بنام خدا

فرشاد سرائی

« معادلات دیفرانسیل »

حلّ معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ اوّل -

تعریف - هر معادلهٔ مشتمل بر یک یا چند متغیر مستقل و یک متغیر - وابسته و مشتقات از مراتب مختلف این متغیر وابسته نسبت به متغیرهای مستقل را یک معادلهٔ دیفرانسیل گوییم. هرگاه در این معادله فقط یک متغیر مستقل داشته باشیم معادله - دیفرانسیل را معمولی گوییم و در غیر این صورت معادله - دیفرانسیل مشتق جزئی داریم.

مثال -

$$y = y(x)$$

معادله دیفرانسیل معمولی

$$y'' + y' + 2xy = \sin x$$

$$u = u(x, y)$$

معادله دیفرانسیل مشتق جزئی

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

* بطور کلی یک معادله دیفرانسیل معمولی از مرتبهٔ n به صورت زیر است :

$$f(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

* مرتبهٔ یک معادله دیفرانسیل مرتبه بزرگترین مشتق آن - است.

نکته : معادله دیفرانسیل مرتبه اوّل را می توان به فرم زیر نشان داد :

$$f(x, y, y') = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad * \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

* منظور از جواب معادله دیفرانسیل بالا یعنی پیدا کردن تابعی مانند $y(x)$ که در معادلهٔ فوق صدق نماید.

نکته - منظور از جواب عمومی معادله دیفرانسیل مرتبه اوّل یعنی پیدا کردن تابع $y(x, c)$ که به ازای هر c در معادله دیفرانسیل $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ صدق کند.

تعریف : یک معادله دیفرانسیل با شرایط اولیه بصورت :

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad و \quad a \leqslant x \leqslant b \quad و \quad y(a) = y_0$$

را یک مسأله مرزی گوییم.

قضیه یکتائی جواب (پیکارد) : هرگاه تابع $f(x, y)$ و $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ بر مستطیل D پیوسته باشد آنگاه اگر $x_0 \in [a, b]$ باشد فقط یک تابع مانند $y(x)$ موجود است که در معادله دیفرانسیل مرتبه اوّل $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ صدق می کند و $y(x_0) = y_0$.

(y_0 عددی دلخواه است)

روشهای حل معادلات دیفرانسیل مرتبه اول -

معادله دیفرانسیل تفکیک پذیر :

هرگاه در معادله دیفرانسیل $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ تابع : $f(x,y) = f(x) \cdot g(y)$ باشد معادلهٔ دیفرانسیل را تفکیک پذیر گوییم .

روش حل -

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$$

از طرفین انتگرال می گیریم :

$$\Rightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx + c$$

* در این روش سعی می شود هر تابع را در کنار مشتق آن بنویسیم .

مثال -

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+y}{1-x} = (1+y)\left(\frac{1}{1-x}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{1+y} = \frac{dx}{1-x} \Rightarrow \int \frac{dy}{1+y} = \int \frac{dx}{1-x} + c$$

جواب عمومی

$$\Rightarrow ** \ln|1+y| = -\ln|1-x| + c$$

می توان c را بصورت $\ln c$ نوشته و عبارت را ساده کنیم :

$$\ln|1+y| = \ln\left|\frac{c}{1-x}\right| \Rightarrow$$

$$* \quad |1+y| = \left|\frac{c}{1-x}\right| \quad *$$

معادله دیفرانسیل همگن مرتبه اوّل -

تعریف - تابع دو متغیره $f(x, y)$ را همگن گوییم هرگاه

$$t^n f(x, y) = f(tx, ty)$$

(اگر t^n را داشته باشیم تابع همگن از مرتبهٔ n است.)

مثال - $f(x, y) = x^2 + y^2$ همگن از مرتبه دو است چون :

$$* \quad f(tx, ty) = t^2(x^2 + y^2) = t^2 f(x, y)$$

مثال - $f(x, y) = \sin\left(\frac{x}{y}\right)$:

$$* \quad f(tx, ty) = \sin\left(\frac{tx}{ty}\right) = \sin\left(\frac{x}{y}\right) = f(x, y)$$

همگن از مرتبهٔ صفر است.

معادله دیفرانسیل همگن (تعریف اوّل) :

معادله دیفرانسیل $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ را همگن گوییم هرگاه تابع $f(x, y)$ همگن مرتبهٔ صفر باشد یعنی :

* $f(tx, ty) = f(x, y)$

تعریف دوم - معادله دیفرانسیل $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ را همگن گوییم هرگاه توابع M و N همگن هم مرتبه باشند.

روش حل - $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ «همگن»

تغییر متغیر زیر را می دهیم :

* $y = zx$

(یا) $z = \frac{y}{x}$

$y = zx$ مشتق می گیریم $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = x\frac{dz}{dx} + z$

از طرفی : $f(tx, ty) = f(x, y)$

$t = \frac{1}{x} \Rightarrow$

$f(1, \frac{y}{x}) = f(x, y) \Rightarrow f(1, z) = f(x, y)$

در مجموع $\Rightarrow x\frac{dz}{dx} + z = f(1, z)$

$\Rightarrow x\frac{dz}{dx} = f(1, z) - z \Rightarrow$

$\frac{dz}{f(1,z) - z} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dz}{f(1,z) - z} = \ln|x| + c$

« و جوابهای عمومی بدست می آید »

مثال - $2xyy' - y^2 + x^2 = 0$

$$y' = \frac{-x^2+y^2}{2xy}$$ (همگن مرتبه صفر)

* تغییر متغیر : $\left(z = \frac{y}{x} \Leftrightarrow y = zx\right)$ *

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = x\frac{dz}{dx} + z \quad \Rightarrow$$

$$x\frac{dz}{dx} + z = \frac{-x^2+z^2x^2}{2x^2z} = \frac{x^2(-1+z^2)}{2x^2z} \quad \Rightarrow$$

$$x\frac{dz}{dx} = \frac{z^2-1}{2z} - z \quad \Rightarrow$$

$$x\frac{dz}{dx} = \frac{z^2-1-2z^2}{2z} = -\frac{1+z^2}{2z} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{dz}{-\frac{1+z^2}{2z}} = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{-2z\,dz}{1+z^2} = \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow -\ln(1+z^2) = \ln x + \ln c$$

$$\Rightarrow \quad * \quad \frac{1}{1+z^2} = xc$$

بجای z مقدار قرار میدهیم $\Rightarrow \quad \boxed{\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2} = xc}$

۱- $\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c)$

این معادله دیفرانسیل با تغییر متغیر $z = ax + by + c$ به یک معادله دیفرانسیل تفکیک پذیر تبدیل می شود.

$$ax + by + c = z \Rightarrow a + b\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{b}\left(\frac{dz}{dx} - a\right) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{b}\left(\frac{dz}{dx} - a\right) = f(z) \Rightarrow \frac{dz}{dx} = bf(z) + a$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{bf(z)+a} = dx \Rightarrow \int \frac{dz}{bf(z)+a} = x + c$$

مثال- $\frac{dy}{dx} = \sin^2(x - y - 1)$

$$x - y - 1 = z \Rightarrow -\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 1$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = -\sin^2 z + 1 \Rightarrow \int \frac{dz}{1-\sin^2 z} = x + c$$

$$\Rightarrow \int \frac{dz}{\cos^2 z} = x + c \Rightarrow \tan z = x + c$$

$$\Rightarrow \tan(x - y - 1) = x + c$$

۲- $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{dx + ey + f}\right)$

الف - * $\frac{a}{d} = \frac{b}{e}$

فرض کنیم : $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \lambda \Rightarrow \begin{matrix} a = \lambda d \\ b = \lambda e \end{matrix}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = f\left(\frac{\lambda dx + \lambda ey + c}{dx + ey + f}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{\lambda(dx+ey)+c}{dx+ey+f}\right)$$

تغییر متغیر : $dx + ey = z \Rightarrow$

$$d + e\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{e}\left(\frac{dz}{dx} - d\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{e}\left(\frac{dz}{dx} - d\right) = f\left(\frac{\lambda z + c}{z + f}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{dz}{dx} = ef\left(\frac{\lambda z + c}{z + f}\right) + d \Rightarrow$$

$$\frac{dz}{ef\left(\frac{\lambda z+c}{z+f}\right)+d} = dx \Rightarrow \int \frac{dz}{ef\left(\frac{\lambda z+c}{z+f}\right)+d} = x + c$$

ب - * $\frac{a}{d} \neq \frac{b}{e}$ تغییر متغیر : $\begin{matrix} x = X + h \\ y = Y + K \end{matrix}$

(K، h ثابت هستند)

$$\Rightarrow \begin{matrix} dx = dX \\ dy = dY \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \frac{dY}{dX} = f\left(\frac{aX + bY + (ah + bk + c)}{dX + eY + (dh + ek + f)}\right)$$

* اگر k و h را طوری بدست آوریم که :
$$\begin{cases} ah + bk + c = 0 \\ dh + ek + f = 0 \end{cases}$$

آنگاه معادله دیفرانسیل قابل تحویل به معادله دیفرانسیل همگن می‌شود.
(چون $\frac{a}{d} \neq \frac{b}{e}$ است پس دستگاه حتماً جواب دارد)

مثال - (حالت ب)
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y + x - 2}{y - x - 4}$$

$x = X + h$ و $y = Y + k$

$$* \begin{cases} h + k - 2 = 0 \\ -h + k - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 3 \\ h = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{dY}{dX} = \frac{Y + 3 + X - 1 - 2}{Y + 3 - (X - 1) - 4} \Rightarrow \frac{dY}{dX} = \frac{Y + X}{Y - X}$$

$$Y = ZX \Rightarrow \frac{dY}{dX} = X\frac{dZ}{dX} + Z \Rightarrow$$

$$X\frac{dZ}{dX} + Z = \frac{ZX + X}{ZX - X} = \frac{Z + 1}{Z - 1} \Rightarrow$$

$$X\frac{dZ}{dX} = \frac{Z+1}{Z-1} - Z \Rightarrow X\frac{dZ}{dX} = \frac{2Z + 1 - Z^2}{Z - 1}$$

$$\Rightarrow \frac{dZ}{\frac{2Z + 1 - Z^2}{Z - 1}} = \frac{dX}{X} \Rightarrow \left(\frac{-1}{2}\right)\int \frac{(-2)\,dZ}{\frac{2Z + 1 - Z^2}{Z - 1}} = \ln X + C$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}\ln(2z+1-z^2) = \ln cx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2z+1-z^2}} = cx \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\,\frac{y-3}{x+1}+1-\frac{(y-3)^2}{(x+1)^2}}} = (x+1)\,c$$

مثال - $(3y+2x+4)\,dx - (4x+6y+5)\,dy = 0$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3y+2x+4}{4x+6y+5}$$ (قسمت الف)

* ترکیب خطی از x و y، چند برابرش در مخرج پیدا شده (یا بالعکس) که باید کوچکتر را z گرفت.

$$3y+2x = z \Rightarrow 3\frac{dy}{dx}+2 = \frac{dz}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}\left(\frac{dz}{dx}-2\right) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{dz}{dx}-2\right) = \frac{z+4}{2z+5} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{3z+12}{2z+5}+2$$

$$= \frac{3z+12+4z+10}{2z+5} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{7z+22}{2z+5}$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{\frac{7z+22}{2z+5}} = dx \Rightarrow \int \frac{(2z+5)\,dz}{7z+22} = x+c$$

$$\begin{array}{r|l} 2z+5 & 7z+22 \end{array} \Rightarrow \begin{aligned} R &= -\frac{9}{7} \\ Q &= \frac{2}{7} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int \left(\frac{2}{7} - \frac{\frac{9}{7}}{7z+22} \right) dz = x + c \Rightarrow$$

$$\frac{2}{7} z - \frac{9}{7} \cdot \frac{1}{7} \ln(7z - 22) = x + c \Rightarrow$$

$$\frac{2}{7}(3y + 2x) - \frac{9}{49} \ln(21y + 14x + 22) = x + c$$

معادلات دیفرانسیل کامل -

تعریف - معادله دیفرانسیل $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ را کامل گوییم هرگاه تابعی مانند $u(x,y)$ موجود باشد بطوریکه: $du = M(x,y)dx + N(x,y)dy$. در این صورت جواب معادله بالا به صورت: $u(x,y) = c$ می باشد.

آزمون کامل بودن: (قضیه)

معادله دیفرانسیل $Mdx + Ndy = 0$ کامل است اگر و فقط اگر:

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \right)$$

مثال - $\underbrace{(1 - 2xy - y^2)}_{M} dx - \underbrace{(x+y)^2}_{N} dy = 0$

* $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = -2y - 2x$ معادله دیفرانسیل کامل است

روش حل : $u(x,y)$ موجود است
از اولی یا دومی بنا به مصلحت استفاده می کنیم. $\left(\frac{\partial u}{\partial x} = M \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = N\right)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 - 2xy - y^2 \Rightarrow$$

$$u(x,y) = \int (1 - 2xy - y^2)\, dx + h(y) \Rightarrow$$

$$u(x,y) = x - x^2y + h(y)$$

اما : $\frac{\partial u}{\partial y} = -x^2 - 2xy + h'(y) = -(x+y)^2$

$$\Rightarrow h'(y) = -y^2 \Rightarrow h(y) = -\frac{y^3}{3} + c$$

$$\Rightarrow u(x,y) = x - x^2y - xy^2 - \frac{y^3}{3} + c$$

$$\Rightarrow x - x^2y - xy^2 - \frac{y^3}{3} + c = C$$

$$\Rightarrow x - x^2y - xy^2 - \frac{y^3}{3} = C$$

عامل انتگرال ساز :

برخی اوقات معادله دیفرانسیل کامل نیست ولی با ضرب تابعی مانند μ در طرفین، معادله دیفرانسیل کامل می شود.

$M dx + N dy = 0$ (به فرض کامل نیست)

$\mu M dx + \mu N dy = 0$ کامل $\Rightarrow \dfrac{\partial \mu M}{\partial y} = \dfrac{\partial \mu N}{\partial x}$

$$\Rightarrow M \frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu \frac{\partial M}{\partial y} = N \frac{\partial \mu}{\partial x} + \mu \frac{\partial N}{\partial x}$$

الف - μ تابعی فقط از x باشد:

$$\mu \frac{\partial M}{\partial y} = N \frac{\partial \mu}{\partial x} + \mu \frac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow$$

$$\mu \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) = N \frac{d\mu}{dx} \Rightarrow$$

$$g(x) = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dx}$$

باید تابعی از x باشد

$$\Rightarrow \int g(x)\, dx = \ln \mu$$

$$\Rightarrow * \; \mu = e^{\int g(x)\, dx}$$

ب - μ تابعی فقط از y باشد:

$$M \frac{d\mu}{dy} + \mu \frac{\partial M}{\partial y} = \mu \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$\mu \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) = - M \frac{d\mu}{dy}$$

$$g(y) = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M} = \frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dy}$$

باید تابعی از y باشد

$$\int g(y)\,dy = \ln \mu$$

$$\Rightarrow \quad * \ \mu = e^{\int g(y)\,dy}$$

مثال - $\underbrace{(1-xy)}_{M}\,dx + \underbrace{(xy - x^2)}_{N}\,dy = 0$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -x \neq \frac{\partial N}{\partial x} = y - 2x$$ (کامل نیست)

① $$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{-x - y + 2x}{xy - x^2} = \frac{x-y}{-x(x-y)}$$

$$= -\frac{1}{x} = g(x)$$ (پس قابل حل است)

$$\Rightarrow \quad \mu = e^{\int -\frac{1}{x}dx} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$$

$$\xrightarrow{\times \mu} \frac{1}{x}(1-xy)\,dx + \frac{1}{x}(xy - x^2)\,dy = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\left(\frac{1}{x} - y\right)dx + (y - x)\,dy = 0$$ (کامل است)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{x} - y \quad \Rightarrow \quad u(x,y) = \ln x - yx + h(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -x + h'(y) = y - x \quad \Rightarrow \quad h'(y) = y$$

$$\Rightarrow h(y) = \frac{y^2}{2} + c \quad \Rightarrow$$

$$u(x, y) = \ln x - yx + \frac{y^2}{2} + c \quad \Rightarrow$$

$$* \ \ln x - yx + \frac{y^2}{2} = C$$

معادله دیفرانسیل خطی مرتبهٔ اوّل -

تعریف - فرم کلی یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول بصورت زیر است :

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\,y = Q(x)$$

روش حلّ -

$$\xrightarrow{\times dx} \quad dy + P(x)\,y\,dx = Q(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \quad dy + P(x)\,y\,dx - Q(x)\,dx = 0$$

$$\underbrace{dy}_{N} + (\underbrace{P(x)y - Q(x)}_{M})\,dx = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = P(x) \neq \frac{\partial N}{\partial x} = 0$$ (کامل نیست)

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{P(x) - 0}{1} = P(x)$$ تابعی از x

$$\Rightarrow \quad \mu = e^{\int P(x)\,dx}$$

$$\Rightarrow e^{\int P(x)\,dx}\,dy + e^{\int P(x)\,dx}\,y\,P(x)\,dx = e^{\int P(x)\,dx}\,Q(x)\,dx$$

$$\Rightarrow d\,e^{\int P(x)\,dx}\cdot y = e^{\int P(x)\,dx}\,Q(x)\,dx$$

$$\Rightarrow e^{\int P(x)\,dx}\cdot y = \int e^{\int P(x)\,dx}\,Q(x)\,dx$$

* از فرمول * : $d\,uv = u\,dv + v\,du$

مثال -

$$\begin{cases} y' + y\tan x = \sin 2x \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$P(x) = \tan x \qquad \Rightarrow$$

$$y\,e^{\int \tan x\,dx} = \int e^{\int \tan x\,dx}\,\sin 2x\,dx + C$$

$$\Rightarrow y\cdot e^{-\ln \cos x} = \int e^{-\ln \cos x}\,\sin 2x\,dx + C$$

$$\Rightarrow y\cdot\frac{1}{\cos x} = \int \frac{1}{\cancel{\cos x}}\cdot 2\sin x\,\cancel{\cos x}\,dx + C$$

$$\Rightarrow \frac{y}{\cos x} = -2\cos x + C \qquad \Rightarrow$$

$$y = -2\cos^2 x + C\cos x \xrightarrow{y(0)=1} 1 = -2 + C \Rightarrow$$

$$C = 3 \qquad \Rightarrow \qquad * \; y = -2\cos^2 x + 3\cos x$$

معادله دیفرانسیل برنولی - فرم کلی یک معادله دیفرانسیل برنولی - بصورت زیر است :

$$* \quad \frac{dy}{dx} + P(x)\,y = Q(x)\,y^{n} \qquad (n \text{ یک عدد صحیح است})$$

روش حل - تغییر متغیر $z = y^{1-n}$ را می دهیم .

$$\frac{dz}{dx} = (1-n)\,y^{-n}\frac{dy}{dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{n-1}\,y^{n}\,\frac{dz}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n-1}\,y^{n}\,\frac{dz}{dx} + P(x)\,y = Q(x)\,y^{n} \quad \xrightarrow{\times(1-n)\,y^{-n}}$$

$$\frac{dz}{dx} + P(x)\,y^{1-n}(1-n) = (1-n)\,Q(x)$$

$$\frac{dz}{dx} + P(x)(1-n)\,z = (1-n)\,Q(x)$$

* که معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول است (با متغیر وابسته جدید z) که می توان آنرا حل کرد.

مثال -

$$y' + \frac{y}{x} = x\,y^{6}$$

$$n = 6 \quad \text{و} \quad P(x) = \frac{1}{x} \quad \text{و} \quad Q(x) = x$$

$$z = y^{1-6} = y^{-5} \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dx} = -5\,y^{-6}\,\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{5}\,y^{6}\,\frac{dz}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{5} y^{6} \frac{dz}{dx} + \frac{y}{x} = x y^{6} \quad \xrightarrow{(\div)\, -\frac{1}{5} y^{6}} \quad (\text{یا}) \times -5y^{-6}$$

$$\frac{dz}{dx} - \frac{5}{x} y^{-5} = -5x \quad \Rightarrow$$

$$\frac{dz}{dx} - \frac{5z}{x} = -5x \quad \Rightarrow$$

$$z \, . \, e^{\int -\frac{5}{x} dx} = \int -5x \, . \, e^{-\int 5x \, dx} dx + c$$

$$\Rightarrow \quad z \, . \, e^{-5 \ln x} = \int -5x \, . \, e^{-5 \ln x} dx + c$$

$$\Rightarrow \quad \frac{z}{x^{5}} = -5 \int x \, . \, \frac{1}{x^{5}} dx + c = -5\left(-\frac{1}{3}\right) . \, x^{-3} + c$$

نکته : برخی از معادلات دیفرانسیل در صورت ظاهر خطی نیستند اما با تعویض جایگاه x و y معادله دیفرانسیل تبدیل به یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول نسبت به متغیر وابسته x و متغیر مستقل y می شود.

مثال - $\quad y' = \dfrac{y}{2x + y^{3} e^{y}}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x + y^{3} e^{y}}$$ (به ظاهر خطی نیست)

(اما) : $\quad \dfrac{dx}{dy} = \dfrac{2x + y^{3} e^{y}}{y} \quad \Rightarrow$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2x}{y} + y^{2} e^{y} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dy} - \frac{2}{y} x = y^{2} e^{y}$$

$$x \cdot e^{\int -\frac{2}{y} dy} = \int y^2 e^y \cdot e^{\int -\frac{2}{y} dy} dy + c$$

$$\Rightarrow \quad x \cdot e^{-2\ln y} = \int y^2 e^y \cdot e^{-2\ln y} dy + c$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{y^2} = \int y^2 e^y \cdot \frac{1}{y^2} dy + c \Rightarrow \frac{x}{y^2} = e^y + c$$

معادله دیفرانسیل ریکاتی -

تعریف - هر معادله دیفرانسیل به فرم $y' + f(x)\, y = y^2 r(x) + g(x)$ را یک معادله ریکاتی گوییم.

هرگاه یک جواب خصوصی معادله دیفرانسیل فوق را بدانیم آنگاه برای معادله دیفرانسیل ریکاتی می توان جواب عمومی بدست آورد.

روش حل - فرض می کنیم y_1 یک جواب خصوصی معادله دیفرانسیل مرتبه اول است؛ تغییر متغیر $y = y_1 + \frac{1}{u}$ را انجام می دهیم.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx} + \frac{-\frac{du}{dx}}{u^2} \Rightarrow$$

$$y_1' - \frac{u'}{u^2} + f(x)\left(y_1 + \frac{1}{u}\right) = \left(y_1 + \frac{1}{u}\right)^2 r(x) + g(x)$$

$$y_1' - \frac{u'}{u^2} + f(x)\, y_1 + f(x)\frac{1}{u} = y_1^2 r(x) + \frac{1}{u^2} r(x)$$

$$+ \frac{2y_1}{u} r(x) + g(x)$$

$$y_1' + f(x)\, y_1 - y_1^2\, r(x) - g(x) - \frac{u'}{u^2} + \frac{f(x)}{u} =$$

$$\frac{1}{u^2}\, r(x) + \frac{2y_1}{u}\, r(x)$$

صفر است چون y_1 جواب معادله ریکاتی است

$$\Rightarrow \quad -\frac{u'}{u^2} + \frac{f(x)}{u} = \frac{r(x)}{u^2} + \frac{2y_1\, r(x)}{u} \xrightarrow{\times u^2}$$

$$u' - f(x)\, u = -r(x) - 2y_1\, u\, r(x)$$

$$\Rightarrow * \; u' + \left(-f(x) + 2y_1\, r(x)\right) u = -r(x) \Rightarrow$$

که معادله دیفرانسیل خطی با متغیر مستقل x و وابسته u می باشد.

مثال- $2x^2 y' = (x-1)(y^2 - x^2) + 2xy$

$$\xrightarrow{\div 2x^2} \quad y' = \frac{(x-1)(y^2 - x^2)}{2x^2} + \frac{y}{x}$$

$$y' - \frac{1}{x}\, y = \frac{x-1}{2x^2}\, y^2 - \frac{(x-1)}{2}$$

مثلاً یک جواب خصوصی : $y = x$

تغییر متغیر : $y = x + \frac{1}{u}$

$$\Rightarrow \quad y' = 1 - \frac{u'}{u^2} \qquad \Rightarrow$$

$$1-\frac{u'}{u^2}-\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{u}\right)=\frac{x-1}{2x^2}\left(x+\frac{1}{u}\right)^2-\frac{x-1}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{u'}{u^2}-\frac{1}{xu}=\cancel{\frac{x-1}{2}}+\frac{x-1}{2u^2x^2}+\frac{x-1}{xu}-\cancel{\frac{x-1}{2}}$$

$$\Rightarrow -\frac{u'}{u^2}=\frac{x-1}{2u^2x^2}+\frac{1}{u} \Rightarrow u'=-\frac{x-1}{2x^2}-u$$

$$\Rightarrow u'+u=-\frac{x-1}{2x^2}$$ (خطی)

$$\Rightarrow ue^{\int dx}=\int -e^x\frac{x-1}{2x^2}\,dx+c$$

$$\Rightarrow ue^x=\int -\frac{1}{2x}e^x\,dx+\int\frac{1}{2x^2}e^x\,dx+c$$

$$\Rightarrow ue^x=\underbrace{-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x}\,de^x}_{\text{جزء به جزء}}+\frac{1}{2}\int\frac{e^x}{x^2}\,dx+c$$

$$\Rightarrow ue^x=-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x}e^x-\int e^x\,d\frac{1}{x}\right]+\frac{1}{2}\int\frac{e^x}{x^2}\,dx+c$$

$$\Rightarrow ue^x=\frac{-1}{2x}e^x-\frac{1}{2}\int e^x\frac{1}{x^2}\,dx+\frac{1}{2}\int\frac{e^x}{x^2}\,dx+c$$

$$\Rightarrow ue^x=-\frac{1}{2x}e^x+c \quad \text{و} \quad u=\frac{1}{y-x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y-x}e^x=-\frac{1}{2}xe^x+c$$

معادلات دیفرانسیل مرتبه اول از درجات بالاتر :

یک معادله دیفرانسیل مرتبه اوّل از درجه n بصورت زیر است :

$$a_n P^n + a_{n-1} P^{n-1} + \cdots\cdots + a_1 P + a_0 = 0 \quad (*)$$

که در آن a_0 و ...... و a_n اعداد ثابت و $P = \frac{dy}{dx}$ می باشد.

حالت ۱ـ معادله $(*)$ قابل تجزیه به عوامل اوّل برحسب P است.

$$[P - f_1(x,y)][P - f_2(x,y)] \cdots\cdots [P - f_n(x,y)] = 0$$

* با صفر قرار دادن هر یک از عوامل :

$$\begin{cases} P = f_1(x,y) \\ P = f_2(x,y) \\ \vdots \qquad \vdots \end{cases}$$

* و از حل آن بدست می آوریم :

$F_1(x,y,c) = 0$ و $F_2(x,y,c) = 0$ و ..... و $F_n(x,y,c) = 0$

آنگاه جواب کلی به صورت :

$F_1(x,y,c) \cdot F_2(x,y,c) \cdots\cdots F_n(x,y,c) = 0$ می باشد.

مثال ـ $\frac{dy}{dx} - \frac{dx}{dy} = \frac{x}{y} - \frac{y}{x}$

$$\frac{dy}{dx}=p \Rightarrow \frac{dx}{dy}=\frac{1}{p} \Rightarrow$$

$$p-\frac{1}{p}=\frac{x}{y}-\frac{y}{x} \Rightarrow$$

$$p^2-p\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)-1=0 \Rightarrow$$

$$\left(p-\frac{x}{y}\right)\left(p+\frac{y}{x}\right)=0 \Rightarrow$$

$$p-\frac{x}{y}=0 \Rightarrow p=\frac{x}{y}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x}{y} \Rightarrow y\,dy=x\,dx \Rightarrow$$

$$\frac{y^2}{2}=\frac{x^2}{2}+c$$

$$p+\frac{y}{x}=0 \Rightarrow p=-\frac{y}{x} \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y}=-\frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$\ln y=-\ln x+\ln c \Rightarrow yx=c$$

$$\Rightarrow (yx-c)\left(\frac{y^2}{2}-\frac{x^2}{2}-c\right)=0$$

معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم قابل تحویل به مرتبهٔ اول :

الف - معادله مرتبه دوم فاقد x :

$$* \; F(y, y', y'') = 0$$

* با تغییر متغیر $p = y'$:

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$$

که معادله به صورت ذیل در می آید :

$$* \; G\left(y, p, p\frac{dp}{dy}\right) = 0$$

که معادله مرتبهٔ اوّل است.

ب ـ معادلات مرتبه دوّم فاقد y : $F(x, y', y'') = 0$

* با تغییر متغیر $p = y'$ معادله به فرم $G\left(x, p, \frac{dp}{dx}\right) = 0$ در می آید.

مثال ۱ ـ $\quad y' = p \qquad 2xy'' = 3y'$

$$\Rightarrow \quad y'' = \frac{dp}{dx} \quad \Rightarrow \quad 2x\frac{dp}{dx} = 3p$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dp}{3p} = \frac{dx}{2x} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{3}\ln p = \frac{1}{2}\ln x + \ln c$$

$$\Rightarrow \quad p^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{2}} \cdot c \quad \Rightarrow \quad p = x^{\frac{3}{2}} \cdot c^3 \; c_1$$

$$\frac{dy}{dx} = x^{\frac{3}{2}} \cdot c_1 \quad \Rightarrow \quad y = \int c_1 \cdot x^{\frac{3}{2}}\,dx + c_2$$

$$y = C_1 \cdot \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + C_2$$

مثال ۲ـ $yy'' + (y')^2 = 0$ $\qquad y' = p$

$$y'' = p\frac{dp}{dy} \Rightarrow y \cdot p\frac{dp}{dy} + p^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad ① \; p = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow y = c$$

$$② \; p \neq 0 \Rightarrow y\frac{dp}{dy} + p = 0 \Rightarrow$$

$$y\frac{dp}{dy} = -p \Rightarrow \frac{dp}{p} = -\frac{dy}{y} \Rightarrow$$

$$\ln p = -\ln y + \ln c_1 \Rightarrow p = \frac{c_1}{y}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{c_1}{y} \Rightarrow \int y\,dy = \int c_1\,dx + c_2$$

$$\Rightarrow * \; \frac{y^2}{2} = c_1 x + c_2$$

معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم خطی :

تعریف ـ فرم کلی یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم بصورت زیر است :

$$* \; y'' + P(x)y' + Q(x)y = r(x)$$

* که اگر $r(x) = 0$ باشد معادله دیفرانسیل را همگن و در غیر اینصورت معادله دیفرانسیل را غیر همگن گوییم.

قضیه - فرض کنید: y_g جواب عمومی معادله $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ باشد و نیز y_p یک جواب خصوصی برای معادله غیرهمگن خطی $y''+P(x)y'+Q(x)y=r(x)$ باشد. آنگاه $y=y_g+y_p$ جواب عمومی معادلهٔ $y''+P(x)y'+Q(x)y=r(x)$ می باشد.
لذا بحث ما به دو حالت تقسیم می شود:

۱- پیدا کردن جواب عمومی معادله همگن $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$

۲- پیدا کردن جواب خصوصی معادله غیرهمگن $y''+P(x)y'+Q(x)y=r(x)$

جواب عمومی معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم همگن:

قضیه: فرض کنید y_1 و y_2 دو جواب معادله $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ باشند. آنگاه هر ترکیب خطی از دو جواب فوق ($c_1y_1+c_2y_2$) نیز یک جواب است.

تعریف - توابع $y_1(x)$ و $y_2(x)$ وابستهٔ خطی هستند هرگاه نسبت $\frac{y_1}{y_2}$ یک عدد ثابت باشد. در غیر این صورت توابع فوق مستقل خطی می باشند.

تعریف - رونسکین دو تابع $y_1(x)$ و $y_2(x)$ به صورت ذیل تعریف می شود:

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=y_1y_2'+y_2y_1'$$

قضیه : فرض کنید $y_1(x)$ و $y_2(x)$ توابع جواب معادلهٔ : $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ باشند . آنگاه $W(y_1, y_2)$ در فاصله $[a, b]$ همواره صفر است و یا همواره مخالف صفر است . ($[a, b]$ فاصلهٔ جوابها می باشد یعنی $y_1(x), y_2(x) \in [a, b]$)

لم : فرض کنید y_1 و y_2 دو جواب معادله خطی همگن : $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ باشد . آنگاه y_1 و y_2 مستقل خطی هستند اگر و فقط اگر $W(y_1, y_2) \neq 0$ باشد (در فاصله تعریف y_1 و y_2)

نتیجهٔ اصلی

قضیه : فرض کنید توابع y_1 و y_2 دو جواب مستقل خطی معادله خطی همگن مرتبه دوم $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ باشند . آنگاه : $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ جواب عمومی معادله فوق می باشد .

تعریف - معادله دیفرانسیل زیر با شرایط اولیه داده شده را یک مسئله اولیه یا یک مسئله با شرایط مرزی گوییم :

$$\begin{cases} y'' + P(x)y' + Q(x)y = r(x) \\ y(a) = y_0 \\ y'(a) = y'_0 \quad (\text{شیب خط مماس}) \\ a \leq x \leq b \end{cases}$$

قضیه وجود و یکتائی جواب :

فرض کنید توابع $P(x)$ و $Q(x)$ و $r(x)$ در فاصله $[a, b]$ پیوسته بوده و نیز $x_0 \in [a, b]$ باشد. آنگاه به ازای هر دو عدد دلخواه y_0 و y_1 فقط یک تابع مانند $y(x)$ موجود است که در معادله $y'' + P(x)y' + Q(x)y = r(x)$ صدق کند و :

$$y(x_0) = y_0$$
$$y'(x_0) = y_1$$

روشهای حلّ :

الف - دانستن یک جواب (کاهش مرتبه) :

* فرض کنید y_1 یک جواب معادله $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ است. برای پیدا کردن جواب دوّم مستقل خطی به شکل زیر عمل می کنیم :

$$\frac{y_2}{y_1} = V \quad (V \text{ تابعی از } x)$$

$$\Rightarrow \quad y_2 = V y_1 \quad \Leftarrow (y_2 \text{ باید در معادله صدق کند})$$

$$y_2' = V' y_1 + y_1' V$$
$$y_2'' = V'' y_1 + V' y_1' + y_1'' V + V' y_1' \Rightarrow$$
$$'' = V'' y_1 + 2V' y_1' + y_1'' V$$

$$V'' y_1 + 2V' y_1' + y_1'' V + P(x)(V' y_1 + y_1' V) + Q(x) y = 0$$

$$\Rightarrow V\underbrace{(y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1)}_{0} + 2V'y_1' + P(x)y_1V' + V''y_1 = 0$$

$$\Rightarrow V''y_1 + 2V'y_1' + P(x)y_1V' = 0$$

$$\Rightarrow V''y_1 = -2V'y_1' - P(x)y_1V'$$

$\Rightarrow$ ($V'y_1$ ÷ طرفین) $\dfrac{V''}{V'} = -2\dfrac{y_1'}{y_1} - P(x)$

$\Rightarrow$ (انتگرال می گیریم) $\int \dfrac{V''}{V'} = -2\int \dfrac{y_1'}{y_1} - \int P(x)\,dx$

$$\Rightarrow \ln V' = -2\ln y_1 - \int P(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \ln V' = -2\ln y_1 - \int P(x)\,dx$$

$$\Rightarrow V' = e^{-2\ln y_1 - \int P(x)\,dx}$$

$$\Rightarrow V' = e^{-2\ln y_1}\, e^{-\int P(x)\,dx}$$

$$\Rightarrow V' = \frac{1}{y_1^2}\, e^{-\int P(x)\,dx}$$

$\Rightarrow V = \int \dfrac{1}{y_1^2}\, e^{-\int P(x)\,dx}\,dx$ (فرمول مستند)

مثال - $x^2y'' + xy' - y = 0$

$(y_1 = x)$ $y_1' = 1$ $y_1'' = 0$ $\Rightarrow 0 + x - x = 0$

* $y_2 = v\, y_1$ و $v = \int \frac{1}{x^2}\, e^{-\int \frac{1}{x} dx}\, dx$

$\Rightarrow \quad v = \int \frac{1}{x^2} \cdot e^{-\ln x}\, dx = \int \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{x}\, dx$

$= \int x^{-3}\, dx \quad \Rightarrow \quad v = -\frac{1}{2x^2}$

$\Rightarrow \quad y_2 = -\frac{1}{2x^2} \cdot x = -\frac{1}{2x}$

(جواب عمومی) : $y = c_1 x - c_2 \frac{1}{2x}$

ب- روش ضرایب ثابت : $y'' + Py' + Qy = 0$
$(P, q = cte)$

* معلوم شده که جوابهای مستقل خطی چنین معادله‌ای به شکل $y = e^{mx}$ می باشد.

$$\begin{cases} y = e^{mx} \\ y' = m e^{mx} \\ y'' = m^2 e^{mx} \end{cases} \Rightarrow$$

$m^2 e^{mx} + P m e^{mx} + q e^{mx} = 0$

$e^{mx} (m^2 + Pm + q) = 0$

$e^{mx} \neq 0 \Rightarrow m^2 + pm + q = 0$ (معادله شاخص)

۱- اگر معادله فوق دو ریشه حقیقی متمایز داشته باشد :

$$m_1 \neq m_2 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = e^{m_1 x} \\ y_2 = e^{m_2 x} \end{cases}$$

$$\frac{y_1}{y_2} = e^{(m_1 - m_2)x} \Rightarrow$$ (y_1 و y_2 مستقل خطی هستند)

$$\Rightarrow \quad * \; y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}$$

۲- ریشه مضاعف داشته باشیم : $m_1 = m_2$

$$y_1 = e^{-\frac{p}{2}x} \qquad y_2 = v y_1$$

$$v = \int \frac{1}{(e^{-\frac{p}{2}x})^2} e^{-\int p\,dx} dx = \int \frac{1}{e^{-px}} e^{-px} dx = x$$

$$\Rightarrow y_2 = x e^{-\frac{p}{2}x} \Rightarrow$$

$$* \; y = c_1 e^{-\frac{p}{2}x} + c_2 x e^{-\frac{p}{2}x}$$

۳- ریشه مختلط داریم :

$$m_1 = a + bi$$
$$m_2 = a - bi$$

$$y_1 = e^{(a+bi)x} = e^{ax} e^{bxi} = e^{ax}(\cos bx + i\sin bx)$$

و $y_2 = e^{(a-bi)x} = e^{ax} e^{-bxi} = e^{ax}(\cos bx - i\sin bx)$

** $e^{\theta i} = \cos\theta + i\sin\theta$ (Demoar قانون) **

$$\begin{cases} Y_1 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) = e^{ax}\cos bx \\ Y_2 = \frac{1}{2i}(y_1 - y_2) = e^{ax}\sin bx \end{cases}$$

* Y_1 و Y_2 جوابند چون ترکیب خطی از y_1 و y_2 هستند.
(درضمن به این وسیله به جواب حقیقی و غیر مختلط دست می یابیم)

* $y = c_1 e^{ax}\cos bx + c_2 e^{ax}\sin bx$

مثال - ابتدا معادلهٔ شاخص را تشکیل می دهیم. $y'' + 2y' + y = 0$

$m^2 + 2m + 1 = 0 \Rightarrow (m+1)^2 = 0 \Rightarrow m = -1$

* یعنی معادله شاخص ریشهٔ مضاعف دارد.

$$\begin{cases} y_1 = e^{mx} = e^{-x} \\ y_2 = xe^{-x} \end{cases} \Longrightarrow y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$$

بسط مطالب فوق به درجهٔ (n) :

تعریف - فرم کلی یک معادله دیفرانسیل مرتبهٔ n همگن خطی با ضرایب ثابت به صورت زیر است :

$$* \quad a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

* برای حل معادله دیفرانسیل فوق معادلهٔ شاخص را تشکیل می‌دهیم :

$$* \quad a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

* برای یک معادلهٔ مرتبهٔ n باید n جواب مستقل خطی بدست آوریم .

الف - (معادلهٔ شاخص n ریشهٔ حقیقی و متمایز دارد) :

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \dots \neq \lambda_n$$

* که در اینصورت جواب عمومی بصورت زیر است :

$$* \quad y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x}$$

ب - (یک یا چند ریشهٔ مکرر با مرتبهٔ تکرار S داشته باشیم) :

* یعنی مثلاً عبارت ما دارای پرانتزی بشکل زیر باشد :

$$* \quad (x - \lambda_1)^S \left[(x - \dots)(x - \dots) \dots \right] = 0$$

که تک تک پرانتزها را مساوی صفر قرار می دهیم :

$y_1 = e^{\lambda x}$ و $y_2 = x e^{\lambda x}$ و $y_3 = x^2 e^{\lambda x}$ و .... و
$y_s = x^{s-1} e^{\lambda x}$

یعنی s تا جواب بدست آوردیم .

$y_{s+1} = e^{\lambda_{(s+1)} x}$ و $y_{s+2} = e^{\lambda_{(s+2)} x}$ و ....

$y_n = e^{\lambda_n x}$

$\Rightarrow$ جواب عمومی : * $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$

مثال - فرض کنید معادلهٔ شاخص مقابل را داریم : $\lambda(\lambda-1)^3 = 0$

$\Rightarrow \quad \lambda^4 - \lambda - 3\lambda^3 + 3\lambda^2 = 0$

معادلهٔ مرتب شده $\lambda^4 - 3\lambda^3 + 3\lambda^2 - \lambda = 0$

** $y^{(4)} - 3y^{(3)} + 3y'' - y' = 0$

در بالا به جای λ ، y قرار داده و توانها را به‌عنوان مرتبه در نظر گرفتیم .
یعنی در حقیقت مسئله را ساختیم !!!!

حال با در نظر گرفتن معادلهٔ شاخص آن را حل می کنیم :

$\lambda = 0$

$(\lambda - 1)^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad S = 3 \quad \lambda = 1$

$y_1 = e^x \quad y_2 = xe^x \quad y_3 = x^2 e^x \quad y_4 = e^{0 \times x} = 1$

که ۴ جواب بدست آمد.

$\Rightarrow \quad * \; y = c_1 + c_2 e^x + c_3 x e^x + c_4 x^2 e^x$

ج - (یک ریشهٔ مختلط داشته باشیم) : $a \pm bi$

* می دانیم که ریشهٔ مختلط مزدوج است یعنی یکی $a + bi$ و دیگری $a - bi$ است.

$$\begin{cases} y_1 = e^{ax} \cos bx \\ y_2 = e^{ax} \sin bx \\ y_3 = e^{\lambda_3 x} \\ y_4 = e^{\lambda_4 x} \\ y_n = e^{\lambda_n x} \end{cases} \Rightarrow \quad y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$$

د - (ریشهٔ مختلط مکرر از مرتبهٔ تکرار S داشته باشیم) :

* در این حالت $2S$ جواب می توانیم بدست آوریم، زیرا ریشهٔ مختلط مزدوج است.

$y_1 = e^{ax} \cos bx \quad y_2 = x e^{ax} \cos bx$ و ...... و

$$y_s = x^{s-1} e^{ax} \cos bx$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_{s+1} = e^{ax} \sin bx \\ y_{s+2} = x e^{ax} \sin bx \\ \vdots \\ y_{2s} = x^{s-1} e^{ax} \sin bx \\ y_{(2s+1)} = e^{\lambda_{2s+1} x} \\ \vdots \\ y_n = e^{\lambda_n x} \end{cases} \Rightarrow$$

$$* \; y = c_1 y_1 + \cdots\cdots + c_n y_n$$

مثال - $(\lambda - i)^2 (\lambda + i)^2 (\lambda - 1)^3 \lambda = 0$

* معادلهٔ شاخص فوق را داریم. ابتدا آنرا مرتب می کنیم.
(باید توجه داشت $i^2 = -1$)

$$\lambda (\lambda - 1)^3 (\lambda^2 + 1)^2 = 0$$
$$\lambda (\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1)(\lambda^4 + 1 + 2\lambda^2) = 0$$
$$(\lambda^3 - 3\lambda^3 + 3\lambda^2 - \lambda)(\lambda^4 + 1 + 2\lambda^2) = 0$$
$$\lambda^8 - 3\lambda^7 + 5\lambda^6 - 7\lambda^5 + 7\lambda^4 - 5\lambda^3 + 3\lambda^2 - \lambda = 0$$

* ریشه‌های این معادله شاخص را باید بدست آوریم.

$$\Rightarrow \quad y^{(8)} - 3y^{(7)} + 5y^{(6)} - 7y^{(5)} + 7y^{(4)} - 5y^{(3)} + 3y'' - y' = 0$$

$\lambda = 0$

$\lambda = 1$ و $S_1 = 3$

$\lambda = \pm i$ و $S_2 = 2$

$y_1 = e^{0 \times x} = 1$

$y_2 = e^{x}$ و $y_3 = xe^{x}$ و $y_4 = x^2 e^{x}$

$y_5 = \cos x$ و $y_6 = x\cos x$ و $y_7 = \sin x$

$y_8 = x\sin x$

$$\Rightarrow \quad y = C_1 + C_2 e^{x} + C_3 x e^{x} + C_4 x^2 e^{x} + C_5 \cos x + C_6 x \cos x + C_7 \sin x + C_8 x \sin x$$

جواب خصوصی معادله دیفرانسیل غیر همگن خطی مرتبهٔ دوم :

روش اوّل - روش تغییر پارامتر :

فرض کنید y_1 و y_2 دو جواب مستقل خطی معادله دیفرانسیل - $y'' + P(x)\,y' + Q(x)\,y = 0$ باشد آنگاه با دانستن y_1 و y_2 می توان یک جواب خصوصی برای معادله غیرهمگن $y'' + P(x)\,y' + Q(x)\,y = R(x)$ بدست آورد. (روش لاگرانژ)

$* \quad y_p = V_1 y_1 + V_2 y_2$ که V_1 و V_2 توابعی از x هستند.

$y'_p = v'_1 y_1 + v_1 y'_1 + v'_2 y_2 + v_2 y'_2$

(شرط) اوّل : $v'_1 y_1 + v'_2 y_2 = 0$

$\Rightarrow \quad y'_p = y'_1 v_1 + y'_2 v_2$

$y''_p = y''_1 v_1 + y'_1 v'_1 + y''_2 v_2 + y'_2 v'_2$

(داخل معادله قرار می دهیم) $\Rightarrow$

$$y'' + P(x) y' + Q(x) y = R(x)$$

$y''_1 v_1 + y'_1 v'_1 + y''_2 v_2 + y'_2 v'_2 + P(x)(y'_1 v_1 + y'_2 v_2) +$

$Q(x)(y_1 v_1 + y_2 v_2) = R(x)$

$\Rightarrow v_1 \underbrace{(y''_1 + P(x) y'_1 + Q(x) y_1)}_{\text{صفر}} + v_2 \underbrace{(y''_2 + P(x) y'_2 + Q(x) y_2)}_{\text{صفر}} \Leftarrow$

$+ y'_1 v'_1 + y'_2 v'_2 = R(x) \quad \Rightarrow$

(شرط) دوّم : $v'_1 y'_1 + v'_2 y'_2 = R(x)$

$$* \begin{cases} v'_1 y_1 + v'_2 y_2 = 0 \\ v'_1 y'_1 + v'_2 y'_2 = R(x) \end{cases} \Rightarrow$$

$$v'_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ R(x) & y'_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix}} = \frac{-y_2 R(x)}{W(y_1, y_2)} \Rightarrow$$

$$* \quad V_1 = \int \frac{-y_2 R(x)}{W(y_1, y_2)} \quad *$$

$$V_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & R(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = \frac{y_1 R(x)}{W(y_1, y_2)} \Rightarrow$$

$$* \quad V_2 = \int \frac{y_1 R(x)}{W(y_1, y_2)} \quad *$$

مثال - جواب عمومی معادله غیر همگن زیر را بدست آورید :

$$* \quad y'' + y = \frac{1}{\cos x}$$

$$y'' + y = 0 \Rightarrow m^2 + 1 = 0 \Rightarrow m = \pm i$$

$$\Rightarrow \quad * \quad y_1 = \cos x, \quad y_2 = \sin x$$

$$\Rightarrow \quad y_p = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

(اما) $y_p = V_1 y_1 + V_2 y_2 \Rightarrow$

$$V_1 = \int \frac{-\sin x \cdot \frac{1}{\cos x}}{W(y_1, y_2)} \, dx = \int \frac{-\sin x}{\cos x} \, dx = \ln \cos x$$

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1$$

$$v_2 = \int \frac{\cos x \cdot \frac{1}{\cos x}}{1} dx = x$$

$$\Rightarrow \quad y_p = v_1 y_1 + v_2 y_2 = (\ln \cos x)\cos x + x \sin x$$

* لذا ج عمومی بصورت ذیل می باشد :

$$* \; y = y_g + y_p = c_1 \cos x + c_2 \sin x + (\ln \cos x)\cos x + x \sin x$$

معادلهٔ کُشی اویلر :

تعریف ـ معادله کشی اویلر بصورت زیر معرفی می شود :

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 x y' + a_0 y = f(x)$$

* در حالت $n=2$ معادله فوق بصورت زیر تبدیل می شود :

$$x^2 y'' + a x y' + b y = f(x)$$

* در حالتی که $f(x) = 0$ است معادله کشی اویلر همگن است .

روش حل معادله کشی اویلر همگن مرتبهٔ دوّم :

$$x^2 y'' + a x y' + b y = 0$$

فرض کنید x^m یک جواب معادله فوق باشد :

* $y' = m x^{m-1}$

$y'' = m(m-1)\, x^{m-2}$

(در معادله قرار می‌دهیم) $\Rightarrow$

$m(m-1)\, x^{m} + a m x^{m} + b x^{m} = 0$

$x \neq 0$ بافرض $\Rightarrow$ $m(m-1) + am + b = 0$

«معادلهٔ شاخص»

(یا)

* $m^2 + m(a-1) + b = 0$ *

الف - دو ریشه حقیقی m_1 و m_2 داریم :

* $y_1 = x^{m_1}$ $\qquad y_2 = x^{m_2}$

ب - یک ریشه مضاعف m داریم :

* $y_1 = x^{m}$ $\qquad y_2 = V\, y_1$

$V = \int \frac{1}{x^{2m}}\, e^{-\int \frac{a}{x} dx}\, dx = \int \frac{e^{-a \ln x}}{x^{2m}}\, dx$

$= \int x^{-2m} \cdot x^{-a}\, dx = \int x^{-2m-a}\, dx \Rightarrow$

* $V = \frac{1}{1-2m-a}\, x^{1-2m-a}$

$$\Rightarrow \quad * \; y_2 = x^{m} \cdot \frac{1}{1-2m-a}\, x^{1-2m-a} = \frac{1}{1-2m-a}\, x^{1-m-a}$$

محاسبات صحیح :

$$m_1 = m_2 = -\frac{a-1}{2}$$

$x^{-\frac{a-1}{2}}$ ریشه $\Rightarrow$

$$V = \int \frac{1}{\left(x^{-\frac{a-1}{2}}\right)^2} e^{-\int \frac{a}{x}dx}\, dx \quad \Rightarrow$$

$$V = \int \frac{1}{x^{-(a-1)}} e^{-a\ln x}\, dx = \int \frac{1}{x^{-a+1}} \cdot \frac{1}{x^{a}}\, dx$$

$$V = \int \frac{1}{x}\, dx = \ln x$$

$$\Rightarrow \qquad * \; y_2 = x^{-\frac{a-1}{2}} \ln x \; *$$

ج - (اگر معادله شاخص دارای ریشه مختلط باشد) :

$\alpha \pm i\beta$ ریشه مختلط

$$y_1 = x^{\alpha+i\beta} = x^{\alpha} \cdot x^{i\beta} = x^{\alpha} e^{i\beta\ln x} = x^{\alpha}\left(\cos(\beta\ln x) + i\sin(\beta\ln x)\right)$$

$$y_2 = x^{\alpha-i\beta} = x^{\alpha} \cdot x^{-i\beta} = x^{\alpha} \cdot e^{-i\beta\ln x} = x^{\alpha}\left(\cos(\beta\ln x) - i\sin(\beta\ln x)\right)$$

$$\Rightarrow \qquad * \; Y_1 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) = x^{\alpha}\cos(\beta\ln x)$$

$$* \; Y_2 = \frac{1}{2i}(y_1 - y_2) = x^{\alpha}\sin(\beta\ln x)$$

PPM

شرکت مهندسی پتروپالامحور

پتروپالامحور پیشتاز در ارائه خدمات مهندسی و متعهد به کیفیت

PPM , Dedicated For The Best Quality

راه حل دوم برای حل معادلهٔ کشی اویلر :

$$* \quad x^2y'' + axy' + by = 0$$

(تغییر متغیر) : $x = e^u \iff u = \ln x$

* با تغییر متغیر فوق معادله کشی اویلر به یک معادله با ضرایب ثابت تبدیل می شود .

$$1) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{du}$$

$$2) \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{du} + \frac{1}{x}\frac{d\left(\frac{dy}{du}\right)}{dx}$$

$$= -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{du} + \frac{1}{x}\frac{d^2y}{du^2}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2}\left(-\frac{dy}{du} + \frac{d^2y}{du^2}\right)$$

* در معادله قرار می دهیم :

$$x^2\frac{1}{x^2}\left(-\frac{dy}{du} + \frac{d^2y}{du^2}\right) + ax \cdot \frac{1}{x}\frac{dy}{du} + by = 0$$

$$\underbrace{\frac{d^2y}{du^2} + (a-1)\frac{dy}{du} + by = 0}$$

«یک معادله خطی مرتبه دوم با ضرایب ثابت»

مثال - $x^2y'' + 2xy' - 6y = 0$

راه حل اوّل -

$$m^2 + (2-1)m - 6 = 0$$

$$m^2 + m - 6 = 0 \Rightarrow m = -3, \quad m = 2$$

$$\Rightarrow \quad y_1 = x^{-3}, \quad y_2 = x^2 \quad \Rightarrow$$

$$* \; y = c_1 x^{-3} + c_2 x^2$$

راه حل دوّم -

$$u = \ln x \iff x = e^u$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2y}{du^2} + (a-1)\frac{dy}{du} + by = 0$$

$$\Rightarrow \quad m^2 + (2-1)m - 6 = 0 \Rightarrow m = -3, \quad m = 2$$

$$\Rightarrow \quad y_1 = e^{-3u} = x^{-3}, \quad y_2 = e^{2u} = e^{2\ln x} = x^2$$

$$\Rightarrow \; * \; y = c_1 x^{-3} + c_2 x^2$$

تذکّر - اگر معادلهٔ اویلر غیر همگن به فرم زیر باشد :

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 x y' + a_0 y = x^{\alpha} P_m(\ln x)$$

۳ـ نکته: برای پیدا کردن یک جواب خصوصی برای معادلهٔ فوق جوابی به صورت $y_p = x^{\alpha} \tilde{P}_m(\ln x)$ در نظر می‌گیریم و در معادله دیفرانسیل قرار داده و ضرایب چند جمله‌ای $\tilde{P}_m(\ln x)$ را بدست می‌آوریم.

مثال ـ $x^2 y'' + (-x y') + 2y = x \ln x$

$$x^2 y'' - x y' + 2y = 0$$

$$m^2 + (-1-1)m + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad m^2 - 2m + 2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad m = \frac{+1 \pm \sqrt{1-2}}{1} = 1 \pm i$$

$$\Rightarrow \quad y_1 = x \cos(\ln x)$$
$$y_2 = x \sin(\ln x)$$

$$* \; y_g = C_1 x \cos(\ln x) + C_2 x \sin(\ln x)$$

$$y_p = x(A_1 \ln x + A_0) \leftarrow$$ جواب خصوصی

$$y'_p = A_1 \ln x + A_0 + A_1$$

$$y''_p = \frac{A_1}{x}$$

* در معادله قرار می‌دهیم :

$$x^2 \cdot \frac{A_1}{x} - x(A_1 \ln x + A_1 + A_0) + 2x(A_1 \ln x + A_0) = x \ln x$$

$$A_1 - A_1 \ln x - A_1 - A_0 + 2A_1 \ln x + 2A_0 = \ln x$$

$$A_1 \ln x + A_0 = \ln x$$ (متحد قرار می دهیم) $\Rightarrow$

$$A_1 = 1 \quad , \quad A_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_p = x \ln x$$

$$\Rightarrow * \; y = y_g + y_p = xC_1 \cos(\ln x) + xC_2 \sin(\ln x) + x \ln x$$

* برای یافتن جواب عمومی معادله دیفرانسیل باید نخست جواب عمومی همگن و سپس یک جواب خصوصی ناهمگن را یافته و باهم جمع کنید.

فرم کلی تر معادله دیفرانسیل اویلر :

$$a_n (ax+b)^n y^{(n)} + \cdots\cdots + a_1 (ax+b) y' + a_0 y = 0$$

راه حل اوّل - جواب را به صورت $y = (ax+b)^m$ در نظر گرفته و در داخل معادله قرار می دهیم و مطابق قبل عمل می کنیم تا m بدست آید.

راه حل دوّم - با تغییر متغیر $u = \ln(ax+b) \Leftrightarrow ax+b = e^u$ معادله دیفرانسیل به یک معادله همگن مرتبه - دوّم خطی تبدیل می شود.

پیدا کردن جواب خصوصی برای معادله دیفرانسیل خطی مرتبهٔ n با ضرایب ثابت در برخی از حالات :

* فرض کنید :

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

۱- $f(x) = P_m(x)$

الف- ۰ ریشه معادله شاخص نباشد، که در این صورت جواب خصوصی را به صورت $y_p = \tilde{P}_m(x)$ در نظر گرفته و در معادله قرار می دهیم و با متحد قرار دادن طرفین معادله ضرایب چند جمله‌ای $\tilde{P}_m(x)$ را می یابیم.

ب- ۰ ریشه معادله شاخص از مرتبهٔ تکرار s باشد که در این صورت جواب خصوصی را به فرم $y_p = x^s \tilde{P}_m(x)$ در نظر گرفته و مانند قسمت (الف) عمل می کنیم.

مثال-

$$y'' - 2y' + y = x^2 + 2x$$

(y'')

$$m^2 - 2m + 1 = 0$$

$$(m-1)^2 = 0 \Rightarrow m = 1$$

* $y_p = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ *

$$y'_p = 2a_2 x + a_1$$
$$y''_p = 2a_2$$

* در معادله قرار می دهیم :

$$2a_2 - 4a_2 x - 2a_1 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = x^2 + 2x$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} a_2 = 1 \\ -4a_2 + a_1 = 2 \\ 2a_2 - 2a_1 + a_0 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} a_2 = 1 \\ a_1 = 6 \\ a_0 = 10 \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad y_p = x^2 + 6x + 10$$

مثال - $y''' - y'' = 2x + 1$

$$\lambda^3 - \lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2(\lambda - 1) = 0 \Rightarrow$$

$$* \begin{cases} \lambda = 0 & s = 2 \\ \lambda = 1 \end{cases}$$

$$* \; y_p = x^2(a_1 x + a_0) = a_1 x^3 + a_0 x^2$$
$$y'_p = 3a_1 x^2 + 2a_0 x$$
$$y''_p = 6a_1 x + 2a_0$$
$$y'''_p = 6a_1$$

$$6a_1 - 6a_1 x - 2a_0 = 2x + 1 \quad \Rightarrow \quad a_1 = -\frac{1}{3}, \quad a_0 = -\frac{3}{2}$$

$$* \quad y_p = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2$$

۳ - $f(x) = e^{\alpha x} P_m(x)$

الف - α ریشه معادله شاخص نباشد ، در این صورت جواب خصوصی را به فرم $y_p = e^{\alpha x}\tilde{P}_m(x)$ در نظر گرفته و در معادله قرار می دهیم و با متحد قرار دادن طرفین - ضرایب چند جمله ای $\tilde{P}_m(x)$ را می یابیم .

ب - α ریشه معادله شاخص باشد ، که در اینصورت :
(از مرتبه تکرار S)

جواب خصوصی را به صورت : $y_p = x^S e^{\alpha x}\tilde{P}_m(x)$
در نظر گرفته و به فرم قبل عمل می کنیم .

مثال - $y'' - 2y' + y = 4e^x$

($P_0(x) = 4$ و $\alpha = 1$)

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda - 1)^2 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\lambda = 1 \qquad S = 2$$

* $y_p = x^2 . A . e^x$

$y'_p = 2Axe^x + Ax^2e^x$

$y''_p = 2Ae^x + 2Axe^x + 2Axe^x + Ax^2e^x$

* در معادله قرار می دهیم :

$$2Ae^x + 4e^xAx + Ax^2e^x - 4Axe^x - 2Ax^2e^x + Ax^2e^x = 4e^x$$

$\Rightarrow \quad A = 2$

$\Rightarrow \quad$ * $y_p = 2x^2e^x$

مثال - $\quad y''' - y'' = xe^{2x}$

$\lambda^3 - \lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2(\lambda - 1) = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \quad S = 0$

$\lambda = 1$

* حالت (ب)

* $y_p = (a_1x + a_0)e^{2x}$

$y'_p = a_1e^{2x} + 2(a_1x + a_0)e^{2x}$

$y''_p = 4a_1e^{2x} + 2a_1e^{2x} + 4(a_1x + a_0)e^{2x}$

$y'''_p = 8a_1e^{2x} + 4a_1e^{2x} + 8(a_1x + a_0)e^{2x}$

(در معادله قرار می دهیم) $\Rightarrow \quad a_1 = \frac{1}{4}$ و $a_0 = -\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \quad y_p = \left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{3}\right) e^{3x}$$

۳- $f(x) = P_m(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x$

الف- اگر $\pm i\beta$ ریشه معادلهٔ شاخص نباشد. در این صورت جواب خصوصی را به فرم $y_p = \tilde{P}_k(x)\cos\beta x + \tilde{Q}_k(x)\sin\beta x$ در نظر می‌گیریم که در آن $k = \max(m, n)$ می‌باشد. این جواب را در معادله قرار داده و ضرایب $\tilde{P}_k(x)$ و $\tilde{Q}_k(x)$ را می‌یابیم.

ب- اگر $\pm i\beta$ ریشه معادله شاخص از مرتبه تکرار s باشد. آنگاه جواب خصوصی را به فرم $y_p = x^s\left(\tilde{P}_k(x)\cos\beta x + \tilde{Q}_k(x)\sin\beta x\right)$ در نظر گرفته و مطابق قسمت (الف) عمل می‌کنیم.

۴- $f(x) = e^{\alpha x}\left[P_m(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x\right]$

* این حالت کامل بوده و شامل ۳ بخش قبلی نیز می‌شود.

الف- اگر $\alpha \pm i\beta$ ریشه معادله شاخص نباشد. در اینصورت جواب خصوصی را به فرم ذیل در نظر می‌گیریم:

$$y_p = e^{\alpha x}\left[\tilde{P}_k(x)\cos\beta x + \tilde{Q}_k(x)\sin\beta x\right]$$

$$k = \max(m, n)$$

سپس با قرار دادن آن در معادله ضرایب $\tilde{P}_k(x)$ و $\tilde{Q}_k(x)$

را بدست می آوریم .

ب - $\alpha \pm i\beta$ ریشه معادله شاخص از مرتبهٔ تکرار S باشد که
در این صورت جواب خصوصی را به فرم :

$$y_p = x^s e^{\alpha x}\left[\tilde{P}_k(x)\cos\beta x + \tilde{Q}_k(x)\sin\beta x\right]$$

$$k = \operatorname{Max}(m, n)$$

در نظر گرفته و به فرم (الف) عمل می کنیم .

مثال - $y'' - 2y' = x\cos x + \sin x$

$(\tilde{P}_1(x) \quad \beta = 1)$ $\qquad$ $(\tilde{Q}_0(x) \quad \beta = 1)$

$m^2 - 2m = 0$ $\qquad$ $(\pm i\beta = \pm i \Leftarrow \beta = 1)$

$m = 0 \qquad m = 2$

$$* \quad y_p = (A_1x + A_0)\cos x + (B_1 + B_0)\sin x$$

$$y'_p = A_1\cos x - (A_1x + A_0)\sin x + B_1\sin x + (B_1x + B_0)\cos x$$

$$y''_p = -A_1\sin x - A_1\sin x - (A_1 + A_0)\cos x + B_1\cos x + B_1\cos x - (B_1x + B_0)\sin x$$

(در معادله قرار می دهیم) $\Longrightarrow$ $\quad B_1 = -\frac{2}{5} \qquad B_0 = -\frac{3}{25}$

$$A_1 = -\frac{1}{5} \qquad A_0 = -\frac{4}{25}$$

$$\Rightarrow \quad y_p = \left(-\frac{1}{5}x - \frac{4}{25}\right)\cos x + \left(-\frac{2}{5}x - \frac{3}{25}\right)\sin x$$

مثال - $y'' + y = \cos x + \sin x$

$$\cos x \to P_0(x) \qquad \sin x \to Q_0(x) \qquad \beta = 1$$

$$m^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad m = \pm i \qquad s = 1$$

$$y_p = x\left[A\cos x + B\sin x\right]$$
$$y'_p = x(-A\sin x + B\cos x) + (A\cos x + B\sin x)$$
$$y''_p = x(-A\cos x - B\sin x) + (-A\sin x + B\cos x) + (-A\sin x + B\cos x)$$

(در معادله قرار می‌دهیم) $\Rightarrow \quad A = -\frac{1}{2} \qquad B = \frac{1}{2}$

$$* \quad y_p = \left(-\frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x\right)x$$

نکته - هرگاه معادله دیفرانسیل به فرم :

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = R_1(x) + R_2(x) + \cdots + R_N(x)$$

۲- نگاه برای یافتن جواب خصوصی معادله دیفرانسیل فوق یک جواب خصوصی معادلات دیفرانسیل زیر را یافته با هم جمع می کنیم :

$$a_n y^{(n)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = R_1(x)$$
$$\text{〃} \qquad \text{〃} \qquad = R_2(x)$$
$$\text{〃} \qquad \text{〃} \qquad \vdots$$
$$\text{〃} \qquad \text{〃} \qquad = R_N(x)$$

مثال - $\quad y'' - 2y' = \cos x + e^x + x$

① $\quad y'' - 2y' = \cos x \qquad m^2 - 2m = 0$

$m = 0 \quad , \quad m = 2$

$$y_{p_1} = A\cos x + B\sin x$$
$$y_{p_1}' = -A\sin x + B\cos x$$
$$y_{p_1}'' = -A\cos x - B\sin x$$

(در معادله قرار می دهیم) $\Rightarrow \quad B = -\frac{2}{5} \qquad A = -\frac{1}{5}$

$$* \; y_{p_1} = -\frac{1}{5}\cos x - \frac{2}{5}\sin x$$

② $\quad y'' - 2y' = e^x \qquad m = 0 \qquad m = 2$

ریشه معادله شاخص $\alpha = 1$ نیست .

$y_{p_2} = Ae^{x}$
$y'_{p_2} = Ae^{x}$
$y''_{p_2} = Ae^{x}$

(در معادله قرار می‌دهیم) $\Rightarrow \quad A = -1$

$* \; y_{p_2} = e^{x}$

③ $\quad y'' - 2y' = x \qquad m = 0 \quad$ و $\quad m = 2$

$y_{p_3} = x(A_1 x + A_0) = A_1 x^2 + A_0 x$
$y'_{p_3} = 2A_1 x + A_0$
$y''_{p_3} = 2A_1$

(در معادله قرار می‌دهیم) $\Rightarrow \quad A_1 = -\frac{1}{4} \qquad A_0 = -\frac{1}{4}$

$* \; y_{p_3} = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x$

$\Longrightarrow \; * \; y_p = -\frac{1}{5}\cos x - \frac{2}{5}\sin x - e^{x} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x \; *$

تبدیلات لاپلاس :

تعریف - تبدیل، یک تابع است که برد و دامنهٔ آن توابع می‌باشد.
مثل اپراتور (عملگر) مشتق : $\quad Df(x) = f'(x)$

تعریف- تبدیل T را خطی گوییم هرگاه به ازای دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ و اعداد ثابت α و β داشته باشیم :

$$T[\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha T[f(x)] + \beta T[g(x)]$$

مثال- تبدیل مشتق یک تبدیل خطی است :

$$D[\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$$

تعریف - تبدیل لاپلاس یک تابع مانند $f(x)$ به $L[f(x)]$ نشان داده می شود و بصورت زیر تعریف می گردد :

$$L[f(x)] = \int_0^{+\infty} e^{-sx} f(x)\, dx = F(s)$$

قضیه - تبدیل لاپلاس یک تبدیل خطی است.

قضیه وجود تبدیل لاپلاس -

فرض کنید تابع $f(x)$ قطعه قطعه پیوسته باشد و نیز اعداد α و M موجود باشد بطوری که $|f(x)| < M e^{\alpha x}$ ($f(x)$ از رتبهٔ نمائی می باشد) آنگاه تابع لاپلاس $f(x)$ موجود است.
(این قضیه فقط شرط لازم است و معکوس آن همیشه صادق نیست).

مثال ۱ـ $f(x) = 1$ $\quad L[1] = ?$

$$L[1] = \int_0^{+\infty} e^{-sx} . 1\, dx = \left(-\frac{1}{s} e^{-sx}\right)_0^{+\infty} = \frac{1}{s}$$

(اگر $s>0$) $\quad$ * تبدیل لاپلاس 1 فقط به ازای $s>0$ موجود است.

مثال ۲ـ $f(x) = x$

$$L[x] = \int_0^{+\infty} e^{-sx} . x\, dx$$

$$\begin{cases} e^{-sx} dx = dv \Rightarrow V = -\frac{1}{s} e^{-sx} \\ u = x \Rightarrow du = dx \end{cases}$$

$$\Rightarrow L[x] = \left(-\frac{1}{s} x e^{-sx}\right)_0^{+\infty} + \frac{1}{s}\int_0^{+\infty} e^{-sx} dx$$

$$\Rightarrow * \; L[x] = \frac{1}{s}\left(-\frac{1}{s} e^{-sx}\right)_0^{+\infty} = \frac{1}{s^2}$$

مثال ۳ـ $f(x) = x^n$

$$L[x^n] = \int_0^{+\infty} e^{-sx} . x^n\, dx$$

$$\begin{cases} e^{-sx}\,dx = dV \Rightarrow -\frac{1}{s}e^{-sx} = V \\ u = x^n \Rightarrow du = nx^{n-1}\,dx \end{cases}$$

$$\Rightarrow L[x^n] = \underbrace{\left(-\frac{x^n}{s}e^{-sx}\right)_0^{+\infty}}_{0} + \frac{n}{s}\underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-sx}x^{n-1}\,dx}_{L[x^{n-1}]}$$

$$\Rightarrow L[x^n] = \frac{n}{s}L[x^{n-1}]$$

$$\Rightarrow L[x^n] = \frac{n}{s}\cdot\frac{n-1}{s}L[x^{n-2}]$$

$$\Rightarrow L[x^n] = \frac{n}{s}\cdot\frac{n-1}{s}\cdot\frac{n-2}{s}\cdots\frac{1}{s}\underbrace{L[1]}_{\frac{1}{s}}$$

$$\Rightarrow * \; L[x^n] = \frac{n!}{s^{n+1}} \; *$$

مثال ۴-

$$f(x) = e^{ax}$$

$$L[e^{ax}] = \int_0^{+\infty} e^{-sx}\cdot e^{ax}\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-(s-a)x}\,dx$$

$$= \left(-\frac{1}{s-a}e^{-(s-a)x}\right)_0^{+\infty} \xrightarrow{s>a} * \; L[e^{ax}] = \frac{1}{s-a}$$

مثلاً :

$$* \; L[\operatorname{Ch} ax] = L\left[\frac{e^{ax}+e^{-ax}}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2} L[e^{ax}] + \frac{1}{2} L[e^{-ax}] =$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{1}{s-a} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{s+a} = \frac{\frac{1}{2}(s+a)+\frac{1}{2}(s-a)}{s^2-a^2}$$

$s>a \qquad s>-a$

$$= \frac{s}{s^2-a^2}$$

توجه :

$$\begin{cases} s>a \\ -s<a \end{cases} \Rightarrow -s<a<s$$

$$\Rightarrow (s>|a|)$$

** بطور مشابه می توان نشان داد :

$$* \; L[\sinh ax] = \frac{a}{s^2-a^2} \quad (s>|a|)$$

مثال ۵ـ $f(x) = \cos ax$

$$L[\cos ax] = \int_0^{+\infty} \cos ax \, e^{-sx} \, dx$$

$$* \begin{cases} e^{-sx}dx = dv \Rightarrow v = -\frac{1}{s}e^{-sx} \\ u = \cos ax \Rightarrow du = -a\sin ax \, dx \end{cases}$$

$$\Rightarrow L[\cos ax] = \left(-\frac{\cos ax}{s} e^{-sx}\right)_0^{+\infty} - \frac{a}{s}\int_0^{+\infty} \sin ax \, e^{-sx} dx$$

$$* \begin{cases} e^{-sx} dx = dv & \Rightarrow \quad v = -\frac{1}{s} e^{-sx} \\ u = \sin ax & \Rightarrow \quad du = a \cos ax \, dx \end{cases}$$

$$\Rightarrow L[\cos ax] = \frac{1}{s} - \frac{a}{s}\underbrace{\left[-\frac{\sin ax}{s} e^{-sx}\right)_0^{+\infty}}_{0}$$

$$+ \frac{a}{s}\int_0^{+\infty} e^{-sx} \cos ax \, dx =$$

$$\frac{1}{s} - \frac{a^2}{s^2} L[\cos ax] \Rightarrow$$

$$L[\cos ax]\left(1 + \frac{a^2}{s^2}\right) = \frac{1}{s} \Rightarrow$$

$$L[\cos ax] = \frac{\frac{1}{s}}{\frac{a^2+s^2}{s^2}} \Rightarrow$$

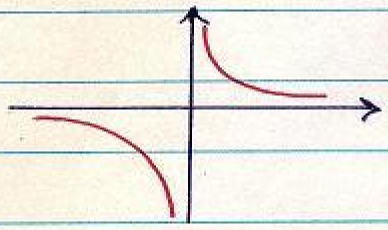
$$* \; L[\cos ax] = \frac{s}{a^2+s^2} \; *$$

$$* \; L[\sin ax] = \frac{a}{a^2+s^2} \; *$$

بطریق مشابه

مثال ۶ـ $f(x) = \frac{1}{x}$

$\frac{1}{x}$ قطعه قطعه پیوسته نیست :



(امّا لاپلاس آن موجود است)

$$L\left[\frac{1}{x}\right] = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x} e^{-sx}\, dx$$

تعریف ـ تبدیل معکوس لاپلاس را به (L^{-1}) نشان داده و به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$L[f(x)] = F(s) \iff L^{-1}[F(s)] = f(x)$$

* $L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] = 1$

* $L^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] = x$

$L^{-1}\left[\frac{1}{s^3}\right] = \frac{1}{2!} L\left[\frac{2!}{s^3}\right] = \frac{1}{2} x^2$ *

* $L^{-1}\left[\frac{s^2 - 4s + 2}{s^3}\right] = L^{-1}\left[\frac{1}{s} - \frac{4}{s^2} + \frac{2}{s^3}\right]$

$= L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - L^{-1}\left[\frac{4}{s^2}\right] + L^{-1}\left[\frac{2}{s^3}\right] = 1 - 4x + x^2$

تذکر - اگر $L[f(x)]$ موجود و برابر $f(s)$ باشد $\Rightarrow \lim\limits_{s \to \infty} F(s) = 0$

* مثلاً : $L^{-1}[s^2]$ موجود نمی باشد .

قضیه - اگر تابع $f(x)$ در شرایط قضیه وجود لاپلاس صدق کند آنگاه :

$$L[f'(x)] = s\,L[f(x)] - f(0)$$

اثبات - $\int_0^{+\infty} f'(x)\, e^{-sx}\, dx$

$$\begin{cases} f'(x)\,dx = dv & \Rightarrow \quad v = f(x) \\ e^{-sx} = u & \Rightarrow \quad du = -s\,e^{-sx}\,dx \end{cases}$$

$$= \left(f(x)\,e^{-sx}\right)_0^{+\infty} + s\underbrace{\int_0^{+\infty} f(x)\,e^{-sx}\,dx}_{L[f(x)]}$$

$$= -f(0) + s\,L[f(x)]$$

$$L[f''(x)] = L[(f'(x))'] =$$

$$s\,L[f'(x)] - f'(0) =$$

$$s\,[s\,L[f(x)] - f(0)] - f'(0) \Rightarrow$$

$$* \; L[f''(x)] = s^2\,L[f(x)] - s\,f(0) - f'(0) \; *$$

مثال ـ $g(t) = t\,e^{t}$ $\qquad g(0) = 0$

$$g'(t) = e^t + te^t = e^t + g(t)$$

$$L[g'(t)] = sL[g(t)] - g(0) \Rightarrow$$

$$L[g'(t)] = L[e^t] + L[g(t)] = sL[g(t)] - 0$$

$$\Rightarrow L[g(t)](-1+s) = \frac{1}{s-1} \Rightarrow$$

$$* \; L[g(t)] = \frac{1}{(s-1)^2} \; *$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1 \Rightarrow 2\int_0^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1$$

نکته : *

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$$

قضیه - هرگاه $f(t)$ در شرایط قضیه وجود لاپلاس صدق کند آنگاه :

$$L\left[\int_0^t f(u)\,du\right] = \frac{L[f(u)]}{s} \quad f(s)$$

* و یا بالعکس :

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s} F(s)\right] = \int_0^t f(u)\,du$$

اثبات - به فرض : $g(t) = \int_0^t f(u)\,du$

$g'(t) = 1 \times f(t) - 0 \times f(0) = f(t) \Rightarrow$

$L[g'(t)] = L[f(t)] = s\,L[g(t)] - g(0)$

$\Rightarrow F(s) = s\,L\left[\int_0^t f(u)\,du\right] \Rightarrow$

* $L\left[\int_0^t f(u)\,du\right] = \frac{F(s)}{s}$

مثال - $L^{-1}\left[\frac{2}{s(s^2+4)}\right]$

$= L^{-1}\left[\frac{\frac{2}{s^2+4}}{s}\right] = \int_0^t \sin 2x\,dx$

$= \left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)_0^t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2t$

مثال - $L^{-1}\left[\frac{2}{s^2(s^2+4)}\right] = L^{-1}\left[\frac{\frac{2}{s(s^2+4)}}{s}\right]$

$= \int_0^t \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right)dx = \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x\right)_0^t$

$= \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\sin 2t$.

صفحه ۱۴۹ _ ۱۹ _ $y'' - 2y' - 3y = 0$

$y(0) = 1 \qquad y'(0) = 7$

$$L[y''] - 2L[y'] - 3L[y] = L[0] = 0$$

* باید تمام مسئله را به صورت $L[y]$ درآوریم :

$$s^2L[y] - s\,y(0) - y'(0) - 2\left[sL[y] - y(0)\right]$$

$$-3L[y] = 0 \Rightarrow$$

$$L[y](s^2 - 2s - 3) = s + 7 - 2 = s + 5 \Rightarrow$$

* $L[y] = \dfrac{s+5}{s^2 - 2s - 3}$

* باید اینگونه کسرها را تفکیک نماییم :

$$\Rightarrow L[y] = \frac{s+5}{(s+1)(s-3)} = \left[\frac{2}{s-3} - \frac{1}{s+1}\right]$$

* از طرفین لاپلاس معکوس می گیریم :

* $y(t) = L^{-1}\left[\dfrac{2}{s-3}\right] - L^{-1}\left[\dfrac{1}{s+1}\right] = 2e^{3t} - e^{-t}$

قضیه اوّل انتقال (انتقال بر محور S) :

فرض کنید : $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ آنگاه :

$$\boxed{\mathcal{L}[e^{at} f(t)] = F(s-a)}$$ « مهم »

اثبات - $\mathcal{L}[e^{at} f(t)] = \int_0^{+\infty} e^{at} \cdot f(t) \cdot e^{-st}\, dt$

$= \int_0^{+\infty} f(t) \cdot e^{-(s-a)t} \cdot dt = F(s-a)$

قضیه دوّم انتقال (انتقال بر محور t) :

فرض کنید : $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$

آنگاه :

$$\mathcal{L}^{-1}[e^{-as} F(s)] = \tilde{f}(t)$$

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} 0 & t<a \\ f(t-a) & t>a \end{cases}$$ « مهم »

اثبات - $\mathcal{L}^{-1}[e^{-as} F(s)] = ?$

$$e^{-as}F(s) = e^{-as}\int_0^{+\infty} f(t)\cdot e^{-st}\,dt = \int_0^{+\infty} f(t)\cdot e^{-(a+t)s}\cdot dt$$

(تغییر متغیر) : $a+t=u \Rightarrow dt=du$

$$\Rightarrow \quad e^{-as}F(s) = \int_a^{+\infty} f(u-a)\,e^{-su}\,du = L[\tilde{f}(u)]$$

مثال - $L^{-1}\left[\frac{1}{s^3}e^{-3s}\right] = ?$

$e^{-as} = e^{-3s} \Rightarrow a=3$

$L^{-1}\left[\frac{1}{s^3}\right] = \frac{1}{2}t^2 = f(t) \Rightarrow$

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} 0 & t<3 \\ \frac{1}{2}(t-3)^2 & t>3 \end{cases}$$

تابع پله‌ای : $H(t)$ یا $u(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1 & t>0 \end{cases}$

(هیوساید) تابع پله‌ای $= u(t-a) = H(t-a) = \begin{cases} 0 & t-a<0 \\ 1 & t-a>0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad H(t-a) = \begin{cases} 0 & t<a \\ 1 & t>a \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad L^{-1}\left[e^{-as} F(s)\right] = H(t-a)\, f(t-a)$$

نکته- فرض می کنیم :

$$g(t) = \begin{cases} g_1(t) & 0 < t < a_1 \\ g_2(t) & a_1 < t < a_2 \\ g_3(t) & a_2 < t < a_3 \\ g_4(t) & a_3 < t \end{cases}$$

* این نوع توابع پله‌ای را می توان با استفاده از هیوسایدِ بصورت زیر نوشت :

$$g(t) = g_1(t) + \left[g_2(t) - g_1(t)\right] H(t-a_1) + \left[g_3(t) - g_2(t)\right] H(t-a_2)$$

$$+ \left[g_4(t) - g_3(t)\right] H(t-a_3)$$

* دراغلب لاپلاس گیری ها با توابع پله‌ای زیاد برخورد می کنیم ، لذا اگر بتوانیم توابع پله‌ای را به فرم دوّم درآوریم درحل مسائل بسیار مفیدخواهد بود.

مثال- $L[H(t-a)] = ?$

$$= \int_0^a 0 \cdot \cancel{e^{-st}}\, dt + \int_a^{+\infty} 1 \cdot e^{-st}\, dt = \left(-\frac{1}{s} e^{-st}\right)_a^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{s} e^{-as}$$

فرمول مستقر : $\boxed{L[H(t-a)] = \dfrac{e^{-as}}{s}}$

مثال - لاپلاس تابع زیر را بدست آورید .

$$h(t) = \begin{cases} 0 & 0<t<1 \\ -1 & 1<t<2 \\ 0 & t>2 \end{cases}$$

$$* \quad h(t) = 0 + [-1-0]\, H(t-1) + [0-(-1)]\, H(t-2)$$

$$h(t) = -H(t-1) + H(t-2)$$

$$L[h(t)] = -L[H(t-1)] + L[H(t-2)]$$

$$L[h(t)] = -\frac{e^{-s}}{s} + \frac{e^{-2s}}{s}$$

مثال - $y'' + 2y' + 5y = h(t)$ $\quad y(0) = 2$, $\quad y'(0) = -4$

($h(t)$ همان تابع مثال قبل است)

$$L[y''] + 2L[y'] + 5L[y] = L[h(t)]$$

$$s^2 L[y] - s\,y(0) - y'(0) + 2s\,L[y] - 2y(0) + 5L[y] = -\frac{e^{-s}}{s} + \frac{e^{-2s}}{s}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}[y]\,(s^2+2s+5) = 2s - 4 + 4 - \frac{e^{-s}}{s} + \frac{e^{-2s}}{s}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}[y] = \frac{2s}{s^2+2s+5} - \frac{e^{-s}}{s(s^2+2s+5)} + \frac{e^{-2s}}{s(s^2+2s+5)}$$

$$\Rightarrow y = \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2s}{s^2+2s+5}\right]}_{1} - \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-s}}{s(s^2+2s+5)}\right]}_{2} + \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-2s}}{s(s^2+2s+5)}\right]}_{3}$$

(۱): $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2s}{s^2+2s+5}\right] = 2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(s+1)-1}{(s+1)^2+4}\right]$

$$= 2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+1}{(s+1)^2+4}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{(s+1)^2+4}\right]$$

* این همان $\cos 2t$ است که S آن به اندازهٔ ۱+ انتقال پیدا کرده.

$$= 2e^{-t}\cos 2t - e^{-t}\sin 2t$$

(۲): $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-s}}{s(s^2+2s+5)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\underbrace{e^{-s}}_{e^{-as}} \cdot \underbrace{\frac{1}{s(s^2+2s+5)}}_{F(s)}\right]$

$$= H(t-1)\cdot f(t-1)$$

(اما) $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2+2s+5)}\right] = \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\frac{2}{(s+1)^2+4}}{s}\right]$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t e^{-t}\sin 2t\,dt$$

$$\begin{cases} e^{-t}dt = dv \Rightarrow v = -e^{-t} \\ u = \sin 2t \Rightarrow du = 2\cos 2t\,dt \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left((-e^{-t})\cdot \sin 2t\right)_0^t + 2\underbrace{\int_0^t e^{-t}\cos 2t\,dt}\right]$$

$$e^{-t}dt = dv \Rightarrow v = -e^{-t}$$

$$u = \cos 2t \Rightarrow du = -\sin 2t\,dt$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-t}\sin 2t - \left(\cos 2t\cdot e^{-t}\right)_0^t - 2\int_0^t e^{-t}\sin 2t\,dt$$

$$\Rightarrow \frac{5}{2}\int_0^t e^{-t}\sin 2t\,dt = -\frac{1}{2}e^{-t}\sin 2t - \left(\cos 2t\cdot e^{-t}\right) + 1$$

$$\Rightarrow \int_0^t e^{-t}\sin 2t\,dt = -\frac{1}{5}e^{-t}\sin 2t - \frac{2}{5}\cos 2t\,e^{-t} + \frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow L^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2+2s+5)}\right] = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{5}e^{-t}\sin 2t - \frac{2}{5}\cos 2t\,e^{-t} + \frac{2}{5}\right) = f(t)$$

$$\Rightarrow * \quad L^{-1}\left[e^{-s}\frac{1}{s(s^2+2s+5)}\right] = H(t-1)\,f(t-1)$$

$$= H(t-1)\left(-\frac{1}{10}e^{-(t-1)}\sin(2t-2) - \frac{1}{5}\cos(2t-2)\,e^{-(t-1)} + \frac{1}{5}\right)$$

③ : $L^{-1}\left[e^{-2s}\cdot\frac{1}{s(s^2+2s+5)}\right] = H(t-2)\,f(t-2)$

$$= H(t-2)\left(-\frac{1}{10}e^{-(t-2)}\sin(2t-4) - \frac{1}{5}\cos(2t-4)\,e^{-(t-2)} + \frac{1}{5}\right)$$

$\Rightarrow$ *** $y = 2\times$ ① + ② + ③

* $H(t-1)$ تابعی شناخته شده است لذا خودش را قرار می‌دهیم.

مثال - لاپلاس تابع زیر را بدست آورید .

$$f(t)=\begin{cases} 1 & 0<t<\pi \\ 0 & \pi<t<2\pi \\ \sin t & t>2\pi \end{cases}$$

* اول تابع را به فرم پله‌ای در می‌آوریم :

$$1+[0-1]\,H(t-\pi)+[\sin t-0]\,H(t-2\pi) =$$
$$1-H(t-\pi)+\sin t\,H(t-2\pi) \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}[f(t)]=\left(\frac{1}{s}-\frac{e^{-\pi s}}{s}\right)+\mathcal{L}\left[\sin(t-2\pi)\,H(t-2\pi)\right]$$

$$=\left(\frac{1}{s}-\frac{e^{-\pi s}}{s}\right)+\left(e^{-2\pi s}\cdot\frac{1}{s^2+1}\right)$$

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\left[e^{-as}F(s)\right]=H(t-a)f(t-a)}$$

قضیه مشتق گیری از تبدیلات لاپلاس :

فرض کنید : $\mathcal{L}[f(t)]=F(s)$ باشد . یعنی :

$F(s)=\int_0^{+\infty}e^{-st}f(t)\,dt$. حال نسبت به s مشتق می‌گیریم :

$$F'(s)=\int_0^{+\infty}-e^{-st}\cdot t\,f(t)\,dt \Rightarrow$$

$$F'(s)=-\mathcal{L}\left[t\,f(t)\right]$$

و بطور کلی :

$$F^{(n)}_{(s)} = (-1)^n \mathcal{L}\left[t^n f(t)\right]$$

قضیه انتگرال گیری تبدیل لاپلاس :

فرض کنید : $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$

$$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^\infty F(s)\,ds$$

$$\int_0^\infty \frac{f(t)}{t} \cdot e^{-st}\,dt = \int_s^\infty F(s)\,ds$$

$$\Rightarrow \lim_{s\to 0} \int_0^\infty \frac{f(t)}{t} e^{-st}\,dt = \lim_{s\to 0} \int_s^\infty F(s)\,ds$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}\,dt = \int_0^\infty F(s)\,ds}$$ (مهم)

* S با s فرق دارد. (مثال در صفحه ۸۲)

قضیه پیچش : (Convolution)

فرض کنید :
$* \quad L[f(t)] = F(s)$
$* \quad L[g(t)] = G(s)$

آنگاه :
$$L\left[\int_0^t f(u)\, g(t-u)\, du\right] = F(s)\cdot G(s) \quad **$$

$$L^{-1}[F(s)\cdot G(s)] = \int_0^t f(u)\cdot g(t-u)\, du \quad **$$

مثال - $L^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2(s^2+1)}\right]$

$$F(s) = \frac{1}{s^2} \Rightarrow f(t) = t$$
$$G(s) = \frac{1}{s^2+1} \Rightarrow g(t) = \sin t$$

$$L^{-1}[F(s)\cdot G(s)] = \int_0^t u \sin(t-u)\, du$$

$$\begin{cases} \sin(t-u)\, du = dv \Rightarrow V = \cos(t-u) \\ u = w \Rightarrow du = dw \end{cases}$$

$$= -\int_0^t \cos(t-u)\, du + \Big(u\cos(t-u)\Big)_0^t =$$

$$t + \Big(\sin(t-u)\Big)_0^t = t - \sin t$$

کاربردهای تبدیلات لاپلاس :

الف) در حل دستگاه معادلات دیفرانسیل :

تعریف - دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه اول به فرم زیر تعریف می شود :

$$\begin{cases} \dfrac{dy(t)}{dt} = a_1 y(t) + b_1 x(t) + f_1(t) \\ \dfrac{dx(t)}{dt} = a_2 y(t) + b_2 x(t) + f_2(t) \end{cases}$$

* اگر $f_1(t)$ و $f_2(t)$ صفر باشند دستگاه معادلات را همگن مرتبه اول گوئیم ودر غیر این صورت آنرا غیر همگن گوییم . و نیز هرگاه شرایط :

$$y(t_0) = y_0$$
$$x(t_0) = x_0$$

راداشته باشیم مسئله را یک مسئله اولیه گوییم و آنگاه با استفاده از تبدیلات لاپلاس می توان یک جواب به صورت زیر برای آن بدست آوریم :

$$\begin{cases} y(t) \\ x(t) \end{cases}$$

تذکر - دستگاه معادلات دیفرانسیل مراتب بالاتر هم به شیوهٔ بالا تعریف می شود.

مثال -

$$\begin{cases} y' + x = 0 \\ x' + (-y) = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} y(0) = 1 \\ x(0) = 0 \end{matrix}$$

* از طرفین لاپلاس می‌گیریم:

$$* \begin{cases} sL[y] - y(0) + L[x] = 0 \\ sL[x] - x(0) - L[y] = 0 \end{cases}$$

$$-s \begin{cases} sL[y] + L[x] = 1 \\ sL[x] - L[y] = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$* \quad -L[y](s^2+1) = -s \Rightarrow L(y) = \frac{s}{s^2+1}$$

$$y = L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right] \Rightarrow y = \cos t$$

اگر: (معادله پایین $\times s$) $\Rightarrow L[x](s^2+1) = 1$

$$\Rightarrow L[x] = \frac{1}{s^2+1} \Rightarrow x(t) = \sin t$$

مثال -

$$\begin{cases} y_1'' = y_1 + 3y_2 \\ y_2'' = 4y_1 - 4e^t \end{cases} \qquad y_1(0) = 2,\quad y_2(0) = 1,\quad y_1'(0) = 3,\quad y_2'(0) = 2$$

$$\begin{cases} s^2L[y_1] - s\,y_1(0) - y_1'(0) = L[y_1] + 3L[y_2] \\ s^2L[y_2] - s\,y_2(0) - y_2'(0) = 4L[y_1] - \frac{4}{s-1} \end{cases}$$

$$\ast\quad \begin{cases} s^2: & (s^2-1)\,L[y_1] - 3L[y_2] = 2s+3 \\ 3: & s^2 L[y_2] - 4L[y_1] = s+2-\dfrac{4}{s-1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{(s^4 - s^2 - 12)}\,L[y_1] = 2s^3 + 3s^2 + 3s + 6 - \frac{12}{s-1}$$

؛ (باید تجزیه شود) ؛

$$\Rightarrow \quad (s^2-4)(s^2+3)\,L[y_1] = \frac{2s^4+3s^3+3s^2+6s-2s^3-3s^2-3s-6-12}{s-1}$$

$$\Rightarrow \quad (s^2-4)(s^2+3)\,L[y_1] = \frac{2s^4+s^3+3s-18}{s-1}$$

$$\Rightarrow \quad L[y_1] = \frac{2(s^4-9)+s(s^2+3)}{(s^2-4)(s^2+3)(s-1)}$$

$$\Rightarrow \quad L[y_1] = \frac{(s^2+3)\,[2s^2-6+s]}{(s^2-4)(s^2+3)(s-1)}$$

$$\Rightarrow \quad L[y_1] = \frac{(s+2)(s-\frac{3}{2})}{(s-2)(s+2)(s-1)} = 2\,\frac{s-\frac{3}{2}}{(s-2)(s-1)}$$

$$\Rightarrow \quad L[y_1] = 2\left(\frac{1/2}{s-2} + \frac{1/2}{s-1}\right) \Rightarrow$$

$$y_1 = \frac{2}{2}e^{+2t} + \frac{2}{2}e^{+t}$$

* وقتی معادله $2s^2-6+s$ را حل می کنیم، باید ضریب a ضرب شود (یعنی ضریب s^2)

$$\Rightarrow \quad y_1 = e^{2t} + e^{t}$$

y_1 را در معادله (۱) قرار می دهیم. $\Rightarrow$ $(s^2-1)\left(\frac{1}{s-2}+\frac{1}{s-1}\right) - 3L[y_2]$

$= 2s + 3$

$$\Rightarrow \quad \frac{(s+1)(2s-3)}{s-2} - 2s - 3 = 3L[y_2]$$

$$\frac{\cancel{2s^2}-\cancel{3s}+\cancel{2s}-3-\cancel{2s^2}-\cancel{3s}+\cancel{4s}+6}{s-2} = 3L[y_2]$$

$$\frac{3}{s-2} = 3L[y_2] \quad \Rightarrow \quad L[y_2] = \frac{1}{s-2}$$

$$\Rightarrow \quad y_2 = e^{2t}$$

(ب) -

حل معادلات انتگرالی بکمک تبدیلات لاپلاس :

مثال -

$$* \quad \begin{cases} y(t) = t + \int_0^t y(u)\sin(t-u)\,du \end{cases}$$

* باید معادله را به شکلی درآوریم که :

۱- بتوانیم از طرفین لاپلاس بگیریم.
۲- « از قضیه پیچش استفاده کنیم.

$$* \quad L[y(t)] = L[t] + L\left[\int_0^t y(u)\sin(t-u)\,du\right]$$

* $L[y(t)] = \frac{1}{s^2} + L[y(t)]\; L[\sin t]$

$L[y(t)]\left(1 + \frac{-1}{s^2+1}\right) = \frac{1}{s^2}$

$L[y(t)] = \dfrac{\frac{1}{s^2}}{\frac{s^2}{s^2+1}} = \frac{s^2+1}{s^4} = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^4}$

$\Rightarrow \quad y(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] + L^{-1}\left[\frac{1}{s^4}\right] = t + \frac{1}{3!}\, t^3$

$\Rightarrow \quad « \; y(t) = t + \frac{1}{6}\, t^3 \; »$

مثال - (موفق)$^{n+1}$

$n \longrightarrow \infty$

$f(t)$ تابع متناوب .

دورهٔ تناوب = t .

تابع قطعه ، قطعه پیوسته است .

$$« \; L[f(t)] = \frac{1}{1-e^{-ps}} \int_0^p e^{-st} f(t)\, dt \; »$$

اثبات - * $f(t) = f(t + np) \qquad n \in Z$

$L[f(t)] = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = \int_0^p e^{-st} f(t)\, dt + \int_p^{2p} e^{-st} f(t)\, dt$

(تغییر متغیر) $\rightarrow \; t = u \qquad\qquad t = u + p$

$$+\int_{2P}^{3P} e^{-St} f(t)\, dt \quad + \quad \cdots\cdots$$

$t = u + 2P$

$$= \int_0^P e^{-S(u)} f(u)\, du + \int_0^P e^{-S(u+P)} f(u+P)\, du \; +$$

$$\int_0^P e^{-S(u+2P)} f(u+2P)\, du \; + \; \cdots\cdots$$

** چون تابع متناوب است : $f(u+P) = f(u+2P) = \cdots = f(u)$

$$\Rightarrow \quad = \int_0^P e^{-Su} f(u)\, du + e^{-SP} \int_0^P e^{-Su} f(u)\, du \; +$$

$$e^{-2PS} \int_0^P e^{-Su} f(u)\, du$$

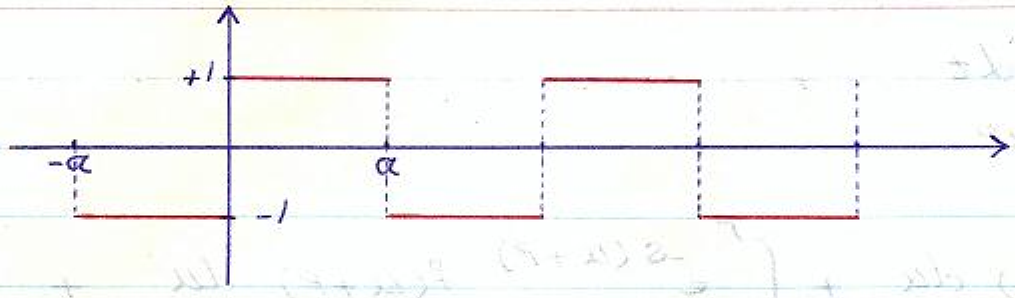
$$= \int_0^P e^{-Su} f(u)\, du \times \left(1 + e^{-SP} + e^{-2SP} + \cdots\right)$$

$$= \underbrace{\left(1 + e^{-SP} + (e^{-SP})^2 + (e^{-SP})^3 + \cdots\right)}_{\frac{1}{1-e^{-SP}}} \int_0^P e^{-St} f(t)\, dt$$

$$= \frac{1}{1-e^{-SP}} \int_0^P e^{-St} f(t)\, dt$$

مثال - موج مربع متناوب :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < a \\ -1 & -a < x < 0 \end{cases} \qquad P = 2a$$



$$L[f(t)] = \frac{1}{1-e^{-2as}}\left[\int_0^a e^{-st}\,dt - \int_a^{2a} e^{-st}\,dt\right]$$

$$= \frac{1}{1-e^{-2as}}\left[\left(-\frac{1}{s}e^{-st}\right)_0^a + \left(\frac{1}{s}e^{-st}\right)_a^{2a}\right] =$$

$$\frac{1}{1-e^{-2as}}\left[-\frac{1}{s}e^{-as} + \frac{1}{s} + \frac{1}{s}e^{2as} - \frac{1}{s}e^{-as}\right]$$

$$= \frac{-\frac{2}{s}e^{-as} + \frac{1}{s} + \frac{1}{s}e^{-2as}}{1-e^{2as}}$$

مثال از صفحهٔ ۷۴ : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$

این انتگرال با روشهای قبلی غیرقابل حل است.

$$= \int_0^{\infty} \frac{1}{s^2+1}\,ds = \operatorname{Arc\,tg} s\Big)_0^{\infty} =$$

$$\frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

حل معادلات دیفرانسیل به کمک سری های توانی :

یادآوری - تعریف - سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ یا بطور گسترده : $a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots$ را که در آن x_0 یک مقدار ثابت می باشد را سری توانی گوئیم.

همگرائی سری توانی - اگر $S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n(x-x_0)^n$ مجموع جزئی Nاُم باشد :

سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ به ازای همان مقادیر x همگرا می باشد. $\Longleftrightarrow$ $\lim\limits_{N\to\infty} S_N$ به ازای مقادیری از x موجود باشد

* برای سهولت x_0 را مساوی صفر در نظر می گیریم.

انواع سری های توانی :

۱- سری توانی که به ازای همه مقادیر x همگرا است. (شعاع همگرائی ∞ است)

مثال : $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$

۲- سری توانی که در همه نقاط به جز صفر واگرا است. (شعاع همگرائی ۰ است)

مثال : $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n = 1 + x + 2!x^2 + \dots$

۳- سری توانی که در یک بازه همگراست (به شعاع R) و در خارج از آن بازه واگرا است. (شعاع همگرائی R است)

سری هندسی $1 + x + x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$: مثال

$$|x| < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

$$-1 \;(\longleftarrow \underset{0}{\cdot} \longrightarrow)\; +1$$

یک روش برای پیدا کردن شعاع همگرائی : $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$

«آزمون نسبت»

$$\lim \frac{|a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}|}{|a_n(x-x_0)^n|} < 1$$

$$\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |x-x_0| < 1$$

$$|x-x_0| < \frac{1}{\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$$

$$|x-x_0| < \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \Rightarrow$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

مثال - $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

$$a_n = \frac{1}{n!} \qquad a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty$$

مثال - $\sum_{n=0}^{\infty} n x^n$

$$a_n = n \qquad a_{n+1} = n+1$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

مثال - $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

$$a_n = 1 \qquad a_{n+1} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$

مثال - $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

خواص سری های توانی (چکیده) :

۱- هرگاه سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x)^n$ به تابع $f(x)$ و سری $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ به تابع $g(x)$ همگرا باشد ؛ آنگاه مجموع آندو یعنی :

$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n+b_n) x^n$ به تابع $f(x) + g(x)$ همگرا می باشد .

۲- اگر سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ به تابع $f(x)$ همگرا باشد آنگاه می توان از جملات سری تک تک مشتق گرفت یعنی :

$$\left(f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \right)$$

۳- تعریف - تابع $f(x)$ در نقطهٔ x_0 تحلیلی است هرگاه بازه‌ای به شعاع R موجود باشد به گونه‌ای که به ازای x هائی که داخل این بازه است $f(x)$ را بصورت سری توانی :
$|x - x_0| < R$
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ بتوان نوشت که در این بازه همگرا باشد.

قضیه - اگر در معادله دیفرانسیل $y'' + P(x) y' + Q(x) y = R(x)$ توابع $P(x)$ و $Q(x)$ و $R(x)$ در نقطه x_0 تحلیلی باشد آنگاه معادله فوق دارای یک سری توانی است که در همان فاصله همگرایی توابع $P(x)$ و $Q(x)$ و $R(x)$ برقرار است.

مثال - $x_0 = 0$ $\quad y'' + x y' + y = 0$

$a_n = \frac{a_0}{n!}$

* چند جمله‌ای ها همواره تحلیلی هستند و ($\sin x, \cos x, e^x$).

* با قرار دادن y در داخل معادله ـ ضرایب a_n را بدست می‌آوریم. ** $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

* $y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ * $y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$

$\Rightarrow \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}}_{1} + x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$

$\Rightarrow$ 1 : n جدید $= n$ قدیم $- 2$ $\Rightarrow$

$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+2)(n+1) a_{n+2} + n a_n + a_n \right] x^n + 2a_2 + a_0 = 0$

$\Rightarrow$ * $2a_2 + a_0 = 0 \Rightarrow a_2 = -\frac{a_0}{2}$

* $(n+2)\cancel{(n+1)} a_{n+2} + \cancel{(n+1)} a_n = 0 \quad \forall n \geq 1$

معادله بازگشتی (ریور سیبل)

* $(n+2) a_{n+2} = -a_n \Rightarrow$

$* \quad a_{n+2} = \dfrac{-a_n}{n+2}$ (معادله ریور سیبل)

$n = 0 \Rightarrow a_2 = -\dfrac{a_0}{2}$

$n = 2 \Rightarrow a_4 = -\dfrac{a_2}{4} = +\dfrac{a_0}{2 \times 4}$

$n = 4 \Rightarrow a_6 = -\dfrac{a_4}{6} = -\dfrac{a_0}{2 \times 4 \times 6}$

$$\Rightarrow \quad a_{2n} = \frac{(-1)^n \, a_0}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2n}$$

حال برای جملات فرد باید عمل کنیم:

$n = 1 \Rightarrow a_3 = -\dfrac{a_1}{3}$

$n = 3 \Rightarrow a_5 = -\dfrac{a_3}{5} = +\dfrac{a_1}{3 \times 5}$

$n = 5 \Rightarrow a_7 = -\dfrac{a_5}{7} = -\dfrac{a_1}{3 \times 5 \times 7}$

$$\Rightarrow \quad a_{2n+1} = \frac{(-1)^n \, a_1}{3 \times 5 \times 7 \times \cdots \times (2n+1)}$$

حال جواب کلی را می یابیم:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \left(a_0 - \frac{a_0}{2} x^2 + \frac{a_0}{2 \times 4} x^4 - \cdots\right) + \left(a_1 x - \frac{a_1}{3} x^3 + \frac{a_1}{3 \times 5} x^5 - \cdots\right)$$

$$= a_0 \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{8} x^4 - \cdots\right)}_{y_1} + a_1 \underbrace{\left(x - \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{15} x^5 - \cdots\right)}_{y_2}$$

$$* \; y = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n} x^{2n} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{3 \times 5 \times \cdots \times (2n+1)}$$

مثال - $x_0 = 0$: $(1-x^2) y'' - 2x y' + P(P+1) y = 0$

(معادله دیفرانسیل لژاندر از مرتبه P)

$$* \; y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$* \; y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad \Rightarrow$$

$$* \; y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

$$(1-x^2) \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - 2x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + P(P+1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\overset{①}{\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^n - 2 \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + P(P+1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

① : n قدیم $n - 2 =$ جدید n $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \left[(n+2)(n+1) a_{n+2} - n(n-1) a_n - 2n a_n + P(P+1) a_n \right] x^n + 2a_2 + 6a_3 x - 2a_1 x + P(P+1) a_0 + P(P+1) a_1 x = 0$$

$$2a_2 + p(p+1)\,a_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_2 = -\frac{p(p+1)}{2}\,a_0$$

$$6a_3 + \left[p(p+1) - 2\right] a_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_3 = -\frac{p(p+1) - 2}{6}\,a_1$$

$$\forall n \geqslant 2 \ : \quad (n+2)(n+1)\,a_{n+2} + a_n \underbrace{\left[-n^2 + n - 2n + p(p+1)\right]}_{-n^2 - n + p(p+1)} = 0$$

$$\Rightarrow \quad a_{n+2} = -\frac{-n^2 - n + p(p+1)}{(n+2)(n+1)}\,a_n$$

$$\Rightarrow \quad a_{n+2} = \frac{-(p-n)(p+n+1)\,a_n}{(n+2)(n+1)}$$ (معادله بازگشتی)

الف- جملات زوج :

$$a_2 = -\frac{p(p+1)}{2}\,a_0$$

$$a_4 = \frac{(p-2)(p+3)}{3 \times 4}\,a_2 = +\frac{(p-2)(p)(p+1)(p+3)}{2 \times 3 \times 4}\,a_0$$

$$a_6 = \frac{(p-4)(p+5)}{5 \times 6}\,a_4 = -\frac{(p-4)(p-2)\,p\,(p+1)(p+3)(p+5)}{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6}\,a_0$$

$$\Rightarrow \quad a_{2n} = (-1)^n \frac{(p-2n+2)\cdots(p-2)\;p\;(p+1)\cdots(p+2n-1)}{(2n)!}\,a_0$$

ب- جملات فرد :

$$a_3 = -\frac{(p-1)(p+2)}{2\times 3}\,a_1$$

$$a_5 = -\frac{(p-3)(p+4)}{4\times 5}\,a_3 = +\frac{(p-3)(p-1)(p+2)(p+4)}{2\times 3\times 4\times 5}\,a_1$$

$$a_7 = -\frac{(p-5)(p+6)}{6\times 7}\,a_5 = -\frac{(p-5)(p-3)(p-1)(p+2)(p+4)(p+6)}{2\times 3\times 4\times 5\times 6\times 7}\,a_1$$

$$\Rightarrow \quad a_{2n+1} = \frac{(p-2n+1)\cdots(p-3)(p-1)(p+4)\cdots(p+2n)\;a_1}{(2n+1)!}$$

جواب کلی :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0\left(1-\frac{p(p+1)}{2}x^2+\frac{(p-2)(p)(p+1)(p+3)}{2\times 3\times 4}x^4-\cdots\right)+$$

$$a_1\left(x-\frac{(p-1)(p+2)}{2\times 3}x^3+\frac{(p-3)(p-1)(p+2)(p+4)}{2\times 3\times 4\times 5}x^5-\cdots\right)$$

$$= a_1\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(p-2n+1)(p-3)(p-1)(p+2)(p+4)\cdots(p+2n)}{(2n+1)!}x^{2n+1}+$$

$$a_0\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(p-2n+2)\cdots(p-4)(p-2)p(p+1)(p+3)\cdots(p+2n-1)}{(2n)!}x^{2n}$$

یک فرمول مهم :

$$\begin{cases} L[f(t)] = F(s) \\ (-1)^n L\left[t^n f(t)\right] = \dfrac{d^n F(s)}{ds^n} \end{cases}$$

مثال -

$$\mathcal{L}[x y'] = ?$$

$$\mathcal{L}[y'] = s\,\mathcal{L}[y] - y(0) \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}[x y'] = \frac{-d\left[s\mathcal{L}[y] - y(0)\right]}{ds}$$

خدمات فنی قابل ارائه از طرف شرکت مهندسی پتروپالامحور :

- طراحی سیستم های لوله کشی (Piping)
- طراحی سیستم های مکانیکی ثابت (Fixed Equipment)
- طراحی سیستم های مکانیکی دوار (Rotary Equipment)
- طراحی سیستم های تاسیسات مکانیکی و تهویه مطبوع (Plumbing & HVAC)
- طراحی تاسیسات مکانیکی زیربنائی
- طراحی سیویل و سازه در پروژه های عمرانی و صنعتی

PPM

شرکت مهندسی پتروپالامحور

کیفیت تعهد ماست