن را ثابت کنید. اگر نادرست است یک مثال نقض بیاورید که نادرستی آن را نشان دهد.

*۲۶. اگر به‌ازای هر n داشته باشیم $a_n = 0$، آنگاه $\Sigma\, a_n$ همگراست.

*۲۷. اگر Σa_n همگرا باشد، آنگاه $\Sigma \frac{1}{a_n}$ به‌بینهایت واگراست.

*۲۸. اگر Σa_n و Σb_n هر دو واگرا باشند، آنگاه $\Sigma(a_n+b_n)$ نیز واگراست.

*۲۹. اگر به‌ازای هر n داشته باشیم $a_n \geq c > 0$، آنگاه $\Sigma\, a_n$ به‌بینهایت واگراست.

*۳۰. اگر $\Sigma\, a_n$ واگرا و $\{b_n\}$ کراندار باشد، آنگاه $\Sigma\, a_n b_n$ واگراست.

*۳۱. اگر $a_n > 0$ و $\Sigma\, a_n$ همگرا باشد، آنگاه $\Sigma (a_n)^2$ همگراست.

۳.۹ آزمون‌های همگرایی برای سری‌های مثبت

در بخش قبل، چند مثال دربارهٔ سری‌های همگرا (سری هندسی و سری ادغامی) ارائه کردیم که مجموع آنها را دقیقاً به‌این سبب توانستیم تعیین کنیم که موفق شدیم مجموع‌های جزئی s_n را به‌صورت فشرده با توابع صریحی برحسب n بیان کنیم و حد آنها را به‌ازای $n \longrightarrow \infty$ به‌دست آوریم. به‌طور معمول انجام این کار برای هر سری دلخواه امکان‌پذیر نیست و بنابراین، معمولاً تعیین مجموع دقیق سری مفروض امکان‌پذیر نخواهد بود. البته فنون بسیاری برای تعیین همگرایی سری‌ها در اختیار داریم. همچنین، در صورت همگرایی سری، فنون گوناگونی برای تقریب مجموع آن با هر دقت دلخواه در دست هست.

در این بخش، منحصراً با **سری‌های مثبت** سروکار خواهیم داشت، یعنی سری‌هایی مانند

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

که در آن به‌ازای هر $n \geq 1$ داریم $a_n \geq 0$. همان‌طور که در قضیهٔ ٦ ملاحظه کردیم، این نوع سری‌ها همگرا هستند هرگاه مجموع‌های جزئی آنها از بالا کراندار باشند؛ در غیر این‌صورت به‌بینهایت واگرا هستند. همهٔ نتایجی که ارائه می‌شوند دربارهٔ سری‌های **نهایتاً** مثبت نیز به‌کار می‌روند، زیرا همگرایی یا واگرایی هر سری به‌**باقیماندهٔ** سری بستگی دارد.

آزمون انتگرال

آزمون انتگرال، با مقایسهٔ یک سری نهایتاً مثبت و یک انتگرال ناسره که دارای رفتار مشابهی با این سری است، وسیله‌ای را برای تعیین همگرایی سری‌های نهایتاً مثبت به‌دست می‌دهد. مثال ۴ در بخش ۲.۹ مثالی از کاربرد این فن است. این روش را در قضیهٔ زیر به‌طور صوری بیان می‌کنیم.

قضیه ۸ آزمون انتگرال

فرض کنیم $a_n = f(n)$ که در آن به‌ازای عددی طبیعی مانند N، $f(x)$ تابعی مثبت، پیوسته و غیرصعودی بر بازهٔ $[N, \infty)$ است. دراین‌صورت

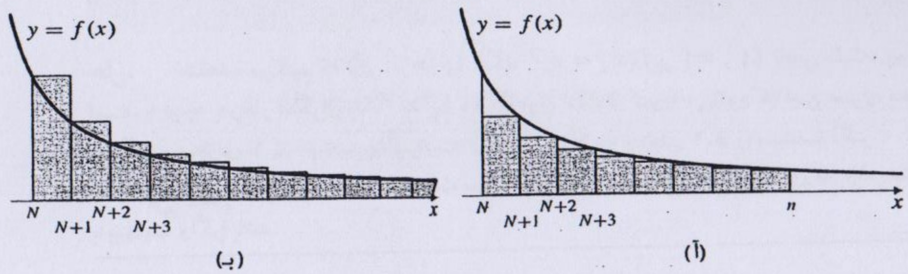
$$\int_N^{\infty} f(t)\,dt \qquad , \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

یا هر دو همگرا یا هر دو به‌بینهایت واگرا هستند.

اثبات. قرار می‌دهیم $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. اگر $n > N$، می‌بینیم که

$$\begin{aligned} s_n &= s_N + a_{N+1} + a_{N+2} + \cdots + a_n \\ &= s_N + f(N+1) + f(N+2) + \cdots + f(n) \\ &= s_N + (\text{مجموع مساحت‌های مستطیل‌های سایه‌دار در شکل ۴.۹ (آ)}) \\ &\leq s_N + \int_N^{\infty} f(t)\,dt \end{aligned}$$

اگر انتگرال ناسرهٔ $\int_N^{\infty} f(t)\,dt$ همگرا باشد، آنگاه دنبالهٔ $\{s_n\}$ از بالا کراندار است و بنابراین، $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراست.



شکل ۴.۹

برعکس، فرض کنیم سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ به‌مجموع s همگرا باشد. دراین‌صورت

$$\begin{aligned} \int_N^{\infty} f(t)\,dt &= (\text{مساحت زیر } y=f(t) \text{ و بالای } y=0 \text{ از } t=N \text{ تا } t=\infty) \\ &\leq (\text{مجموع مساحت‌های مستطیل‌های سایه‌دار در شکل ۴.۹ (ب)}) \\ &= a_N + a_{N+1} + a_{N+2} + \cdots \\ &= s - s_{N-1} < \infty \end{aligned}$$

پس این انتگرال ناسره، مساحتی متناهی را نشان می‌دهد و از این رو، همگراست. (جزئیات اثبات وجود $\lim_{R\to\infty} \int_N^R f(t)\,dt$ را حذف کرده‌ایم؛ نظیر حالت مربوط به‌سری‌ها، استدلال به‌کمال دستگاه اعداد حقیقی بستگی دارد.)

تذکر. اگر $a_n = f(n)$ که در آن f بر $[1, \infty)$ تابعی مثبت، پیوسته و غیرصعودی است، آنگاه قضیهٔ ۸ تضمین می‌کند $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ یا هر دو همگرا یا هر دو به‌بینهایت واگرا هستند. این قضیه **نمی‌گوید** که مجموع سری با مقدار انتگرال برابر است. در حالت همگرایی، برابری آنها محتمل نیست. البته همان‌طور که در زیر می‌بینیم، انتگرال می‌تواند ما را در تقریب مجموع سری یاری دهد.

کاربرد اصلی آزمون انتگرال عبارت است از اثبات نتیجهٔ مربوط به‌سری‌های $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}$، به‌نام **$p$-سری‌ها**. این نتیجه را باید به‌خاطر بسپارید؛ بعداً در همین بخش و بخش‌های دیگر، مکرراً رفتار سری‌های دیگر را با p-سری‌ها مقایسه خواهیم کرد.

مثال ۱ (p-سری‌ها) نشان دهید که

$$\sum_{n=۱}^{\infty} n^{-p} = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^p} \begin{cases} \text{همگراست هرگاه } p > ۱ \\ \text{به‌بینهایت واگراست هرگاه } p \le ۱ \end{cases}$$

حل. مشاهده می‌کنیم که اگر $p > ۰$، آنگاه $f(x) = x^{-p}$ بر $[۱ , \infty[$ تابعی مثبت، پیوسته و نزولی است. با توجه به‌رفتار انتگرال $\int_۱^\infty x^{-p}\,dx$، از آزمون انتگرال نتیجه می‌شود که این سری به‌ازای $p > ۱$ همگرا و به‌ازای $۰ < p \le ۱$ واگراست. (قضیهٔ ۲ (آ) در بخش ۵.۶ را ببینید.) اگر $p \le ۰$، آنگاه $\lim_{n\to\infty} \frac{۱}{n^p} \ne ۰$ و از این رو، در این حالت سری نمی‌تواند همگرا باشد. چون سری مفروض مثبت است باید به‌بینهایت واگرا باشد. ■

تذکر. سری همساز $\sum_{n=۱}^{\infty} n^{-۱}$ (حالت متناظر با $p = ۱$ در p-سری‌ها) با اینکه واگراست بر مرز بین همگرایی و واگرایی قرار دارد. در حالی که با افزایش n، جمله‌های آن به ۰ نزول می‌کنند، ولی سرعت کاهش آنها *آن‌قدر زیاد* نیست که مجموع سری متناهی بشود. اگر $p > ۱$، جمله‌های $\sum_{n=۱}^{\infty} n^{-p}$ به‌قدر کافی سریع به‌صفر کاهش می‌یابند و از این رو، مجموع آنها متناهی می‌شود. با استفاده از جمله‌هایی که سریع‌تر از $۱/n$ کاهش می‌یابند ولی سرعت کاهش آنها به‌ازای هیچ qی بزرگ‌تر از ۱ به‌اندازهٔ $۱/n^q$ نیست، می‌توانیم تمایز بین همگرایی و واگرایی در $p = ۱$ را دقیق‌تر کنیم. اگر $p > ۰$، جمله‌های $۱/n\,(\ln n)^p$ این ویژگی را دارا هستند، زیرا با افزایش n، $\ln n$ کندتر از هر توان مثبت n رشد می‌کند. اکنون این پرسش مطرح می‌شود که $\sum_{n=۲}^{\infty} ۱/n\,(\ln n)^p$ همگراست یا نه. بله، همگراست، باز هم مشروط بر اینکه $p > ۱$؛ با استفاده از تعویض متغیر $u = \ln x$ می‌توانید بررسی کنید که

$$\int_۲^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^p} = \int_{\ln ۲}^\infty \frac{du}{u^p}$$

این انتگرال همگراست هرگاه $p > ۱$ و واگراست هرگاه $۰ < p \le ۱$. این فرایند را می‌توان بیشتر هم تعمیم داد. (تمرین ۳۶ در پایان همین بخش را ببینید.)

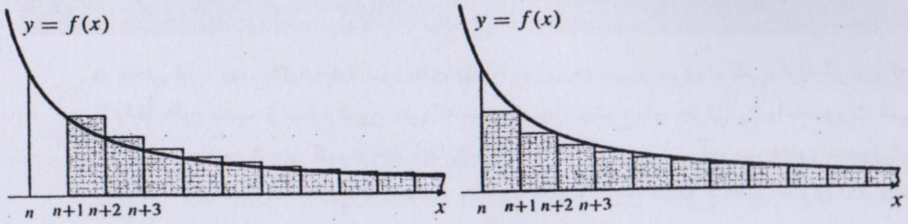
کاربرد کران‌های انتگرالی برای برآورد مجموع سری‌ها

فرض کنیم به‌ازای $k = n+۱ , n+۲ , n+۳ , \cdots$ داشته باشیم $a_k = f(k)$ که در آن f تابعی مثبت و پیوسته است که حداقل بر بازهٔ $[n , \infty[$ نزولی است. داریم

$$\begin{aligned} s - s_n &= \sum_{k=n+۱}^{\infty} f(k) \\ &= \text{مجموع مساحت‌های مستطیل‌های سایه‌دار در شکل ۵.۹ (آ)} \\ &\le \int_n^\infty f(x)\,dx \end{aligned}$$

به‌طور مشابهی ملاحظه می‌شود که

$$\begin{aligned} s - s_n &= \text{مجموع مساحت‌های مستطیل‌های سایه‌دار در شکل ۵.۹ (ب)} \\ &\ge \int_{n+۱}^\infty f(x)\,dx \end{aligned}$$



(ب) (آ)

شکل ۵.۹

اگر تعریف کنیم

$$A_n = \int_n^\infty f(x)\,dx$$

آنگاه از ترکیب نابرابری‌های بالا می‌بینیم که

$$A_{n+۱} \le s - s_n \le A_n$$

یا

$$s_n + A_{n+۱} \le s \le s_n + A_n$$

خطای تقریب $s \approx s_n$ در رابطهٔ $۰ \le s - s_n \le A_n$ صدق می‌کند. ولی چون s باید در بازهٔ $[s_n + A_{n+۱} , s_n + A_n]$ قرار داشته باشد، می‌توانیم با انتخاب وسط این بازه، s_n^*، تقریب بهتری را برای s بیابیم. دراین‌صورت خطای حاصل، کمتر از نصف طول این بازه، یعنی کمتر از $\frac{۱}{۲}(A_n - A_{n+۱})$ است:

یک تقریب انتگرالی بهتر

خطای $|s - s_n^*|$ در تقریب $s \approx s_n^* = s_n + \frac{A_{n+۱} + A_n}{۲}$ که در آن $A_n = \int_n^\infty f(x)\,dx$، در نابرابری $|s - s_n^*| \le \frac{A_n - A_{n+۱}}{۲}$ صدق می‌کند.

وقتی بدانیم کمیتی در بازهٔ معینی قرار دارد، می‌توانیم وسط این بازه را برای تقریب کمیت یادشده به‌کار بریم و دراین‌صورت قدرمطلق خطای حاصل از این تقریب، از نصف طول بازهٔ مفروض بیشتر نیست.)

مثال ۲ با استفاده از مجموع جزئی s_n (یعنی مجموع n جملهٔ اول سری) بهترین تقریب برای مجموع سری $\sum_{n=۱}^{\infty} ۱/n^۲$ (یعنی s_n^*) را بیابید. اندیس n را چقدر بزرگ باید بگیریم تا مطمئن شویم که قدرمطلق خطای حاصل از تقریب $s \approx s_n^*$ کمتر از ۰٫۰۰۱ است؟ اندیس n را چقدر بزرگ باید بگیریم تا مطمئن شویم که قدرمطلق خطای حاصل از تقریب $s \approx s_n$ کمتر از ۰٫۰۰۱ است؟

حل. چون $f(x) = \frac{۱}{x^۲}$ بر $[۱ , \infty[$ مثبت، پیوسته و نزولی است، به‌ازای هر $n = ۱ , ۲ , ۳ , \cdots$ داریم

$$s_n + A_{n+1} \le s \le s_n + A_n$$

که در آن

$$A_n = \int_n^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{R\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_n^R = \frac{1}{n}$$

بهترین تقریب برای s با استفاده از s_n، عبارت است از

$$s_n^* = s_n + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}\right) = s_n + \frac{2n+1}{2n(n+1)}$$

$$= 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \frac{2n+1}{2n(n+1)}$$

خطای حاصل از این تقریب، در

$$|s - s_n^*| \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{2n(n+1)} \le 0.001$$

صدق می‌کند مشروط بر اینکه $2n(n+1) \ge \frac{1}{0.001} = 1000$. بآسانی دیده می‌شود که این شرط به‌ازای $n \ge 22$ برقرار است؛ قدرمطلق خطای حاصل از تقریب

$$s \approx s_{22}^* = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{22^2} + \frac{45}{44 \times 23}$$

بیشتر از ۰٫۰۰۱ نیست. اگر تقریب $s \approx s_n$ را به‌کار ببریم، فقط وقتی نتیجه می‌گیریم

$$0 \le s - s_n \le A_n = \frac{1}{n} < 0.001$$

که $n > 1000$؛ برای رسیدن به‌دقت مورد نظر، به ۱۰۰۰ جملهٔ اول این سری نیاز داریم. ■

آزمون‌های مقایسه

آزمون بعد برای سری‌های مثبت، مشابه قضیهٔ مقایسه برای انتگرال‌های ناسره است. (قضیهٔ ۳ در بخش ۵.۶ را ببینید.) این آزمون، براساس مقایسه با سری دیگری که همگرایی یا واگرایی آن را می‌شناسیم ما را قادر می‌سازد تا همگرایی یا واگرایی سری مفروض را تعیین کنیم.

قضیهٔ ۹ آزمون مقایسه

فرض کنیم $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنباله و K ثابت مثبتی باشد به‌طوری که نهایتاً $0 \le a_n \le Kb_n$.

(آ) اگر سری $\sum_{n=1}^\infty b_n$ همگرا باشد، آنگاه سری $\sum_{n=1}^\infty a_n$ نیز همگراست.

(ب) اگر سری $\sum_{n=1}^\infty a_n$ به ∞ واگرا باشد، آنگاه سری $\sum_{n=1}^\infty b_n$ نیز واگراست.

اثبات. چون سری مفروض همگراست اگر و فقط اگر باقیماندهٔ آن همگرا باشد (قضیهٔ ۵)، می‌توانیم بدون کاستن از کلیت فرض کنیم که شرط $0 \le a_n \le Kb_n$ به‌ازای هر $n \ge 1$ برقرار است. قرار می‌دهیم

$S_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ و $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. دراین‌صورت $s_n \le KS_n$. اگر Σb_n همگرا باشد، آنگاه $\{S_n\}$ همگرا و بنابراین، کراندار است (قضیهٔ ۱). پس $\{s_n\}$ از بالا کراندار است. بنابر قضیهٔ ۶، Σa_n همگراست. چون همگرایی Σb_n، همگرایی Σa_n را تضمین می‌کند، اگر سری اخیر به‌بینهایت واگرا باشد، سری اول نمی‌تواند همگرا باشد و از این رو، باید به ∞ واگرا باشد.

توجه

قضیهٔ ۹ نمی‌گوید اگر Σa_n همگرا باشد، Σb_n نیز همگراست. این امکان هست که در عین حال که سری کوچکتر دارای مجموع متناهی است سری بزرگتر دارای مجموع نامتناهی باشد. (هرگز یک قضیه را با عکس آن خلط نکنید.)

مثال ۳ آیا سری‌های زیر همگرا هستند؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید.

(آ) $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n+1}$ ، (ب) $\sum_{n=1}^\infty \frac{3n+1}{n^3+1}$ و (پ) $\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{\ln n}$

حل. در هر مورد باید سری مناسبی برای مقایسه طوری بیابیم که همگرایی یا واگرایی آن را بشناسیم.

(آ) چون به‌ازای $n = 1, 2, 3, \dots$ داریم $\frac{1}{2^n} > \frac{1}{2^n+1} > 0$ و $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n}$ یک سری هندسی همگراست، از آزمون مقایسه نتیجه می‌شود که سری $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n+1}$ نیز همگراست.

(ب) مشاهده می‌کنیم که به‌ازای nهای بزرگ، رفتار $\frac{3n+1}{n^3+1}$ مشابه $\frac{3}{n^2}$ است. پس انتظار داریم که سری مفروض را با p-سری همگرای $\sum_{n=1}^\infty n^{-2}$ مقایسه کنیم. به‌ازای $n \ge 1$ داریم

$$\frac{3n+1}{n^3+1} = \frac{3n}{n^3+1} + \frac{1}{n^3+1} < \frac{3n}{n^3} + \frac{1}{n^3} < \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^2} = \frac{4}{n^2}$$

بدین‌سان، سری مفروض بنابر قضیهٔ ۹ همگراست.

(پ) به‌ازای $n = 2, 3, 4, \dots$ داریم $0 < \ln n < n$، پس $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$. چون $\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n}$ به ∞ واگراست (زیرا باقیماندهٔ سری همساز است) از آزمون مقایسه نتیجه می‌شود که $\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{\ln n}$ نیز واگراست. ■

قضیهٔ زیر، صورتی از آزمون مقایسه را به‌دست می‌دهد که دارای کلیت قضیهٔ ۹ نیست، ولی کاربرد آن در حالت‌های خاص غالباً آسانتر است.

قضیهٔ ۱۰ آزمون مقایسهٔ حدی

فرض کنیم $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنبالهٔ مثبت باشند و

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$$

که در آن L یا یک عدد نامنفی متناهی است یا $+\infty$.

(آ) اگر $L < \infty$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ همگرا باشد، آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ نیز همگراست.

(ب) اگر $L > 0$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ به‌بینهایت واگرا باشد آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ نیز به‌بینهایت واگراست.

اثبات. اگر $L < \infty$ آنگاه به‌ازای nهای به‌قدر کافی بزرگ داریم $b_n > 0$ و

$$0 \le \frac{a_n}{b_n} \le L + 1$$

و از این رو، $0 \le a_n \le (L+1)b_n$. بنابر قضیهٔ ۹ (آ) اگر $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ همگرا باشد سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ نیز همگراست.

اگر $L > 0$، آنگاه به‌ازای nهای به‌قدر کافی بزرگ

$$\frac{a_n}{b_n} \ge \frac{L}{2}$$

بنابراین، $0 < b_n \le \left(\frac{2}{L}\right)a_n$. اکنون از قضیهٔ ۹ (ب) نتیجه می‌شود که اگر $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ به‌بینهایت واگرا باشد، $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ نیز به‌بینهایت واگراست.

■

مثال ۴ آیا سری‌های زیر همگرا هستند؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید.

(آ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt{n}}$ ، (ب) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{n^3-2n+3}$

حل. باز هم باید سری‌های مناسبی برای مقایسه انتخاب کنیم.

(آ) جمله‌های این سری، مشابه با $\frac{1}{\sqrt{n}}$ نزول می‌کنند. ملاحظه می‌کنیم که

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{1+\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1/\sqrt{n})+1} = 1$$

چون p-سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ به‌بینهایت واگراست $(p = 1/2)$، آزمون مقایسهٔ حدی نشان می‌دهد که سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt{n}}$ نیز به‌بینهایت واگراست.

(ب) به‌ازای nهای بزرگ، جمله‌ها رفتاری مشابه با $\frac{n}{n^3}$ دارند و از این رو، سری را با p-سری همگرای $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ مقایسه می‌کنیم.

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+5}{n^3-2n+3}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3+5n^2}{n^3-2n+3} = 1$$

چون $L < \infty$، از آزمون مقایسهٔ حدی نتیجه می‌شود که سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{n^3-2n+3}$ نیز همگراست.

■

برای کاربرد موفقیت‌آمیز صورت اصلی آزمون مقایسه (قضیهٔ ۹)، این نکته حائز اهمیت است که بتوانیم به‌طور

شهودی دربارهٔ همگرایی یا واگرایی سری مفروض نظر دهیم. نحوهٔ به‌کارگیریِ مقایسه بستگی به‌این دارد که کوشش ما به‌منظور اثبات همگرایی است یا اثبات واگرایی. مثلاً اگر به‌طور شهودی ندانیم سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{100n + 20000}$$

به‌بینهایت واگراست، ممکن است کوشش ما صرف اثبات

$$\frac{1}{100n+20000} < \frac{1}{n} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

بشود. گرچه این نابرابری درست است، ولی هیچ کمکی نمی‌کند. سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ به‌بینهایت واگراست؛ بنابراین، قضیهٔ ۹ براساس این مقایسه هیچ اطلاعی را دربارهٔ سری مفروض در اختیار ما نمی‌گذارد. البته می‌توانیم به‌جای آن ثابت کنیم که

$$\frac{1}{100n+20000} \ge \frac{1}{20100n} \qquad n \ge 1$$

و سپس با توجه به‌قضیهٔ ۹ و مقایسه با $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ نتیجه بگیریم که $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{100n+20000}$ به‌بینهایت واگراست. راه آسانتر این است که قضیهٔ ۱۰ و این حقیقت را به‌کار ببریم که

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{100n+20000}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{100n+20000} = \frac{1}{100} > 0$$

آزمون مقایسهٔ حدی (یعنی قضیهٔ ۱۰) در مقایسه با آزمون مقایسهٔ معمولی (یعنی قضیهٔ ۹) دارای این نقیصه است که در بعضی از حالت‌ها حد L وجود ندارد و از این رو، نمی‌توان آن را به‌کار برد. در عوض، در این حالت‌ها این امکان هست که آزمون مقایسهٔ معمولی کارساز باشد.

مثال ۵ همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\sin n}{n^2}$ را بررسی کنید.

حل. چون حد

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1+\sin n}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} (1+\sin n)$$

وجود ندارد، آزمون مقایسهٔ حدی هیچ اطلاعی را در اختیار ما نمی‌گذارد. ولی با توجه به $\sin n \le 1$ داریم

$$0 \le \frac{1+\sin n}{n^2} \le \frac{2}{n^2} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

اکنون مقایسهٔ معمولی با سری همگرای $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ نشان می‌دهد که سری مفروض همگراست.

■

آزمون‌های نسبت و ریشه

قضیهٔ ۱۱ آزمون نسبت

فرض کنیم (نهایتاً) $a_n > 0$ و $\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ وجود داشته باشد یا $+\infty$ بشود.

(آ) اگر $0 \le \rho < 1$، آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراست.

(ب) اگر $1 < \rho \le \infty$، آنگاه $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ و $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ به‌بینهایت واگراست.

(پ) اگر $\rho = 1$، این آزمون هیچ اطلاعی را در اختیار ما نمی‌گذارد؛ سری مفروض ممکن است همگرا باشد و نیز ممکن است به‌بینهایت واگرا باشد.

اثبات.

(آ) فرض کنیم $\rho < 1$. عدد r را طوری انتخاب می‌کنیم که $\rho < r < 1$. چون $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = \rho$، به‌ازای nهای به‌قدر کافی بزرگ داریم $a_{n+1}/a_n \le r$. مثلاً فرض کنیم به‌ازای $n \ge N$ (که در آن N عددی طبیعی است) $a_{n+1} \le r a_n$. پس

$$\begin{aligned}
&a_{N+1} \le r a_N \\
&a_{N+2} \le r a_{N+1} \le r^2 a_N \\
&a_{N+3} \le r a_{N+2} \le r^3 a_N \\
&\vdots \\
&a_{N+k} \le r^k a_N \qquad (k = 0, 1, 2, 3, \ldots)
\end{aligned}$$

از مقایسه با سری هندسی همگرای $\sum_{k=0}^{\infty} r^k$ نتیجه می‌شود که $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ همگراست. بنابراین، سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{N-1} a_n + \sum_{n=N}^{\infty} a_n$ نیز همگراست.

(ب) اکنون فرض کنیم $\rho > 1$. عددی r را طوری می‌گیریم که $1 < r < \rho$. چون $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = \rho$، به‌ازای nهای به‌قدر کافی بزرگ، مثلاً به‌ازای $n \ge N$، داریم $a_{n+1}/a_n \ge r$. فرض کنیم N آن‌قدر بزرگ انتخاب شده باشد که $a_N > 0$. با استدلالی نظیر آنچه در قسمت (آ) به‌کار رفت می‌بینیم که به‌ازای $k = 0, 1, 2, \ldots$، $a_{N+k} \ge r^k a_N$. با توجه به $r > 1$ داریم $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. بنابراین، سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ به‌بینهایت واگراست.

(پ) اگر ρ را برای سری‌های $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ محاسبه کنیم، در هر دو حالت مقدار $\rho = 1$ به‌دست می‌آید. چون سری اول به‌بینهایت واگراست و سری دوم همگراست، پس آزمون نسبت در حالت $\rho = 1$ نمی‌تواند همگرایی و واگرایی را از هم تمیز دهد.

همهٔ p-سری‌ها و همچنین $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ وقتی a_n تابع گویایی از n باشد، در ردهٔ عدم قطعیت (یعنی حالت $\rho = 1$) قرار می‌گیرند. آزمون نسبت برای سری‌هایی بیشتر سودمند است که جمله‌هایشان حداقل با سرعت نمایی کاهش یابند. همچنین، وجود فاکتوریل در جملهٔ عمومی سری، این ایده را القا می‌کند که آزمون نسبت ممکن است سودمند باشد.

مثال ۶ همگرایی سری‌های زیر را بررسی کنید:

(آ) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{99^n}{n!}$، (ب) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n}$، (پ) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$، (ت) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$

حل. برای هر یک از این سری‌ها آزمون نسبت را به‌کار می‌بریم:

(آ)
$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{99^{n+1}}{(n+1)!} \Big/ \frac{99^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{99}{n+1} = 0 < 1$$

بدین‌سان، $\sum_{n=1}^{\infty} (99^n/n!)$ همگراست.

(ب)
$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^5}{2^{n+1}} \Big/ \frac{n^5}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^5 = \frac{1}{2} < 1$$

بنابراین، $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n}$ همگراست.

(پ)
$$\begin{aligned}
\rho &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \Big/ \frac{n!}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!\,n^n}{(n+1)^{n+1} n!} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1
\end{aligned}$$

بدین‌سان، $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ همگراست.

(ت)
$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2} \Big/ \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = 4 > 1$$

بدین‌سان، $\sum_{n=1}^{\infty} (2n)!/(n!)^2$ به‌بینهایت واگراست.

قضیهٔ زیر خیلی به‌آزمون نسبت شباهت دارد ولی کمتر از آن به‌کار می‌رود. اثبات آن را به‌عنوان تمرین به‌خواننده واگذار می‌کنیم. (تمرین ۳۷ را ببینید.) در تمرین‌های ۳۸ و ۳۹ سری‌هایی آورده‌ایم که می‌توان این آزمون را در مورد آنها به‌کار برد.

قضیهٔ ۱۲ آزمون ریشه

فرض کنیم (نهایتاً) $a_n > 0$ و $\sigma = \lim_{n\to\infty} (a_n)^{1/n}$ وجود داشته باشد یا $+\infty$ بشود.

(آ) اگر $0 \le \sigma < 1$، آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراست.

(ب) اگر $1 < \sigma \le \infty$، آنگاه $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ و $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ به‌بینهایت واگراست.

(پ) اگر $\sigma = 1$، این آزمون هیچ اطلاعی را در اختیار ما نمی‌گذارد؛ سری مفروض ممکن است همگرا باشد و نیز ممکن است به‌بینهایت واگرا باشد.

کاربرد کران‌های هندسی برای برآورد مجموع سری‌ها

فرض کنیم به‌ازای $k = n+1, n+2, n+3, \ldots$، نابرابری‌ای به‌صورت

$$0 \le a_k \le K r^k$$

داشته باشیم که در آن K و $r < 1$ دو ثابت هستند. پس، می‌توانیم با استفاده از یک سری هندسی، کران بالایی برای باقیماندهٔ سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ بیابیم.

$$0 \le s - s_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \le \sum_{k=n+1}^{\infty} Kr^k$$
$$= Kr^{n+1}(1 + r + r^2 + \dots) = \frac{Kr^{n+1}}{1 - r}$$

چون $r < 1$، سری مفروض همگراست و بتدریج که n افزایش می‌یابد، خطا با آهنگی نمایی به‌صفر میل می‌کند.

مثال ۷ در بخش ۶.۹ نشان خواهیم داد که

$$e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

(یادآور می‌شویم که $0! = 1$). اگر مجموع n جملهٔ اول سری (یعنی s_n) را برای تقریب e به‌کار ببریم، خطای حاصل را برآورد کنید. با استفاده از این سری، e را تا سه رقم درست اعشاری بیابید.

حل. داریم

$$s_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}$$
$$= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}$$

(چون این سری با جملهٔ متناظر با $n = 0$ شروع می‌شود، جملهٔ nام آن $\frac{1}{(n-1)!}$ است.) خطای حاصل از تقریب $s \approx s_n$ را می‌توانیم به‌صورت زیر برآورد کنیم:

$$0 < s - s_n = \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \cdots$$
$$= \frac{1}{n!}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots\right)$$
$$< \frac{1}{n!}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \cdots\right)$$

زیرا $n + 2 > n + 1$، $n + 3 > n + 1$ و الی آخر. سری اخیر یک سری هندسی است و از این رو،

$$0 < s - s_n < \frac{1}{n!}\,\frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{n+1}{n!\,n}$$

اگر بخواهیم e را تا سه رقم درست اعشاری محاسبه کنیم، باید مطمئن شویم که خطا در چهارمین رقم اعشاری کمتر از ۵ است، یعنی خطا کمتر از ۰٫۰۰۰۵ است. بنابراین، می‌خواهیم که

$$\frac{n+1}{n}\,\frac{1}{n!} < 0.0005 = \frac{1}{2000}$$

با توجه به $7! = 5040$ و $6! = 720$ می‌توانیم $n = 7$ و نه کمتر از آن را به‌کار ببریم. پس

$$e \approx s_7 = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!}$$
$$= 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} \approx 2.718$$

به‌منظور یافتن کران بالا برای باقیماندهٔ سری‌های مثبتی که همگرایی آنها را با استفاده از آزمون نسبت ثابت کرده‌ایم، استفاده از سری‌های هندسی سودمند است. این نوع سری‌ها نهایتاً از هر p-سری $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}$ (که حد نسبت جمله‌های آن $\rho = 1$ است) سریعتر همگرا هستند.

تمرینات ۳.۹

در تمرین‌های ۱ تا ۲۶، با استفاده از آزمون مناسب تعیین کنید که سری مفروض همگراست یا واگرا. سری‌های هندسی و p-سری‌ها را می‌توان برای مقایسه به‌کار برد. به‌سری‌هایی که جمله‌هایشان به ۰ میل نمی‌کنند توجه داشته باشید.

۱. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$

۲. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4 - 2}$

۳. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{n^3 + 1}$

۴. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2 + n + 1}$

۵. $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\sin \frac{1}{n^2}\right|$

۶. $\sum_{n=8}^{\infty} \frac{1}{\pi^n + 5}$

۷. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^3}$

۸. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(3n)}$

۹. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^n - n^\pi}$

۱۰. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + n}{2 + n}$

۱۱. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + n^{4/3}}{2 + n^{5/3}}$

۱۲. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{1 + n\sqrt{n}}$

۱۳. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \sqrt{\ln \ln n}}$

۱۴. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n (\ln \ln n)^2}$

۱۵. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n^4}$

۱۶. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^n}{\sqrt{n}}$

۱۷. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n (n + 1)}$

۱۸. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{n!}$

۱۹. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^2 e^n}$

۲۰. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!\,6^n}{(3n)!}$

۲۱. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{3^n \ln n}$

۲۲. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{100}\, 2^n}{\sqrt{n!}}$

۲۳. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^3}$

۲۴. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + n!}{(1 + n)!}$

۲۵. $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{2^n}{3^n - n^3}$

۲۶. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{\pi^n n!}$

در تمرین‌های ۲۷ تا ۳۰، با استفاده از s_n و کران‌های انتگرالی، کوچکترین بازه‌ای را بیابید که مطمئن هستید شامل مجموع سری (یعنی s) است. اگر وسط این بازه (یعنی s_n^*) را برای تقریب s به‌کار ببریم، n را چقدر بزرگ باید انتخاب کنیم تا مطمئن شویم خطای حاصل کمتر از ۰٫۰۰۱ است؟

۲۷. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$

۲۸. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$

۲۹. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}}$

۳۰. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + 4}$

برای هر یک از سری‌های مثبت در تمرین‌های ۳۱ تا ۳۴، اگر مجموع جزئی s_n را برای تقریبِ مجموع سری (یعنی s) به‌کار ببریم بهترین کران بالایی را که می‌توانید، برای خطای $s - s_n$ بیابید. در هر یک از این سری‌ها چند جمله لازم دارید تا مطمئن شوید که خطای تقریب، کمتر از ۰٫۰۰۱ است؟

۳۱. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k k!}$

۳۲. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n - 1)!}$

۳۳. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(2n)!}$

۳۴. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$

۳۵. با استفاده از آزمون انتگرال نشان دهید که سری $\Sigma_{n=1}^{\infty} 1/(1 + n^2)$ همگراست. نشان دهید که مجموع سری کمتر از $\pi/2$ است.

*۳۶. نشان دهید که سری $\Sigma_{n=3}^{\infty} 1/(n \ln n (\ln \ln n)^p)$ همگراست اگر و فقط اگر $p > 1$. این نتیجه را به‌سری‌هایی که به‌صورت

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)(\ln \ln n)\cdots(\ln_j n)(\ln_{j+1} n)^p}$$

هستند تعمیم دهید که در آن، $\ln_j n$ به‌معنی $\underbrace{\ln \ln \ln \ln \cdots \ln}_{j \text{ تا } \ln} n$ است.

*۳۷. آزمون ریشه را ثابت کنید. ***راهنمایی:*** اثبات آزمون نسبت را الگو قرار دهید.

۳۸. با استفاده از آزمون ریشه نشان دهید که سری $\Sigma_{n=1}^{\infty} 2^{n+1}/n^n$ همگراست.

*۳۹. با استفاده از آزمون ریشه، همگرایی سری

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$$

را بررسی کنید.

۴۰. تمرین ۳۸ را تکرار کنید، با این تفاوت که به‌جای آزمون ریشه آزمون نسبت را به کار ببرید.

*۴۱. کوشش کنید با استفاده از آزمون نسبت، همگرایی سری $\Sigma_{n=1}^{\infty} 2^{2n}(n!)^2/(2n)!$ را مورد بررسی قرار دهید. چه روی می‌دهد؟ اکنون ملاحظه می‌کنیم که

$$\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}=\frac{[2n(2n-2)(2n-4)\cdots 6\times 4\times 2]^2}{2n(2n-1)(2n-2)\cdots 4\times 3\times 2\times 1}$$

$$=\frac{2n}{2n-1}\times\frac{2n-2}{2n-3}\times\cdots\times\frac{4}{3}\times\frac{2}{1}$$

آیا سری مفروض همگراست؟ چرا بله، چرا خیر؟

*۴۲. تعیین کنید سری $\Sigma_{n=1}^{\infty} (2n)!/2^{2n}(n!)^2$ همگراست یا نه. ***راهنمایی:*** مانند تمرین ۴۱ عمل کنید. نشان دهید که $a_n \ge 1/2n$.

*۴۳. (آ) اگر $k > 0$ و n یک عدد صحیح مثبت باشد، نشان دهید که $n < \frac{1}{k}(1+k)^n$.

(ب) با استفاده از برآورد قسمت (آ) و با فرض $0 < k < 1$، یک کران بالا برای مجموع سری $\Sigma_{n=0}^{\infty} n/2^n$ بیابید. به‌ازای کدام مقدار k، این کران دارای کمترین مقدار است؟

(پ) اگر مجموع n جملهٔ اول سری (یعنی s_n) را برای تقریب مجموع سری قسمت (ب) (یعنی s) به‌کار ببریم، با استفاده از نابرابری قسمت (آ) یک کران بالا برای خطای $s - s_n$ بیابید. به‌ازای مقدار مفروض n، k را طوری بیابید که این کران بالا مینیموم بشود.

*۴۴. (**بهبود همگرایی سری‌ها**) می‌دانیم که $\Sigma_{n=1}^{\infty} 1/n(n+1) = 1$. (مثال ۳ در بخش ۲.۹ را ببینید.) چون $\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n(n+1)} + c_n$ که در آن $c_n = \frac{1}{n^2(n+1)}$، داریم $\Sigma_{n=1}^{\infty} 1/n^2 = 1 + \Sigma_{n=1}^{\infty} c_n$. سرعت همگرایی $\Sigma_{n=1}^{\infty} c_n$ بیشتر از $\Sigma_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ است، زیرا جمله‌های آن مشابه با $1/n^3$ کاهش می‌یابند. بنابراین، برای محاسبهٔ $\Sigma_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ با هر دقت دلخواه، تعداد کمتری از جمله‌های سری $\Sigma_{n=1}^{\infty} c_n$ در مقایسه با محاسبهٔ مستقیم $\Sigma_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ مورد نیاز هستند. با استفاده از کران‌های بالا و پایین انتگرال، مقدار n برای مجموع جزئی سری $\Sigma_{n=1}^{\infty} c_n$ (یعنی s_n^*) را طوری تعیین کنید که قدرمطلق خطای حاصل از تقریب مجموع سری با این مجموع جزئی، کمتر از ۰٫۰۰۱ باشد. اکنون $\Sigma_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ را با تقریب ۰٫۰۰۱ تعیین کنید.

(فن ارائه شده در این تمرین، ***بهبود همگرایی سری‌ها*** نام دارد. این فن را می‌توان برای برآورد مجموع Σa_n به‌کار برد مشروط بر اینکه مجموع Σb_n را بدانیم و با فرض $a_n - b_n = c_n$، $|c_n|$ به‌ازای $n \longrightarrow \infty$ سریعتر از $|a_n|$ کاهش یابد.)

۴۵. سری $\Sigma_{n=1}^{\infty} 1/(2^n+1)$ را در نظر می‌گیریم و مجموع آن و مجموع n جملهٔ اول آن را به‌ترتیب s و s_n می‌نامیم.

(آ) n را چقدر بزرگ اختیار کنیم تا قدرمطلق خطای تقریب $s \approx s_n$ کمتر از ۰٫۰۰۱ بشود؟

(ب) سری هندسی $\Sigma_{n=1}^{\infty} 1/2^n$ به ۱ همگراست. اگر به‌ازای هر $n = 1, 2, 3, \ldots$ قرار دهیم

$$b_n = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^n+1}$$

چند جمله از سری $\Sigma_{n=1}^{\infty} b_n$ لازم است تا مجموع آن را با تقریب ۰٫۰۰۱ به‌دست دهد؟

(پ) با استفاده از نتیجهٔ قسمت (ب) مجموع $\Sigma_{n=1}^{\infty} 1/(2^n+1)$ را با تقریب ۰٫۰۰۱ محاسبه کنید.

۹.۴ همگرایی مطلق و مشروط

همهٔ سری‌های بخش قبل نهایتاً مثبت بودند، یعنی به‌ازای nهای به‌قدر کافی بزرگ داشتیم $a_n \ge 0$. اکنون این قید را حذف می‌کنیم و جمله‌های a_n را حقیقی دلخواه در نظر می‌گیریم. همیشه می‌توانیم با گذاشتن قدرمطلق هر جمله به‌جای خود جمله، یک سری با جمله‌های مثبت از سری مفروض به‌دست آوریم.

تعریف ۵ همگرایی مطلق

می‌گوییم سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **مطلقاً همگراست** هرگاه $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ همگرا باشد.

سری

$$s=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = -1+\frac{1}{4}-\frac{1}{9}+\frac{1}{16}-\cdots$$

مطلقاً همگراست زیرا

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots$$

همگراست. این ادعا به‌نظر معقول می‌رسد که در این وضع، سری اول همگرا باشد و مجموع آن در $-S \le s \le S$ صدق کند. به‌طور کلی، حذف مقادیر مختلف‌العلامتِ ناشی از وجود جمله‌های منفی و مثبت، همگرایی یک سری را ***آسانتر*** از زمانی می‌سازد که همهٔ جمله‌ها علامت واحدی داشته باشند. درستی این ایده را در قضیهٔ زیر ثابت می‌کنیم.

قضیهٔ ۱۳ هر سری مطلقاً همگرا، همگراست.

اثبات. فرض کنیم $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ مطلقاً همگرا باشد و به‌ازای هر n قرار می‌دهیم $b_n = a_n + |a_n|$. چون $-|a_n| \le a_n \le |a_n|$، به‌ازای هر n داریم $0 \le b_n \le 2|a_n|$. بنابر آزمون مقایسه، $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ همگراست. بنابراین، $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n - \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ نیز همگراست.

باز هم مواظب باشید قضیهٔ ۱۳ را با عکس آن که گزاره‌ای نادرست است، اشتباه نگیرید. بعداً در همین بخش نشان خواهیم داد که **سری همساز متناوب**، یعنی سری

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots$$

همگراست، با وجود اینکه مطلقاً همگرا نیست. در حقیقت اگر به‌جای هر جمله، قدرمطلق آن را بگذاریم، سری همساز واگرای

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots = \infty$$

را به‌دست می‌آوریم.

توجه

با وجود اینکه همگرایی مطلق مستلزم همگرایی است، ولی همگرایی مستلزم همگرایی مطلق نیست.

تعریف ۶ **همگرایی مشروط**

اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد ولی مطلقاً همگرا نباشد، می‌گوییم این سری **به‌طور مشروط** همگراست.

سری همساز متناوب، مثالی از یک سری به‌طور مشروط همگراست.

آزمون‌های مقایسه، آزمون انتگرال و آزمون نسبت را می‌توان برای بررسی همگرایی مطلق به‌کار برد. این آزمون‌ها را باید برای سری $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ به‌کار گرفت. در آزمون نسبت، مقدار $\rho = \lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n|$ را محاسبه می‌کنیم. اگر $\rho < 1$، آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ مطلقاً همگراست. اگر $\rho > 1$، آنگاه $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$ و از این رو، هر دو سری $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ و $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ باید واگرا باشند. اگر $\rho = 1$، هیچ اطلاعی را به‌دست نمی‌آوریم؛ سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ممکن است مطلقاً همگرا، به‌طور مشروط همگرا یا واگرا باشد.

مثال ۱ همگرایی مطلق سری‌های زیر را بررسی کنید:

$$\text{(آ)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \quad ، \quad \text{(ب)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cos(n\pi)}{2^n}$$

حل.

(آ) $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\right| \Big/ \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2} > 0$. چون سری همساز $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ به‌بینهایت واگراست، از آزمون مقایسهٔ حدی نتیجه می‌شود که $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ مطلقاً همگرا نیست.

(ب) $\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)\cos(n+1)\pi}{2^{n+1}} \Big/ \frac{n\cos(n\pi)}{2^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} < 1$. (توجه داشته باشید که $\cos(n\pi)$ چیزی نیست جز بیان فانتزی $(-1)^n$.) بنابر آزمون نسبت، سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cos(n\pi)}{2^n}$ مطلقاً همگراست.

■

آزمون سری‌های متناوب

برای نشان دادن همگرایی سری همساز متناوب، نمی‌توانیم هیچ یک از آزمون‌های پیشین را به‌کار بگیریم؛ همهٔ آنها فقط در مورد سری‌های (نهایتاً) مثبت کاربرد دارند[5] و از این رو، فقط می‌توانند برای بررسی همگرایی مطلق مورد استفاده قرار گیرند. اثبات همگرایی سری‌ای که مطلقاً همگرا نیست معمولاً کار دشواری است. برای بررسی این نوع همگرایی، فقط یک آزمون را معرفی می‌کنیم؛ این آزمون فقط در مورد نوع بسیار خاصی از سری‌ها به‌کار می‌رود.

قضیه ۱۴ **آزمون سری‌های متناوب**

فرض کنیم جمله‌های دنبالهٔ $\{a_n\}$ به‌ازای عددی طبیعی مانند N در شرایط زیر صدق کنند:

(یک) به‌ازای هر $n \ge N$، $a_n a_{n+1} < 0$،

(دو) به‌ازای هر $n \ge N$، $|a_{n+1}| \le |a_n|$ و

(سه) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

یعنی جمله‌های دنباله نهایتاً یک در میان مثبت و منفی هستند، اندازهٔ آنها نزولی است و حد دنباله برابر است با صفر. دراین‌صورت سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراست.

توجه این اثبات را با تأنی بخوانید و دربارهٔ دلیل درستی هر گزاره بیندیشید.

اثبات. بدون کاستن از کلیت می‌توانیم فرض کنیم $N = 1$، زیرا همگرایی سری فقط به‌همگرایی باقیماندهٔ آن بستگی دارد. همچنین، می‌توانیم فرض کنیم $a_1 > 0$؛ اثبات برای حالت $a_1 < 0$ به‌طور مشابهی انجام می‌گیرد. اگر $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ مجموع جزئی nام سری باشد، از فرض نتیجه می‌شود که به‌ازای هر n داریم $a_{2n+1} > 0$ و $a_{2n} < 0$. چون قدرمطلق جمله‌ها نزولی است، $a_{2n+1} \ge -a_{2n+2}$. بنابراین، به‌ازای هر $n = 1, 2, 3, \ldots$،

$$s_{2n+2} = s_{2n} + a_{2n+1} + a_{2n+2} \ge s_{2n}$$

پس، مجموع‌های جزئیِ دارای اندیس زوج، یعنی $\{s_{2n}\}$، دنباله‌ای صعودی تشکیل می‌دهند. به‌همین ترتیب،

$$s_{2n+1} = s_{2n-1} + a_{2n} + a_{2n+1} \le s_{2n-1}$$

و از این رو، مجموع‌های جزئیِ دارای اندیس فرد، یعنی $\{s_{2n-1}\}$، دنباله‌ای نزولی تشکیل می‌دهند. چون

$$s_{2n} = s_{2n-1} + a_{2n} \le s_{2n-1}$$

می‌توانیم بگوییم به‌ازای هر n،

$$s_2 \le s_4 \le s_6 \le \cdots \le s_{2n} \le s_{2n-1} \le s_{2n-3} \le \cdots \le s_5 \le s_3 \le s_1$$

بنابراین، s_2 یک کران پایین برای دنبالهٔ نزولی $\{s_{2n-1}\}$ و s_1 یک کران بالا برای دنبالهٔ صعودی $\{s_{2n}\}$ است. با توجه به‌کمال اعداد حقیقی، هر دو دنبالهٔ یادشده همگرا هستند:

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n} = s'' \quad , \quad \lim_{n\to\infty} s_{2n-1} = s'$$

ولی $a_{2n} = s_{2n-1} - s_{2n}$ و از این رو،

$$0 = \lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} (s_{2n-1} - s_{2n}) = s' - s''$$

قرار می‌دهیم $s' = s'' = s$. هر مجموع جزئی به‌صورت s_{2n-1} یا s_{2n} است. بدین‌سان، حد $\{s_n\}$ برابر است با s و سری $\Sigma (-1)^{n-1} a_n$ به‌مجموع s همگراست.

●

تذکر. اثبات قضیهٔ ۱۴ نشان می‌دهد که مجموع سری، یعنی s، همواره بین هر دو مجموع جزئی متوالی دلخواه قرار دارد:

یا $s_n < s < s_{n+1}$ یا $s_{n+1} < s < s_n$

به‌این ترتیب قضیهٔ زیر ثابت می‌شود.

قضیهٔ ۱۵ برآورد خطا برای سری‌های متناوب

اگر دنبالهٔ $\{a_n\}$ در شرایط آزمون سری‌های متناوب (قضیهٔ ۱۴) صدق کند و از این رو، سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ به‌مجموع s همگرا باشد، آنگاه خطای تقریب $s \approx s_n$ (که در آن $n \ge N$) هم‌علامت است با نخستین جملهٔ حذف‌شده، یعنی $a_{n+1} = s_{n+1} - s_n$، و اندازهٔ آن از اندازهٔ این جمله بیشتر نیست:

$$|s-s_n| \le |s_{n+1}-s_n| = |a_{n+1}|$$

مثال ۲ چند جمله از سری $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n/(2^n+1)$ لازم است تا مجموع آن با خطایی کمتر از ۰٫۰۰۱ محاسبه شود؟

حل. این سری در مفروضات قضیهٔ ۱۵ صدق می‌کند. اگر مجموع جزئی n جملهٔ اول سری را برای تقریب مجموع سری به کار ببریم، خطای حاصل در رابطهٔ

$$|\text{خطا}| \le |\text{اولین جملهٔ حذف شده}| = \frac{1}{1+2^{n+1}}$$

صدق می‌کند. این خطا وقتی کمتر از ۰٫۰۰۱ است که $1000 < 2^{n+1}+1$. چون $2^{10} = 1024$، پس رابطهٔ $n+1 = 10$ پاسخگوی مسأله است؛ برای محاسبهٔ مجموع این سری با خطایی کمتر از ۰٫۰۰۱ نسبت به‌مقدار واقعی، به ۹ جمله نیاز داریم.

هنگام تعیین همگرایی یک سری داده‌شده، بهتر است نخست ببینیم این سری مطلقاً همگراست یا خیر. اگر مطلقاً همگرا نباشد، این امکان هست که به‌طور مشروط همگرا باشد.

مثال ۳ همگرایی مطلق و مشروط سری‌های زیر را بررسی کنید:

$$(\text{آ})\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\ ،\qquad (\text{ب})\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos(n\pi)}{\ln n}\ ،\qquad (\text{پ})\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^4}$$

حل. قدرمطلق هر جملهٔ سری (آ) برابر با $1/n$ و قدرمطلق هر جملهٔ سری (ب) برابر با $1/\ln n$ است. چون $1/\ln n > 1/n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ به‌بینهایت واگراست، هیچ یک از دو سری (آ) و (ب) مطلقاً همگرا نیست. ولی هر دو سری در شرایط قضیهٔ ۱۴ صدق می‌کنند و از این رو، هر دو همگرا هستند. هر یک از این سری‌ها به‌طور مشروط همگراست. سری (پ) مطلقاً همگراست، زیرا $|(-1)^{n-1}/n^4| = 1/n^4$ و $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^4$ یک p-سری همگراست ($p = 4 > 1$). همگرایی سری اخیر را می‌توانیم با استفاده از قضیهٔ ۱۴ نیز ثابت کنیم، ولی نیازی به‌انجام این کار نیست زیرا هر سری مطلقاً همگرا، همگراست (قضیهٔ ۱۳).

مثال ۴ به‌ازای کدام مقادیر x، سری $\sum_{n=1}^{\infty} (x-5)^n/n2^n$ مطلقاً همگرا، به‌طور مشروط همگرا یا واگراست؟

حل. برای این نوع سری‌ها که جمله‌های آنها توابعی از متغیر x هستند، معمولاً عاقلانه‌ترین کار این است که در آغاز، با استفاده از آزمون نسبت، همگرایی مطلق آنها را بررسی کنیم. داریم

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-5)^{n+1}}{(n+1)\,2^{n+1}}\Big/\frac{(x-5)^n}{n\,2^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\left|\frac{x-5}{2}\right| = \left|\frac{x-5}{2}\right|$$

سری مفروض مطلقاً همگراست هرگاه $|(x-5)/2| < 1$. این نابرابری هم‌ارز است با $|x-5| < 2$ (یعنی فاصلهٔ x تا ۵ کمتر از ۲ باشد) یا $3 < x < 7$. اگر $x < 3$ یا $x > 7$، آنگاه $|(x-5)/2| > 1$. در این وضع، سری واگراست زیرا جمله‌های آن به‌صفر میل نمی‌کنند.

اگر $x = 3$، سری مفروض به‌صورت $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n/n$ درمی‌آید که به‌طور مشروط همگراست (سری همساز متناوب). اگر $x = 7$، سری همساز $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ به‌دست می‌آید که به‌بینهایت واگراست. بنابراین، سری مفروض بر بازهٔ باز $]3, 7[$ مطلقاً همگرا، به‌ازای $x = 3$ به‌طور مشروط همگرا و هر جای دیگر واگراست.

مثال ۵ به‌ازای کدام مقادیر x، سری $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^2\left(x/(x+2)\right)^n$ مطلقاً همگرا، به‌طور مشروط همگرا یا واگراست؟

حل. باز هم با آزمون نسبت شروع می‌کنیم.

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|(n+2)^2\left(\frac{x}{x+2}\right)^{n+1}\Big/(n+1)^2\left(\frac{x}{x+2}\right)^n\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^2\left|\frac{x}{x+2}\right| = \left|\frac{x}{x+2}\right| = \frac{|x|}{|x+2|}$$

سری مفروض مطلقاً همگراست هرگاه $|x|/|x+2| < 1$. این شرط می‌گوید که فاصلهٔ x تا ۰ کمتر از فاصلهٔ x تا ۲− باشد. بنابراین، $x > -1$. سری مفروض واگراست هرگاه $|x|/|x+2| > 1$، یعنی هرگاه $x < -1$. اگر $x = -1$، سری مفروض به‌صورت $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n(n+1)^2$ درمی‌آید که واگراست. در نتیجه، سری مفروض، به‌ازای $x > -1$ مطلقاً همگراست، هیچ جا به‌طور مشروط همگرا نیست و به‌ازای $x \le -1$ واگراست.

هنگام به‌کارگیری آزمون سری‌های متناوب، این نکته حائز اهمیت است که (حداقل به‌طور ذهنی) تحقق هر سه شرط (یک) تا (سه) را مورد بررسی قرار دهیم.

مثال ۶ همگرایی سری‌های زیر را بررسی کنید.

(آ) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n+1}{n}$

(ب) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{16} + \frac{1}{5} - \cdots$ که در آن

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \\ \frac{-1}{n^2} & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \end{cases}$$

حل.

(آ) در اینجا a_nها یک در میان مثبت و منفی هستند و با افزایش n، اندازهٔ آنها نزول می‌کند. ولی $\lim_{n\to\infty} a_n = 1 \neq 0$. پس آزمون سری‌های متناوب به‌کار نمی‌آید. در حقیقت سری مفروض واگراست، زیرا جمله‌های آن به ۰ میل نمی‌کنند.

(ب) این یک سری متناوب است و جمله‌های آن به‌صفر میل می‌کنند. ولی اندازهٔ جمله‌ها نزول نمی‌کند (حتی نهایتاً). باز هم نمی‌توان آزمون سری‌های متناوب را به‌کار برد. در حقیقت با توجه به‌اینکه سری

$$-\frac{1}{4} - \frac{1}{16} - \cdots - \frac{1}{(2n)^2} - \cdots$$

همگرا و سری

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \cdots$$

به‌بینهایت واگراست، بآسانی دیده می‌شود که سری مفروض به‌بینهایت واگراست. ■

تجدید آرایش جمله‌های یک سری

تفاوت اساسی بین همگرایی مطلق و همگرایی مشروط این است که سری‌ای مانند $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ به‌این سبب مطلقاً همگراست که اندازهٔ جمله‌های آن با سرعت کافی طوری کاهش می‌یابند که حتی اگر هیچ حذفی ناشی از وجود جمله‌های مختلف‌العلامت صورت نگیرد، مجموع آنها باز هم متناهی است. اگر برای همگرایی سری لازم باشد که حذف جمله‌های مختلف‌العلامت حتماً صورت گیرد (و این وضع زمانی روی می‌دهد که جمله‌ها بکندی کاهش یابند)، سری فقط می‌تواند به‌طور مشروط همگرا باشد.

سری همساز متناوب

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$$

را در نظر می‌گیریم. این سری همگراست، ولی فقط به‌طور مشروط. اگر زیرسری متشکل از فقط جمله‌های مثبت را اختیار کنیم، سری

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots$$

را به‌دست می‌آوریم که به‌بینهایت واگراست. به‌طور مشابهی، زیرسری متشکل از جمله‌های منفی، یعنی

$$-\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} - \cdots$$

به‌منفی بینهایت واگراست.

اگر سری‌ای مطلقاً همگرا باشد، زیرسری متشکل از جمله‌های مثبت و زیرسری متشکل از جمله‌های منفی، هر یک باید به‌مجموعی متناهی همگرا باشد. اگر سری‌ای به‌طور مشروط همگرا باشد، زیرسری‌های مثبت و منفی آن به‌ترتیب به ∞ و $-\infty$ واگرا خواهند بود.

با استفاده از این حقایق، می‌توانیم به‌پرسش مطرح‌شده در آغاز بخش ۲.۹ پاسخ دهیم. با تجدید آرایش جمله‌های یک سری همگرا، به‌طوری که با ترتیب دیگری با هم جمع شوند، آیا این سری جدید نیز باید همگرا باشد؟ و اگر باید همگرا باشد آیا به‌همان مجموع اولیه همگراست؟ پاسخ به‌این امر بستگی دارد که سری اولیه مطلقاً همگراست یا فقط به‌طور مشروط همگراست.

قضیهٔ ۱۶ همگراییِ تجدید آرایش‌های یک سری

(آ) اگر جمله‌های یک سری مطلقاً همگرا را تجدید آرایش دهیم، به‌طوری که با ترتیب دیگری با هم جمع شوند، سری جدید به‌همان مجموع سری اولیه همگراست.

(ب) اگر سری‌ای به‌طور مشروط همگرا و L عدد حقیقی دلخواهی باشد، آنگاه می‌توان جمله‌های این سری را طوری تجدید آرایش داد که سری حاصل (به‌طور مشروط) به‌مجموع L همگرا باشد. همچنین، می‌توان سری مفروض را طوری تجدید آرایش داد که به ∞ یا $-\infty$ واگرا یا صرفاً واگرا باشد.

قسمت (ب) در قضیهٔ بالا نشان می‌دهد که همگرایی مشروط، نوع غیرقابل اعتمادِ همگرایی است، چرا که به‌ترتیب جمع کردن جمله‌ها وابسته است. اثبات صوری قضیهٔ بالا را ارائه نمی‌کنیم، ولی مضمون آن را با یک مثال توضیح می‌دهیم. (تمرین ۳۰ در پایان همین بخش را ببینید.)

مثال ۷ در بخش ۵.۹ نشان خواهیم داد که سری همساز متناوب

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \cdots$$

(به‌طور مشروط) به‌مجموع $\ln 2$ همگراست. چگونه جمله‌ها را تجدید آرایش دهیم تا سری حاصل به‌مجموع ۸ همگرا شود؟

حل. نخست جمله‌های زیرسری مثبت

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots$$

را تا جایی با هم جمع می‌کنیم که مجموع جزئی برای اولین بار از ۸ بیشتر شود. (و این امکان‌پذیر است، زیرا این زیرسریِ مثبت به‌بینهایت واگراست.) سپس، جملهٔ اول زیرسریِ منفی

$$-\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \cdots$$

یعنی $-\frac{1}{2}$ را به‌مجموع جزئی قبل اضافه می‌کنیم. این عمل، مجموع جزئی قبل را مجدداً به‌زیر ۸ می‌آورد. اکنون افزودن جمله‌های زیرسری مثبت را باز هم تا جایی ادامه می‌دهیم که مجموع جزئی برای اولین بار از ۸ بیشتر شود. بعد، جملهٔ دوم زیرسری منفی را به‌مجموع جزئی اخیر اضافه می‌کنیم و این سبب می‌شود که این مجموع جزئی به‌زیر ۸ سقوط کند. این روند را تکرار می‌کنیم؛ هر بار تعدادی از جمله‌های زیرسری مثبت را

اضافه می‌کنیم تا مجموع جزئی برای اولین بار از ۸ بیشتر شود و سپس جمله‌ای از زیرسری منفی به‌آن می‌افزاییم تا به‌زیر ۸ سقوط کند. چون هر دوی این زیرسری‌ها تعدادی نامتناهی جمله دارند و به‌ترتیب به ∞ و $-\infty$ واگرا هستند، سرانجام هر جملهٔ سری اولیه به‌حساب می‌آید و مجموع‌های جزئی سری جدید حول ۸ به‌جلو و عقب نوسان می‌کنند و به‌این عدد همگرا می‌شوند. البته می‌توانیم به‌جای ۸، هر عدد دیگری را نیز به‌کار ببریم. ■

تمرینات ۴.۹

در تمرین‌های ۱ تا ۱۲، تعیین کنید سری مفروض مطلقاً همگرا، به‌طور مشروط همگرا یا واگراست.

۱. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$

۲. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n^2+\ln n}$

۳. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n\pi)}{(n+1)\ln(n+1)}$

۴. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n}}{2^n}$

۵. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}(n^2-1)}{n^2+1}$

۶. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^{n}}{n!}$

۷. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n\pi^n}$

۸. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-n}{n^2+1}$

۹. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{20n^2-n-1}{n^3+n^2+33}$

۱۰. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{100\cos(n\pi)}{2n+3}$

۱۱. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(-100)^n}$

۱۲. $\sum_{n=10}^{\infty}\frac{\sin(n+1/2)\pi}{\ln\ln n}$

برای سری‌های تمرین‌های ۱۳ تا ۱۶، کوچکترین عدد صحیح n را طوری بیابید که مطمئن شوید قدرمطلق خطای حاصل از تقریب مجموع سری با مجموع جزئی s_n، کمتر از ۰٫۰۰۱ است.

۱۳. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n^2+1}$

۱۴. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{(2n)!}$

۱۵. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{2^n}$

۱۶. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{3^n}{n!}$

در تمرین‌های ۱۷ تا ۲۴، مقادیری از x را تعیین کنید که به‌ازای آنها سری مفروض مطلقاً همگرا، به‌طور مشروط همگرا یا واگراست.

۱۷. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n+1}}$

۱۸. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n^2 2^{2n}}$

۱۹. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-1)^n}{2n+3}$

۲۰. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\left(\frac{3x+2}{-5}\right)^n$

۲۱. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{2^n\ln n}$

۲۲. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4x+1)^n}{n^3}$

۲۳. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x+3)^n}{n^{1/3}4^n}$

۲۴. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{x}\right)^n$

۲۵*. آیا می‌توان آزمون سری‌های متناوب را مستقیماً برای $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n)\sin(n\pi/2)$ به‌کار برد؟ آیا این سری همگراست؟

۲۶*. اگر

$$a_n=\begin{cases}\dfrac{10}{n^2} & \text{زوج } n\\[2mm] \dfrac{-1}{10n^3} & \text{فرد } n\end{cases}$$

نشان دهید که سری $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ مطلقاً همگراست.

۲۷*. کدام یک از گزاره‌های زیر درست و کدام یک نادرست است؟ اگر درست است دلیل بیاورید و اگر نادرست است یک مثال نقض ارائه کنید.

(آ) اگر $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ همگرا باشد، آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ همگراست.

(ب) اگر $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ هر دو همگرا باشند، آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ مطلقاً همگراست.

(پ) اگر $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ مطلقاً همگرا باشد، آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ نیز مطلقاً همگراست.

۲۸*. (آ) با استفاده از استدلالی مبتنی بر مجموع‌های ریمان، نشان دهید که

$$\ln n! \ge \int_1^n \ln t\,dt = n\ln n - n + 1$$

(ب) به‌ازای کدام مقادیر x، سری $\sum_{n=1}^{\infty}n!x^n/n^n$ مطلقاً همگرا، به‌طور مشروط همگرا یا واگراست؟ (*راهنمایی:* نخست آزمون نسبت را به‌کار ببرید. برای بررسی حالت‌های مربوط به $\rho=1$، نابرابری قسمت (آ) سودمند است.)

۲۹*. به‌ازای کدام مقادیر x، سری $\sum_{n=1}^{\infty}(2n)!x^n/2^{2n}(n!)^2$ مطلقاً همگرا، به‌طور مشروط همگرا یا واگراست؟ (*راهنمایی:* تمرین ۴۲ در بخش ۳.۹ را ببینید.)

۳۰*. جمله‌های سری همساز متناوب را طوری تجدید آرایش دهید که سری جدید (آ) به ∞ واگرا و (ب) به -2 همگرا باشد.

۵.۹ سری‌های توانی

این بخش اختصاص دارد به‌نوع خاصی از سری‌های نامتناهی به‌نام **سری‌های توانی**. چنین سری‌ای را می‌توان یک چند جمله‌ای با درجهٔ نامتناهی تلقی کرد.

تعریف ۷ سری توانی

هر سری به‌صورت

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + \cdots$$

را یک **سری توانی برحسب توان‌های $x-c$** یا یک **سری توانی حول نقطهٔ $x=c$** می‌نامیم. ثابت‌های a_0، a_1، a_2، ... را **ضریب‌های** سری توانی می‌نامیم.

چون جمله‌های هر سری توانی توابعی از متغیر x هستند، به‌ازای هر مقدار x، سری ممکن است همگرا یا واگرا باشد. به‌ازای آن مقادیر x که سری همگراست مجموع سری، تابعی از x را به‌دست می‌دهد. برای مثال، اگر $-1<x<1$، آنگاه

$$1+x+x^2+x^3+\cdots=\frac{1}{1-x}$$

سری هندسی طرف چپ، **نمایش** تابع $1/(1-x)$ با یک سری توانی برحسب x (یا حول نقطهٔ $x=0$) است. ملاحظه می‌کنیم با وجود اینکه $1/(1-x)$ به‌ازای همهٔ xهای حقیقی جز $x=1$ تعریف شده است، این نمایش فقط بر بازهٔ باز $]-1,1[$ معتبر است. این سری به‌ازای $x=-1$ و $|x|>1$ همگرا نیست و از این رو، نمی‌تواند $1/(1-x)$ را در این نقاط نمایش دهد.

نقطهٔ c را **مرکز همگرایی** سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-c)^n$ می‌نامیم. این سری در $x=c$ (به a_0) همگراست. (در حقیقت به‌ازای $x=c$ همهٔ جمله‌ها جز جملهٔ اول صفر می‌شوند.) قضیهٔ ۱۷ که در زیر می‌آید

نشان می‌دهد که اگر سری در جای دیگر نیز همگرا باشد، آنگاه بر بازه‌ای (شاید نـامتناهی) بـه‌مرکز $x=c$ همگرا و هر جای این بازه بجز شاید در یک یا هر دو انتهای آن (در صورتی که این بازه کراندار باشد) مطلقاً همگراست. سری هندسی

$$1+x+x^2+x^3+\cdots$$

مثالی از این نوع است. این سری دارای مرکز همگرایی $c=0$ بوده و فقط بـر بـازهٔ $]-1,1[$ بـه‌مرکز ۰ همگراست. سری مفروض در هر نقطهٔ این بازه مطلقاً همگراست. مثال دیگر، سری

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}(x-5)^n=\frac{x-5}{2}+\frac{(x-5)^2}{2\times 2^2}+\frac{(x-5)^3}{3\times 2^3}+\cdots$$

است که آن را در مثال ۴ در بخش ۴.۹ مورد بحث قرار دادیم. در آنجا نشان دادیم که این سری بـر بـازهٔ $[3,7[$ که بازه‌ای به‌مرکز ۵ است، همگراست. همچنین، دیدیم که همگرایی بر بازهٔ $]3,7[$ مطلق است و در نقطهٔ انتهایی $x=3$ فقط همگرایی مشروط داریم.

قضیهٔ ۱۷ برای هر سری توانی مانند $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-c)^n$ حتماً یکی از سه وضعیت زیر برقرار است:

(یک) سری فقط در $x=c$ همگراست،

(دو) سری به‌ازای هر عدد حقیقی x همگراست یا

(سه) عدد حقیقی مثبتی مانند R هست به‌طوری که سری، به‌ازای xهایی که در $|x-c|<R$ صدق می‌کنند همگرا و به‌ازای xهایی که در $|x-c|>R$ صدق می‌کنند واگراست. در این حالت، سری ممکن است در یک یا هر دو ***نقطهٔ انتهایی*** $x=c-R$ و $x=c+R$ همگرا باشد یا نباشد.

در هر یک از این حالت‌ها، همگرایی همواره مطلق است (البته در حالت (پ)، بجز شاید در نقاط انتهایی $x=c-R$ و $x=c+R$).

اثبات. در بالا دیدیم که هر سری توانی در مرکز همگرایی خود همگراست؛ چون فـقط جـملهٔ اول آن ممکن است صفر نباشد پس همگرایی، مطلق است. برای اثبات بقیهٔ قضیه کافی است نشان دهیم که اگر سری به‌ازای عدد دلخواهی مانند $x_0\neq c$ همگرا باشد، آنگاه به‌ازای هر عدد x که از x_0 به c نزدیکتر باشد، یعنی به‌ازای هر x به‌طوری که $|x-c|<|x_0-c|$، مطلقاً همگراست. معنی این سخن این است که همگرایی در هر نقطهٔ $x_0\neq c$ مستلزم همگرایی مطلق بر بازهٔ $]c-x_0, c+x_0[$ است و از این رو، مجموعهٔ نقاط x که سری به‌ازای آنها همگراست باید بازه‌ای به‌مرکز c باشد.

بنابراین، فرض کنیم $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x_0-c)^n$ همگرا باشد. دراین‌صورت $\lim a_n(x_0-c)^n=0$ و از این رو، ثابتی مانند K هست به‌طوری که به‌ازای هر n، $|a_n(x_0-c)^n|\le K$ (قضیهٔ ۱ در بخش ۱.۹ را ببینید). اگر $r=|x-c|/|x_0-c|$، آنگاه $r<1$ و

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n(x-c)^n|=\sum_{n=0}^{\infty}|a_n(x_0-c)^n|\left|\frac{x-c}{x_0-c}\right|^n\le K\sum_{n=0}^{\infty}r^n=\frac{K}{1-r}<\infty$$

بدین‌سان، $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-c)^n$ مطلقاً همگراست.

بنابر قضیهٔ ۱۷، مجموعهٔ مقادیر x که سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-c)^n$ بـه‌ازای آنها هـمگراست، بـازه‌ای به‌مرکز $x=c$ است. این بازه را **بازهٔ همگرایی** این سری توانی می‌نامیم. این بازه باید به‌یکی از صورت‌های زیر باشد:

(یک) فقط نقطهٔ $x=c$ (که عبارت است از بازهٔ بستهٔ تباهیدهٔ $[c,c]$)،

(دو) کل خط حقیقی $]-\infty,\infty[$،

(سه) بازه‌ای کراندار به‌مرکز c:

$$[c-R,c+R]\quad,\quad [c-R,c+R[\quad,\quad]c-R,c+R]\quad,\quad]c-R,c+R[$$

عدد R در حالت (سه) را **شعاع همگرایی** سری توانی می‌نامیم. در حالت (یک) می‌گوییم شعاع همگرایی صفر است؛ در حالت (دو) شعاع همگرایی ∞ است.

شعاع همگرایی R را اغلب می‌توان با اِعمال آزمون نسبت بر سری توانی به‌دست آورد: اگر

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x-c)^{n+1}}{a_n(x-c)^n}\right|=\left(\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)|x-c|$$

وجود داشته باشد، آنگاه سری $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-c)^n$ به‌ازای $\rho<1$ یعنی به‌ازای

$$|x-c|<R=1\Big/\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

مطلقاً همگراست؛ سری، به‌ازای $|x-c|>R$ واگراست.

شعاع همگرایی

فـرض کـنیم $L=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ وجـود داشـته بـاشد یـا ∞ بـاشد. دراین‌صورت سری تـوانی $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-c)^n$ دارای شعاع همگرایی $R=\frac{1}{L}$ است. (اگـر $L=0$، آنگاه $R=\infty$؛ اگـر $L=\infty$ آنگاه $R=0$.)

مثال ۱ مرکز، شعاع و بازهٔ همگرایی

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x+5)^n}{(n^2+1)3^n}$$

را تعیین کنید.

حل. این سری را می‌توان به‌صورت

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n\frac{1}{n^2+1}\left(x+\frac{5}{2}\right)^n$$

نوشت. مرکز همگرایی عبارت است از $x=-\frac{5}{2}$. شعاع همگرایی (R) از رابطهٔ

$$\frac{1}{R}=L=\lim\left|\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\frac{1}{(n+1)^2+1}}{\left(\frac{2}{3}\right)^n\frac{1}{n^2+1}}\right|=\lim\frac{2}{3}\,\frac{n^2+1}{(n+1)^2+1}=\frac{2}{3}$$

به‌دست می‌آید. بدین‌سان، $R = \frac{3}{2}$، سری مفروض بر بازهٔ $]-\frac{5}{2}-\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}+\frac{3}{2}[=]-4, -1[$ مطلقاً همگرا و بر $]-\infty, -4[$ و $]-1, \infty[$ واگراست. سری در $x = -1$ به‌صورت $\sum_{n=0}^{\infty} 1/(n^2+1)$ و در $x = -4$ به‌صورت $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n/(n^2+1)$ در می‌آید. هر دوی اینها (مطلقاً) همگرا هستند. بنابراین، بازهٔ همگرایی سری توانی مفروض $[-4, -1]$ است. ■

مثال ۲ شعاع همگرایی هر یک از سری‌های زیر را تعیین کنید:

(آ) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ و (ب) $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$

حل.

(آ) $L = \left|\lim \frac{1}{(n+1)!}\Big/\frac{1}{n!}\right| = \lim \frac{n!}{(n+1)!} = \lim \frac{1}{n+1} = 0$. پس $R = \infty$. این سری به‌ازای همهٔ xها (مطلقاً) همگراست. همان‌طور که در مثال ۱ از بخش بعد نشان خواهیم داد، مجموع آن e^x است.

(ب) $L = \left|\lim \frac{(n+1)!}{n!}\right| = \lim (n+1) = \infty$. پس $R = 0$. این سری فقط در مرکز همگرایی، یعنی $x = 0$، همگراست. ■

اعمال جبری بر سری‌های توانی

برای ساده کردن بحث زیر، فقط آن دسته از سری‌های توانی را در نظر می‌گیریم که دارای مرکز همگرایی $x = 0$ هستند، یعنی سری‌هایی به‌صورت

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

را. همهٔ ویژگی‌هایی را که برای این نوع سری‌ها ثابت می‌کنیم می‌توان بی‌درنگ با تعویض متغیر $x = y - c$ به‌سری‌های توانی به‌صورت $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (y-c)^n$ تعمیم داد.

نخست مشاهده می‌کنیم که سری‌های توانی هم ـ مرکز را می‌توان بر هر بازه‌ای که بین بازه‌های همگرایی آنها مشترک باشد، با هم جمع یا از هم کم کرد. قضیهٔ زیر یک پیامد سادهٔ قضیهٔ ۷ در بخش ۲.۹ است و نیاز به‌اثبات ندارد.

قضیهٔ ۱۸ فرض کنیم $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ دو سری توانی به‌ترتیب با شعاع‌های همگرایی R_a و R_b باشند و c یک ثابت باشد. دراین‌صورت

(یک) سری $\sum_{n=0}^{\infty} (c a_n) x^n$ دارای شعاع همگرایی R_a است[1] و

$$\sum_{n=0}^{\infty} (c a_n) x^n = c \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

هر جاکه سری طرف راست همگرا باشد.

(دو) $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$ دارای شعاع همگرایی R است که در رابطهٔ $R \ge \min\{R_a, R_b\}$ صدق

۱. بهتر است در اینجا فرض شود $c \neq 0$ زیرا به‌ازای $c = 0$، شعاع همگرایی $\Sigma(c a_n)x^n$ آشکارا ∞ است در حالی که ممکن است $R_a \neq \infty$. ـ م.

می‌کند و

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

هر جاکه هر دو سری طرف راست همگرا باشند.

وضعیت مربوط به‌ضرب و تقسیم سری‌های توانی پیچیده‌تر است. فقط به‌ذکر نتایج متناظر بسنده می‌کنیم و هیچ اثباتی برای ادعاهای خود نمی‌آوریم. جزئیات بیشتر را در هر کتاب درسی آنالیز ریاضی می‌توانید ببینید.

با توجه به‌ضرب

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots)(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots)$$
$$= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)x^2 + \cdots$$

فرمول

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

راکه در آن

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0 = \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}$$

حدس می‌زنیم. سری $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ را **حاصلضرب کوشیِ** سری‌های $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ می‌نامیم. مانند جمع، شعاع همگراییِ حاصلضرب کوشی نیز در رابطهٔ $R \ge \lim\{R_a, R_b\}$ صدق می‌کند.

مثال ۳ چون به‌ازای $-1 < x < 1$ داریم

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

با استفاده از حاصلضرب کوشیِ این سری در خودش می‌توانیم سری توانی $\frac{1}{(1-x)^2}$ (به‌مرکز ۰) را تعیین کنیم. با توجه به‌اینکه به‌ازای $n = 0, 1, 2, \ldots$ داریم $a_n = b_n = 1$، پس

$$c_n = \sum_{j=0}^{n} 1 = n + 1$$

و از این رو، به‌ازای $-1 < x < 1$ رابطهٔ

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$$

برقرار است. این سری را می‌توان با ضرب مستقیم سری‌ها نیز به‌دست آورد:

$$\begin{array}{rcccccccccc}
 & 1 & + & x & + & x^2 & + & x^3 & + & \cdots \\
\times & 1 & + & x & + & x^2 & + & x^3 & + & \cdots \\
\hline
 & 1 & + & x & + & x^2 & + & x^3 & + & \cdots \\
 & & & x & + & x^2 & + & x^3 & + & \cdots \\
 & & & & & x^2 & + & x^3 & + & \cdots \\
 & & & & & & & x^3 & + & \cdots \\
 & & & & & & & & & \cdots \\
\hline
 & 1 & + & 2x & + & 3x^2 & + & 4x^3 & + & \cdots
\end{array}$$

■

سری‌های توانی را می‌توان بر یکدیگر تقسیم نیز کرد ولی قاعدهٔ ساده‌ای برای تعیین ضرایب سریِ خارج‌قسمت وجود ندارد. اگر R_1، R_2 و R_3 به‌ترتیب عبارت باشند از شعاع همگرایی سری مقسوم، شعاع همگرایی سری مقسوم‌علیه و فاصلهٔ مرکز همگرایی تا نزدیکترین **عدد مختلطی** که مجموع سری مقسوم‌علیه به‌ازای آن صفر می‌شود، آنگاه شعاع همگرایی خارج‌قسمت از مینیموم این سه عدد کمتر نیست. برای توضیح این نکته، ملاحظه می‌کنیم که ۱ و $1-x$ دو سری توانی با شعاع همگرایی بینهایت هستند، یعنی به‌ازای هر x داریم

$$1 = 1 + 0x + 0x^2 + 0x^3 + \cdots$$
$$1 - x = 1 - x + 0x^2 + 0x^3 + \cdots$$

ولی شعاع همگرایی خارج‌قسمت $\frac{1}{1-x}$ برابر است با ۱، یعنی فاصلهٔ مرکز همگرایی $x = 0$ تا نقطهٔ $x = 1$ که مخرج به‌ازای آن صفر می‌شود، به‌عبارت دیگر

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \qquad |x| < 1$$

مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری از سری‌های توانی

اگر یک سری توانی دارای شعاع همگرایی مثبت باشد، می‌توان از آن جمله به‌جمله مشتق یا انتگرال گرفت. سری حاصل در هر نقطهٔ بازهٔ همگرایی، بجز شاید در نقاط انتهایی، به‌مشتق یا انتگرال مجموع سری اولیه همگراست. این حقیقت بسیار مهم می‌گوید در محاسبات، زفتار سری‌های توانی مشابه چندجمله‌ای‌هاست که آسانترین توابع برای مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری هستند. ویژگی‌های مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری از سری‌های توانی را به‌طور صوری در قضیهٔ زیر ارائه می‌کنیم.

قضیه ۱۹ **مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری جمله به‌جمله از سری‌های توانی**

اگر سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ بر بازهٔ $]-R, R[$ (که در آن $R > 0$)، به‌مجموع $f(x)$ همگرا باشد، یعنی

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots \qquad (-R < x < R)$$

آنگاه f بر $]-R, R[$ مشتق‌پذیر است و

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots \qquad (-R < x < R)$$

همچنین، f بر هر زیر بازهٔ بستهٔ $]-R, R[$ انتگرال‌پذیر است و اگر $|x| < R$، آنگاه

$$\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \frac{a_2}{3} x^3 + \cdots$$

گرچه درک بیان این قضیه برای آنچه در پی می‌آید حائز اهمیت فراوان است، ولی درک اثبات آن چندان مهم نیست. می‌توانید اثبات را رها کنید و به کاربردها بپردازید.

اثبات. فرض کنیم $-R < x < R$. عدد $H > 0$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $|x| + H < R$. بنابر قضیهٔ ۱۷ داریم[1]

۱. این اثبات منسوب است به R. Výborný, American Mathematical Monthly, April 1987.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| (|x| + H)^n = K < \infty$$

قضیهٔ دوجمله‌ای (بخش ۹.۹ را ببینید) نشان می‌دهد که اگر $n \geq 1$، آنگاه

$$(x+h)^n = x^n + n x^{n-1} h + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^k$$

بنابراین، به‌ازای $|h| \leq H$ داریم

$$\begin{aligned}
|(x+h)^n - x^n - n x^{n-1} h| &= \left| \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^k \right| \\
&\leq \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} |x|^{n-k} \frac{|h|^k}{H^k} H^k \\
&\leq \frac{|h|^2}{H^2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} |x|^{n-k} H^k \\
&= \frac{|h|^2}{H^2} (|x| + H)^n
\end{aligned}$$

همچنین،

$$|n x^{n-1}| = \frac{n |x|^{n-1} H}{H} \leq \frac{1}{H} (|x| + H)^n$$

بدین‌سان،

$$\sum_{n=1}^{\infty} |n a_n x^{n-1}| \leq \frac{1}{H} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| (|x| + H)^n = \frac{K}{H} < \infty$$

و از این رو، سری $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ به‌تابعی مانند $g(x)$ (مطلقاً) همگراست. اکنون ملاحظه می‌کنیم که

$$\begin{aligned}
\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - g(x) \right| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n (x+h)^n - a_n x^n - n a_n x^{n-1} h}{h} \right| \\
&\leq \frac{1}{|h|} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \, |(x+h)^n - x^n - n x^{n-1} h| \\
&\leq \frac{|h|}{H^2} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \big(|x| + H \big)^n \leq \frac{K |h|}{H^2}
\end{aligned}$$

اگر h به‌صفر میل کند، می‌بینیم که $0 \leq |f'(x) - g(x)|$ و در نتیجه، $f'(x) = g(x)$ و این همان است که می‌خواستیم.

اینک با توجه به $\left| \frac{a_n}{n+1} \right| \leq |a_n|$، سری

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

حداقل بر بازهٔ $]-R, R[$ (مطلقاً) همگراست. با استفاده از نتیجه‌ای که در بالا برای مشتق‌گیری ثابت کردیم، می‌بینیم که

$$h'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x)$$

چون $h(0) = 0$، پس

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x h'(t)\,dt = h(t)\Big|_0^x = h(x)$$

و این همان است که می‌خواستیم.

دو نتیجهٔ بالا می‌گویند سری‌های حاصل از مشتق‌گیری و انتگرال‌گیریِ جمله به‌جمله دارای همان شعاع همگرایی سری اولیه هستند. در حقیقت همان‌طور که مثال‌های زیر نشان می‌دهند، بازهٔ همگراییِ سری حاصل از مشتق‌گیری، همان بازهٔ همگرایی سری اولیه است، به‌استثنای **شاید** یک یا هر دو نقطهٔ انتهایی. (مشروط بر اینکه سری اولیه در نقاط انتهایی بازهٔ همگرایی خود، همگرا باشد.) به‌همین ترتیب سری حاصل از انتگرال‌گیری، در هر نقطهٔ بازهٔ همگرایی سری اولیه و احتمالاً در یک یا هر دو نقطهٔ انتهایی این بازه همگرا خواهد بود، حتی اگر سری اولیه در نقاط انتهایی همگرا نباشد.

اگر مجموع یک سری توانی را $f(x)$ بنامیم، با توجه به‌مشتق‌پذیری $f(x)$ بر $]-R, R[$ که در آن R شعاع همگرایی است، $f(x)$ الزاماً بر این بازهٔ باز پیوسته است. اگر سری مفروض اتفاقاً در یک یا هر دو نقطهٔ انتهایی $-R$ و R همگرا باشد، آنگاه f در آنجا نیز پیوسته (ی یکطرفه) است. این نتیجه را به‌طور صوری در قضیهٔ زیر بیان کرده‌ایم ولی آن را ثابت نمی‌کنیم؛ خوانندهٔ علاقه‌مند می‌تواند اثبات آن را در کتاب‌های درسی آنالیز ریاضی ببیند.

قضیه ۲۰ قضیهٔ آبل[1]

مجموع هر سری توانی، در هر نقطهٔ بازهٔ همگرایی خود تابعی پیوسته است. در حالت خاص اگر $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ به‌ازای عددی مانند $R > 0$ همگرا باشد، آنگاه

$$\lim_{x\to R-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$$

و اگر $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n$ همگرا باشد آنگاه

$$\lim_{x\to -R+} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n$$

مثال‌های زیر نشان می‌دهند.چگونه می‌توان با استفاده از قضیه‌های بالا نمایش توابع را به‌صورت سری توانی به‌دست آورد.

مثال ۴ با شروع از سری هندسی

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \qquad (-1 < x < 1)$$

و استفاده از مشتق‌گیری، انتگرال‌گیری و جایگذاری، نمایش توابع زیر را به‌صورت سری توانی بیابید:

(آ) $\dfrac{1}{(1-x)^2}$ ، (ب) $\dfrac{1}{(1-x)^3}$ و (پ) $\ln(1+x)$.

1. N. H. Abel

هر یک از این سری‌ها بر کدام بازه معتبر است؟

حل. (آ) اگر از سری هندسی مفروض جمله به‌جمله مشتق بگیریم، آنگاه

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots \qquad (-1 < x < 1)$$

این همان نتیجه‌ای است که در مثال ۳ از ضرب سری‌ها به‌دست آورده بودیم.

(ب) اگر از سری اخیر نیز به‌ازای $-1 < x < 1$ مشتق بگیریم، می‌بینیم که

$$\frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) x^{n-2} = (1\times 2) + (2\times 3)x + (3\times 4)x^2 + \cdots$$

دو طرف را بر ۲ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{1}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} = 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + \cdots \qquad (-1 < x < 1)$$

(پ) اگر در سری هندسی اولیه به‌جای x قرار دهیم $-t$، آنگاه

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n = 1 - t + t^2 - t^3 + t^4 + \cdots \qquad (-1 < t < 1)$$

اینک از این سری از 0 تا x که در آن $|x| < 1$، انتگرال می‌گیریم:

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^n\,dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \qquad (-1 < x \le 1)$$

توجه داشته باشید که سری اخیر در نقطهٔ انتهایی $x = 1$ (به‌طور مشروط) همگراست. چون $\ln(1+x)$ در $x = 1$ پیوسته است، قضیهٔ ۲۰ تضمین می‌کند که این سری در $x = 1$ نیز به‌تابع یادشده همگراست. پس در حالت خاص، سری همساز متناوب به $\ln 2$ همگراست:

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

البته این فرمولِ چندان سودمندی برای محاسبهٔ مقدار $\ln 2$ نیست. (چرا؟)

مثال ۵ با استفاده از سری هندسی مثال قبل، نمایش $\tan^{-1} x$ را به‌صورت سری توانی بیابید.

حل. در سری هندسی، به‌جای x قرار می‌دهیم $-t^2$. چون به‌ازای $-1 < t < 1$ داریم $0 \le t^2 < 1$، می‌بینیم که

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + t^8 - \cdots \qquad (-1 < t < 1)$$

اکنون از 0 تا x که در آن $|x| < 1$، انتگرال می‌گیریم:

$$\tan^{-1}x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x (1 - t^2 + t^4 - t^6 + t^8 - \cdots)\,dt$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad (-1 < t < 1)$$

توجه داشته باشید که این سری به‌ازای ۱ − و ۱ نیز (به‌طور مشروط) همگراست. چون $\tan^{-1}x$ در ۱ ± پیوسته است، از قضیهٔ ۲۰ نتیجه می‌شود که نمایش $\tan^{-1}x$ به‌سری توانی که در بالا به‌دست آمد به‌ازای این مقادیر نیز معتبر است. اگر قرار دهیم ۱ = x، رابطهٔ جالب دیگری به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots$$

البته باز هم این فرمول خوبی برای محاسبهٔ مقدار عددی π نیست؟ (چرا؟)

مثال ۶ با محاسبهٔ مجموع سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n = x + 4x^2 + 9x^3 + 16x^4 + \cdots$$

مجموع سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ را بیابید.

حل. در مثال ۴ (آ) دیدیم چگونه فرایند مشتق‌گیری از سری هندسی، سری‌ای با ضریب‌های ۱، ۲، ۳، ... تولید می‌کند. اگر با سری توانی نمایش $1/(1-x)^2$ شروع و آن را در x ضرب کنیم، آنگاه

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \cdots = \frac{x}{(1-x)^2}$$

اکنون از این سری مشتق می‌گیریم تا سری‌ای با ضرایب 1^2، 2^2، 3^2، ... به‌دست آید:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^{n-1} = 1 + 4x + 9x^2 + 16x^3 + \cdots = \frac{d}{dx}\frac{x}{(x-1)^2} = \frac{1+x}{(1-x)^3}$$

اگر دو طرف رابطهٔ اخیر را در x ضرب کنیم سری توانی مطلوب حاصل می‌شود:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n = x + 4x^2 + 9x^3 + 16x^4 + \cdots = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$$

مشتق‌گیری و ضرب در x، شعاع همگرایی را تغییر نمی‌دهد. از این رو، این سری به‌ازای $-1 < x < 1$ به‌تابع یادشده همگراست. اگر قرار دهیم $x = \frac{1}{2}$، آنگاه

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}}{\frac{1}{8}} = 6$$

مثال زیر نشان می‌دهد چگونه می‌توان با استفاده از جایگذاری، سری‌های توانی نمایش توابع را حول نقاط دیگری غیر از ۰ به‌دست آورد.

مثال ۷ سری توانی نمایش $f(x) = \frac{1}{2+x}$ را برحسب توان‌های $x - 1$ بیابید. بازهٔ همگرایی این سری کدام است؟

حل. قرار می‌دهیم $t = x - 1$. پس $x = t + 1$ و

$$\frac{1}{2+x} = \frac{1}{3+t} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{1+\frac{t}{3}}$$

$$= \frac{1}{3}\left(1 - \frac{t}{3} + \frac{t^2}{3^2} - \frac{t^3}{3^3} + \cdots\right) \qquad \left(-1 < \frac{t}{3} < 1\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n}{3^{n+1}} \qquad (-3 < t < 3)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^n}{3^{n+1}} \qquad (-2 < x < 4)$$

توجه داشته باشید که شعاع همگرایی این سری برابر است با ۳، یعنی فاصلهٔ مرکز همگرایی (نقطهٔ ۱) تا نقطهٔ ۲ − که مخرج به‌ازای آن ۰ می‌شود. این نیز از قبل قابل پیش‌بینی بود.

محاسبه با میپل

نرم‌افزار میپل می‌تواند مجموع بسیاری از سری‌های عددیِ مطلقاً همگرا و به‌طور مشروط همگرا و بسیاری از سری‌های توانی را بیابد. حتی وقتی میپل نمی‌تواند مجموع صوری یک سری همگرا را بیابد، می‌تواند با توجه به‌مقداری که متغیر Digits با پیش‌گزینهٔ ۱۰ برای دقت تقریب مشخص کرده است، تقریبی اعشاری را برای مجموع سری به‌دست دهد. در زیر چند مثال آورده‌ایم.

```
> sum(n^4/2^n, n=1. .infinity);
```

150

```
> sum(1/n^2, n=1. .infinity);
```

$$\frac{1}{6}\pi^2$$

```
> sum(exp(−n^2), n=0. .infinity);
```

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{(-n^2)}$$

```
> evalf(%);
```

1.386318602

```
> f: = x − > sum(x^(n−1)/n, n=1.. infinity);
```

$$f := x \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^{(n-1)}}{n}\right)$$

```
> f(1); f(-1); f(1/2);
```

∞

ln (2)

2 ln (2)

تمرینات ۵.۹

در تمرین‌های ۱ تا ۸، مرکز، شعاع و بازهٔ همگرایی سری توانی مفروض را تعیین کنید.

۱. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{\sqrt{n+1}}$

۲. $\sum_{n=0}^{\infty} 3n(x+1)^n$

۳. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{x+2}{2}\right)^n$

۴. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4 2^{2n}} x^n$

۵. $\sum_{n=0}^{\infty} n^3 (2x-3)^n$

۶. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^3} (4-x)^n$

۷. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+5^n)}{n!} x^n$

۸. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4x-1)^n}{n^n}$

۹. با استفاده از حاصلضرب سری‌ها، نمایش $1/(1+x)^3$ را به‌صورت یک سری توانی معتبر بر بازهٔ $]-1 , 1[$ بیابید.

۱۰. حاصلضرب کوشیِ سری‌های

$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \; , \quad 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$

را تعیین کنید. این حاصلضرب بر کدام بازه و به کدام تابع همگراست؟

۱۱. با تقسیم صوری ۱ بر $1 - 2x + x^2$، بسط $1/(1-x)^2$ را به‌سری توانی تعیین کنید.

در تمرین‌های ۱۲ تا ۲۰، با شروع از

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \quad (-1 < x < 1)$$

نمایش تابع مفروض را به‌سری توانی خواسته شده تعیین کنید. هر یک از این نمایش‌ها بر کدام بازه معتبر است؟

۱۲. $\frac{1}{2-x}$ برحسب توان‌های x

۱۳. $\frac{1}{(2-x)^2}$ برحسب توان‌های x

۱۴. $\frac{1}{1+2x}$ برحسب توان‌های x

۱۵. $\ln(2-x)$ برحسب توان‌های x

۱۶. $\frac{1}{x}$ برحسب توان‌های $x - 1$

۱۷. $\frac{1}{x^2}$ برحسب توان‌های $x + 2$

۱۸. $\frac{1-x}{1+x}$ برحسب توان‌های x

۱۹. $\frac{x^3}{1-2x^2}$ برحسب توان‌های x

۲۰. $\ln x$ برحسب توان‌های $x - 4$

در تمرین‌های ۲۱ تا ۲۶، بازهٔ همگرایی و مجموع هر یک از سری‌ها را تعیین کنید.

۲۱. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (4x)^n = 1 - 4x + 16x^2 - 64x^3 + \cdots$

*۲۲. $\sum_{n=0}^{\infty} (n+3)x^n = 3 + 4x + 5x^2 + 6x^3 + \cdots$

*۲۳. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+3} = \frac{1}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{5} + \frac{x^3}{6} + \cdots$

*۲۴. $1 \times 3 - 2 \times 4x + 3 \times 5x^2 - 4 \times 6x^3 + \cdots$
$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)(n+3)x^n$

*۲۵. $2 + 4x^2 + 6x^4 + 8x^6 + 10x^8 + \cdots$
$= \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+1)x^{2n}$

*۲۶. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n+1} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{3} - \frac{x^6}{4} + \frac{x^8}{5} - \cdots$

در تمرین‌های ۲۷ تا ۳۲، با استفاده از فن به‌کار رفته در مثال ۶ (یا نتیجهٔ آن) مجموع سری‌های عددی مفروض را بیابید.

۲۷. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$

۲۸. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n}$

*۲۹. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{\pi^n}$

*۳۰. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n(n+1)}{2^n}$

۳۱. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n 2^n}$

۳۲. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n 2^n}$

۶.۹ سری‌های تیلور[1] و مکلورن[2]

اگر سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ دارای شعاع همگرایی مثبت R باشد، آنگاه مجموع این سری، تابعی

1. B. Taylor
2. C. Maclaurin

مانند $f(x)$ بر بازهٔ $]c-R , c+R[$ را تعریف می‌کند. در این وضع می‌گوییم سری توانی مفروض، **نمایش** $f(x)$ بر این بازه است. چه رابطه‌ای بین تابع $f(x)$ و ضریب‌های این سری توانی، یعنی $a_0 , a_1 , a_2 , \ldots$، وجود دارد؟ قضیهٔ زیر به‌این پرسش پاسخ می‌دهد.

قضیهٔ ۲۱ فرض کنیم سری

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + \cdots$$

بر $c - R < x < c + R$ که در آن $R > 0$، به $f(x)$ همگرا باشد. دراین‌صورت به‌ازای $k = 0 , 1 , 2 , 3 , \ldots$،

$$a_k = \frac{f^{(k)}(c)}{k!}$$

اثبات. برای اثبات، باید از سری نمایش $f(x)$ چند بار جمله به‌جمله مشتق بگیریم؛ این فرایند براساس قضیهٔ ۱۹ (مشروط بر اینکه به‌طور مناسبی برای توان‌های $x - c$ تنظیم شود) موجه است:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-c)^{n-1} = a_1 + 2a_2(x-c) + 3a_3(x-c)^2 + \cdots$$

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x-c)^{n-2} = 2a_2 + 6a_3(x-c) + 12a_4(x-c)^2 + \cdots$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned} f^{(k)}(x) &= \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) a_n (x-c)^{n-k} \\ &= k! a_k + \frac{(k+1)!}{1!} a_{k+1}(x-c) + \frac{(k+2)!}{2!} a_{k+2}(x-c)^2 + \cdots \end{aligned}$$

هر یک از این سری‌ها به‌ازای $c - R < x < c + R$ همگراست. اگر قرار دهیم $x = c$، می‌بینیم که $f^{(k)}(c) = k! a_k$ و اثبات قضیه تمام می‌شود.

قضیهٔ ۲۱ نشان می‌دهد تابعی مانند $f(x)$ که دارای نمایشی به‌یک سری توانی به‌مرکز c و شعاع همگرایی مثبت است باید در بازه‌ای حول $x = c$ دارای مشتق‌های همهٔ مرتبه‌ها باشد؛ از این گذشته این تابع می‌تواند فقط یک نمایش به‌سری توانی برحسب توان‌های $x - c$ داشته باشد، یعنی

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-c)^n = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots$$

این سری را سری تیلور یا اگر $c = 0$، سری مکلورن می‌نامیم.

تعریف ۸ **سری تیلور و سری مکلورن**

اگر $f(x)$ دارای مشتق‌های همهٔ مرتبه‌ها در $x = c$ باشد (یعنی به‌ازای هر $k = 0 , 1 , 2 , 3 , \ldots$، $f^{(k)}(c)$ وجود داشته باشد)، سری

$$\sum_{k=۰}^{\infty}\frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$$
$$=f(c)+f'(c)(x-c)+\frac{f''(c)}{۲!}(x-c)^۲+\frac{f^{(۳)}(c)}{۳!}(x-c)^۳+\cdots$$

را **سری تیلور f حول $x=c$** (یا **سری تیلور f برحسب توان‌های $x-c$**) می‌نامیم. اگر $c=۰$، معمولاً به‌جای سری تیلور، واژهٔ **سری مکلورن** را به‌کار می‌بریم.

توجه داشته باشید که مجموع‌های جزئی سری تیلور (یا مکلورن) همان چند جمله‌ای‌های تیلور (یا مکلورن) هستند که در بخش ۸.۴ مورد مطالعه قرار گرفتند.

سری تیلور، سری توانی‌ای نظیر آن است که در بخش قبل تعریف کردیم. از قضیهٔ ۱۷ نتیجه می‌شود که c باید مرکز بازهٔ همگرایی این سری باشد، ولی در تعریف سری تیلور هیچ تضمینی نیست که سری در جایی بجز $x=c$ که سری صرفاً به‌صورت $\dots + ۰ + ۰ + f(c)$ در می‌آید، همگرا باشد. اگر f در $x=c$ دارای مشتق‌های همهٔ مرتبه‌ها باشد، سری تیلور وجود دارد. در عمل، این سخن به‌این معنی است که هر یک از مشتق‌ها باید در بازهٔ بازی حاوی $x=c$ وجود داشته باشد. (چرا؟) ولی سری تیلور ممکن است در هیچ نقطه‌ای جز $x=c$ همگرا نباشد و اگر در جایی هم همگرا باشد ممکن است به‌عددی غیر از $f(x)$ همگرا باشد. (در تمرین ۴۰ در پایان همین بخش، مثالی ارائه شده است که این وضعیت در مورد آن روی می‌دهد.) اگر سری تیلور بر بازهٔ بازی حاوی c به $f(x)$ همگرا باشد، می‌گوییم f در $x=c$ تحلیلی است.

تعریف ۹ توابع تحلیلی

می‌گوییم تابع $f(x)$ در $x=c$ **تحلیلی** است هرگاه $f(x)$ برابر باشد با مجموع یک سری توانی برحسب توان‌های $x-c$ با شعاع همگرایی مثبت. (این سری، حتماً سری تیلور تابع $f(x)$ است.) اگر f در هر نقطهٔ بازهٔ بازی مانند I تحلیلی باشد، می‌گوییم f بر بازهٔ I تحلیلی است.

بیشتر توابع مقدماتی‌ای که در حساب دیفرانسیل و انتگرال با آنها برخورد می‌کنیم (ولی نه همهٔ آنها) هر جا که دارای مشتق‌های همهٔ مرتبه‌ها باشند تحلیلی نیز هستند. از طرف دیگر، وقتی سری توانی‌ای برحسب توان‌های $x-c$ بر بازهٔ بازی حاوی c همگراست، مجموع آن در c تحلیلی است و سری مفروض عبارت است از سری تیلور این مجموع حول $x=c$.

سری مکلورنِ چند تابع مقدماتی

محاسبهٔ مستقیم سری‌های تیلور و مکلورن تابعی مانند f با استفاده از تعریف ۸، فقط هنگامی عملی است که بتوانیم قاعده‌ای برای مشتق nام f بیابیم. مثال‌هایی از این دست عبارت‌اند از توابعی نظیر $(ax+b)^r$، e^{ax+b}، $\ln(ax+b)$، $\sin(ax+b)$، $\cos(ax+b)$ و مجموع‌های این توابع.

مثال ۱ سری تیلور e^x را حول $x=c$ بیابید. این سری کجا به e^x همگراست؟ کجا e^x تحلیلی است؟ سری مکلورن e^x کدام است؟

حل. چون همهٔ مشتق‌های $f(x)=e^x$ برابرند با e^x، به‌ازای هر عدد صحیح $n\geq ۰$ داریم $f^{(n)}(c)=e^c$. بدین‌سان، سری تیلور e^x حول $x=c$ عبارت است از

$$\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{e^c}{n!}(x-c)^n=e^c+e^c(x-c)+\frac{e^c}{۲!}(x-c)^۲+\frac{e^c}{۳!}(x-c)^۳+\cdots$$

شعاع همگرایی این سری (یعنی R) با رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$\frac{۱}{R}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{e^c/(n+۱)!}{e^c/n!}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+۱)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n+۱}=۰$$

پس شعاع همگرایی برابر است با ∞ و سری به‌ازای همهٔ xها همگراست. مجموع این سری را $g(x)$ می‌نامیم:

$$g(x)=e^c+e^c(x-c)+\frac{e^c}{۲!}(x-c)^۲+\frac{e^c}{۳!}(x-c)^۳+\cdots$$

بنابر قضیهٔ ۱۹ داریم

$$g'(x)=۰+e^c+\frac{e^c}{۲!}۲(x-c)+\frac{e^c}{۳!}۳(x-c)^۲+\cdots$$
$$=e^c+e^c(x-c)+\frac{e^c}{۲!}(x-c)^۲+\cdots=g(x)$$

همچنین، $g(c)=e^c+۰+۰+\cdots=e^c$. چون $g(x)$ در معادلهٔ دیفرانسیل $g'(x)=g(x)$ (یعنی معادلهٔ دیفرانسیل رشد نمایی) صدق می‌کند، پس $g(x)=Ce^x$. اگر به‌جای x قرار دهیم c، آنگاه $e^c=g(c)=Ce^c$ و از این رو، $C=۱$. بدین‌سان، سری تیلور e^x برحسب توان‌های $x-c$، به‌ازای هر عدد حقیقی x به e^x همگراست:

به‌ازای هر x،

$$e^x=\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{e^c}{n!}(x-c)^n$$
$$=e^c+e^c(x-c)+\frac{e^c}{۲!}(x-c)^۲+\frac{e^۳}{۳!}(x-c)^۳+\cdots$$

در حالت خاص اگر قرار دهیم $c=۰$، سری مکلورن e^x را به‌دست می‌آوریم:

$$e^x=\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=۱+x+\frac{x^۲}{۲!}+\frac{x^۳}{۳!}+\cdots \qquad \text{به‌ازای هر } x،$$

مثال ۲ سری مکلورن (آ) $\sin x$ و (ب) $\cos x$ را بیابید. هر یک از سری‌ها در کدام نقاط همگراست؟

حل. قرار می‌دهیم $f(x)=\sin x$. دراین‌صورت $f(۰)=۰$ و

$$\begin{array}{ll}
f'(x) = \cos x & f'(0) = 1 \\
f''(x) = -\sin x & f''(0) = 0 \\
f^{(3)}(x) = -\cos x & f^{(3)}(0) = -1 \\
f^{(4)}(x) = \sin x & f^{(4)}(0) = 0 \\
f^{(5)}(x) = \cos x & f^{(5)}(0) = 1 \\
\vdots & \vdots
\end{array}$$

بدین‌سان، سری مکلورن $\sin x$ عبارت است از

$$g(x) = 0 + x + 0 - \frac{x^3}{3!} + 0 + \frac{x^5}{5!} + 0 - \cdots$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

این مجموع را به‌این سبب با $g(x)$ نشان داده‌ایم که هنوز نمی‌دانیم این سری به $\sin x$ همگراست یا نه. با توجه به‌آزمون نسبت، این سری به‌ازای همهٔ xها همگراست:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\dfrac{(-1)^{n+1}}{(2(n+1)+1)!} x^{2(n+1)+1}}{\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)!}{(2n+3)!} |x|^2$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^2}{(2n+3)(2n+2)} = 0$$

اکنون می‌توانیم دو بار از $g(x)$ مشتق بگیریم:

$$g'(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

$$g''(x) = -x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} - \cdots = -g(x)$$

بدین‌سان، $g(x)$ در معادلهٔ دیفرانسیل $g''(x) + g(x) = 0$ (یعنی معادلهٔ دیفرانسیل حرکت همساز ساده) صدق می‌کند. در بخش ۷.۳ دیدیم که جواب عمومی این معادله عبارت است از

$$g(x) = A\cos x + B\sin x$$

با توجه به‌سری قبل می‌بینیم که $g(0) = 0$ و $g'(0) = 1$. از این مقادیر نتیجه می‌شود که $A = 0$ و $B = 1$. پس به‌ازای هر x داریم $g(x) = \sin x$ و $g'(x) = \cos x$.

به‌این ترتیب ثابت کردیم که

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \qquad (\text{به‌ازای هر } x)$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \qquad (\text{به‌ازای هر } x)$$

قضیهٔ ۲۱ نشان می‌دهد که می‌توانیم با استفاده از هر وسیله‌ای که در دسترس داریم سری توانی‌ای همگرا به‌تابع مفروض بر بازهٔ مفروض بیابیم؛ دراین‌صورت سری حاصل عملاً همان سری تیلور تابع است. در بخش ۵.۹ با دستکاری سری هندسی، سری‌های متعددی ساختیم. بعضی از آنها را در زیر می‌آوریم:

چند سری مکلورن

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \qquad (-1 < x < 1)$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots \qquad (-1 < x < 1)$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \qquad (-1 < x \le 1)$$

$$\tan^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \qquad (-1 \le x \le 1)$$

از این پس، این سری‌ها را همراه با بازه‌هایی که بر آنها همگرا هستند مکرراً به‌کار می‌بریم؛ از این رو، باید آنها را به‌خاطر بسپارید.

چند سری مکلورن و تیلور دیگر

سری‌ها را می‌توانیم با روش‌های گوناگون با هم ترکیب کنیم و سری‌های جدیدی را به‌دست آوریم. مثلاً با گذاشتن $-x$ به‌جای x در سری مکلورن e^x، می‌توانیم سری مکلورن e^{-x} را بیابیم:

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots \qquad (\text{به‌ازای هر } x)$$

سپس می‌توانیم سری‌های e^x و e^{-x} را از هم کم یا با هم جمع کنیم و پس از تقسیم بر ۲، سری‌های مکلورن توابع هذلولوی $\sinh x$ و $\cosh x$ را به‌دست آوریم:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots \qquad (\text{به‌ازای هر } x)$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \qquad (\text{به‌ازای هر } x)$$

تذکر. شباهت موجود بین سری‌های $\sin x$ و $\sinh x$ و همچنین، بین سری‌های $\cos x$ و $\cosh x$ را مدنظر داشته باشید. اگر مجاز به‌استفاده از اعداد مختلط یعنی اعدادی به‌صورت $z = x + iy$ که در آن $i^2 = -1$ و

x و y حقیقی هستند. پیوست I را ببینید.[1] برای متغیر توابع خود باشیم و اگر بدانیم می‌توان اعمال با سری‌ها را به‌سری‌های متشکل از اعداد مختلط تعمیم داد، می‌بینیم که $\cos x = \cosh(ix)$ و $\sin x = -i\sinh(ix)$. در حقیقت

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x \qquad , \qquad e^{-ix} = \cos x - i\sin x$$

و از این رو،

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad , \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

هنگام مطالعهٔ توابع یک متغیرهٔ مختلط (پیوست II را ببینید) با این نوع فرمول‌ها مواجه می‌شویم. از دیدگاه توابع مختلط، توابع مثلثاتی و نمایی، نمودهای متفاوت تابع اساسی واحدی به‌نام تابع نمایی مختلط $e^{z} = e^{x+iy}$ هستند. در اینجا به‌ذکر همین دو رابطهٔ جالب بالا اکتفا می‌کنیم و از خواننده می‌خواهیم آنها را با انجام محاسبات صوری بر سری‌ها ثابت کند. (البته این نوع محاسبات صوری جای اثبات را نمی‌گیرند، زیرا قواعد ناظر بر سری‌های متشکل از اعداد مختلط را ثابت نکرده‌ایم.)

مثال ۳ سری مکلورن توابع زیر را به‌دست آورید:

(آ) $e^{-x^2/3}$ ، (ب) $\dfrac{\sin(x^2)}{x}$ ، (پ) $\sin^2 x$

حل.

(آ) در سری مکلورن e^x به‌جای x قرار می‌دهیم $-\dfrac{x^2}{3}$؛ دراین‌صورت به‌ازای هر عدد حقیقی x،

$$e^{-x^2/3} = 1 - \frac{x^2}{3} + \frac{1}{2!}\left(\frac{x^2}{3}\right)^2 - \frac{1}{3!}\left(\frac{x^2}{3}\right)^3 + \cdots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3^n n!} x^{2n}$$

(ب) به‌ازای هر $x \neq 0$ داریم

$$\frac{\sin x^2}{x} = \frac{1}{x}\left(x^2 - \frac{(x^2)^3}{3!} + \frac{(x^2)^5}{5!} - \cdots\right)$$
$$= x - \frac{x^5}{3!} + \frac{x^9}{5!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+1}}{(2n+1)!}$$

توجه داشته باشید که تابع $f(x) = (\sin(x^2))/x$ در $x = 0$ تعریف نشده است، ولی وقتی x به‌صفر میل می‌کند حد دارد (که برابر است با ۰). اگر تعریف کنیم $f(0) = 0$ (یعنی گسترش پیوستهٔ $f(x)$ را به $x = 0$ به‌دست آوریم) آنگاه سری بالا به‌ازای همهٔ xها به $f(x)$ همگراست.

(پ) با استفاده از یک اتحاد مثلثاتی، $\sin^2 x$ را برحسب $\cos 2x$ بیان می‌کنیم و سپس در سری مکلورن $\cos x$ به‌جای x قرار می‌دهیم $2x$. پس به‌ازای هر عددی حقیقی x،

[1] و [2]. پیوست‌ها در پایان جلد دوم این کتاب آمده‌اند.

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \cdots\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{(2x)^2}{2!} - \frac{(2x)^4}{4!} + \frac{(2x)^6}{6!} - \cdots\right)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n+1}}{(2n+2)!} x^{2n+2}$$

سری‌های تیلور حول نقاطی غیر از ۰ را اغلب می‌توان با انجام تعویض متغیر در سری‌های مکلورنِ آشنا به‌دست آورد.

مثال ۴ سری تیلور $\ln x$ را برحسب توان‌های $x - 2$ بیابید. این سری در کدام نقاط به $\ln x$ همگراست؟

حل. ملاحظه می‌کنیم که اگر $t = \dfrac{x-2}{2}$، آنگاه

$$\ln x = \ln\big(2 + (x-2)\big) = \ln\left[2\left(1 + \frac{x-2}{2}\right)\right] = \ln 2 + \ln(1+t)$$

سری مکلورن $\ln(1+t)$ را می‌شناسیم. پس

$$\ln x = \ln 2 + \ln(1+t)$$
$$= \ln 2 + t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} - \cdots$$
$$= \ln 2 + \frac{x-2}{2} - \frac{(x-2)^2}{2 \times 2^2} + \frac{(x-2)^3}{3 \times 2^3} - \frac{(x-2)^4}{4 \times 2^4} + \cdots$$
$$= \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\, 2^n} (x-2)^n$$

چون سری $\ln(1+t)$ به‌ازای $-1 < t \le 1$ معتبر است، سری اخیر که برای $\ln x$ به‌دست آمد به‌ازای $-1 < \dfrac{x-2}{2} \le 1$ یا $0 < x \le 4$ معتبر خواهد بود.

مثال ۵ سری تیلور $\cos x$ را حول نقطهٔ $x = \dfrac{\pi}{3}$ بیابید. نمایش $\cos x$ با این سری در کدام نقاط معتبر است؟

حل. فرمول جمع برای کوسینوس را به‌کار می‌بریم:

$$\cos x = \cos\left(x - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\cos\frac{\pi}{3} - \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\sin\frac{\pi}{3}$$
$$= \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{2!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^4 - \cdots\right]$$

$$-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\left[\left(x-\frac{\pi}{۳}\right)-\frac{۱}{۳!}\left(x-\frac{\pi}{۳}\right)^{۳}+\cdots\right]$$

$$=\frac{۱}{۲}-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\left(x-\frac{\pi}{۳}\right)-\frac{۱}{۲}\frac{۱}{۲!}\left(x-\frac{\pi}{۳}\right)^{۲}+\frac{\sqrt{۳}}{۲}\frac{۱}{۳!}\left(x-\frac{\pi}{۳}\right)^{۳}$$

$$+\frac{۱}{۲}\frac{۱}{۴!}\left(x-\frac{\pi}{۳}\right)^{۴}-\cdots$$

این نمایش به‌ازای هر x معتبر است. با محاسبات مشابهی می‌توان به‌ازای هر عدد حقیقی c، $\cos x$ یا $\sin x$ را برحسب توان‌های $x-c$ بسط داد؛ این دو تابع در هر نقطهٔ خط حقیقی تحلیلی هستند. ■

گاهی یافتن جملهٔ عمومی سری تیلور یا مکلورن، بسیار دشوار یا حتی غیرممکن است. در این حالت‌ها معمولاً این امکان هست که قبل از پیچیده شدن بیش از حدِ محاسبات، چند جملهٔ اول را به‌دست آوریم. اگر کوشش کنیم مثال ۳ (پ) را با ضرب سری $\sin x$ در خودش حل کنیم، به‌این مشکل برمی‌خوریم. مثال‌های دیگری از این نوع دشواری‌ها وقتی روی می‌دهند که لازم باشد سری‌ای را در سری دیگری قرار دهیم یا یکی را بر دیگری تقسیم کنیم.

مثال ۶ سه جملهٔ اول غیرصفرِ سری مکلورن برای (آ) $\tan x$ و (ب) $\ln\cos x$ را به‌دست آورید.

حل.

(آ) می‌دانیم که $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$. پس می‌توانیم سه جملهٔ اول سری مکلورن $\tan x$ را از تقسیم سری مکلورن $\sin x$ بر سر مکلورن $\cos x$ به‌دست آوریم:

$$\begin{array}{l|l}
x-\frac{x^{۳}}{۶}+\frac{x^{۵}}{۱۲۰}-\cdots & ۱-\frac{x^{۲}}{۲}+\frac{x^{۴}}{۲۴}-\cdots \\ \hline
x-\frac{x^{۳}}{۲}+\frac{x^{۵}}{۲۴}-\cdots & x+\frac{x^{۳}}{۳}+\frac{۲}{۱۵}x^{۵}+\cdots \\ \hline
\frac{x^{۳}}{۳}-\frac{x^{۵}}{۳۰}+\cdots & \\
\frac{x^{۳}}{۳}-\frac{x^{۵}}{۶}+\cdots & \\ \hline
\frac{۲x^{۵}}{۱۵}-\cdots & \\
\frac{۲x^{۵}}{۱۵}-\cdots & \\ \hline
\end{array}$$

بدین‌سان، $\tan x=x+\frac{۱}{۳}x^{۳}+\frac{۲}{۱۵}x^{۵}+\cdots$.

نمی‌توانیم به‌آسانی همهٔ جمله‌های سری را بیابیم؛ فقط با تلاش محاسباتی قابل ملاحظه می‌توانیم جمله‌هایی بسیار بیشتر از آنچه یافته‌ایم بیابیم. سری مکلورنِ $\tan x$ به‌ازای $|x|<\frac{\pi}{۲}$ همگراست، ولی نمی‌توانیم این حکم را با فنونی که تا این لحظه در اختیار داریم ثابت کنیم. (درستی این ادعا به‌این سبب است که نزدیک‌ترین عدد مختلط $z=x+iy$ به ۰ که در عین حال «مخرج» $\tan z$، یعنی $\cos z$ را صفر می‌کند عبارت است از مقدار حقیقی $z=\frac{\pi}{۲}$.)

(ب)

$$\ln\cos x=\ln\left(۱+\left(-\frac{x^{۲}}{۲!}+\frac{x^{۴}}{۴!}-\frac{x^{۶}}{۶!}+\cdots\right)\right)$$

$$=\left(-\frac{x^{۲}}{۲!}+\frac{x^{۴}}{۴!}-\frac{x^{۶}}{۶!}+\cdots\right)-\frac{۱}{۲}\left(-\frac{x^{۲}}{۲!}+\frac{x^{۴}}{۴!}-\frac{x^{۶}}{۶!}+\cdots\right)^{۲}$$

$$+\frac{۱}{۳}\left(-\frac{x^{۲}}{۲!}+\frac{x^{۴}}{۴!}-\frac{x^{۶}}{۶!}+\cdots\right)^{۳}-\cdots$$

$$=-\frac{x^{۲}}{۲}+\frac{x^{۴}}{۲۴}-\frac{x^{۶}}{۷۲۰}+\cdots-\frac{۱}{۲}\left(\frac{x^{۴}}{۴}-\frac{x^{۶}}{۲۴}+\cdots\right)$$

$$+\frac{۱}{۳}\left(-\frac{x^{۶}}{۸}+\cdots\right)-\cdots$$

$$=-\frac{x^{۲}}{۲}-\frac{x^{۴}}{۱۲}-\frac{x^{۶}}{۴۵}-\cdots$$

توجه داشته باشید که در هر مرحله از محاسبات، فقط آن تعدادی از جمله‌ها را حفظ کردیم که بتوانیم همهٔ جمله‌های حاوی حداکثر $x^{۶}$ را به‌دست آوریم. چون تابع $\ln\cos x$ زوج است سری مکلورن آن فقط حاوی توان‌های زوج x است. باز هم جملهٔ عمومی این سری را نمی‌توانیم بیابیم. می‌توانیم کوشش کنیم جمله‌ها را با استفاده از فرمول $a_k=f^{(k)}(۰)/k!$ محاسبه کنیم، ولی این روش نیز پس از چند مقدار اولیهٔ k دشوار می‌شود.

مشاهده می‌کنید که می‌توانیم سری $\tan x$ را از سری $\ln\cos x$ نیز به‌دست آوریم زیرا $\tan x=-\frac{d}{dx}\ln\cos x$. ■

ملاقات دوباره با فرمول تیلور

در مثال‌های بالا با استفاده از فنون مختلف، سری تیلور تعدادی از توابع را به‌دست آوردیم و تحقیق کردیم که این توابع تحلیلی هستند. همان‌طور که در بخش ۸.۴ نشان داده شد، قضیهٔ تیلور وسیله‌ای را برای برآورد اندازهٔ خطای

$$E_n(x)=f(x)-P_n(x)$$

حاصل از تقریب مقدار $f(x)$ به‌ازای $x\neq c$ با به‌کارگیری چندجمله‌ای تیلور

$$P_n(x)=\sum_{k=۰}^{n}\frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$$

به‌دست می‌دهد. چون چندجمله‌ای‌های تیلور عبارت‌اند از مجموع‌های جزئیِ سری تیلور f حول c (البته در صورت وجود این سری)، فنی دیگر برای بررسی همگرایی سری تیلور این است که با به‌کارگیری فرمول $E_n(x)$ ـ که به‌وسیلهٔ قضیهٔ تیلور به‌دست می‌آید ـ نشان دهیم که حداقل بر بازه‌ای حاوی c داریم $\lim_{n\to\infty}E_n(x)=0$. دراین‌صورت $\lim_{n\to\infty}P_n(x)=f(x)$ و از این رو، f بر آن بازه واقعاً مجموع سری تیلور خود حول c است و f در c تحلیلی است. در زیر، صورت کلیتری از قضیهٔ تیلور آورده‌ایم.

قضیهٔ ۲۲ قضیهٔ تیلور

اگر مشتق $(n+1)$ام f بر بازه‌ای حاوی c و x وجود داشته و $P_n(x)$ چندجمله‌ای مرتبهٔ nام تیلور f حول نقطهٔ $x=c$ باشد، آنگاه **فرمول تیلور**، یعنی

$$f(x)=P_n(x)+E_n(x)$$

برقرار است. در این فرمول، جملهٔ خطای $E_n(x)$ با **یکی از دو فرمول** زیر بیان می‌شود:

باقیماندهٔ لاگرانژی به‌ازای sای بین c و x،

$$E_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$$

باقیماندهٔ انتگرالی

$$E_n(x)=\frac{1}{n!}\int_c^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt$$

قضیهٔ تیلور با باقیماندهٔ لاگرانژی را در بخش ۸.۴ (قضیهٔ ۱۰) با استفاده از قضیهٔ مقدار میانگین و استقرا بر n ثابت کردیم. قضیهٔ مبتنی بر باقیماندهٔ انتگرالی نیز با استفاده از استقرا بر n ثابت می‌شود. در تمرین ۴۲ راهنمایی‌های لازم برای انجام این اثبات را ارائه کرده‌ایم. در اینجا هیچ استفاده‌ای از صورت انتگرالی باقیمانده نخواهیم کرد.

در آخرین مثال این بخش، مجدداً سری مکلورنِ e^x را با محاسبهٔ حد باقیماندهٔ لاگرانژی که در بالا پیشنهاد شد به‌دست می‌آوریم.

مثال ۷ با استفاده از قضیهٔ تیلور، سری مکلورن $f(x)=e^x$ را بیابید. این سری در کدام نقاط به $f(x)$ همگراست؟

حل. چون e^x مثبت و صعودی است، به‌ازای هر $|s|\le|x|$ داریم $e^s\le e^{|x|}$. چون به‌ازای هر k رابطهٔ $f^{(k)}(x)=e^x$ برقرار است، با انتخاب $c=0$ در فرمول تیلورِ مبتنی بر باقیماندهٔ لاگرانژی می‌بینیم که بنابر قضیهٔ ۳ (ب) در بخش ۱.۹، به‌ازای هر x عددی مانند s بین ۰ و x هست به‌طوری که

$$|E_n(x)|=\left|\frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}x^{n+1}\right|=\frac{e^s}{(n+1)!}|x|^{n+1}\le e^{|x|}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

و عبارت اخیر هم به‌ازای $n\longrightarrow\infty$ به‌صفر میل می‌کند. بدین‌سان، $\lim_{n\to\infty}E_n(x)=0$. چون چندجمله‌ای مرتبهٔ nام مکلورنِ e^x برابر است با $\sum_{k=0}^{n}(x^k/k!)$، پس

$$e^x=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+E_n(x)\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

و این سری به‌ازای هر عدد حقیقی x به e^x همگراست.

تمرینات ۶.۹

در تمرین‌های ۱ تا ۱۴، سری مکلورن تابع مفروض را بیابید. هر یک از این نمایش‌ها به‌ازای کدام مقادیر x معتبر است؟

۱. e^{3x+1}

۲. $\cos(2x^3)$

۳. $\sin(x-\pi/4)$

۴. $\cos(2x-\pi)$

۵. $x^2\sin(x/3)$

۶. $\cos^2(x/2)$

۷. $\sin x\cos x$

۸. $\tan^{-1}(5x^2)$

۹. $\dfrac{1+x^3}{1+x^2}$

۱۰. $\ln(2+x^2)$

۱۱. $\ln\dfrac{1+x}{1-x}$

۱۲. $\dfrac{e^{2x^2}-1}{x^2}$

۱۳. $\cosh x-\cos x$

۱۴. $\sinh x-\sin x$

در تمرین‌های ۱۵ تا ۲۶، سری تیلور نمایش تابع مفروض را حول نقطهٔ خواسته‌شده بیابید. هر یک از نمایش‌ها به‌ازای کدام مقادیر x معتبر است؟

۱۵. $f(x)=e^{-2x}$ حول -1

۱۶. $f(x)=\sin x$ حول $\pi/2$

۱۷. $f(x)=\cos x$ برحسب توان‌های $x-\pi$

۱۸. $f(x)=\ln x$ برحسب توان‌های $x-3$

۱۹. $f(x)=\ln(2+x)$ برحسب توان‌های $x-2$

۲۰. $f(x)=e^{2x+3}$ برحسب توان‌های $x+1$

۲۱. $f(x)=\sin x-\cos x$ حول $\pi/4$

۲۲. $f(x)=\cos^2 x$ حول $\pi/8$

۲۳. $f(x)=1/x^2$ برحسب توان‌های $x+2$

۲۴. $f(x)=x/(1+x)$ برحسب توان‌های $x-1$

۲۵. $f(x)=x\ln x$ برحسب توان‌های $x-1$

۲۶. $f(x)=xe^x$ برحسب توان‌های $x+2$

در تمرین‌های ۲۷ تا ۳۰، سه جملهٔ اول غیرصفرِ سری مکلورن تابع مفروض را بیابید.

۲۷. $\sec x$

۲۸. $\sec x\tan x$

۲۹. $\tan^{-1}(e^x-1)$

۳۰. $e^{\tan^{-1}x}-1$

۳۱*. با استفاده از این حقیقت که $(\sqrt{1+x})^2=1+x$، سه جملهٔ اول غیرصفرِ سری مکلورن $\sqrt{1+x}$ را بیابید.

۳۲. آیا تابع $\csc x$ سری مکلورن دارد؟ چرا؟ سه جملهٔ اول غیرصفرِ سری تیلور $\csc x$ را حول نقطهٔ $x=\pi/2$ بیابید.

در تمرین‌های ۳۳ تا ۳۶، مجموع سری‌های مفروض را بیابید.

۳۳. $1+x^2+\dfrac{x^4}{2!}+\dfrac{x^6}{3!}+\dfrac{x^8}{4!}+\cdots$

۳۴*. $x^3-\dfrac{x^9}{3!\times 4}+\dfrac{x^{15}}{5!\times 16}-\dfrac{x^{21}}{7!\times 64}+\dfrac{x^{27}}{9!\times 256}-\cdots$

۳۵. $1+\dfrac{x^2}{3!}+\dfrac{x^4}{5!}+\dfrac{x^6}{7!}+\dfrac{x^8}{9!}+\cdots$

۳۶*. $1+\dfrac{1}{2\times 2!}+\dfrac{1}{4\times 3!}+\dfrac{1}{8\times 4!}+\cdots$

۳۷. فرض کنیم $P(x)=1+x+x^2$. (آ) سری مکلورن $P(x)$ و (ب) سری تیلور $P(x)$ را حول $x=1$ بیابید.

۳۸*. با محاسبهٔ مستقیم نشان دهید که به‌ازای هر $a\neq 0$، تابع $f(x)=1/x$ در $x=a$ تحلیلی است.

۳۹*. با محاسبهٔ مستقیم نشان دهید که به‌ازای هر $a>0$، تابع $\ln x$ در $x=a$ تحلیلی است.

۴۰*. تمرین ۴۱ در بخش ۳.۴ را مرور کنید. این تمرین نشان می‌دهد که تابع

$$f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

در هر نقطهٔ خط حقیقی دارای مشتق‌های همهٔ مرتبه‌هاست و به‌ازای هر عدد صحیح مثبت k، $f^{(k)}(0)=0$. سری مکلورن $f(x)$ کدام است؟ بازهٔ همگرایی این سری مکلورن کدام است؟ بر کدام بازه، این سری به $f(x)$ همگراست؟ آیا f در $x=0$ تحلیلی است؟

۴۱*. با استفاده از ضرب (کوشی) سری‌های مکلورن e^x و e^y نشان دهید که $e^xe^y=e^{x+y}$.

۴۲*. **(فرمول تیلور با باقیماندهٔ انتگرالی)** تحقیق کنید که اگر بر بازه‌ای حاوی c و x، $f^{(n+1)}$ وجود داشته و $P_n(x)$ چندجمله‌ای مرتبهٔ nام تیلور f حول c باشد آنگاه $f(x)=P_n(x)+E_n(x)$ که در آن

$$E_n(x)=\frac{1}{n!}\int_c^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt$$

برای این منظور، به‌ترتیب زیر عمل کنید:

(آ) نخست مشاهده می‌کنید که حالت $n=0$ همان قضیهٔ بنیادی حساب دیفرانسیل و انتگرال است:

$$f(x)=f(c)+\int_c^x f'(t)\,dt$$

اکنون با انتخاب $U=f'(t)$ و $dV=dt$، انتگرال اخیر را با روش جزءبه‌جزء محاسبه کنید. برخلاف سیاست معمول خود که ثابت انتگرال‌گیری را منظور نمی‌کنیم، در اینجا به‌جای $V=t$ می‌نویسیم $V=-(x-t)$. ملاحظه می‌کنیم که نتیجهٔ انتگرال‌گیری جزءبه‌جزء چیزی نیست جز حالت $n=1$ برای فرمول مورد نظر.

(ب) با استفاده از استدلال استقرایی (و نیز انتگرال‌گیری جزءبه‌جزء) نشان دهید که اگر فرمول یاد شده به‌ازای $n=k$ معتبر باشد، به‌ازای $n=k+1$ نیز معتبر خواهد بود.

۴۳*. با استفاده از فرمول تیلور با باقیماندهٔ انتگرالی، مجدداً ثابت کنید که سری مکلورن $\ln(1+x)$ به‌ازای هر $-1<x\le 1$ به $\ln(1+x)$ همگراست.

۴۴*. **(فرمول استرلینگ[1])** حد

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{\sqrt{2\pi}\,n^{n+1/2}e^{-n}}=1$$

می‌گوید **خطای نسبی** در تقریب

$$n!\approx\sqrt{2\pi}\,n^{n+1/2}e^{-n}$$

با افزایش n به‌صفر میل می‌کند. یعنی $n!$ با آهنگی نظیر $\sqrt{2\pi}\,n^{n+1/2}e^{-n}$ رشد می‌کند. این نتیجه که فرمول استرلینگ نام دارد اغلب در ریاضیات کاربردی و آمار بسیار سودمند است. با انجام مراحل زیر، این فرمول را ثابت کنید.

(آ) با استفاده از اتحاد $\ln(n!)=\Sigma_{j=1}^{n}\ln j$ و ماهیت صعودی ln نشان دهید که اگر $n\ge 1$، آنگاه

$$\int_0^n \ln x\,dx<\ln(n!)<\int_1^{n+1}\ln x\,dx$$

و بنابراین،

$$n\ln n-n<\ln(n!)<(n+1)\ln(n+1)-n$$

(ب) اگر $c_n=\ln(n!)-(n+1/2)\ln n+n$، نشان دهید که

$$\begin{aligned}c_n-c_{n+1}&=\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\frac{n+1}{n}-1\\&=\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\frac{1+1/(2n+1)}{1-1/(2n+1)}-1\end{aligned}$$

(پ) با استفاده از سری مکلورنِ $\ln\frac{1+t}{1-t}$ (تمرین ۱۱ را ببینید) نشان دهید که

$$\begin{aligned}0<c_n-c_{n+1}&<\frac{1}{3}\left(\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{(2n+1)^4}+\cdots\right)\\&=\frac{1}{12}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\end{aligned}$$

و بنابراین، $\{c_n\}$ نزولی و $\{c_n-\frac{1}{12n}\}$ صعودی است. سپس نتیجه بگیرید که $\{c_n\}$ به‌عددی مانند c همگراست و

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^{n+1/2}e^{-n}}=\lim_{n\to\infty}e^{c_n}=e^c$$

(ت) اکنون با استفاده از فرمول والیس (تمرین ۳۸ در بخش ۱.۶) نشان دهید که

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2^n n!)^2}{(2n)!\sqrt{2n}}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

اینک نتیجه بگیرید که $e^c=\sqrt{2\pi}$ و این، اثبات را کامل می‌کند.

۷.۹ کاربردهای سری تیلور و سری مکلورن

تقریب مقادیر توابع

در بخش ۸.۴ دیدیم چگونه می‌توان چندجمله‌ای‌های تیلور و مکلورن (یعنی مجموع‌های جزئی سری‌های

1. J. Stirling

تیلور و مکلورن) را به‌عنوان تقریب‌های چندجمله‌ای برای توابع پیچیده‌تر به‌کار برد. در مثال ۵ آن بخش، باقیماندهٔ لاگرانژی در فرمول تیلور را به‌کار گرفتیم تا تعداد جمله‌های لازم از سری مکلورن e^x را برای محاسبهٔ $e^1=e$ تا سه رقم درست اعشاری محاسبه کنیم. برای مقایسه، همین نتیجه را در مثال ۷ از بخش ۳.۹ با استفاده از یک سری هندسی به‌عنوان یک کران بالای باقیماندهٔ سری نمایش e به‌دست آوردیم.

مثال بعد نشان می‌دهد چگونه می‌توان کران خطا در آزمون سری‌های متناوب (قضیهٔ ۱۵ در بخش ۴.۹ را ببینید) را برای این نوع تقریب‌ها نیز به‌کار برد. اگر جمله‌های یک سری، یعنی a_nها، (یک) یک در میان تغییر علامت دهند، (دو) از نظر اندازه نزول کنند و (سه) به‌ازای $n\longrightarrow\infty$ به‌صفر میل کنند، آنگاه خطای حاصل از تقریب مجموع سری با یک مجموع جزئی، دارای همان علامت اولین جملهٔ حذف شده است و قدرمطلق آن از قدرمطلق این جملهٔ حذف شده بیشتر نیست.

مثال ۱ $\cos 43^\circ$ را با خطایی کمتر از $\frac{1}{10000}$ بیابید.

حل. مسأله را با دو روش حل می‌کنیم:

روش I. سری مکلورن کوسینوس را به‌کار می‌بریم:

$$\cos 43^\circ=\cos\frac{43\pi}{180}=1-\frac{1}{2!}\left(\frac{43\pi}{180}\right)^2+\frac{1}{4!}\left(\frac{43\pi}{180}\right)^4-\cdots$$

ولی $\frac{43\pi}{180}\approx 0.75049\ldots<1$ و از این رو، سری بالا در شرایط (یک) تا (سه) که در بالا ارائه کردیم صدق می‌کند. اگر جمله‌های سری بعد از جملهٔ nام، یعنی بعد از

$$(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-2)!}\left(\frac{43\pi}{180}\right)^{2n-2}$$

را حذف کنیم، آنگاه قدرمطلق خطای E از قدرمطلق اولین جملهٔ حذف‌شده بیشتر نیست:

$$|E|\le\frac{1}{(2n)!}\left(\frac{43\pi}{180}\right)^{2n}<\frac{1}{(2n)!}$$

این خطا بیشتر از $\frac{1}{10000}$ نخواهد شد هرگاه $(2n)!>10000$ و از این رو، $n=4$ پاسخگوی مسأله است (زیرا $8!=40320$).

$$\cos 43^\circ\approx 1-\frac{1}{2!}\left(\frac{43\pi}{180}\right)^2+\frac{1}{4!}\left(\frac{43\pi}{180}\right)^4-\frac{1}{6!}\left(\frac{43\pi}{180}\right)^6\approx 0.73135\ldots$$

روش II. چون 43° نزدیک 45° یعنی $\pi/4$ رادیان است، بهتر است به‌جای سری مکلورن از سری تیلور حول $x=\pi/4$ استفاده کنیم:

$$\begin{aligned}\cos 43^\circ&=\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{90}\right)\\&=\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{90}+\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{90}\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(1-\frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{90}\right)^2+\frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{90}\right)^4-\cdots\right)+\left(\frac{\pi}{90}-\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{90}\right)^3+\cdots\right)\right]\end{aligned}$$

چون

$$\frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{90}\right)^4 < \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{90}\right)^3 < \frac{1}{20000}$$

فقط به‌دو جملهٔ اولِ سری اول و جملهٔ اولِ سری دوم نیاز داریم:

$$\cos 43^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{\pi}{90}-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{90}\right)^2\right) \approx 0.731358\ldots$$

(در حقیقت $\cos 43^\circ = 0.7313537\ldots$.)

هنگام یافتن مقادیر تقریبی توابع بهتر است در صورت امکان، سری توانی حول نقطه‌ای را به‌کار ببریم که تا حد ممکن به‌نقطه‌ای که تقریب در آن خواسته شده است نزدیک باشد.

توابعی که به‌وسیلهٔ انتگرال تعریف می‌شوند

از بسیاری از توابعی که به‌صورت ترکیب ساده‌ای از توابع مقدماتی بیان می‌شوند، نمی‌توان با فنون مقدماتی تابع اولیه گرفت. توابع اولیهٔ آنها ترکیب‌های ساده‌ای از توابع مقدماتی نیستند. با وجود این اغلب می‌توانیم سری تیلور توابع اولیهٔ این نوع توابع را بیابیم و بنابراین، می‌توانیم انتگرال‌های معین آنها را تقریب بزنیم.

مثال ۲ سری مکلورن

$$E(x)=\int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

را بیابید و با استفاده از آن، $E(1)$ را تا سه رقم درست اعشاری محاسبه کنید.

حل. سری مکلورن $E(x)$ عبارت است از

$$E(x)=\int_0^x\left(1-t^2+\frac{t^4}{2!}-\frac{t^6}{3!}+\frac{t^8}{4!}-\cdots\right)dt$$

$$=\left(t-\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5\times 2!}-\frac{t^7}{7\times 3!}+\frac{t^9}{9\times 4!}-\cdots\right)\Bigg|_0^x$$

$$=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5\times 2!}-\frac{x^7}{7\times 3!}+\frac{x^9}{9\times 4!}-\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!}$$

که به‌ازای همهٔ xها معتبر است، زیرا سری نمایش e^{-t^2} به‌ازای همهٔ tها معتبر است. بنابراین،

$$E(1)=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5\times 2!}-\frac{1}{7\times 3!}+\cdots$$

$$\approx 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5\times 2!}-\frac{1}{7\times 3!}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)(n-1)!}$$

در جملهٔ nام توقف می‌کنیم. در این تقریب، خطا از اولین جملهٔ حذف‌شده بیشتر نیست و از این رو، وقتی از ۰٫۰۰۰۵ کمتر خواهد بود که $(2n+1)n! > 2000$. چون $13\times 6! = 9360$، پس $n=6$

پاسخگوی مسأله است، بدین‌سان،

$$E(1)\approx 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{10}-\frac{1}{42}+\frac{1}{216}-\frac{1}{1320}$$

که پس از گرد کردن تا سه رقم اعشاری، مقدار ۰٫۷۴۷ حاصل می‌شود.

صورت‌های مبهم

مثال‌های ۱ و ۲ در بخش ۹.۴ نشان می‌دهند چگونه می‌توان چندجمله‌ای‌های مکلورن را برای محاسبهٔ حد صورت‌های مبهم به‌کار گرفت. در اینجا دو مثال دیگر می‌آوریم که در آنها مستقیماً سری‌ها را وارد می‌کنیم و سپس آن تعدادی از جمله‌ها را که برای حذف عوامل [۰/۰] لازم باشد نگه می‌داریم.

مثال ۳ حدهای (آ) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$ و (ب) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(e^{2x}-1)\ln(1+x^3)}{(1-\cos 3x)^2}$ را محاسبه کنید.

حل.

(آ)

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}\qquad\left[\frac{0}{0}\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots\right)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{3!}-\frac{x^5}{5!}+\cdots}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{3!}-\frac{x^2}{5!}+\cdots\right)=\frac{1}{3!}=\frac{1}{6}$$

(ب)

$$\lim_{x\to 0}\frac{(e^{2x}-1)\ln(1+x^3)}{(1-\cos 3x)^2}\qquad\left[\frac{0}{0}\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+(2x)+\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^3}{3!}+\cdots-1\right)\left(x^3-\frac{x^6}{2}+\cdots\right)}{\left(1-\left(1-\frac{(3x)^2}{2!}+\frac{(3x)^4}{4!}-\cdots\right)\right)^2}.$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x^4+2x^5+\cdots}{\left(\frac{9}{2}x^2-\frac{3^4}{4!}x^4+\cdots\right)^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2+2x+\cdots}{\left(\frac{9}{2}-\frac{3^4}{4!}x^2+\cdots\right)^2}=\frac{2}{\left(\frac{9}{2}\right)^2}=\frac{8}{81}$$

می‌توانید بررسی کنید و ببینید که در مثال دوم، استفاده از قاعدهٔ لوپیتال کار را بسیار دشوارتر می‌کند.

تمرینات ۷.۹

۱. اگر چندجمله‌ای درجهٔ پنجم مکلورن $\sin x$ را برای تقریب $\sin(0.2)$ به‌کار ببریم، خطای حاصل را برآورد کنید.

۲. اگر چندجمله‌ای درجهٔ چهارم تیلورِ $\ln x$ برحسب توان‌های $x-2$ را برای تقریب $\ln(1.95)$ به‌کار ببریم، خطای حاصل را برآورد کنید.

در تمرین‌های ۳ تا ۱۴، با استفاده از سری مکلورن یا تیلور، مقدار تابع مفروض را با خطایی که قدرمطلق آن کمتر از 5×10^{-5} باشد محاسبه کنید.

۳. $e^{0.2}$	۴. $1/e$
۵. $e^{1.2}$	۶. $\sin(0.1)$
۷. $\cos 5^\circ$	۸. $\ln(6/5)$
۹. $\ln(0.9)$	۱۰. $\sin 80^\circ$
۱۱. $\cos 65^\circ$	۱۲. $\tan^{-1} 0/2$
۱۳. $\cosh(1)$	۱۴. $\ln(3/2)$

در تمرین‌های ۱۵ تا ۱۹، سری مکلورن تابع مفروض را بیابید.

۱۵. $I(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$

۱۶. $J(x)=\int_0^x \frac{e^t-1}{t}\,dt$

۱۷. $K(x)=\int_1^{1+x} \frac{\ln t}{t-1}\,dt$

۱۸. $L(x)=\int_0^x \cos(t^2)\,dt$

۱۹. $M(x)=\int_0^x \frac{\tan^{-1} t^2}{t^2}\,dt$

۲۰. با توجه به‌تعریف L در تمرین ۱۸، $L(0.5)$ را تا سه رقم درست اعشاری بیابید.

۲۱. با توجه به‌تعریف I در تمرین ۱۵، $I(1)$ را تا سه رقم درست اعشاری بیابید.

در تمرین‌های ۲۲ تا ۲۷ حدهای خواسته‌شده را محاسبه کنید.

۲۲. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{\sinh x}$

۲۳. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x^2)}{(1-\cos x)^2}$

۲۴. $\lim_{x\to 0} \frac{(e^x-1-x)^2}{x^2-\ln(1+x^2)}$

۲۵. $\lim_{x\to 0} \frac{2\sin 3x-3\sin 2x}{5x-\tan^{-1}5x}$

۲۶. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin x)-x}{x(\cos(\sin x)-1)}$

۲۷. $\lim_{x\to 0} \frac{\sinh x-\sin x}{\cosh x-\cos x}$

۸.۹ قضیهٔ دوجمله‌ای و سری دوجمله‌ای

مثال ۱ با استفاده از فرمول تیلور، قضیهٔ دوجمله‌ای را ثابت کنید: اگر n یک عدد صحیح مثبت باشد، آنگاه

$$(a+x)^n = a^n + na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}x^2 + \cdots + nax^{n-1} + x^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}x^k$$

که در آن $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$.

حل. فرض کنیم $f(x)=(a+x)^n$. دراین‌صورت

$$f'(x) = n(a+x)^{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!}(a+x)^{n-1}$$

$$f''(x) = \frac{n!}{(n-1)!}(n-1)(a+x)^{n-2} = \frac{n!}{(n-2)!}(a+x)^{n-2}$$

$$\vdots$$

$$f^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!}(a+x)^{n-k} \qquad (0\le k\le n)$$

در حالت خاص داریم $f^{(n)}(x)=\frac{n!}{0!}(a+x)^{n-n}=n!$ که ثابت است و از این رو، به‌ازای هر x و هر $k>n$، $f^{(k)}(x)=0$. به‌ازای $0\le k\le n$، می‌بینیم که $f^{(k)}(0)=\frac{n!}{(n-k)!}a^{n-k}$. بدین‌سان، بنابر قضیهٔ تیلور با باقیماندهٔ لاگرانژی، به‌ازای sای بین a و x،

$$(a+x)^n = f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!k!}a^{n-k}x^k + 0 = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}x^k$$

طرف راست نه فقط چندجمله‌ای درجهٔ nام مکلورن $(a+x)^n$ است، بلکه در حقیقت **سری** مکلورن آن نیز هست. چون همهٔ جمله‌های با درجهٔ بالاتر صفر هستند، این سری فقط تعدادی متناهی جملهٔ غیرصفر دارد و از این، به‌ازای هر x همگراست.

تذکر. اگر $f(x)=(a+x)^r$ که در آن $a>0$ و r عدد حقیقی دلخواهی است، آنگاه محاسباتی نظیر بالا نشان می‌دهند که چندجمله‌ای درجهٔ nام مکلورن f عبارت است از

$$P_n(x) = a^r + \sum_{k=1}^{n}\frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-k+1)}{k!}a^{r-k}x^k$$

ولی اگر r یک عدد صحیح مثبت نباشد، عدد صحیح مثبتی مانند n وجود نخواهد داشت که به‌ازای آن، باقیماندهٔ $E_n(x)=f(x)-P_n(x)$ متحد با صفر شود و از این رو سری مکلورنِ متناظر، یک چندجمله‌ای نخواهد بود.

سری دوجمله‌ای

برای ساده کردن بحث مربوط به‌تابع $(a+x)^r$ که در آن r یک عدد صحیح مثبت نیست، فرض می‌کنیم $a=1$ و تابع $(1+x)^r$ را در نظر می‌گیریم. نتایج مربوط به‌حالت کلی، از اتحاد

$$(a+x)^r = a^r\left(1+\frac{x}{a}\right)^r$$

که به‌ازای هر $a>0$ معتبر است، حاصل می‌شوند.

اگر r عدد حقیقی دلخواهی باشد و $x>-1$، آنگاه مشتق kام $(1+x)^r$ عبارت است از

$$r(r-1)(r-2)\cdots(r-k+1)(1+x)^{r-k} \qquad (k=1,2,\cdots)$$

بدین‌سان، سری مکلورن $(1+x)^r$ عبارت می‌شود از

$$1+\sum_{k=1}^{n}\frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-k+1)}{k!}x^k$$

که آن را **سری دوجمله‌ای** می‌نامیم. قضیهٔ زیر نشان می‌دهد که در حقیقت اگر $|x|<1$ ، آنگاه سری دوجمله‌ای به $(1+x)^r$ همگراست. می‌توانیم این ادعا را با انتخاب $c=0$ و استفاده از فرمول تیلور برای $(1+x)^r$ و اثبات اینکه به‌ازای $n\longrightarrow\infty$ باقیماندهٔ $E_n(x)$ به‌صفر میل می‌کند، ثابت کنیم. (برای اثبات این مطلب به‌ازای هر $|x|<1$ ، به‌صورت انتگرالیِ باقیمانده نیاز خواهیم داشت.) با وجود این، روش آسانتری نظیر روش به‌کار رفته برای توابع نمایی و مثلثاتی در بخش ۶.۹ را به‌کار خواهیم برد.

قضیهٔ ۲۳ سری دوجمله‌ای

اگر $|x|<1$ ، آنگاه

$$(1+x)^r=1+rx+\frac{r(r-1)}{2!}x^2+\frac{r(r-1)(r-2)}{3!}x^3+\cdots$$
$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-n+1)}{n!}x^n \qquad (-1<x<1)$$

اثبات. اگر $|x|<1$ ، آنگاه سری

$$f(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-n+1)}{n!}x^n$$

بنابر آزمون نسبت همگراست، زیرا

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-n+1)(r-n)}{(n+1)!}x^{n+1}}{\dfrac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-n+1)}{n!}x^n}\right|$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{r-n}{n+1}\right||x|=|x|<1$$

توجه داشته باشید که $f(0)=1$. باید نشان دهیم که به‌ازای $|x|<1$ ، $f(x)=(1+x)^r$.

بنابر قضیهٔ ۱۹ می‌توانیم به‌ازای $|x|<1$ از سری $f(x)$ جمله به‌جمله مشتق بگیریم:

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-n)}{n!}x^n$$

مجموع دوم به‌این ترتیب حاصل شده است که در مجموع اول، به‌جای n قرار داده‌ایم $n+1$. اگر مجموع اول را در x ضرب و حاصل را با مجموع دوم جمع کنیم، می‌بینیم که

$$(1+x)f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-n)}{n!}x^n$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-n+1)}{(n-1)!}x^n$$
$$=r+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-n+1)}{n!}x^n[(r-n)+n]$$
$$=rf(x)$$

از معادلهٔ دیفرانسیل $(1+x)f'(x)=rf(x)$ نتیجه می‌شود که به‌ازای $|x|<1$ داریم

$$\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{(1+x)^r}=\frac{(1+x)^r f'(x)-r(1+x)^{r-1}f(x)}{(1+x)^{2r}}=0$$

بدین‌سان، $\dfrac{f(x)}{(1+x)^r}$ بر بازهٔ یاد شده تابعی ثابت است؛ چون $f(0)=1$، این ثابت برابر است با ۱ . پس $f(x)=(1+x)^r$.

تذکر. به‌ازای بعضی از مقادیر r، سری دوجمله‌ای ممکن است در نقاط انتهایی $x=1$ یا $x=-1$ نیز همگرا باشد. همان‌طور که قبلاً دیدیم، اگر r یک عدد صحیح مثبت باشد این سری فقط تعدادی متناهی جملهٔ غیرصفر دارد و از این رو، به‌ازای هر x همگراست.

مثال ۲ سری مکلورن $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ را بیابید.

حل. در اینجا داریم $r=-\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=(1+x)^{-1/2}$$
$$=1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2!}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)x^2+\frac{1}{3!}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)x^3+\cdots$$
$$=1-\frac{1}{2}x+\frac{1\times 3}{2^2 2!}x^2-\frac{1\times 3\times 5}{2^3 3!}x^3+\cdots$$
$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}{2^n n!}x^n$$

این سری به‌ازای $-1<x\le 1$ همگراست. (برای اثبات همگرایی در نقطهٔ انتهایی $x=1$، آزمون سری‌های متناوب را به‌کار ببرید.) ■

مثال ۳ سری مکلورن $\sin^{-1}x$ را بیابید.

حل. در سری مثال قبل به‌جای x قرار می‌دهیم $-t^2$:

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}{2^n n!} t^{2n} \qquad (-1 < t < 1)$$

اکنون از ۰ تا x نسبت به t انتگرال می‌گیریم:

$$\sin^{-1} x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^x \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}{2^n n!} t^{2n}\right) dt$$

$$= x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}{2^n n!(2n+1)} x^{2n+1}$$

$$= x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + \cdots \qquad (-1 < t < 1)$$

تمرینات ۸.۹

در تمرین‌های ۱ تا ۶، سری مکلورنِ نمایش توابع مفروض را بیابید. برای این منظور، سری دوجمله‌ای را به‌کار ببرید.

۱. $\sqrt{1+x}$

۲. $x\sqrt{1-x}$

۳. $\sqrt{4+x}$

۴. $\dfrac{1}{\sqrt{4+x^2}}$

۵. $(1-x)^{-2}$

۶. $(1+x)^{-3}$

۷. **(ضریب‌های دوجمله‌ای)** نشان دهید که ضریب‌های دوجمله‌ای

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

در گزاره‌های زیر صدق می‌کنند:

(یک) به‌ازای هر n، $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ و

(دو) اگر $0 \le k \le n$، آنگاه $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$.

در نتیجه، اگر $n \ge 1$ را ثابت نگه داریم، ضریب‌های دوجمله‌ای

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \cdots, \binom{n}{n}$$

عبارت‌اند از عنصرهای سطر nام مثلث پاسکال:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & & & & \vdots & & & & &
\end{array}$$

که در آن، هر عنصرِ بزرگتر از ۱ برابر است با مجموع آن دو عنصری که به‌طور مورب بالای آن قرار گرفته‌اند.

۸. **(اثبات استقرایی قضیهٔ دوجمله‌ای)** با استفاده از استقرای ریاضی و نتایج به‌دست آمده در تمرین ۷، قضیهٔ دوجمله‌ای را ثابت کنید:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$
$$= a^n + n a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \binom{n}{3} a^{n-3} b^3 + \cdots + b^n$$

۹. **(قاعدهٔ لایبنیتس)** با استفاده از استقرای ریاضی، قاعدهٔ ضرب و تمرین ۷، درستی قاعدهٔ لایبنیتس برای مشتق nام حاصلضرب دو تابع را ثابت کنید:

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$$
$$= f^{(n)} g + n f^{(n-1)} g' + \binom{n}{2} f^{(n-2)} g'' + \binom{n}{3} f^{(n-3)} g^{(3)} + \cdots + f g^{(n)}$$

۹.۹ سری‌های فوریه[1]

همان‌طور که دیدیم، نمایش توابع به‌صورت سری توانی این امکان را فراهم می‌سازد که آن توابع را با استفاده از مجموع‌های جزئی این سری‌ها، یعنی با استفاده از چندجمله‌ای‌ها، در بازه‌های حاوی نقطهٔ مورد نظر با هر دقت که بخواهیم تقریب بزنیم. ولی در بسیاری از کاربردهای مهم در ریاضیات، توابع مورد بحث توابعی دوره‌ای هستند. مثلاً بخش قابل ملاحظه‌ای از مهندسی برق مربوط به می‌شود به تحلیل و بررسی **موجدیسه‌ها** که توابعی دوره‌ای از زمان هستند. چندجمله‌ای‌ها توابعی دوره‌ای نیستند و به‌همین سبب، سری‌های توانی، برای نمایش این نوع توابع مناسب نخواهند بود.

برای نمایش توابع دوره‌ای بر بازه‌های کلی، سری‌های معینی از توابع دوره‌ای به‌نام سری‌های فوریه بسیار مناسبتر هستند.

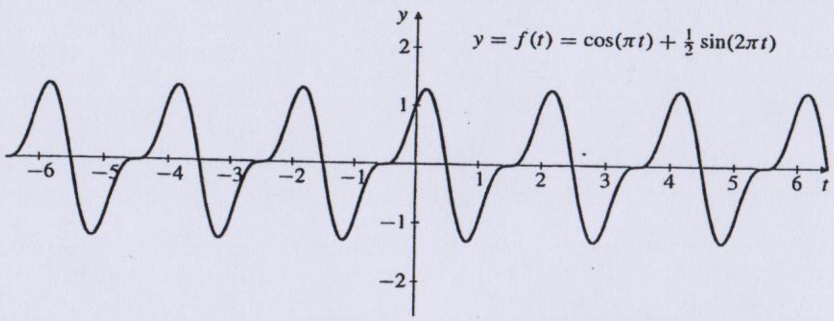
توابع دوره‌ای

یادآور می‌شویم که تابع f معین بر خط حقیقی، **دوره‌ای** با دورهٔ T است هرگاه به‌ازای هر عدد حقیقی t،

$$f(t+T) = f(t) \qquad (*)$$

در نتیجه، به‌ازای هر عدد صحیح m داریم $f(t+mT) = f(t)$. پس اگر T یک دورهٔ (تناوب) f باشد، هر مضرب صحیح T مانند mT نیز چنین است. کوچکترین عدد مثبت مانند T را که در رابطهٔ $(*)$ صدق کند **دورهٔ اصلی** یا به‌اختصار، **دورهٔ** f می‌نامیم.

نمودار کامل تابعی با دورهٔ T را می‌توان از انتقال آن بخشی از نمودار که بر بازهٔ نیم ـ بازی به‌طول T (مثلاً بر بازهٔ $[0, T[$) قرار دارد به‌طرف چپ یا راست و به‌اندازهٔ مضرب‌های صحیح دورهٔ T به‌دست آورد. شکل ۶.۹ نمودار تابعی با دورهٔ ۲ را نشان می‌دهد.



شکل ۶.۹ این تابع دارای دورهٔ ۲ است. مشاهده می‌کنید که این نمودار چگونه آن بخشی را که بر بازهٔ $[0, 2[$ قرار دارد به‌طرف چپ و راست تا بینهایت تکرار می‌کند

[1]. J. B. J. Fourier