(Linear Algebra [in Persian]) جبر خطی

Book · November 2010

2 authors:

Majid Forghani-elahabad
University of São Paulo

Hengameh Raeisi-Dehkordi
University of São Paulo

فصل اول

« ماتریس و دستگاه معادلات خطی »

ماتریس

قبل از شروع بحث در مورد ماتریس‌ها، لازم است مفهوم میدان که در دیگر بحث‌های جبر خطی نیز ظاهر می‌شود، را تعریف کنیم.

❖ **تعریف۱:** مجموعه $\mathbb{F}$ را همراه با دو عمل جمع و ضرب که به ازای هر دو عضو x و y از $\mathbb{F}$ به ترتیب به صورت $x+y$ و $x.y$ نمایش داده می‌شود، میدان گوییم، هرگاه خواص ده‌گانه زیر را داشته باشد:

۱ـ برای هر $x,y\in\mathbb{F}$ داشته باشیم: $x.y\in\mathbb{F}$ و $x+y\in\mathbb{F}$ (بسته بودن نسبت به اعمال جمع و ضرب)

۲ـ برای هر $x,y\in\mathbb{F}$ داشته باشیم: $x+y=y+x$ (خاصیت جابجایی نسبت به عمل جمع)

۳ـ به ازای هر $x,y,z\in\mathbb{F}$ نتیجه شود: $x+(y+z)=(x+y)+z$ (خاصیت شرکت‌پذیری نسبت به عمل جمع)

۴ـ یک عنصر منحصر بفرد $0\in\mathbb{F}$ موجود باشد به گونه‌ای که، به ازای هر $x\in\mathbb{F}$ ، $x+0=0+x=x$ (عضو خنثی نسبت به عمل جمع)

۵ـ به ازای هر عضو $x\in\mathbb{F}$ یک عنصر منحصر بفرد $(-x)\in\mathbb{F}$ موجود باشد به گونه‌ای که:

$x+(-x)=(-x)+x=0$ (عنصر قرینه نسبت به عمل جمع)

۶ـ برای هر $x,y\in\mathbb{F}$ ، $x.y=y.x$ (خاصیت جابجایی نسبت به عمل ضرب)

۷ـ به ازای هر $x,y,z\in\mathbb{F}$ ، $x.(y.z)=(x.y).z$ (خاصیت شرکت‌پذیری نسبت به عمل ضرب)

۸ـ عضو ناصفر و منحصر بفرد $1\in\mathbb{F}$ وجود داشته باشد به گونه‌ای که؛ به ازای هر $x\in\mathbb{F}$ ، $x.1=1.x=x$ (عضو خنثی نسبت به عمل ضرب)

۹ـ به ازای هر $x\in\mathbb{F}$، عنصر ناصفر و منحصر بفرد $x^{-1}\in\mathbb{F}$ موجود باشد به‌طوریکه؛ $x.x^{-1}=x^{-1}.x=1$ (عضو قرینه نسبت به عمل ضرب)

۱۰ـ به ازای هر $x,y,z\in\mathbb{F}$ ، $x.(y+z)=x.y+x.z$ (پخش‌پذیری عمل ضرب نسبت به عمل جمع)

مثال۱: مجموعه اعداد حقیقی و اعداد گویا تحت همان جمع و ضرب معمولی یک میدان هستند. همچنین، اعداد مختلط $\mathbb{C}$ نسبت به عمل جمع و ضرب تعریف شده در زیر؛ تشکیل یک میدان می‌دهند:

$$1)\quad (a+bi)+(c+di)=a+c+(b+d)i$$

$$2)\quad (a+bi).(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

مثال۲: میدان‌های متناهی. مجموعه $\mathbb{Z}_5=\{0,1,2,3,4\}$ همراه با اعمال جمع و ضرب به هنگ ۵، یک میدان متناهی است. جمع و ضرب به هنگ ۵ بدین صورت است که همان جمع و ضرب معمولی را انجام می‌دهیم و فقط حاصل آن را به هنگ ۵ بدست می‌آوریم. به عنوان مثال در $\mathbb{Z}_5$ داریم:

$$3+2=5\overset{5}{\equiv}0 \quad \text{و} \quad 4+3=7\overset{5}{\equiv}2 \quad \text{و} \quad 4\times3=12\overset{5}{\equiv}2$$

نکته۱: اگر p یک عدد اول باشد، آنگاه $\mathbb{Z}_p=\{0,1,2,...,p-1\}$ تحت اعمال جمع و ضرب به هنگ p یک میدان متناهی است.

❖ **تعریف۲:** عدد صحیح و مثبت n را مشخصه میدان $\mathbb{F}$ گویند، هرگاه n کوچکترین عددی باشد که حاصل جمع n مرتبه عدد ۱ (عضو خنثی نسبت به ضرب) در آن میدان برابر صفر (عضو خنثی نسبت به جمع) شود. اگر چنین عددی وجود نداشته باشد، میدان را از مشخصه صفر می‌نامند.

مثال۳: اعداد حقیقی و گویا، میدان‌هایی با مشخصه صفر و به ازای هر عدد اول p ، $\mathbb{Z}_p$ میدانی با مشخصه p است.

مثال۴: کدامیک از گزینه‌ها صحیح است؟

۱) $\mathbb{Z}$ یک میدان از مشخصه صفر است.

۲) $\mathbb{R}$ یک میدان از مشخصه نامتناهی است.

۳) $\mathbb{Z}_{91}$ یک میدان از مشخصه ۹۱ است.

۴) $\mathbb{Z}_{53}$ یک میدان از مشخصه ۵۳ است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» $\mathbb{Z}$ یک میدان نیست؛ زیرا $۲\in\mathbb{Z}$ و $۲^{-۱}=\frac{۱}{۲}\notin\mathbb{Z}$، در واقع وارون عناصر ناصفر مخالف یک در $\mathbb{Z}$ وجود ندارد. $\mathbb{R}$ یک میدان از مشخصه صفر است. همچنین می‌دانیم که $\mathbb{Z}_p$ به ازای هر عدد اول p یک میدان از مشخصه p است. پس از آنجا که ۹۱ غیر اول (یا مرکب) و ۵۳ عدد اول است؛ گزینه (۳) غلط و گزینه (۴) درست است.

حال به تعریف ماتریس و اعمال جبری روی آن و بعضی قضایا در مورد آن می‌پردازیم.

❖ **تعریف۳:** فرض کنید $\mathbb{F}$ یک میدان باشد، آرایه مستطیل شکل زیر که عناصر آن متعلق به $\mathbb{F}$ هستند را یک ماتریس می‌نامند.

$$A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \cdots & a_{۱n} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & \cdots & a_{۲n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m۱} & a_{m۲} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

عنصر a_{ij} به ازای هر $i=۱,۲,...,m$ و $j=۱,۲,...,n$ را درایه ij_ام ماتریس A می‌نامند. همچنین اگر m تعداد سطرهای ماتریس و n تعداد ستونهای ماتریس A باشد، ماتریس را از اندازه $m\times n$ می‌گویند و برای نمایش آن از شکل خلاصه زیر استفاده می‌کنند.

$$A=[a_{ij}]_{m\times n}$$

هر ماتریس $m\times۱$ را یک ستون m تایی و هر ماتریس $۱\times n$ را یک سطر n تایی می‌نامند. همچنین اگر $m=n$ باشد، ماتریس A، یک ماتریس مربعی نامیده می‌شود.

اعمال جبری روی ماتریس‌ها

۱ـ جمع و تفریق ماتریس: جمع و تفریق دو ماتریس فقط در صورتی تعریف‌پذیر است که دو ماتریس هم اندازه باشند. در اینصورت، اگر فرض کنید:

$$A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & ... & a_{۱n} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & \cdots & a_{۲n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m۱} & a_{m۲} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B=\begin{bmatrix} b_{۱۱} & b_{۱۲} & ... & b_{۱n} \\ b_{۲۱} & b_{۲۲} & \cdots & b_{۲n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m۱} & b_{m۲} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

داریم:

$$A\pm B=\begin{bmatrix} a_{۱۱}\pm b_{۱۱} & a_{۱۲}\pm b_{۱۲} & \cdots & a_{۱n}\pm b_{۱n} \\ a_{۲۱}\pm b_{۲۱} & a_{۲۲}\pm b_{۲۲} & \cdots & a_{۲n}\pm b_{۲n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m۱}\pm b_{m۱} & a_{m۲}\pm b_{m۲} & \cdots & a_{mn}\pm b_{mn} \end{bmatrix}$$

۲ـ ضرب اسکالر در ماتریس: برای هر اسکالر $c\in\mathbb{F}$ و ماتریس A روی میدان $\mathbb{F}$ داریم:

$$cA=\begin{bmatrix} ca_{۱۱} & ca_{۱۲} & \cdots & ca_{۱n} \\ ca_{۲۱} & ca_{۲۲} & \cdots & ca_{۲n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{m۱} & ca_{m۲} & \cdots & ca_{mn} \end{bmatrix}$$

۳ـ ضرب دو ماتریس: ضرب ماتریس $A_{m\times n}$ در ماتریس $B_{k\times l}$ فقط در صورتی امکان‌پذیر است که $n=k$، یعنی تعداد ستونهای ماتریس اول با تعداد سطرهای ماتریس دوم برابر باشد. که در اینصورت حاصلضرب $A.B$ یک ماتریس $m\times l$ است و به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$A.B=[c_{ij}]_{m\times l} \quad \text{و} \quad c_{ij}=a_{i۱}b_{۱j}+a_{i۲}b_{۲j}+...+a_{in}b_{nj} \quad \text{و} \quad i=۱,۲,...,m \quad \text{و} \quad j=۱,۲,...,l$$

توجه کنید که لزوماً $AB=BA$ نیست. حتی ممکن است، حاصلضرب $A.B$ قابل تعریف و $B.A$ غیرقابل تعریف باشد. همچنین، توانهای یک ماتریس مربعی، از حاصلضرب آن ماتریس در خودش، حاصل می‌شود. یعنی؛ اگر A یک ماتریس مربعی $n\times n$ باشد، آنگاه داریم:

$$A^{۲}=AA\,,\ A^{۳}=AA^{۲}\,,\ ...,\ A^{m}=AA^{m-۱}\,,\ m\in\mathbb{N}$$

به خاطر داشته باشید که محاسبه توانهای یک ماتریس، فقط در ماتریس‌های مربعی امکان‌پذیر است.

مثال۵: فرض کنید ماتریس‌های A، B و C به‌صورت زیر تعریف شده باشند:

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۴ \\ ۱ & ۲ & ۳ \end{bmatrix}_{۲\times۳} \quad , \quad B=\begin{bmatrix} ۴ & ۵ \\ ۲ & ۳ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}_{۳\times۲} \quad , \quad C=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۳ & ۲ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۳ \end{bmatrix}_{۳\times۳}$$

در این صورت داریم:

$$AC=\begin{bmatrix} ۱۹ & ۱۴ & ۲۱ \\ ۱۳ & ۹ & ۱۴ \end{bmatrix}_{۲\times۳} \quad , \quad ۲B=\begin{bmatrix} ۸ & ۱۰ \\ ۴ & ۶ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix}_{۳\times۲} \quad , \quad AB=\begin{bmatrix} ۱۸ & ۲۷ \\ ۱۱ & ۱۷ \end{bmatrix}_{۲\times۲} \quad , \quad C^۲=\begin{bmatrix} ۱۳ & ۹ & ۱۴ \\ ۱۱ & ۱۱ & ۱۴ \\ ۱۱ & ۹ & ۱۶ \end{bmatrix}_{۳\times۳}$$

واضح است که حاصلضرب CA غیر قابل تعریف و همچنین BA یک ماتریس ۳×۳ است. بنابراین، در ضرب ماتریس‌ها لزوماً خاصیت جابجایی را نداریم. توجه کنید که محاسبه $A^۲$ یا $B^۲$ نیز، امکان‌پذیر نیست.

مثال۶: اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۴ \\ ۱ & ۲ & ۵ \end{bmatrix}$ **و** $B=\begin{bmatrix} ۳ & -۲ \\ ۴ & ۱ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}$ **و** $C=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix}$ **و D=ABC ، آنگاه** $۲d_{۱۱}$ **برابر است با:**

۱) ۱۳ ۲) ۱۴ ۳) ۲۷ ۴) ۲۸

پاسخ: گزینه «۴» نکته حائز اهمیت در اینگونه تست‌ها، پرهیز از محاسبات کامل و تعیین ماتریس D است. در واقع باید فقط به دنبال درایه مورد نظر باشیم. اگر قرار دهیم؛ $D=ABC=(AB)C$، آنگاه برای محاسبه $d_{۱۱}$ کافی است حاصلضرب سطر اول AB در ستون اول C را بدست آوریم. چون ستون اول C به صورت $\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}$ است؛ پس فقط کافی است $(AB)_{۱۱}$ را محاسبه کنیم. می‌دانیم $(AB)_{۱۱}$ برابر است با حاصل‌ضرب سطر اول A در ستون اول B، پس داریم:

$$(AB)_{۱۱}=۲\times۳+۳\times۴+۴\times(-۱)=۱۴ \xrightarrow{\text{چون ستون اول C برابر با } \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix} \text{ است.}} d_{۱۱}=۱۴ \Rightarrow ۲d_{۱۱}=۲۸$$

❖ **تعریف۴:** در ماتریس مربعی $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ ، درایه‌های $a_{۱۱},a_{۲۲},...,a_{nn}$ را درایه‌های قطری، یا قطر اصلی ماتریس A می‌نامیم. اگر در یک ماتریس تمام درایه‌ها به غیر از درایه‌های قطری آن صفر باشند، آنرا ماتریس قطری نامیده و به صورت $A=\mathrm{diag}(a_{۱۱},a_{۲۲},...,a_{nn})$ نمایش می‌دهیم.

برای نمایش ماتریس قطری $A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & a_{۲۲} & \cdots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۰ & ۰ & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ از نماد $A=\mathrm{diag}(a_{۱۱}a_{۲۲}\cdots a_{nn})$ نیز استفاده می‌شود. در واقع، مواقعی از علامت (،) بین اعداد استفاده می‌شود که تشخیص درایه‌های قطری بدون کاما سخت باشد. به عنوان مثال $\mathrm{diag}(۱۳۵)$ عبارتی مبهم است که می‌تواند هر کدام از ماتریس‌های $\mathrm{diag}(۱,۳۵)$، $\mathrm{diag}(۱۳,۵)$ و یا $\mathrm{diag}(۱,۳,۵)$ نیز باشد. ولی عبارت $\mathrm{diag}(a_۱a_۲)$ کاملاً واضح است؛ پس دیگر نیازی به استفاده از کاما در آن نیست.

ماتریس $I=\mathrm{diag}(\underbrace{۱,۱,...,۱}_{n\text{بار}})$ را ماتریس همانی مرتبه n می‌نامند و با I_n نمایش می‌دهند. به عنوان مثال:

$$I_۲=\mathrm{diag}(۱,۱)=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

نکته۲: اگر A یک ماتریس قطری $n\times n$ و $A=\mathrm{diag}(a_۱a_۲\cdots a_n)$ باشد، آنگاه به ازای هر $k\in\mathbb{N}$ داریم:

$$A^k=\mathrm{diag}(a_۱^ka_۲^k\cdots a_n^k)$$

اثبات: به سادگی و با استقرا روی k بدست می‌آید؛

برای $k=۱$، بوضوح حکم برقرار است؛

$$k=۱ \Rightarrow A=\mathrm{diag}(a_۱a_۲\cdots a_n)$$

حال فرض می‌کنیم برای k حکم برقرار باشد، آن را برای $k+۱$ اثبات می‌کنیم.

$$A^{k+۱}=AA^k \underset{\text{استقرا}}{\overset{\text{طبق فرض}}{=\!=}} \mathrm{diag}(a_۱\cdots a_n)\mathrm{diag}(a_۱^k\cdots a_n^k)=\begin{bmatrix} a_۱ & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & a_۲ & \cdots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۰ & ۰ & \cdots & a_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_۱^k & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & a_۲^k & \cdots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۰ & ۰ & \cdots & a_n^k \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_۱^{k+۱} & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & a_۲^{k+۱} & \cdots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۰ & ۰ & \cdots & a_n^{k+۱} \end{bmatrix}$$

$$=\mathrm{diag}(a_۱^{k+۱}\cdots a_n^{k+۱})$$

بدین ترتیب، با توجه به استقراء اثبات تمام است.

مثال۷: اگر $A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{n\times n}$ ، A^k را محاسبه کنید.

$$A^2=\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}=I_n \Rightarrow A^3=A^2A=IA=A\ ,\ A^4=A^2A^2=I_nI_n=I_n\ , ...$$

و به همین ترتیب نتیجه می‌شود:

$$A^k=\begin{cases} A & \text{اگر } k \text{ فرد باشد.} \\ I_n & \text{اگر } k \text{ زوج باشد.} \end{cases}$$

❖ **تعریف۵:** ترانهاده ماتریس $A_{m\times n}$ ، یک ماتریس $n\times m$ است که هر ستون A یک سطر آن است؛ و آن را با A^t نمایش می‌دهند.

به عنوان مثال اگر $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ -4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$، به سادگی می‌بینیم که $A^t=\begin{bmatrix} 2 & 2 & -4 \\ -1 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & 6 \end{bmatrix}$ می‌باشد.

❖ **تعریف۶:** ماتریس مربعی A را متقارن گوییم هرگاه $A^t=A$ و پاد متقارن گوییم، هرگاه $A^t=-A$ باشد.

با توجه به تعریف ماتریس $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ متقارن و ماتریس $B=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ پاد متقارن است.

قضیه۱: فرض کنید A ، B و C ماتریس‌هایی $m\times n$ و o یک ماتریس $m\times n$ که تمام درایه‌های آن صفر است (ماتریس صفر) و c وd اسکالر باشند، در اینصورت داریم:

۱) $A+B=B+A$ ۲) $A+(B+C)=(A+B)+C$ ۳) $o+A=A+o=A$
۴) $c(A+B)=cA+cB$ ۵) $(c+d)A=cA+dA$ ۶) $(cd)A=c(dA)$

قضیه۱: فرض کنید A ، B و C ، ماتریس‌هایی باشند که اعمال زیر روی آنها قابل تعریف باشد، در این صورت داریم:

۱) $A(BC)=(AB)C$ ۲) $(A+B)C=AC+BC$ ۳) $IA=AI=A$ (I ماتریس همانی است)
۴) $(AB)^t=B^tA^t$ ۵) $(A+B)^t=A^t+B^t$

اثبات: اثبات دو قضیه فوق به سادگی و با استفاده از تعریف حاصل می‌شود.

مثال۸: اگر A متقارن و B پاد متقارن باشد، آنگاه کدامیک از گزینه‌های زیر پاد متقارن است؟

۱) BAB ۲) B^n برای هر $n\in\mathbb{N}$ ۳) ABA ۴) A^n برای هر $n\in\mathbb{N}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳»

$$(BAB)^t=B^tA^tB^t \xrightarrow{\text{A متقارن و B پادمتقارن است.}} (-B)A(-B)=BAB \Rightarrow$$ BAB متقارن است.

$$\forall n\in \mathbb{N} \Rightarrow (B^n)^t=(\underbrace{BB\cdots B}_{\text{n بار}})^t=\underbrace{B^t\cdots B^t}_{\text{n بار}}=(B^t)^n \xrightarrow{\text{B پادمتقارن}} (-B)^n=(-1)^nB^n=\begin{cases} B^n & \text{n زوج} \\ -B^n & \text{n فرد} \end{cases}$$

بنابراین، B^n به ازای nهای زوج، متقارن و به ازای nهای فرد، پاد متقارن است.

$$(ABA)^t=A^tB^tA^t \xrightarrow{\text{A متقارن و B پادمتقارن است.}} A(-B)A=-ABA \Rightarrow$$ ABA پاد متقارن است.

$$(A^n)^t \xrightarrow{\text{مشابه بالا}} (A^t)^n \xrightarrow{\text{A متقارن است.}} A^n \Rightarrow$$ A^n متقارن است.

مثال۹: اگر A و B دو ماتریس متقارن باشند، آنگاه AB متقارن است، اگر و تنها اگر

۱) AB قطری باشد. ۲) $A^2=B^2$ ۳) A یا B قطری باشند. ۴) $AB=BA$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» ابتدا گزینه‌ی صحیح را در قالب یک نکته ثابت کرده؛ سپس برای رد سایر گزینه‌ها، مثال نقض ارائه می‌کنیم.

نکته۳: فرض کنید A و B دو ماتریس متقارن باشند. در اینصورت؛ AB متقارن است، اگر و تنها اگر $AB=BA$ باشد.

اثبات: طرف اول ($\Leftarrow$): فرض کنید AB متقارن است. در اینصورت داریم:

$$\left.\begin{array}{l} AB \text{ متقارن است. } \Rightarrow (AB)^t = AB \\ (AB)^t \xlongequal{\text{(۲) قضیه}} B^tA^t \xlongequal{\text{A و B متقارنند.}} BA \end{array}\right\} \Rightarrow AB = BA$$

طرف دوم ($\Rightarrow$): فرض کنید $AB=BA$؛ در اینصورت داریم:

$$(AB)^t \xlongequal{\text{(۲) قضیه}} B^tA^t \xlongequal[\text{متقارنند.}]{\text{A و B}} BA \xlongequal{\text{فرض}} AB \Rightarrow (AB)^t = AB \Rightarrow AB \text{ متقارن است.}$$

بدین ترتیب، اثبات تمام است.

برای رد گزینه‌های (۱) و (۳) کافیست قرار دهید $A=B=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$؛ در اینصورت ماتریس‌های A و B و $AB=\begin{bmatrix} ۲ & ۲ \\ ۲ & ۲ \end{bmatrix}$ متقارنند؛ در حالی‌که هیچ‌کدام از ماتریس‌های A، B و یا AB قطری نیستند. برای رد گزینه (۲) نیز قرار دهید. $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$، واضح است که A ، B و AB متقارنند؛ ولی $A^۲=\begin{bmatrix} ۲ & ۲ \\ ۲ & ۲ \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}=B^۲$.

❖ **تعریف۷:** ماتریس A را بالا مثلثی گوییم، هرگاه تمام درایه‌های زیر قطر اصلی آن صفر باشند. یعنی ماتریسی که در آن به ازای هر $i>j$ ، داشته باشیم؛ $a_{ij}=۰$. به همین ترتیب ماتریس A را پایین مثلثی گوییم، هرگاه تمام درایه‌های بالای قطر اصلی آن صفر باشند. یعنی به ازای هر $i<j$، داشته باشیم؛ $a_{ij}=۰$.

مثال۱۰: فرض کنید A ماتریسی بالا مثلثی و B ماتریسی پایین مثلثی است. در اینصورت لزوماً ماتریس .... بالا مثلثی و ماتریس .... پایین مثلثی است. همچنین ماتریس .... لزوماً بالا مثلثی یا پایین مثلثی نیست.

۱) AB، B، BA ۲) $A^۲$، $B^۲$، AB ۳) A، BA، AB ۴) A، $B^۲$، $A^۶$

قبل از پاسخ به مثال، نکته زیر را در نظر بگیرید.

نکته۴: حاصل‌ضرب هر تعداد متناهی از ماتریس‌های بالا مثلثی (پایین مثلثی)، یک ماتریس بالا مثلثی (پایین مثلثی) است.

اثبات: ثابت می‌کنیم حاصل‌ضرب دو ماتریس بالا مثلثی دلخواه (که ضربشان قابل تعریف باشد)، یک ماتریس بالا مثلثی است. اثبات برای ماتریس‌های پایین مثلثی؛ کاملاً شبیه اثبات در حالت ماتریس‌های بالا مثلثی است. فرض کنید $A_{m\times n}$ و $B_{n\times p}$ دو ماتریس بالا مثلثی‌اند، پس برای هر $i>j$، $a_{ij}=۰$ و به همین ترتیب $b_{ij}=۰$. حال اگر فرض کنید $C=AB$، طبق تعریف ضرب ماتریس‌ها، C یک ماتریس $m\times p$ است و برای هر $i=۱,۲,\dots,m$ و $j=۱,۲,\dots,p$ داریم: $c_{ij}=a_{i۱}b_{۱j}+a_{i۲}b_{۲j}+\cdots+a_{in}b_{nj}$؛ که می‌توان آن را به‌صورت زیر نوشت:

$$c_{ij}=\underbrace{a_{i۱}b_{۱j}+\cdots+a_{i(i-۱)}b_{(i-۱)j}}_{(۱)}+\underbrace{a_{ii}b_{ij}+a_{i(i+۱)}b_{(i+۱)j}+\cdots+a_{in}b_{nj}}_{(۲)} \qquad (*)$$

حال فرض کنید $i>j$؛ در اینصورت چون B یک ماتریس بالا مثلثی است؛ نتیجه می‌شود؛ $b_{ij}=b_{(i+۱)j}=\cdots=b_{nj}=۰$. پس، بخش (۲) در سمت راست (*) برابر صفر است. از طرفی چون A یک ماتریس بالا مثلثی است، همواره برای هر $i=۱,۲,\dots,m$ داریم: $a_{i۱}=a_{i۲}=\cdots=a_{i(i-۱)}=۰$؛ بنابراین، بخش (۱) در سمت راست (*) نیز برابر صفر می‌شود؛ در نتیجه، برای هر $i>j$، $c_{ij}=۰$است. لذا طبق تعریف، ماتریس C یک ماتریس بالا مثلثی است. با استفاده‌ی مکرر از این اثبات نتیجه می‌شود؛ حاصل‌ضرب تعداد متناهی ماتریس بالا مثلثی، یک ماتریس بالا مثلثی است. به طریق مشابه نتیجه می‌شود؛ حاصل‌ضرب تعداد متناهی ماتریس پایین مثلثی، یک ماتریس پایین مثلثی است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» از آنجا که A یک ماتریس بالا مثلثی است؛ طبق نکته فوق نتیجه می‌شود؛ A^n برای هر $n\in\mathbb{N}$ نیز یک ماتریس بالا مثلثی و به همین ترتیب، چون B یک ماتریس پایین مثلثی است. B^n نیز برای هر $n\in\mathbb{N}$، یک ماتریس پایین مثلثی است. بنابراین، $A^۲$ لزوماً بالا مثلثی و $B^۲$ لزوماً پایین مثلثی است. حال اگر فرض کنید $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ واضح است که A بالا مثلثی و B پایین مثلثی و $AB=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ نه بالا مثلثی و نه پایین مثلثی است. پس گزینه‌های (۱) ، (۳) و (۴) (دقت کنید که $A^۶$ بالا مثلثی است) غلط و گزینه (۲) درست است.

نکته۵: اگر A و B ماتریس‌هایی باشند که جمع درایه‌های هر سطر آنها یک است، آنگاه جمع درایه‌های هر سطر AB نیز یک می‌شود.

اثبات: توجه کنید که لازمه برقراری این نکته، اینست که ضرب AB قابل تعریف باشد. با توجه به این، فرض کنید $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{n\times p}$ دو ماتریس دلخواه و به گونه‌ای باشند؛ که مجموع درایه‌های هر سطر آنها یک است.

مجموع درایه‌های هر سطر A برابر با یک است؛ بنابراین به ازای هر $i=1,2,...,n$، داریم: $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}=1$ **(۱)**

مجموع درایه‌های هر سطر B برابر با یک است؛ بنابراین به ازای هر $k=1,2,...,m$، داریم: $\sum_{j=1}^{p} b_{kj}=1$ **(۲)**

حال فرض کنید $C=AB$، در اینصورت با توجه به تعریف ضرب ماتریس‌ها، می‌دانیم که C یک ماتریس $m\times p$ است و به ازای هر $i=1,2,...,p$ و $j=1,2,...,p$، داریم؛

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+...+a_{in}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \qquad (3)$$

با توجه به روابط ۱و۲و۳ نتیجه می‌شود؛

$$\text{مجموع درایه‌های سطر } i \text{ ـ ام } C=\sum_{j=1}^{p} c_{ij} \overset{(3)}{=} \sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{ik}b_{kj}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\sum_{j=1}^{p} b_{kj} \overset{(2)}{=} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\times 1=\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \overset{(1)}{=} 1$$

بنابراین، مجموع درایه‌های هر سطر $C=AB$ نیز، برابر با یک است.

❖ **تعریف۸:** اگر A یک ماتریس $n\times n$ باشد، آنگاه اثر A که با $tr(A)$ (یا $trace(A)$) نمایش داده می‌شود؛ برابر است با مجموع تمام درایه‌های قطر اصلی آن، یعنی:

$$tr(A)=a_{11}+a_{22}+...+a_{nn}=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

نکته۶: اگر A و B دو ماتریس مربعی $n\times n$ و $a,b\in\mathbb{R}$ دو اسکالر دلخواه باشند، آن‌گاه داریم:

$$tr(aA+bB)=a\times tr(A)+b\times tr(B)$$

اثبات: فرض کنید $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{n\times n}$، در اینصورت داریم:

$$aA+bB=a[a_{ij}]_{n\times n}+b[b_{ij}]_{n\times n}=[aa_{ij}+bb_{ij}]_{n\times n} \xrightarrow{\text{طبق تعریف}} tr(aA+bB)=\sum_{i=1}^{n} aa_{ii}+bb_{ii}=a\sum_{i=1}^{n} a_{ii}+b\sum_{i=1}^{n} b_{ii}$$

$$\overset{\text{طبق تعریف}}{=\!=\!=} a\times tr(A)+b\times tr(B)$$

مثال۱۱: $tr(I_n)=n$ (یادآوری می‌کنیم که I_n ماتریس همانی با درایه‌های قطری ۱ است).

نکته۷: فرض کنید $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ یک ماتریس دلخواه است. در اینصورت داریم:

$$tr(AA^t)=tr(A^tA)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2$$

اثبات: فرض کنید $AA^t=B$ است. با توجه به تعریف ضرب ماتریس‌ها می‌دانیم که B یک ماتریس $m\times m$ است و برای هر $i=1,2,\dots,m$، b_{ii} برابر است با ضرب سطر i- ام ماتریس A در ستون i- ام ماتریس A^t؛ از طرفی طبق تعریف می‌دانیم که ستون i- ام A^t، همان سطر i- ام ماتریس A است. بنابراین b_{ii} برابر است با حاصل‌ضرب سطر i- ام A در خودش؛ در نتیجه داریم:

$$b_{ii}=a_{i1}a_{i1}+a_{i2}a_{i2}+\cdots+a_{in}a_{in}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \qquad (1)$$

از طرفی چون فرض کردیم $AA^t=B$ و طبق تعریف، $tr(B)=\sum_{i=1}^{n} b_{ii}$ است. بنابراین، داریم:

$$tr(AA^t)=tr(B)=\sum_{i=1}^{n} b_{ii} \overset{(1)}{=} \sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2$$

به طریق مشابه نتیجه می‌شود؛ $tr(A^tA)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2$ و در نتیجه اثبات تمام است.

مثال۱۲: اگر $A=\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ **، آنگاه** $tr(AA^t)$ **برابر است با:**

۱) ۱۶ ۲) ۱۵ ۳) ۱۷ ۴) ۱۸

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با توجه به نکته قبل داریم:

$$tr(A^tA)=tr(AA^t)=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{ij}^2=3^2+(-1)^2+2^2+(-1)^2+1^2=16$$

نکته۸: اگر A و B دو ماتریس مربعی $n\times n$ دلخواه باشند، آنگاه داریم: $tr(AB)=tr(BA)$

اثبات: فرض می‌کنیم، $AB=C$ و $BA=D$. طبق تعریف، کافیست نشان دهیم $\sum_{i=1}^{n} d_{ii}=\sum_{i=1}^{n} c_{ii}$.

$$C=AB \xrightarrow[\text{ضرب ماتریس‌ها}]{\text{طبق تعریف}} c_{ii}=a_{i1}b_{1i}+\cdots+a_{in}b_{ni}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{ji} \Rightarrow tr(AB) \overset{AB=C}{=\!=} tr(C) \overset{\text{طبق تعریف}}{=\!=}$$

$$\sum_{i=1}^{n}c_{ii}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{ji}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}b_{ji}a_{ij} \qquad (1)$$

$$D=BA \xrightarrow[\text{ضرب ماتریس‌ها}]{\text{طبق تعریف}} d_{jj}=b_{j1}a_{1j}+\cdots+b_{jn}a_{nj}=\sum_{i=1}^{n}b_{ji}a_{ij} \Rightarrow tr(BA) \overset{BA=D}{=\!=} tr(D) \overset{\text{طبق تعریف}}{=\!=}$$

$$\sum_{j=1}^{n}d_{jj}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}b_{ji}a_{ij} \qquad (2)$$

بنابراین، داریم:

$$1,2 \Rightarrow tr(D)=tr(C) \xrightarrow[BA=D]{AB=C} tr(AB)=tr(BA)$$

نتیجه۱: به ازای هیچ دو ماتریس A و B، تساوی $AB-BA=I_n$ امکان‌پذیر نیست.

اثبات: اگر چنین باشد؛ نتیجه می‌شود:

$$\left.\begin{array}{l} AB-BA=I_n \Rightarrow tr(AB-BA)=tr(I_n)=1+1+\cdots+1=n \\ \text{از طرفی از قبل می‌دانیم}: tr(AB-BA)=tr(AB)-tr(BA)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow n=0$$

و این نتیجه با اینکه $n\in\mathbb{N}$ است؛ تناقض دارد.

تعریف۹: فرض کنید A یک ماتریس مربعی $n\times n$ روی میدان $\mathbb{F}$ باشد. در اینصورت ماتریس B را معکوس چپ A گوییم، هرگاه $BA=I_n$ و معکوس راست A گوییم، هرگاه $AB=I_n$ همچنین B را معکوس A گوییم، هرگاه $AB=BA=I_n$ ، یعنی هم معکوس چپ و هم معکوس راست A باشد؛ که در اینصورت A را معکوس‌پذیر یا نامنفرد یا وارون‌پذیر می‌نامند و معکوس آن‌را با A^{-1} نمایش می‌دهند.

نکته۹: اگر A یک ماتریس مربعی باشد، آن‌گاه A معکوس‌پذیر است، اگر و تنها اگر A معکوس راست یا چپ داشته باشد.

در واقع از نکته فوق می‌توان نتیجه گرفت که برای اثبات معکوس‌پذیری یک ماتریس مربعی، فقط کافی است؛ یک معکوس چپ و یا یک معکوس راست برای آن به‌دست آورد. نکته‌ی دیگری که باید توجه شود؛ این است که ماتریس‌های غیرمربعی هم می‌توانند معکوس چپ یا راست داشته باشند، ولی نمی‌توانند همزمان هم معکوس چپ و هم معکوس راست داشته باشند. در واقع همانطور که در ادامه خواهیم دید؛ اگر A یک ماتریس $m\times n$ و $m<n$ باشد، A نمی‌تواند معکوس چپ داشته باشد و اگر $m>n$ باشد، A نمی‌تواند معکوس راست داشته باشد.

قضیه۲: اگر A و B ماتریس‌هایی $n\times n$ روی میدان $\mathbb{F}$ و وارون‌پذیر باشند، آنگاه داریم:

الف) AB وارون‌پذیر است، و $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

ب) A^{-1} وارون‌پذیر است، و $(A^{-1})^{-1}=A$

پ) A^n به ازای هر $n\in\mathbb{N}$، وارون‌پذیر است؛ و $(A^n)^{-1}=(A^{-1})^n$

ت) A^t وارون‌پذیر است، و $(A^t)^{-1}=(A^{-1})^t$

ث) به ازای هر اسکالر ناصفر $k\in\mathbb{R}$، ماتریس kA وارون‌پذیر است، و $(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}$

اثبات: با توجه به تعریف، به سادگی می‌توان موارد فوق را ثابت کرد.

می‌توان قسمت (الف) قضیه فوق را به‌صورت زیر تعمیم داد.

نکته۱۰: فرض کنید $A=A_1A_2\cdots A_n$ که در آن A_iها و A ماتریس‌های $n\times n$ می‌باشند. در اینصورت A وراون‌پذیر است، اگر و تنها اگر تمام A_iها وارون‌پذیر باشند و داریم $A^{-1}=A_n^{-1}A_{n-1}^{-1}\cdots A_1^{-1}$.

نکته۱۱: اگر A پاد متقارن و معکوس‌پذیر باشد، آن‌گاه A^{-1} نیز پاد متقارن است.

اثبات: $(A^{-1})^t \overset{\text{قضیه}}{=\!=} (A^t)^{-1} \underset{\text{است.}}{\overset{A\ \text{پادمتقارن}}{=\!=}} (-A)^{-1}=-A^{-1} \Rightarrow$ A^{-1} پاد متقارن است.

مثال۱۳: اگر $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ و $ad-bc\neq \circ$ باشد، آنگاه $A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

مثال۱۴: اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۵ & ۳ \\ ۱ & \circ & ۸ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -۴\circ & ۱۶ & ۹ \\ ۱۳ & -۵ & -۳ \\ ۵ & -۲ & -۱ \end{bmatrix}$، آنگاه به سادگی قابل بررسی است که:

$$AB=BA=\begin{bmatrix} ۱ & \circ & \circ \\ \circ & ۱ & \circ \\ \circ & \circ & ۱ \end{bmatrix}=I_۳ \Rightarrow A^{-1}=B$$

پس، برای تعیین A^{-1}؛ باید ماتریس B را به گونه‌ای بیابیم که رابطه‌ی $AB=BA=I$ برقرار شود.

مثال۱۵: اگر به ازای هر دو ماتریس دلخواه B و C، از عبارت $AB=AC$ ؛ نتیجه شود: $B=C$ ، آنگاه همواره:

۱) A بالا مثلثی است. ۲) A پایین مثلثی است. ۳) A منفرد (وارون‌ناپذیر) است. ۴) A نامنفرد (وارون‌پذیر) است.

پاسخ: گزینه «۴» برای رد گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) کافی است؛ قرار دهیم: $A=I_n$ ، می‌بینیم که A در شرایط مسأله صدق می‌کند و گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) لزوماً برقرار نیستند و گزینه (۴) باید صحیح باشد؛ که آن را به عنوان نکته ثابت می‌کنیم.

هدف اصلی ارائه این تست، یادآوری این نکته است؛ که در بعضی از تست‌ها بدون اثبات گزینه صحیح، می‌توان با رد کردن گزینه‌های غلط بوسیله مثال نقض، به گزینه صحیح رسید و بدین ترتیب در وقت صرفه‌جویی کرد.

نکته۱۲: به ازای هر دو ماتریس دلخواه B و C ، از تساوی $AB=AC$ نتیجه می‌شود $B=C$ ، اگر و تنها اگر A وارون‌پذیر باشد.

اثبات: اگر A معکوس‌پذیر و $AB=AC$ ، واضح است که با ضرب طرفین تساوی از چپ در A^{-1} ، نتیجه می‌شود $B=C$. برای اثبات طرف دیگر، بنابر برهان خلف فرض کنید A منفرد باشد، در اینصورت همانطور که در ادامه خواهید دید، ماتریس ناصفر B وجود دارد به‌طوریکه $AB=\circ$. حال اگر قرار دهیم $C=\circ$ (یعنی C را ماتریس صفر فرض کنیم)، واضح است که $AB=AC=\circ$ ؛ در حالیکه $B\neq C$ ($C=\circ$ و B ناصفر بود) و این با فرض تناقض دارد، (یادآوری می‌کنیم، فرض این بود که از تساوی $AB=AC$ ، نتیجه شود $B=C$) بنابراین، فرض خلف باطل و اثبات تمام است.

مثال۱۶: کدامیک از گزینه‌های زیر صحیح است؟

۱) اگر A و B دو ماتریس مربعی $n\times n$ باشند، آنگاه $tr(AB)=tr(A)+n$

۲) به ازای هر ماتریس دلخواه A ، $tr(AA^t)=\sum_i\sum_j a_{ij}^۲$

۳) ماتریس‌های مربعی A و B به گونه‌ای وجود دارند که $tr(AB)\neq tr(BA)$

۴) اگر A متقارن باشد، آنگاه $I+A$ وارون‌پذیر است.

پاسخ: گزینه «۲» برای رد کردن گزینه (۱) قرار دهید $A=I_۲$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & \circ \\ \circ & \circ \end{bmatrix}$ ، بوضوح $AB=B$ و در نتیجه؛

$$tr(AB)=tr(B)=۱\neq tr(A)+۲=۲+۲=۴$$

برای رد گزینه (۴) قرار دهید $A=-I$ ، می‌دانیم که A متقارن و $A+I=\circ$ وارون‌ناپذیر است. گزینه «۳» نیز بوضوح نادرست است؛ چرا که ثابت کردیم برای هر دو ماتریس مربعی هم اندازه A و B ، همواره $tr(AB)=tr(BA)$ است. درستی گزینه «۲» نیز قبلاً ثابت شده است.

مثال۱۷: فرض کنید A ماتریسی مربعی باشد که درایه‌هایش حقیقی‌اند و $A^۲=A$ ؛ در اینصورت

۱) به ازای یک عدد طبیعی مثل k ، $A^k=\circ$ ۲) A وارون‌پذیر است.

۳) I-A وارون‌پذیر است. ۴) I+A وارون‌پذیر است.

پاسخ: گزینه «۴» اگر قرار دهیم $A=\begin{bmatrix} ۱ & \circ \\ \circ & \circ \end{bmatrix}$ ، واضح است که A در شرایط مسأله صدق می‌کند. همچنین A و $I-A=\begin{bmatrix} \circ & \circ \\ \circ & ۱ \end{bmatrix}$ منفردند.

علاوه بر این به ازای هر $k\in\mathbb{N}$ ، $A^k=A\neq\circ$. بنابراین، گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) غلطند و در صورت درست بودن تست، گزینه (۴) صحیح است. (استفاده از مثال نقض برای رد کردن گزینه‌های غلط) حال درستی گزینه (۴) را نشان می‌دهیم:

$$(I+A)(I-\frac{۱}{۲}A)=I-\frac{۱}{۲}A+A-\frac{۱}{۲}A^۲ \;\underline{\underline{A^۲=A}}\; I-\frac{۱}{۲}A+A-\frac{۱}{۲}A=I$$

بنابراین، (I+A) معکوس‌پذیر و $(I+A)^{-1}=I-\frac{۱}{۲}A$ است.

مثال۱۸: فرض کنید $A^2 = A$ و $B = I - \lambda A$ در اینصورت کدام گزینه کامل‌تر است؟

۱) B همواره وارون‌پذیر است.
۲) $\lambda \in \mathbb{R}$ و ماتریس A، وجود دارد به گونه‌ای که B وارون‌ناپذیر باشد.
۳) B همواره منفرد است.
۴) اگر $\lambda \neq 1$، B وارون‌پذیر است.

پاسخ: گزینه «۴» اگر قرار دهیم $A = I$ و $\lambda = 1$، نتیجه می‌شود $B = 0$؛ که وارون‌ناپذیر است. بنابراین، گزینه (۱) نادرست، و گزینه (۲) می‌تواند درست باشد. ولی از آنجا که طراح سوال کاملترین گزینه را خواسته است، سایر گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم. اگر $\lambda \neq 1$ و قرار دهیم $C = I + \frac{\lambda}{1-\lambda}A$، نتیجه می‌شود:

$$BC = (I - \lambda A)(I + \frac{\lambda}{1-\lambda}A) = I + \frac{\lambda}{1-\lambda}A - \lambda A - \frac{\lambda^2}{1-\lambda}A^2 \underline{\underline{A^2 = A}} \; I + (\frac{\lambda - \lambda(1-\lambda) - \lambda^2}{1-\lambda})A = I + 0 = I$$

به همین ترتیب، نتیجه می‌شود $CB = I$. بنابراین اگر $\lambda \neq 1$ باشد، B وارون‌پذیر و $B^{-1} = I + \frac{\lambda}{1-\lambda}A$؛ لذا تنها مقداری از λ که B می‌تواند به ازای آن وارون‌پذیر باشد $\lambda = 1$ است و در نتیجه گزینه (۴) کاملترین گزینه است. این مثال، حالت کلی مثال قبل را شامل می‌شود. توجه کنید که اگر $\lambda = 0$ باشد، آنگاه $B = I$ و در نتیجه وارون‌پذیر می‌باشد. لذا، گزینه «۳» نیز نادرست است.

نتیجه۲: اگر A ماتریس دلخواهی باشد که $A^2 = A$ و $\lambda \neq 1$، آنگاه $I - \lambda A$ وارون‌پذیر و $(I - \lambda A)^{-1} = I + \frac{\lambda}{1-\lambda}A$ است.

مثال۱۹: اگر A ماتریس دلخواهی باشد بطوریکه؛ $A^2 = A$ و $I - \lambda A$ وارون‌ناپذیر باشد $(\lambda \in \mathbb{R})$، آنگاه:

۱) با توجه به A، λ مقادیر مختلفی دارد.
۲) چنین λ ای وجود ندارد.
۳) لزوماً باید $\lambda = 1$ باشد.
۴) λ تعداد متناهی مقدار را می‌تواند اختیار کند.

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به حل تست قبل، واضح است که فقط به ازای $\lambda = 1$ ، $I - \lambda A$ می‌تواند وارون‌ناپذیر باشد.

❖ **تعریف۱۰:** ماتریس مربعی A را پوچ توان گوییم، هرگاه عدد صحیح و مثبت k وجود داشته باشد بطوریکه؛ $A^k = 0$.

❖ **تعریف۱۱:** ماتریس مربعی A را خود توان گوییم، هرگاه $A^2 = A$ باشد.

مثال۲۰: ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ یک ماتریس خود توان و ماتریس $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ یک ماتریس پوچ توان است. زیرا:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

نکته۱۳: اگر A پوچ توان و $A^k = 0$ باشد، آنگاه $I - A$ معکوس‌پذیر است و داریم: $\mathbf{(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}}$

اثبات:

$$(I - A)(I + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}) = I + A + \cdots + A^{k-1} - (A + A^2 + \cdots A^{k-1} + A^k) = I - A^k = I - 0 = I$$

بنابراین، $I - A$ معکوس‌پذیر است و داریم:

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}$$

❖ **تعریف۱۲:** فرض کنید A یک ماتریس پوچ توان است؛ در اینصورت کوچکترین عدد صحیح k که به ازای آن $A^k = 0$ است، را مرتبه‌ی پوچی ماتریس A می‌نامیم.

توجه کنید که اگر مرتبه‌ی پوچی یک ماتریس k باشد، آنگاه ماتریس‌های $A, A^2, \ldots, A^{k-1}$ ناصفرند و $A^k = 0$ است.

نکته۱۴: اگر A و B ماتریس‌هایی $n \times n$ پوچ توان و $AB = BA$ باشد، آن‌گاه هر ترکیب خطی آن‌ها نیز پوچ توان است. یعنی به ازای هر $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ماتریس $\alpha A + \beta B$ نیز پوچ توان است.

اثبات: فرض کنید مرتبه‌ی پوچی ماتریس A برابر m و مرتبه‌ی پوچی ماتریس B برابر k است؛ در اینصورت داریم:

$$(\alpha A + \beta B)^{m+k} \underline{\underline{AB = BA}} \; \alpha^{m+k}A^{m+k} + \binom{m+k}{1}\alpha^{(m+k-1)}\beta A^{m+k-1}B + \cdots + \binom{m+k}{k}\alpha^m\beta^k A^m B^k +$$

$$\binom{m+k}{k+1}\alpha^{m-1}\beta^{k+1}A^{m-1}B^{k+1} + \cdots + \beta^{m+k}B^{m+k} = \sum_{i=0}^{k}\left(\binom{m+k}{i}\alpha^{m+k-i}\beta^i A^{k-i}B^i\right)A^m +$$

$$\sum_{j=1}^{m}\left(\binom{m+k}{k+j}\alpha^{m-j}\beta^{k+j}A^{m-j}B^j\right)B^k \; \underline{\underline{A^m = 0, B^k = 0}} \; 0 + 0 = 0 \Rightarrow$$ $\alpha A + \beta B$ نیز پوچ توان است.

توجه کنید که شرط $AB=BA$ لازم است؛ یعنی در صورت عدم برقراری این شرط، حکم موردنظر لزوماً برقرار نیست. به عنوان مثال؛ فرض کنید $A=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$، در اینصورت $A^۲=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ و $B^۲=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ و در نتیجه A و B هر دو پوچ توانند، ولی $A+B=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ پوچ توان نیست (از آنجا که $BA=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}=AB$، پس شرط $AB=BA$ برقرار نیست).

نکته۱۵: اگر A پوچ توان باشد، آن‌گاه به ازای هر $\lambda\in\mathbb{R}$، ماتریس $I+\lambda A$ معکوس‌پذیر است.

اثبات: چون A پوچ توان است؛ بنابراین، به ازای هر $\lambda\in\mathbb{R}$، ماتریس $-\lambda A$ نیز پوچ توان است. پس با توجه به نکات قبل (نکته ۱۳) نتیجه می‌شود؛ $I+\lambda A=I-(-\lambda A)$ وارون‌پذیر است و با فرض این‌که مرتبه‌ی پوچی A برابر k است؛ داریم:

$$(I+\lambda A)^{-۱}=(I-(-\lambda A))^{-۱}=I+(-\lambda A)+(-\lambda A)^۲+\cdots+(-\lambda A)^{k-۱}=I-\lambda A+\lambda^۲A^۲+\cdots+(-۱)^{k-۱}\lambda^{k-۱}A^{k-۱}$$

مثال۲۱: فرض کنید A ماتریسی ناصفر است که $A^۲\neq o$ و $A^۳=o$ است. در اینصورت $(I+\frac{۱}{۲}A)^{-۱}$ برابر است با:

۱) $I+\frac{۱}{۲}A-\frac{۱}{۴}A^۲$

۲) $I-\frac{۱}{۲}A+\frac{۱}{۴}A^۲$

۳) ماتریس $I+\frac{۱}{۲}A$ وارون‌ناپذیر است.

۴) $I-\frac{۱}{۲}A$

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به نکته قبل، کافی است قرار دهیم $\lambda=\frac{۱}{۲}$ و $k=۳$، در اینصورت نتیجه می‌شود:

$$(I+\frac{۱}{۲}A)^{-۱}=I-\frac{۱}{۲}A+(-\frac{۱}{۲})^۲A^۲=I-\frac{۱}{۲}A+\frac{۱}{۴}A^۲$$

نکته۱۶: اگر A پوچ توان باشد، آنگاه A معکوس‌ناپذیر (منفرد) است.

اثبات: فرض کنیم $A^k=o$. همچنین، بنابر برهان خلف فرض کنید A وارون‌پذیر است. می‌دانیم که اگر A وارون‌پذیر باشد، A^k نیز وارون‌پذیر است و $(A^k)^{-۱}=(A^{-۱})^k$؛ و این با اینکه $A^k=o$ است، تناقض دارد. چرا که ماتریس صفر وارون‌ناپذیر است.

نکته۱۷: هر ماتریس بالا مثلثی که درایه‌های قطر اصلی آن صفر باشند، پوچ توان است.

اثبات: فرض کنیم؛ $A_{n\times n}$ یک ماتریس بالا مثلثی با درایه‌های صفر روی قطر اصلی باشد. در اینصورت واضح است که سطر آخر ماتریس A، سطر صفر است. به سادگی نتیجه می‌شود، که در ماتریس $A^۲$ حداقل دو سطر صفر در پایین ماتریس داریم. اگر همین روند را ادامه دهیم، نتیجه می‌شود که در ماتریس A^n حداقل n سطر صفر داریم و این معادل با صفر بودن A^n است. بنابراین، $A^n=o$ و A پوچ توان است. لازم بذکر است که ممکن است توانهای کوچکتری از A نیز صفر شوند. در اینجا برای اثبات، حالت کلی را در نظر، و نتیجه گرفتیم که برای n لزوماً $A^n=o$ می‌شود. (در فصل ۵ کتاب بعد از بیان مفهوم چندجمله‌ای مشخصه، این نکته یک نتیجه بدیهی به نظر می‌رسد).

نکته۱۸: هر ماتریس پایین مثلثی که درایه‌های قطر اصلی آن صفر باشند، پوچ توان است.

اثبات: مشابه نکته قبل ثابت می‌شود که اگر A یک ماتریس $n\times n$ با شرایط فوق باشد، آنگاه $A^n=o$ می‌شود.

روش تعیین معکوس ماتریس A (در صورت وجود)

برای تعیین معکوس یک ماتریس دو روش را بیان می‌کنیم:

۱ـ تعیین معکوس با استفاده از تشکیل ماتریس افزوده و اعمال سطری مقدماتی.

۲ـ تعیین معکوس با توجه به ماتریس الحاقی و دترمینان ماتریس؛ که در فصل بعد به آن می‌پردازیم.

قبل از ارائه روش اول، لازم است؛ ابتدا با اعمال سطری مقدماتی و ماتریس‌های سطری – پلکانی آشنا شویم.

❖ **تعریف۱۳:** اعمال سطری مقدماتی روی یک ماتریس عبارتند از:

۱ـ تعویض دو سطر با یکدیگر

۲ـ ضرب کردن یک سطر از ماتریس در یک اسکالر ناصفر

۳ـ اضافه نمودن مضربی از یک سطر به سطر دیگر

❖ **تعریف۱۴:** ماتریس $E_{n\times n}$ را یک ماتریس مقدماتی گوییم، هرگاه بتوان آن را از ماتریس همانی I_n ، تنها با انجام یک عمل سطری مقدماتی بدست آورد.

مثال۲۲: ماتریس $E_1=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **یک ماتریس مقدماتی است، زیرا:**

$$I_3=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ **(جابجایی دو سطر)**

به همین ترتیب، $E_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **نیز مقدماتی است.**

$$I_3=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\xrightarrow{R_2=R_2+2R_1}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=E_2$$ **(افزودن مضربی از یک سطر به سطر دیگر)**

ولی ماتریس $E_3=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **مقدماتی نیست.**

توجه داشته باشید؛ که در این بخش همواره سطر i-ام از ماتریس را با نماد R_i نمایش می‌دهیم. به عنوان مثال، نماد $R_1\leftrightarrow R_2$ در بالا یعنی سطر اول و دوم را جابجا می‌کنیم.

مثال۲۳: به طور کلی چند ماتریس مقدماتی 2×2 داریم:

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

پاسخ: گزینه «۲» ماتریس‌های مقدماتی 2×2 عبارتند از:

۱) $\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (ماتریس مقدماتی حاصل از ضرب کردن سطر اول در اسکالر ناصفر k)

۲) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$ (ماتریس مقدماتی حاصل از ضرب کردن سطر دوم در اسکالر ناصفر k)

۳) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (ماتریس مقدماتی حاصل جابجایی دو سطر اول و دوم)

۴) $\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (ماتریس مقدماتی حاصل از افزودن k برابر سطر دوم به سطر اول)

۵) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$ (ماتریس مقدماتی حاصل از افزودن k برابر سطر اول به سطر دوم)

نکته۱۹: تعداد ماتریس‌های مقدماتی روی $\mathbb{Z}_p$ برابر با $4(p-1)$ است.

اثبات: با توجه به مثال فوق و اینکه در $\mathbb{Z}_p$، $(p-1)$ اسکالر ناصفر داریم؛ نتیجه می‌شود که در $\mathbb{Z}_p$، $p-1$ ماتریس مقدماتی از دسته اول، $p-1$ ماتریس مقدماتی از دسته دوم، $p-1$ ماتریس مقدماتی از دسته چهارم، $p-1$ ماتریس مقدماتی از دسته پنجم و یک ماتریس مقدماتی از دستهٔ سوم (دسته‌های شرح داده شده در مثال فوق) داریم. حال با توجه به اینکه در صورتیکه مضرب $k=1$ در نظر گرفته شود، ماتریس مقدماتی بدست آمده در دسته‌های اول و دوم یکسان می‌شود؛ بنابراین یک ماتریس مقدماتی تکراری در کل داریم و لذا تعداد کل ماتریس‌های مقدماتی 2×2 روی $\mathbb{Z}_p$ برابر است با: $((p-1)+(p-1)+1+(p-1)+(p-1))-1=4(p-1)$

❖ **تعریف۱۵:** دو ماتریس A و B را هم ارز سطری مقدماتی گویند؛ هرگاه بتوان یکی را از دیگری، با انجام تعداد متناهی عمل سطری مقدماتی بدست آورد.

مثال۲۴: ماتریس A و B هم ارز سطری مقدماتی‌اند؛

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & -6 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B=\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

زیرا، ماتریس B با انجام ۳ عمل سطری مقدماتی از ماتریس A بدست می‌آید:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&-3&1\\-1&3&0\\2&-6&2\\-1&3&-1\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{-2R_1\\+R_1}]{+R_1}\begin{bmatrix}1&-3&1\\0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=\mathbf{B}$$

همان‌طور که در مثال بالا می‌بینید، ماتریس B ساختار قابل توجهی دارد. سطرهای صفر آن در پایین ماتریس قرار دارند و یا اینکه اولین درایه‌ی ناصفر در هر سطر یک است. برای روشن شدن بیشتر مطلب؛ ماتریس زیر و اعمال سطری – مقدماتی انجام شده روی آن را در نظر بگیرید.

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&3&2&4&1\\2&3&1&5&2\\-1&-4&2&-6&-3\\4&9&7&13&-1\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{+R_1\\-4R_1}]{-2R_1}\begin{bmatrix}1&3&2&4&1\\0&-3&-3&-3&0\\0&-1&4&-2&-2\\0&-3&-1&-3&-5\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{-\frac{1}{3}R_2\\-R_2}]{\times(-\frac{1}{3})}\begin{bmatrix}1&3&2&4&1\\0&1&1&1&0\\0&0&5&-1&-2\\0&0&2&0&-5\end{bmatrix}\xrightarrow[-\frac{2}{5}R_3]{\times\frac{1}{5}}\begin{bmatrix}1&3&2&4&1\\0&1&1&1&0\\0&0&1&-\frac{1}{5}&-\frac{2}{5}\\0&0&0&\frac{2}{5}&-\frac{21}{5}\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\times\frac{5}{2}}\begin{bmatrix}1&3&2&4&1\\0&1&1&1&0\\0&0&1&-\frac{1}{5}&-\frac{2}{5}\\0&0&0&1&-\frac{21}{2}\end{bmatrix}=\mathbf{B}$$

همان‌طور که می‌بینید؛ با انجام اعمال سطری مقدماتی روی ماتریس A، به دنبال رسیدن به ماتریس B به گونه‌ای بودیم، که شرایط مشابهی با مثال قبلی داشته باشد. این دسته از ماتریس‌ها نقش مهمی در حل دستگاه‌های معادلات خطی دارند. برای کلیت بخشیدن به بحث بالا؛ تعریف زیر را در نظر بگیرید.

❖ **تعریف۱۶:** ماتریس A را یک ماتریس سطری - پلکانی گوییم، هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

۱- تمام سطرهای صفر، در پایین ماتریس قرار داشته باشند.

۲- اولین درایه غیر صفر هر سطر از سمت چپ، ۱ باشد. که به آن یک پیشرو می‌گویند.

۳- یک پیشرو هر سطر در سمت راست یک پیشرو سطر بالای آن قرار داشته باشد.

همان‌طور که می‌بینید در مثال‌های قبل از تعریف، ماتریس B؛ که از انجام اعمال سطری مقدماتی روی A به‌دست آمده بود، در واقع فرم سطری – پلکانی A می‌باشد.

مثال۲۵: ماتریس‌های زیر سطری ـ پلکانی هستند.

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\text{ و }\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&4&6\\0&1&-2\end{bmatrix}\text{ و }\mathbf{C}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}$$

و ماتریس‌های زیر سطری ـ پلکانی نیستند.

$$\mathbf{D}=\begin{bmatrix}1&4&-2\\1&0&0\\0&1&2\end{bmatrix}\text{ و }\mathbf{E}=\begin{bmatrix}1&3&6\\0&2&3\\0&0&1\end{bmatrix}\text{ و }\mathbf{F}=\begin{bmatrix}1&3&2\\0&0&0\\0&1&4\end{bmatrix}$$

در ماتریس D شرط ۳، در ماتریس E شرط ۲ و در ماتریس F شرط ۱ از تعریف، برقرار نیست.

❖ **تعریف۱۷:** ماتریس A را یک ماتریس سطری ـ پلکانی تحویل یافته گوئیم، هرگاه ماتریس A، سطری ـ پلکانی باشد و بعلاوه یک پیشرو تنها درایه غیر صفر ستون خود باشد.

برای تعیین ماتریس سطری ـ پلکانی تحویل یافته‌ی یک ماتریس؛ فقط کافی است، با انجام عملیات سطری مقدماتی روی ماتریس سطری ـ پلکانی آن، عناصر غیر صفر بالای یک‌های پیشرو در آن را صفر کنیم.

مثال۲۶: ماتریس سطری ـ پلکانی تحویل یافته‌ی هم ارز سطری مقدماتی ماتریس A را بدست آورید.

$$A=\begin{bmatrix}1&2&4&-3\\2&4&6&-3\\1&1&4&1\\-3&-5&-10&2\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}1&2&4&-3\\2&4&6&-3\\1&1&4&1\\-3&-5&-10&2\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{-R_1\\+3R_1}]{-2R_1}\begin{bmatrix}1&2&4&-3\\0&0&-2&3\\0&-1&0&4\\0&1&2&-7\end{bmatrix}\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3}\begin{bmatrix}1&2&4&-3\\0&-1&0&4\\0&0&-2&3\\0&1&2&-7\end{bmatrix}\xrightarrow{\times(-1)}\begin{bmatrix}1&2&4&-3\\0&1&0&-4\\0&0&-2&3\\0&1&2&-7\end{bmatrix}\xrightarrow[-R_2]{-2R_2}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&4&5\\0&1&0&-4\\0&0&-2&3\\0&0&2&-3\end{bmatrix}\xrightarrow{\times(-\frac{1}{2})}\begin{bmatrix}1&0&4&5\\0&1&0&-4\\0&0&1&-\frac{3}{2}\\0&0&2&-3\end{bmatrix}\xrightarrow[-2R_3]{-4R_3}\begin{bmatrix}1&0&0&11\\0&1&0&-4\\0&0&1&-\frac{3}{2}\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

بوضوح، ماتریس آخر، یک ماتریس سطری ـ پلکانی تحویل یافته است.

قضیه۳: هر ماتریس، هم ارز سطری مقدماتی با یک ماتریس سطری ـ پلکانی و یک ماتریس سطری ـ پلکانی تحویل یافته است.

اثبات: با توجه به تعریف، بوضوح با شروع از هر ماتریس و انجام دنباله‌ای از عملیات سطری مقدماتی، می‌توان به ماتریس سطری ـ پلکانی و یا سطری ـ پلکانی تحویل یافته‌ی، هم ارز مقدماتی آن رسید.

مثال۲۷: کدامیک از گزینه‌های زیر صحیح است؟

۱) هر ماتریس، هم ارز سطری یک ماتریس قطری وارون‌پذیر است.
۲) ماتریس صفر، هم ارز سطری ـ پلکانی ندارد.
۳) هر ماتریس وارون‌پذیر، هم ارز سطری I است.
۴) هر ماتریس مربعی، هم ارز سطری ماتریس همانی است.

پاسخ: گزینه «۳» ماتریس صفر یک ماتریس قطری وارون‌ناپذیر است که فرم سطری ـ پلکانی آن خودش است. بنابراین، گزینه‌های (۱)، (۲) و (۴) غلطند و گزینه‌ی (۳) باید صحیح باشد. همان‌طور که در ادامه خواهیم دید؛ با توجه به روند یافتن معکوس یک ماتریس وارون‌پذیر، یک ماتریس وارون‌پذیر لزوماً هم ارز سطری ماتریس همانی است. در واقع این رابطه دو طرفه است؛ یعنی ماتریس دلخواه $A_{n\times n}$ وارون‌پذیر است، اگر وتنها اگر هم ارز سطری مقدماتی ماتریس I_n باشد.

مثال۲۸: ماتریس سطری ـ پلکانی و سطری ـ پلکانی تحویل یافته‌ی هم ارز با ماتریس زیر را بیابید.

$$\begin{bmatrix}0&-2&-6&2&-2&0\\0&0&0&2&1&9\\0&3&9&2&2&19\\0&-2&-6&2&0&2\end{bmatrix}$$

بعد از انجام عملیات سطری مقدماتی لازم، ماتریس‌های زیر حاصل می‌شوند.

ماتریس سطری ـ پلکانی: $\begin{bmatrix}0&1&3&-1&0&-1\\0&0&0&1&\frac{1}{2}&\frac{9}{2}\\0&0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$ ، ماتریس سطری ـ پلکانی تحویل یافته: $\begin{bmatrix}0&1&3&0&0&3\\0&0&0&1&0&4\\0&0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$

کاربرد اصلی ماتریس‌های سطری - پلکانی و سطری - پلکانی تحویل یافته، در حل دستگاههای معادلات خطی می‌باشد که در بخش بعد به آن می‌پردازیم. یادآوری می‌کنیم که با انجام هر عمل سطری مقدماتی روی ماتریس همانی به یک ماتریس مقدماتی می‌رسیم. در قضیه‌ی بعد نشان می‌دهیم که می‌توان به جای انجام یک عمل سطری مقدماتی روی یک ماتریس، آن ماتریس را از چپ در ماتریس مقدماتی متناظر با آن عمل ضرب کرد. در واقع با استفاده از این قضیه می‌توانیم به این نتیجه برسیم که انجام اعمال سطری مقدماتی روی یک ماتریس، معادل با ضرب کردن ماتریس از چپ، در دنباله‌ای از ماتریس‌های مقدماتی است.

قضیه۴: اگر e یک عمل سطری مقدماتی و E ماتریس مقدماتی متناظر با آن باشد؛ یعنی $E=e(I)$ (ماتریس E از انجام عمل e روی ماتریس همانی بدست آمده است). در اینصورت برای هر ماتریس دلخواه مانند A، داریم: $e(A)=EA$

اثبات: با توجه به اینکه e، یکی از اعمال سطری مقدماتی است؛ برای اثبات به صورت جداگانه، اثر هر عمل را بررسی می‌کنیم. فرض کنید که e، عمل ضرب کردن سطر i-ام ماتریس در اسکالر k باشد و $A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}$ باشد. در اینصورت داریم:

$$E=e(I_n)=\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & k & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}\Rightarrow EA=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots\ \vdots & \ddots & \vdots\\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}\xlongequal{\text{طبق تعریف}} e(A)$$

بنابراین، اگر e عمل ضرب کردن سطری از ماتریس در اسکالر ناصفر k باشد، قضیه برقرار است. به همین ترتیب می‌توان برای دو عمل دیگر سطری مقدماتی، درستی قضیه را بررسی کرد.

نکته۲۰: اگر ماتریس B از ماتریس A با انجام اعمال سطری مقدماتی $e_1, e_2, \dots, e_n$ بدست آمده باشد و ماتریس‌های مقدماتی $E_1, E_2, \dots, E_n$، متناظر با این اعمال سطری مقدماتی باشند؛ داریم: $B=E_nE_{n-1}\cdots E_1A$

نکته‌ی حائز اهمیت در نکته‌ی بالا ، ترتیب اعمال سطری مقدماتی انجام شده روی A است. یعنی اگر ابتدا عمل سطری مقدماتی e_1 و سپس عمل e_2 را روی ماتریس A انجام دهیم؛ ماتریس حاصل برابر با E_2E_1A، ولی اگر ابتدا عمل e_2 و سپس عمل e_1 را روی ماتریس A انجام دهیم؛ ماتریس حاصل برابر با E_1E_2A است.

مثال۲۹: فرض کنید $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & -1 & 2\\ 2 & 3 & 5\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 5\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$ هم ارز سطری باشند. در اینصورت کدامیک از ماتریس‌های زیر در رابطه $B=PA$ صدق می‌کند.

۱) $P=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$ ۲) $P=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix}$ ۳) $P=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix}$ ۴) $P=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix}$

پاسخ: گزینه «۳» می‌توان ابتدا A^{-1} را محاسبه و سپس $P=BA^{-1}$ را بدست آورد؛ که طولانی و خسته کننده است. روش دیگر این است که از ماتریس‌های مقدماتی استفاده کنیم.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & -1 & 2\\ 2 & 3 & 5\end{bmatrix}\xrightarrow[-2R_1]{+R_1}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 5\\ 0 & -1 & -1\end{bmatrix}\xrightarrow{+R_2}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 5\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}=B$$

بنابراین، ماتریس B با انجام ۳ عمل سطری مقدماتی از A بدست می‌آید؛ که ماتریس‌های مقدماتی متناظر با آنها به ترتیب برابرند با:

$$E_1=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \text{ و } E_2=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -2 & 0 & 1\end{bmatrix} \text{ و } E_3=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

و بنابر نکته قبل می‌دانیم؛ $B=E_3E_2E_1A$، بنابراین: $P=E_3E_2E_1=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix}$

توجه کنید که می‌توان بدون محاسبه ماتریس‌های E_1، E_2 و E_3، به صورت مستقیم و با انجام همان ترتیب از اعمال سطری مقدماتیِ لازم برای رسیدن از A به B روی I، ماتریس P را به دست آورد.

$$I_3=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow[-2R_1]{+R_1}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ -2 & 0 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow{+R_2}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix}=\mathbf{P}$$

قضیه۵: هر ماتریس مقدماتی، معکوس‌پذیر است.

اثبات: با توجه به تعریف ماتریس‌های مقدماتی، اثبات بدیهی است.

از قبل می‌دانیم که حاصلضرب ماتریس‌های معکوس‌پذیر، معکوس‌پذیر است. از طرفی واضح است که I_n نیز معکوس‌پذیر و $I_n^{-1}=I_n$ است. پس می‌توان قضیه زیر را بیان کرد.

قضیه۶: ماتریس $A_{n\times n}$ معکوس‌پذیر است، اگر و تنها اگر A هم ارز سطری مقدماتی I_n باشد.

اثبات: فرض کنیم A هم ارز سطری مقدماتی I_n است. پس می‌توان I_n را با تعداد متناهی عمل سطری مقدماتی از A بدست آورد. حال اگر فرض کنید؛ ماتریس‌های مقدماتی متناظر با اعمال سطری مقدماتی موردنیاز، ماتریس‌های $E_1, E_2, \dots, E_k$ باشند؛ داریم:

$$I_n = E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1 A \qquad (1)$$

می‌دانیم که $E_1, E_2, \dots, E_k$ معکوس‌پذیرند (ماتریس‌های مقدماتی معکوس‌پذیرند). پس اگر طرفین رابطه (۱) را در معکوس E_iها از چپ ضرب کنیم، نتیجه می‌شود:

$$E_1^{-1}E_2^{-1}\cdots E_{k-1}^{-1}E_k^{-1}I_n = A \qquad (2)$$

از آنجا که؛ E_i^{-1}ها نیز معکوس‌پذیر و حاصلضرب تعداد متناهی ماتریس معکوس‌پذیر نیز، معکوس‌پذیر است. بنابراین، ماتریس A نیز معکوس‌پذیر و داریم:

$$A^{-1} = (E_1^{-1}E_2^{-1}\dots E_{k-1}^{-1}E_k^{-1}I_n)^{-1} = E_k E_{k-1}\dots E_2 E_1 I_n \qquad (3)$$

رابطه‌ی (۳) بیان می‌کند که ماتریس A^{-1} را می‌توان از ضرب ماتریس‌های E_1 ، ... ، E_k در ماتریس همانی I_n بدست آورد. از آنجا که ضرب ماتریس مقدماتی از چپ در یک ماتریس، معادل انجام عمل سطری مقدماتی متناظر با آن ماتریس مقدماتی، روی آن ماتریس است؛ بنابراین، به سادگی دیده می‌شود که اگر همان ترتیب اعمال سطری مقدماتی که روی A انجام می‌شود تا به I_n برسیم، روی I_n انجام شود، به A^{-1} می‌رسیم. این موضوع، علاوه بر اینکه نشان می‌دهد؛ اگر ماتریس A معکوس‌پذیر باشد، حتماً هم‌ارز سطری مقدماتی I_n است (طرف دوم قضیه)؛ روش بدست آوردن ماتریس A^{-1} (در صورت وجود) را نیز، ارائه می‌کند؛ که آن را به‌صورت نتیجه‌ی قضیه بیان می‌کنیم.

نتیجه۳: برای تعیین معکوس ماتریس $A_{n\times n}$ (در صورت وجود) ماتریس A و I_n را کنار هم به صورت $[A\vdots I_n]$ می‌نویسیم و سعی می‌کنیم با اعمال سطری مقدماتی از ماتریس A به I_n برسیم و این اعمال را همزمان روی I_n نیز انجام می‌دهیم. در اینصورت هنگامی که ماتریس A به I_n تبدیل شود، در طرف دیگر نقطه‌چین ماتریس I_n به ماتریس A^{-1} تبدیل شده است.

مثال۳۰: معکوس A را با استفاده از اعمال سطری مقدماتی تعیین کنید.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

پاسخ: ابتدا ماتریس $[A\vdots I]$ را تشکیل می‌دهیم و سپس اعمال سطری مقدماتی را اعمال می‌کنیم.

$$[A\vdots I]=\left[\begin{array}{c:c} \overbrace{\begin{matrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{matrix}}^{A} & \overbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}^{I_3} \end{array}\right] \xrightarrow{-3R_1} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \xrightarrow{+R_2} \\ \\ \xrightarrow{-R_2} \end{array} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{+2R_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow A^{-1}=\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

توجه کنید که هدف، رسیدن از A به I_n، با استفاده از اعمال سطری مقدماتی است. بنابراین همیشه؛ ابتدا سعی می‌کنیم عناصر قطر اصلی را به یک تبدیل کنیم؛ سپس سایر عناصر ستون مربوط به آنها را به صفر برسانیم. این سیاست را از اولین عنصر قطر اصلی شروع کرده و به ترتیب ادامه می‌دهیم تا به ماتریس I_n برسیم.

نتیجه۴: نتیجه دیگری که می‌توان از قضیه بالا گرفت این است که؛ اگر یک ماتریس، هم ارز سطری مقدماتی I_n نباشد؛ لزوماً معکوس‌ناپذیر (یا منفرد) است.

مثال۳۱: آیا ماتریس روبه‌رو معکوس‌پذیر است.

$$A=\begin{bmatrix}۳&۱&۴\\۶&۳&۱\\۶&۲&۸\end{bmatrix}\xrightarrow[-۲R_۱]{-۲R_۱}\begin{bmatrix}۳&۱&۴\\ ۰&۱&-۷\\ ۰&۰&۰\end{bmatrix}$$

چون یک سطر صفر داریم، ماتریس A نمی‌تواند هم ارز سطری مقدماتی $I_۳$ باشد و لذا معکوس‌ناپذیر است.

نتیجه۵: با توجه به بحث بالا می‌توان نتیجه گرفت که یک ماتریس دلخواه، در صورت داشتن هر یک از شرایط زیر لزوماً معکوس‌ناپذیر است (هر یک از شرایط به تنهایی کفایت می‌کند).

۱) یک سطر (ستون) آن صفر باشد.

۲) یک سطر (ستون) آن به صورت مضربی از سطر (ستون) دیگر باشد، یا اینکه به صورت مجموعی از مضارب دیگر سطرها (ستون‌ها) باشد.

مثال۳۲: کدامیک از ماتریس‌های زیر وارون‌پذیر است؟

۱) $\begin{bmatrix}۱&۲&۳&۴\\۵&۶&۷&۸\\۹&۱۰&۱۱&۱۲\\۳&۲&۱&۰\end{bmatrix}$
۲) $\begin{bmatrix}-۲&۳&۱&۲\\۴&۱&۵&۲\\۳&۴&۵&۸\\۱&۰&۰&۱\end{bmatrix}$
۳) $\begin{bmatrix}۳&۲&۱&۴\\۰&۱&۳&۶\\۰&۰&۰&۱\\۰&۰&۰&۵\end{bmatrix}$
۴) $\begin{bmatrix}-۱&-۲&۳&۱\\۱&۲&۱&۵\\۲&۴&۲&۱۰\\۴&۳&۲&۱\end{bmatrix}$

پاسخ: گزینه «۲» در ماتریس گزینه (۱) داریم $R_۳=۲R_۲-R_۱$؛ بنابراین سطر سوم ماتریس به صورت مجموعی از ضرایب سطرهای اول و دوم و در نتیجه وارون‌ناپذیر است. در ماتریس گزینه (۳) سطر چهارم، ۵ برابر سطر سوم است $(R_۴=۵R_۳)$ بنابراین ماتریس وارون‌ناپذیر است. در ماتریس گزینه (۴) نیز، سطر سوم دو برابر سطر دوم است $(R_۳=۲R_۲)$ بنابراین وارون‌ناپذیر است. پس تنها ماتریسی که می‌تواند وارون‌پذیر باشد، گزینه‌ی (۲) است.

نکته۲۱: یک ماتریس بالا مثلثی، پایین مثلثی و یا قطری وارون‌پذیر است، اگر و تنها اگر تمام درایه‌های قطر اصلی آن ناصفر باشند.

اثبات: با توجه به روند یافتن معکوس یک ماتریس در روش ماتریس افزوده بوضوح دیده می‌شود که شرط لازم و کافی برای اینکه بتوان با انجام دنباله‌ای از عملیات سطری مقدماتی روی یک ماتریس بالا مثلثی، پایین مثلثی و یا قطری به ماتریس همانی رسید، این است که تمام درایه‌های قطری آنها ناصفر باشد. البته در فصل بعد، هنگام تعریف دترمینان یک ماتریس و رابطه آن با وارون‌پذیری ماتریس‌ها، این نکته بدیهی به نظر می‌رسد.

مثال۳۳: فرض کنید $n\in\mathbb{N}$ و $A=\begin{bmatrix}\cos\frac{\pi}{n}&-\sin\frac{\pi}{n}\\ \sin\frac{\pi}{n}&\cos\frac{\pi}{n}\end{bmatrix}$، در اینصورت $A^{۲n}$ برابر است با:

۱) A
۲) $\begin{bmatrix}\cos\frac{\pi}{n}&\sin\frac{\pi}{n}\\ -\sin\frac{\pi}{n}&\cos\frac{\pi}{n}\end{bmatrix}$
۳) $\begin{bmatrix}-\sin\frac{\pi}{n}&\cos\frac{\pi}{n}\\ \cos\frac{\pi}{n}&\sin\frac{\pi}{n}\end{bmatrix}$
۴) $I_۲$

پاسخ: گزینه «۴» فرض کنید:

$$B(\alpha)=\begin{bmatrix}\cos\alpha&-\sin\alpha\\ \sin\alpha&\cos\alpha\end{bmatrix}\Rightarrow B^۲(\alpha)=\begin{bmatrix}\cos\alpha&-\sin\alpha\\ \sin\alpha&\cos\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\alpha&-\sin\alpha\\ \sin\alpha&\cos\alpha\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos^۲\alpha-\sin^۲\alpha&-۲\cos\alpha\sin\alpha\\ ۲\sin\alpha\cos\alpha&\cos^۲\alpha-\sin^۲\alpha\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos۲\alpha&-\sin۲\alpha\\ \sin۲\alpha&\cos۲\alpha\end{bmatrix}$$

به هیمن ترتیب نتیجه می‌شود:

$$B^۴(\alpha)=\begin{bmatrix}\cos۴\alpha&-\sin۴\alpha\\ \sin۴\alpha&\cos۴\alpha\end{bmatrix} \text{ و ... و } B^{۲n}(\alpha)=\begin{bmatrix}\cos(۲n\alpha)&-\sin(۲n\alpha)\\ \sin(۲n\alpha)&\cos(۲n\alpha)\end{bmatrix},\ n\in\mathbb{N}\qquad(۱)$$

حال اگر در رابطه‌ی (۱) قرار دهیم $\alpha=\frac{\pi}{n}$، نتیجه می‌شود:

$$A^{۲n}=B^{۲n}(\frac{\pi}{n})=\begin{bmatrix}\cos(۲\pi)&-\sin(۲\pi)\\ \sin(۲\pi)&\cos(۲\pi)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۰\\ ۰&۱\end{bmatrix}=I_۲$$

مثال۳۴: به ازای هر ماتریس دلخواه مانند A، ماتریس متقارن S و پاد متقارن W وجود دارد بطوریکه ؛ $A = S + W$.

پاسخ: کافی است قرار دهیم $S = \frac{1}{2}(A + A^t)$ و $W = \frac{1}{2}(A - A^t)$.

مثال۳۵: کدامیک از گزینه‌های زیر صحیح نیست؟

۱) هر ماتریس دلخواه را می‌توان به صورت مجموع دو ماتریس متقارن و پاد متقارن نوشت.

۲) دو ماتریس مانند A و B وجود دارد، بطوریکه رابطه $AB - BA = I_n$ برقرار باشد.

۳) اگر ماتریس ناصفر A پاد متقارن باشد، آنگاه $I + A$ وارون‌پذیر است.

۴) اگر A پوچ توان باشد، آنگاه A منفرد است.

پاسخ: گزینه «۲» از قبل می‌دانیم که به ازای هر دو ماتریس مانند A و B، رابطه $AB - BA = I_n$ نمی‌تواند برقرار باشد. (زیرا: $(tr(AB - BA) = 0 \neq n = tr(I_n))$. بنابراین گزینه «۲» غلط است. توجه کنید که درستی گزینه‌های ۱ و ۴ نیز در نکات و مثال‌های قبلی ثابت شده است. همچنین می‌توانیم گزینه «۳» را نیز به عنوان یک نکته در نظر بگیریم که در فصل‌های بعد به اثبات آن می‌پردازیم.

نکته: اگر A یک ماتریس پادمتقارن باشد، آنگاه $I + A$ وارون‌پذیر است.

نکته۲۲: معکوس هر ماتریس بالا مثلثی (پایین مثلثی) یک ماتریس پایین مثلثی (بالا مثلثی) است.

اثبات: با توجه به روند تعیین معکوس یک ماتریس به کمک ماتریس افزوده و اعمال سطری مقدماتی به سادگی دیده می‌شود که اگر ماتریس سمت چپ خط‌چین در ابتدا بالا مثلثی (پایین مثلثی) باشد، ماتریس سمت راست خط‌چین در انتها پایین مثلثی (بالا مثلثی) خواهد بود.

روش دیگر: با فرض اینکه A بالا مثلثی (پایین مثلثی) است، ماتریس B را به گونه‌ای تعیین می‌کنیم که $AB = I_n$ باشد. بدین گونه نتیجه می‌شود که B لزوماً باید پایین مثلثی (بالا مثلثی) باشد.

توجه کنید که همانند اعمال سطری مقدماتی، می‌توان اعمال ستونی مقدماتی نیز تعریف کرد. در واقع، تمام مباحث و نکات مطرح شده در مورد سطرهای یک ماتریس و همچنین اعمال سطری مقدماتی را می‌توان در مورد ستون‌های یک ماتریس و یا اعمال ستونی مقدماتی بیان کرد. در ادامه به صورت خلاصه به اعمال ستونی مقدماتی و نکات مربوط به آنها اشاره می‌کنیم.

❖ **تعریف۱۸:** اعمال ستونی مقدماتی روی یک ماتریس عبارتند از:

۱ ـ تعویض دو ستون با یکدیگر.

۲ـ ضرب کردن یک ستون از ماتریس در یک اسکالر ناصفر.

۳ـ اضافه نمودن مضربی از یک ستون به ستون دیگر.

❖ **تعریف۱۹:** ماتریس E را ستونی مقدماتی گوییم، هرگاه بتوان آن را با انجام یک عمل ستونی مقدماتی روی ماتریس همانی I_n بدست آورد.

❖ **تعریف۲۰:** دو ماتریس A و B را هم ارز ستونی مقدماتی گویند، هرگاه بتوان با انجام تعداد متناهی عمل ستونی مقدماتی روی یکی از دو ماتریس، ماتریس دیگر را بدست آورد.

❖ **تعریف۲۱:** ماتریس A را یک ماتریس ستونی ـ پلکانی گوییم، هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

۱ـ تمام ستون‌های صفر در سمت راست ماتریس قرار داشته باشند.

۲ـ اولین درایه غیرصفر هر ستون از بالا، یک باشد، که به آن یک پیشرو می‌گویند.

۳ـ یک پیشرو هر ستون بالای یک پیشرو ستون سمت راست آن قرار داشته باشد.

مثال۳۶: ماتریس‌های زیر ستونی ـ پلکانی هستند.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

مثال۳۷: ماتریس‌های زیر ستونی ـ پلکانی نیستند.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

در ماتریس A ، شرط سوم؛ در ماتریس B ، شرط اول و در ماتریس C شرط دوم از تعریف نقض شده است.

❖ **تعریف۲۲:** ماتریس A را یک ماتریس ستونی ـ پلکانی تحویل یافته گوییم، هرگاه ماتریس A، ستونی ـ پلکانی باشد و علاوه بر آن یک پیشرو، تنها درایهٔ ناصفر سطر خود باشد.

بوضوح دیده می‌شود که تمام تعاریف فوق، کاملاً شبیه تعاریف متناظر در باب اعمال سطری مقدماتی می‌باشد. به همین ترتیب قضایای مشابهی نیز برقرارند که آنها را بدون اثبات بیان می‌کنیم. بدیهی است که می‌توان اثبات‌های متناظری برای قضایای این بخش ارائه کرد.

قبل از بیان قضایا، توجه کنید که برای تعیین فرم ستونی ـ پلکانی یا ستونی ـ پلکانی تحویل یافتهٔ یک ماتریس، باید با استفاده از اعمال ستونی مقدماتی، ابتدا اولین درایهٔ ناصفر هر ستون را به یک تبدیل کرد و سپس تمام درایه‌های سمت راست یک را صفر کرد و در نهایت با جابجایی ستون‌ها، برقراری شرط ۱و۳ را ایجاد کرد (البته در فرم تحویل یافتهٔ ستونی ـ مقدماتی باید تمام درایه‌های سمت راست و چپ یک پیشرو را به صفر تبدیل کرد).

مثال۳۸: ماتریس تحویل یافتهٔ ستونی ـ مقدماتی هم ارز با ماتریس A را بدست آورید.

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&4&8\\2&0&3\end{bmatrix}\xrightarrow[c_3=c_3-3c_1]{c_2=c_2-2c_1}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&4&8\\2&-4&-3\end{bmatrix}\xrightarrow[c_3=c_3-2c_2]{c_2\times\frac{1}{4}}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&-1&5\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{c_2=c_2+\frac{1}{5}c_3\\ c_1=c_1-\frac{2}{5}c_3}]{c_3\times\frac{1}{5}}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

توجه کنید که منظور از c_i ، ستون i ـ ام ماتریس A است. مانند اعمال سطری مقدماتی، می‌توان به جای انجام یک عمل ستونی مقدماتی روی ماتریس A ، ماتریس مقدماتی متناظر با آن عمل را در ماتریس A ضرب کرد.

نکته۲۳: اگر ماتریس B ، با انجام دنباله‌ای از اعمال ستونی مقدماتی مانند $e_1,e_2,\ldots,e_k$ روی ماتریس A حاصل شود و ماتریس‌های ستونی مقدماتی $E_1,E_2,\ldots,E_k$ به ترتیب ماتریس‌های متناظر با اعمال $e_1,e_2,\ldots,e_k$ باشند، آنگاه داریم:

$$B=AE_1E_2\ldots E_k$$

توجه کنید که برای انجام اعمال سطری مقدماتی، ماتریس A را از چپ در ماتریس‌های مقدماتی ضرب می‌کنیم؛ در حالیکه برای انجام اعمال ستونی مقدماتی، ماتریس A را از راست در ماتریس‌های مقدماتی ضرب می‌کنیم.

قضیه۷: ماتریس A وارون پذیر است، اگر و تنها اگر هم ارز ستونی مقدماتی با ماتریس همانی باشد.

با توجه به مثال قبل می‌بینیم که ماتریس $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&4&8\\2&0&3\end{bmatrix}$، وارون پذیر است.

می‌توان برای تعیین معکوس ماتریس $A_{n\times n}$، از ماتریس افزودهٔ $\begin{bmatrix}A\\ \hdashline I_n\end{bmatrix}$ و اعمال ستونی مقدماتی نیز استفاده کرد.

دستگاه معادلات خطی

دستگاههای معادلات خطی در بسیاری از مسائل علمی رشته‌های مهندسی ظاهر می‌شوند. به همین دلیل حل چنین دستگاههایی، همواره در جبر خطی مورد توجه بوده و روش‌های منظمی برای حل آنها بدست آمده است. در حالت ساده اگر a ، b و c اعداد حقیقی باشند، آنگاه معادله $ax+by=c$ یک معادله خطی با دو مجهول x و y است. به همین ترتیب در حالت کلی اگر a_1 ، a_2 ، ... ، a_n و b اعداد حقیقی باشند، آنگاه عبارت زیر یک معادله خطی با n متغیر (مجهول) است.

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b$$

تذکر۱: یک معادله خطی شامل حاصلضرب، یا ریشه‌هایی از متغیرها نیست. به همین ترتیب در یک معادله خطی، متغیرها به صورت شناسه‌ای از توابع مثلثاتی، لگاریتمی و یا نمایی نمی‌باشند و فقط با توان یک ظاهر می‌شوند، ولی ضرایب متغیرها به هر شکلی می‌تواند باشد (کافی است اسکالر باشند).

مثال۳۹: معادلات روبه‌رو خطی نیستند. $\mathbf{x^2-xy+3=0\ ,\ \sin(x)-2x+y=1\ ,\ \sqrt{x}-2y=1\ ,\ Logx+e^y=3}$

مثال۴۰: معادلات روبه‌رو خطی‌اند. $\mathbf{Log(2)x+4y=e^3\ ,\ \sin(3)y+ex=Log6\ ,\ 4x-3y+2z=6}$

منظور از جواب یک معادله خطی، مانند $a_1x_1+\cdots+a_nx_n=b$ ، دنباله‌ای از اعداد مانند s_1 ، s_2 ، .... ، s_n است؛ به طوریکه با جایگزین کردن آنها در معادله به جای متغیرهای x_1، x_2، ... ، x_n، معادله برقرار شود.

مثال۴۱: دوتایی (۲،۲) یک جواب معادله $3x-2y=2$ است. در حالت کلی، جوابهای معادله عبارتند از: $x=t\ ,\ y=\frac{3t-2}{2}$ که $t\in\mathbb{R}$، یک عدد حقیقی دلخواه است.

❖ **تعریف۲۳:** گردایه‌ای متناهی از معادلات خطی برحسب متغیرهای x_1، x_2 ، ... ، x_n یک دستگاه معادلات خطی نامیده می‌شود.

در حالت کلی یک دستگاه معادلات خطی شامل m معادله و n مجهول (یا متغیر) به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1)$$

که در آن a_{ij}ها و b_iها اسکالر و معلومند و x_jها مجهولند. حال اگر قرار دهیم:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ و } X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ و } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

با توجه به ضرب ماتریس‌ها، بوضوح دیده می‌شود که می‌توان دستگاه (۱) را به صورت نمایش ماتریسی روبه‌رو نوشت: $AX = \mathbf{b} \quad (2)$

که در آن A را ماتریس ضرایب، $\mathbf{b}$ را بردار معلومات و X را بردار مجهولات (یا متغیرها) می‌نامند.

منظور از جواب یک دستگاه معادلات شامل n متغیر، دنباله‌ای از اعداد مانند $s_1, s_2, \dots, s_n$ است که با قرار دادن آن در دستگاه، تمام معادلات دستگاه برقرار شوند.

مثال۴۲: دوتایی $(-1,2)$ یک جواب دستگاه روبه‌رو است: $\begin{cases} 3x + y = -1 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$

❖ **تعریف۲۴:** یک دستگاه معادلات **سازگار** گوییم، هرگاه حداقل یک جواب داشته باشد و **ناسازگار** گوییم، هرگاه هیچ جوابی نداشته باشد.

نکته۲۴: یک دستگاه معادلات خطی، یا اصلاً جواب ندارد، یا فقط جواب منحصر بفرد دارد و یا بینهایت جواب دارد.

❖ **تعریف۲۵:** ماتریس افزوده دستگاه معادلات خطی (۱)، که با $[A \vdots \mathbf{b}]$ نمایش داده می‌شود؛ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$[A \vdots \mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

حل دستگاه و تعیین جواب آن با استفاده از ماتریس افزوده

۱ـ روش گاوس ـ جردن: در این روش ابتدا ماتریس افزوده دستگاه را تشکیل داده؛ سپس فرم تحویل یافته سطری ـ پلکانی آن را تعیین می‌کنیم. در نهایت دوباره دستگاه معادل با فرم تحویل یافته سطری ـ پلکانی بدست آمده را می‌نویسیم. در این حالت، تعیین جواب دستگاه (در صورت وجود) بسیار ساده می‌باشد. این روش به نام روش حذفی گاوس - جردن شناخته شده است.

قضیه۸: جواب یک دستگاه معادلات خطی و دستگاه معادل فرم تحویل یافته سطری ـ پلکانی آن، یکسان است.

اثبات: کافی است نشان دهیم اعمال سطری مقدماتی تأثیری روی جواب یک دستگاه ندارند. برای این منظور می‌توان تأثیر هر عمل را جداگانه بررسی کرد؛ که این نیز به سادگی قابل انجام می‌باشد.

مثال۴۳: جواب دستگاه زیر را در صورت وجود بدست آورید.

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = -6 \\ 2x + 4y + 6z = -6 \\ x + y + 4z = 2 \end{cases} \Rightarrow [A \vdots \mathbf{b}] = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & 4 & 6 & -6 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \end{array}\right]$$

با انجام اعمال سطری مقدماتی نتیجه می‌شود:

$$\text{فرم تحویل یافته سطری - پلکانی} = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 22 \\ 0 & 1 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{دستگاه معادل}} \begin{cases} x = 22 \\ y = -8 \\ z = -3 \end{cases}$$

که بدین ترتیب جواب دستگاه اولیه به صورت $(22, -8, -3)$ حاصل می‌شود.

در دستگاه‌هایی که جواب نداشته باشند نیز به کمک این روش می‌توان عدم وجود جواب را تشخیص داد. برای این منظور به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۴۴: دستگاه معادلات روبه‌رو دارای:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3-3x_4=6 \\ 2x_1+4x_2+6x_3-3x_4=6 \\ x_1+x_2+4x_3+x_4=-2 \\ 3x_1+5x_2+10x_3-2x_4=3 \end{cases}$$

۱) یک جواب منحصر بفرد است.
۲) بینهایت جواب است.
۳) جواب نیست (جواب ندارد).
۴) تعداد متناهی جواب است.

پاسخ: گزینه «۳» با تشکیل ماتریس افزوده آن نتیجه می‌شود:

$$[A\vdots \mathbf{b}]=\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & -3 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & -3 & 6 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & -2 \\ 3 & 5 & 10 & -2 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \xrightarrow{-2R_1} \\ \xrightarrow{-R_1} \\ \xrightarrow{-3R_1} \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & -1 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & -1 & -2 & 7 & -15 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & -3 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & -1 & -2 & 7 & -15 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{+2(R_2+R_3)} \\ \xrightarrow{\times(-1)} \\ \\ \xrightarrow{-(R_2+R_3)} \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 11 & -22 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{معادل}]{\text{دستگاه}} \begin{cases} x_1+11x_4=-22 \\ x_2-4x_4=8 \\ -2x_3+3x_4=-6 \\ 0 \quad =-1 \longrightarrow \end{cases}$$

غیرقابل قبول (غ ق ق) $\Rightarrow$ دستگاه جواب ندارد.

روش دوم: اگر معادلات دستگاه را به ترتیب از بالا به پایین R_1 ، R_2 ، R_3 و R_4 بنامیم، داریم:

$$\left.\begin{array}{r} R_4-R_3 \Rightarrow 2x_1+4x_2+6x_3-3x_4=5 \\ R_2 \Rightarrow 2x_1+4x_2+6x_3-3x_4=6 \end{array}\right\} \Rightarrow 5=6 \text{ غ ق ق } \Rightarrow \text{ دستگاه جواب ندارد.}$$

نتیجه۶: اگر در فرم تحویل یافته سطری ـ پلکانی ماتریس افزوده‌ی یک دستگاه معادلات خطی، تمام عناصر یک سطر که در سمت چپ نقطه‌چین قرار دارند صفر شود؛ ولی در سمت راست نقطه‌چین در همان سطر اسکالر ناصفر داشته باشیم، دستگاه جواب ندارد.

همچنین، در صورتیکه دستگاه جواب داشته باشد (یعنی با مشکل ذکر شده در بالا مواجه نشویم)، دستگاه دارای یک جواب منحصر بفرد است، اگر تعداد یک‌های پیشرو در فرم تحویل یافته سطری ـ پلکانی ماتریس افزوده و تعداد متغیرها با هم برابر باشند؛ و دستگاه دارای بی‌نهایت جواب است، اگر تعداد متغیرها از تعداد یک‌های پیشرو بیشتر باشد؛ که در چنین حالتی اصولاً جواب دستگاه به صورت پارامتری تعیین می‌شود.

مثال ۴۵: فرض کنید A یک ماتریس دلخواه و R فرم تحویل یافته سطری ـ پلکانی آن باشد. در اینصورت کدامیک از گزینه‌های زیر صحیح نیست.

۱) اگر تعداد سطرهای ناصفر R و متغیرها، در دستگاه $AX=0$ برابر باشند؛ دستگاه جواب منحصر بفرد دارد.
۲) اگر تعداد یک‌های پیشرو در R و متغیرها برابر باشند، دستگاه $AX=\mathbf{b}$ به ازای هر بردار $\mathbf{b}$ دارای جواب است.
۳) اگر A وارون‌پذیر باشد، لزوماً تعداد یک‌های پیشرو در R و متغیرها با هم برابرند.
۴) دستگاه $AX=0$ دارای بینهایت جواب است، اگر تعداد سطرهای غیر صفر R از تعداد متغیرها کمتر باشد.

پاسخ: گزینه «۲» دستگاه معادلات $AX=0$ تحت هر شرایطی همواره دارای جواب $X=0$ است. بنابراین با توجه به بحث بالا گزینه‌های (۱) و (۴) صحیح می‌باشند (توجه کنید که در ماتریس R تعداد سطرهای غیرصفر و یک‌های پیشرو با هم برابرند). از قبل می‌دانیم که اگر $A_{n\times n}$ وارون‌پذیر باشد، آنگاه A هم ارز سطری ماتریس I_n و در نتیجه $R=I_n$ است؛ لذا تعداد یک‌های پیشرو و سطرهای غیرصفر آن با هم برابرند. بنابراین، گزینه‌ی (۳) نیز صحیح است.

برای رد کردن گزینه (۲)، دستگاه زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3=6 \\ 2x_1+4x_2+6x_3=6 \\ x_1+x_2+4x_3=-3 \\ 3x_1+5x_2+10x_3=3 \end{cases} \xrightarrow{\text{ماتریس افزوده}} [A\vdots b]=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & 10 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{مقدماتی}]{\text{عملیات سطری}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -22 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

واضح است که دستگاه جواب ندارد و این در حالی است که تعداد یک‌های پیشرو در R و متغیرها با هم برابرند (۳ متغیر و ۳ یک پیشرو داریم). بنابراین، گزینه‌ی (۲) صحیح نیست.

مثال۴۶: دستگاه معادلات زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=4 \\ 2x_1-x_2+2x_3=6 \\ 3x_1+x_2+x_3=10 \end{cases} \xrightarrow{\text{ماتریس افزوده}} [A\vdots b]=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 1 & 10 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{سطری مقدماتی}]{\text{انجام عملیات}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{16}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{دستگاه معادل}} \begin{cases} x_1+\frac{3}{5}x_3=\frac{16}{5} \\ x_2-\frac{4}{5}x_3=\frac{2}{5} \end{cases}$$

حال اگر قرار دهیم؛ $t\in\mathbb{R}$ و $x_3=t$ جواب دستگاه به فرم پارامتری و بر حسب t، به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases} x_1=\frac{16}{5}-\frac{3}{5}t \\ x_2=\frac{2}{5}+\frac{4}{5}t \quad , \quad t\in\mathbb{R} \\ x_3=t \end{cases}$$

۲ـ روش حذفی گاوس:

در این روش نیز ماتریس افزوده دستگاه را تشکیل می‌دهیم و با انجام عملیات سطری مقدماتی سعی می‌کنیم که ماتریس بالا مثلثی یا پایین مثلثی هم ارز با ماتریس افزوده را بدست آوریم؛ سپس دستگاه معادل آن را بازنویسی کرده و جواب دستگاه جدید که ساده‌تر از دستگاه اولیه است؛ را تعیین می‌کنیم.

> **توجه۱:** اگر ماتریس بالا مثلثی هم ارز با ماتریس افزوده را بدست آوریم، روش حذفی **پسرو گاوس**، و اگر ماتریس پایین مثلثی هم ارز ماتریس افزوده حاصل شود، روش حذفی **پیشرو گاوس** نامیده می‌شود.

از آنجا که روند روشهای حذفی گاوس (پسرو یا پیشرو) و روش حذفی گاوس ـ جردن (روش اولی که توضیح داده شده)، تقریباً یکسان می‌باشند. خواننده می‌تواند مثال‌های حل شده قبلی را با روشهای حذفی گاوس پیشرو یا پسرو بررسی کند که مطمئناً باید به نتایج یکسانی برسد.

مثال۴۷: فرض کنید $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$، در اینصورت تحت چه شرطی روی سه‌تایی $Y=(y_1,y_2,y_3)$ ، دستگاه معادلات $AX=Y$ دارای جواب است.

۱) $y_2-2y_3+\frac{1}{2}y_1=0$ ۲) $3y_1-2y_2+y_3=0$

۳) دستگاه به ازای هر سه‌تایی (y_1,y_2,y_3) دارای جواب است.   ۴) دستگاه به ازای هیچ سه‌تایی (y_1,y_2,y_3) دارای جواب نیست.

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» ابتدا فرم سطری – پلکانی A را بدست می‌آوریم:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[-2R_1]{-3R_1} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 8 & 2 \\ 0 & 7 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\times\frac{1}{8},\ -\frac{7}{8}R_2]{+\frac{3}{8}R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{4} \end{bmatrix} \xrightarrow[+\frac{1}{3}R_3,\ \times(-\frac{4}{3})]{+R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=I_3$$

بنابراین A هم ارز با I_3؛ در نتیجه وارون‌پذیر است و به ازای هر ۳ تایی $Y=(y_1,y_2,y_3)$ دستگاه معادلات $AX=Y$ دارای جواب منحصر بفرد $X=A^{-1}Y$ است.

مثال۴۸: فرض کنید $A=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3\\ -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -2\end{bmatrix}$، در اینصورت تحت چه شرطی روی سه‌تایی $Y=(y_1,y_2,y_3)$ ، دستگاه معادلات $AX=Y$ دارای جواب است.

۱) $2y_3-y_2+y_1=0$ ۲) $2y_3+2y_2-y_1=0$

۳) به ازای هر سه‌تایی (y_1,y_2,y_3) دارای جواب است. ۴) $3y_3-y_2+y_1=0$

پاسخ: گزینه «۲» ماتریس افزوده دستگاه $AX=Y$ را تشکیل می‌دهیم.

$$[A\vdots Y]=\left[\begin{array}{ccc:c}2 & 1 & -1 & y_1\\ 3 & 2 & 1 & y_2\\ -2 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & y_3\end{array}\right]\begin{array}{c}\xrightarrow{\times\frac{1}{2}}\\ \xrightarrow{-\frac{3}{2}R_1}\\ \xrightarrow{+R_1}\end{array}\left[\begin{array}{ccc:c}1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}y_1\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & y_2-\frac{3}{2}y_1\\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & y_3+y_1\end{array}\right]\begin{array}{c}\xrightarrow{-R_2}\\ \xrightarrow{\times 2}\\ \xrightarrow{+R_2}\end{array}\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 0 & -3 & \frac{1}{2}y_1-(y_2-\frac{3}{2}y_1)\\ 0 & 1 & 5 & 2y_2-3y_1\\ 0 & 0 & 0 & y_3+y_1+(y_2-\frac{3}{2}y_1)\end{array}\right]$$

بنابراین، دستگاه فقط در صورتی جواب دارد که $y_3+y_1+(y_2-\frac{3}{2}y_1)=0$ باشد. پس، داریم:

$$y_3+y_1+y_2-\frac{3}{2}y_1=y_3+y_2-\frac{1}{2}y_1=0\Rightarrow 2y_3+2y_2-y_1=0$$

❖ **تعریف۲۶:** دستگاه معادلات خطی $\mathbf{AX=b}$ را همگن گویند هرگاه $\mathbf{b=o}$ باشد.

❖ **تعریف۲۷:** دو دستگاه معادلات خطی را هم ارز گویند، هرگاه دارای جوابهای یکسانی باشند.

نکته۲۵: اگر دو ماتریس A و B هم ارز سطری مقدماتی باشند، آنگاه دستگاه‌های همگن $AX=o$ و $BX=o$ هم ارزند.

اثبات: از آنجا که A و B هم ارز سطری مقدماتی هستند؛ بنابراین، با تشکیل ماتریس افزوده متناظر با دستگاه همگن $AX=o$، می‌توان با استفاده از اعمال سطری مقدماتی به ماتریس افزوده متناظر با دستگاه همگن $BX=o$ رسید. توجه کنید که در ماتریس افزوده دستگاه $AX=o$، $[A:o]$ ستون بعد از نقطه‌چین، ستون صفر است و بعد از انجام اعمال سطری مقدماتی، تغییر نمی‌کند. لذا، از آنجا که انجام اعمال سطری مقدماتی روی ماتریس افزوده یک دستگاه، جوابهای دستگاه را تغییر نمی‌دهد؛ جوابهای دستگاه‌های $AX=o$ و $BX=o$ یکسان و در نتیجه هم‌ارزند.

قضیه۹: اگر A یک ماتریس $m\times n$ و $m<n$، آنگاه دستگاه معادلات $AX=o$ دارای بینهایت جواب است.

اثبات: از آنجا که دستگاه همگن است، با نوشتن ماتریس افزوده و تعیین فرم سطری - پلکانی تحویل یافته آن، واضح است که اگر r تعداد یک‌های پیشرو در آن باشد، $r\le m$ است؛ و چون $m<n$ پس $r<n$ و در نتیجه تعداد یک‌های پیشرو از تعداد متغیرها کمتر است. پس، دستگاه دارای بینهایت جواب است.

> **توجه۲:** دستگاه همگن $AX=o$ ، همواره دارای جواب $X=o$ است که آن را جواب بدیهی دستگاه می‌نامند.

نکته۲۶: ماتریس مربعی A، وارون‌پذیر است، اگر و تنها اگر دستگاه $AX=o$ فقط جواب بدیهی داشته باشد.

اثبات: اگر A وارون‌پذیر باشد، واضح است که با ضرب دو طرف دستگاه $AX=o$ از چپ در A^{-1}، نتیجه می‌شود $X=o$. پس، دستگاه فقط جواب بدیهی دارد. برای اثبات طرف دیگر نیز، از قبل می‌دانیم که اگر A یک ماتریس وارون‌ناپذیر باشد، آنگاه بردار ناصفر $X\neq o$ وجود دارد بطوریکه در دستگاه $AX=o$ صدق کند. بنابراین، با توجه به برهان خلف، اثبات طرف دیگر نکته نیز نتیجه می‌شود. یعنی اگر A وارون‌ناپذیر باشد، آنگاه دستگاه $AX=o$ جواب غیربدیهی دارد و این با فرض تناقض دارد.

قضیه۱۰: اگر A یک ماتریس $n\times n$ باشد، گزاره‌های زیر معادلند.

الف) A معکوس‌پذیر است.

ب) A هم ارز سطری I_n است.

ج) دستگاه همگن $AX=o$ فقط دارای جواب بدیهی است.

د) دستگاه $AX=\mathbf{b}$ به ازای هر بردار ستونی $\mathbf{b}$ دارای جواب منحصر بفرد $X=A^{-1}\mathbf{b}$ است.

اثبات: هم ارزی قسمت‌های الف و ب و قسمت‌های الف و ج بررسی شده‌اند. بنابراین، برای تکمیل اثبات کافیست هم‌ارزی قسمت‌های ج و د را ثابت کنیم.

ج $\Leftarrow$ د) بنابر برهان خلف فرض کنید دستگاه $AX=\mathbf{b}$، جوابی مانند $X_1 \neq A^{-1}\mathbf{b}$ نیز داشته باشد. در این صورت واضح است که $X_2 = X_1 - A^{-1}b$ برداری ناصفر است و داریم:

$$AX_2 = A(X_1 - A^{-1}b) = AX_1 - AA^{-1}b \xlongequal{\text{است. } AX=b \text{ جواب دستگاه } x_1} b - b = 0$$

پس، $X_2 \neq 0$ یک جواب نابدیهی برای دستگاه $AX=0$ است؛ که این با فرض ج تناقض داردو لذا، فرض خلف باطل و اثبات تمام است.

د $\Leftarrow$ ج) بنابر برهان خلف فرض کنید، دستگاه $AX=0$ دارای جواب غیربدیهی مانند $X_1 \neq 0$ است.

(یعنی $AX_1 = 0$) در اینصورت اگر قرار دهید $X_2 = X_1 + A^{-1}b$، چون $X_1 \neq 0$؛ پس، $X_2 \neq A^{-1}b$. همچنین داریم:

$$AX_2 = A(X_1 + A^{-1}b) = AX_1 + AA^{-1}b \xlongequal{AX_1 = 0} 0 + b = b$$

بنابراین، دستگاه $AX=b$ دارای حداقل دوجواب $A^{-1}b$ و X_2 است؛ که این با فرض (د) تناقض دارد. لذا، فرض خلف باطل و اثبات تمام است.

توجه ۳: بنابر قضیه فوق، اگر $A_{n\times n}$ وارون‌پذیر باشد؛ یکی دیگر از روش‌های حل دستگاه $AX=\mathbf{b}$، تعیین A^{-1} و سپس $\mathbf{X = A^{-1}b}$ به عنوان جواب دستگاه است.

نکته۲۷: اگر A یک ماتریس $m\times n$ و B یک ماتریس $n\times m$ باشد به طوریکه $n<m$، آنگاه ماتریس AB معکوس‌ناپذیر است.

اثبات: چون B ماتریس $n\times m$ است پس، حداکثر دارای n یک پیشرو در فرم تحویل یافته سطری پلکانی خود است، و چون $n<m$ است؛ بنابراین بردار ناصفر $X\neq 0$ وجود دارد بطوریکه $BX=0$ و در نتیجه داریم $(AB)X = A(BX) = A0 = 0$. از آنجا که دستگاه $(AB)X=0$ دارای جواب غیربدیهی است، پس بنابر نکته قبل AB وارون‌ناپذیر می‌باشد.

مثال۴۹: فرض کنید A یک ماتریس $m\times n$ و B یک ماتریس $n\times m$ و $m>n$ است. کدامیک از گزینه‌های زیر صحیح نیست.

۱) دستگاه $BX=0$ دارای بینهایت جواب است.
۲) AB وارون‌ناپذیر است.
۳) ماتریس‌های A و B به گونه‌ای وجود دارند که BA وارون‌پذیر باشد.
۴) دستگاه $AX=0$ جواب غیر بدیهی دارد.

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به قضایای قبل گزینه (۱) صحیح است. صحت گزینه (۲) نیز قبلاً اثبات شده است. حال اگر قرار دهیم $A=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ و $B=[1\ \ 0]$، واضح است که A و B در شرایط مسأله صدق می‌کنند و $BA=[1\ \ 0]\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=1$ وارون‌پذیر است. بنابراین گزینه (۳) نیز صحیح است. همچنین، چون $m>n$ است؛ پس در دستگاه $AX=0$، تعداد معادلات بیشتر از تعداد متغیرها است. بنابراین، لزوماً دستگاه جواب غیربدیهی ندارد؛ مگر اینکه معادلات دستگاه مضرب یکدیگر باشند و تعداد سطرهای غیر صفر فرم سطری – پلکانی ماتریس A، کم‌تر از n باشد. پس گزینه‌ی (۴) در حالت کلی غلط است. به عنوان مثال نقض، کافیست $A=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. واضح است که دستگاه $Ax=0$ فقط جواب بدیهی دارد.

مثال۵۰: کدامیک از گزینه‌های زیر هم ارز بقیه نیست.

۱) A حاصلضرب ماتریس‌های مقدماتی است.
۲) A هم ارز سطری ماتریس همانی است.
۳) دستگاه $AX=0$ دارای جواب غیر بدیهی است.
۴) دستگاه $AX=\mathbf{b}$ به ازای هر بردار $\mathbf{b}$، دارای جواب منحصر به فرد است.

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به قضایای قبل هم ارزی گزینه‌های (۱)، (۲) و (۴) واضح است. برای رد کردن گزینه (۳) کافی است؛ ماتریس $A=I_n$ را در نظر بگیریم. واضح است که ماتریس A در سه گزینه دیگر صدق می‌کند. ولی دستگاه $AX=0$ فقط جواب بدیهی $X=0$ دارد؛ زیرا:

$$AX=0 \xrightarrow{A=I_n} I_nX=0 \Rightarrow X=0$$

قضیه۱۱: اگر بردارهای X_1 و X_2 دو جواب دستگاه همگن $AX = 0$ باشند، آنگاه به ازای هر دو اسکالر a و b، بردار $X = aX_1 + bX_2$ نیز یک جواب دستگاه است.

اثبات:

$$\left.\begin{array}{l} (\text{جواب است } X_1) \Rightarrow AX_1 = 0 \Rightarrow aAX_1 = 0 \\ (\text{جواب است } X_2) \Rightarrow AX_2 = 0 \Rightarrow bAX_2 = 0 \end{array}\right\} \overset{\text{جمع می‌کنیم}}{\Rightarrow} A(aX_1 + bX_2) = 0 \Rightarrow AX = 0$$

بنابراین در دستگاه همگن $AX = 0$ ، از آنجا که $X = 0$ جواب بدیهی دستگاه است؛ وجود یک جواب غیر بدیهی مانند X_2، معادل با وجود بینهایت جواب است.

نکته۲۸: اگر $A_{n\times n}$ معکوس‌ناپذیر باشد، ماتریس ناصفر $B_{n\times n}$ وجود دارد به طوریکه $AB = 0$ است.

اثبات: از آنجا که A معکوس‌ناپذیر است؛ پس، بردار ناصفری مانند X وجود دارد به طوریکه در دستگاه $AX = 0$ صدق کند. حال اگر ماتریس B را به صورت $B = [XX...X]$ در نظر بگیریم (یعنی تمام ستونهای B برابر با بردار X قرار دهیم). اولاً چون X ناصفر است، لذا B نیز ناصفر می‌باشد. همچنین چون X در دستگاه $AX = 0$ صدق می‌کند پس، $AB = 0$ است.

تست‌های طبقه‌بندی شده فصل اول

۱ـ فرض کنید B, A و $A+B$ ماتریس‌های مربعی وارون‌پذیر باشند، آنگاه .... نیز وارون‌پذیر است. (سراسری ۷۸)

۱) $A-B$ ۲) $A+B^{-۱}$ ۳) $A-B^{-۱}$ ۴) $A^{-۱}+B^{-۱}$

۲ـ اگر $A_{m\times n}$ و $B_{n\times m}$ ماتریس‌هایی روی میدان $\mathbb{F}$ باشند به طوری که AB معکوس‌پذیر باشد آنگاه بین n, m چه رابطه‌ای باید برقرار باشد؟ (سراسری ۷۸)

۱) $m\le n$ ۲) $m\ge n$ ۳) $m=n$ ۴) $m>n$

۳ـ فرض کنید A یک ماتریس مربعی وارون‌پذیر باشد. اگر B ماتریسی باشد که از تعویض دو سطر iام و jام ماتریس A به دست آید، کدام‌یک از گزاره‌های زیر صحیح است؟ (سراسری ۸۰)

۱) $B^{-۱}$ از تعویض ستون‌های iام و jام ماتریس A به دست می‌آید.
۲) $B^{-۱}$ از تعویض سطرهای iام و jام ماتریس $A^{-۱}$ به دست می‌آید.
۳) $B^{-۱}$ از تعویض ستون‌های iام و jام ماتریس $A^{-۱}$ به دست می‌آید.
۴) $B^{-۱}$ از تعویض سطرهای iام و jام ماتریس A به دست می‌آید.

۴ـ تعداد ماتریس‌های مقدماتی ۲×۲ روی میدان $\mathbb{Z}_{۳۱}$ عبارت است از: (سراسری ۸۰)

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۲۳ ۳) ۱۲۴ ۴) ۱۲۵

۵ـ اگر A ماتریسی مربع و ناصفر بوده و وارون‌پذیر نباشد، آنگاه A در حلقه ماتریس‌های مربع دارای کدام خاصیت است؟ (سراسری ۸۲)

۱) متعلق به هیچ ایده‌آل ماکسیمال است.
۲) یک مقسوم علیه نابدیهی صفر است.
۳) به تمام ایده‌آل‌های ماکسیمال تعلق دارد.
۴) مقسوم علیه نابدیهی صفر نیست.

۶ـ تعداد ماتریس‌های مقدماتی ۲×۲ روی میدان $\mathbb{Z}_{۱۱}$ عبارت است از: (سراسری ۸۲)

۱) ۴۰ ۲) ۴۱ ۳) ۴۲ ۴) ۴۳

۷ـ ماتریس مربع و حقیقی و وارون‌پذیر A در تساوی $A+A^{-۱}=I$ صدق می‌کند. در این صورت مرتبهٔ A چیست؟ (سراسری ۸۲)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۱۲

۸ـ فرض کنید A و B دو ماتریس مربعی حقیقی ۳×۳ باشند که در معادله $AB-BA=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & \sqrt{۲} \end{bmatrix}$ صدق می‌کنند، تعداد جفت ماتریس‌های (A, B) با خاصیت فوق برابر است با: (سراسری ۸۵)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌نهایت

۹ـ تعداد ماتریس‌های مقدماتی سطری ۲×۲ روی میدان $\mathbb{Z}_۷$ برابر است با: (سراسری ۸۶)

۱) ۲۴ ۲) ۲۵ ۳) ۲۶ ۴) ۲۸

۱۰ـ فرض کنید A یک ماتریس حقیقی ۴×۶ و B یک ماتریس حقیقی ۶×۴ باشد. در این صورت AB دارای کدام خاصیت است؟ (سراسری ۸۶)

۱) وارون‌پذیر نیست. ۲) وارون‌پذیر است. ۳) سطرهای مستقل دارد. ۴) هیچ‌گاه نمی‌تواند مساوی BA باشد.

۱۱ـ فرض کنید A ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & \cdots & ۱ \\ ۲ & ۲ & ۲ & \cdots & ۲ \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{bmatrix}$ باشد. در این صورت $tr(AA^t)$ برابر است با: (سراسری ۸۶)

۱) $\frac{۱}{۲}n(n+۱)$ ۲) $\frac{۱}{۲}n^۲(n+۱)$ ۳) $\frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}$ ۴) $\frac{۱}{۶}n^۲(n+۱)(۲n+۱)$

۱۲ـ دستگاه معادلات $\begin{cases} x+y+z=۱۰ \\ ۲x+۳y+۴z=۱۵ \\ ax+by+cz=۲۵ \end{cases}$ به ازاء چه مقادیری از c, b, a بی‌نهایت جواب دارد. (ریاضی محض ـ آزاد ۸۶)

۱) $a=۳\ b=۴\ c=۵$ ۲) $a=۲\ b=۴\ c=۵$ ۳) $a=۳\ b=۳\ c=۵$ ۴) $a=۳\ b=۴\ c=۴$

۱۳ـ عکس ماتریس $\begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۷ & ۵ \end{bmatrix}$ کدام یک از ماتریس‌های زیر می‌باشد؟ (ریاضی محض ـ آزاد ۸۶)

۱) $\begin{bmatrix} -۵ & ۲ \\ -۷ & ۳ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۵ & -۲ \\ -۷ & ۳ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} ۵ & ۲ \\ ۳ & ۷ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۷ & ۲ \\ ۳ & ۵ \end{bmatrix}$

۱۴ـ فرض کنید $A=\begin{pmatrix}۱&۲\\۰&۱\end{pmatrix}$, A^n کدام است؟ (ریاضی محض ـ آزاد ۸۶)

۱) $A^n=\begin{pmatrix}۱&۲n\\۰&۱\end{pmatrix}$ ۲) $A^n=\begin{pmatrix}۱&۲^n\\۰&۱\end{pmatrix}$ ۳) $A^n=\begin{pmatrix}۱&n^۲\\۰&۱\end{pmatrix}$ ۴) $A^n=\begin{pmatrix}۱&۲(n+۱)\\۰&۱\end{pmatrix}$

۱۵ـ چه رابطه‌ای بایستی بین a، b و c برقرار باشد تا دستگاه $\begin{cases}۲x+y=a\\x-y+۳z=b\\۲y-۴z=c\end{cases}$ جواب داشته باشد. (ریاضی محض ـ آزاد ۸۶)

۱) $۲a+۴b-۳c=۰$ ۲) $۲a-۴b+۳c=۰$ ۳) $۲a-۴b-۳c=۰$ ۴) $-۲a+۴b-۳c=۰$

۱۶ـ در معادله $\begin{pmatrix}۳&۱\\۱&-۱\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}۱&۱\\۱&۰\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}۰&۰\\۱&۱\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}۰&۲\\۰&-۱\end{pmatrix}$ ، x و y و z چه مقادیری هستند؟ (ریاضی محض ـ آزاد ۸۶)

۱) $x=۳\quad y=+۲\quad z=-۱$ ۲) $x=۳\quad y=-۲\quad z=۱$ ۳) $x=۳\quad y=-۲\quad z=-۱$ ۴) $x=۳\quad y=-۲\quad z=۳$

۱۷ـ عکس A کدام است؟ $A=\begin{pmatrix}-۱&۲&-۳\\۲&۱&۰\\۴&-۲&۵\end{pmatrix}$ (ریاضی محض ـ آزاد ۸۶)

۱) $A^{-۱}=\begin{pmatrix}-۵&۴&-۳\\۱۰&-۷&۶\\۸&-۶&۵\end{pmatrix}$ ۲) $A^{-۱}=\begin{pmatrix}۵&۴&۳\\-۱۰&۷&-۶\\۸&-۶&۵\end{pmatrix}$ ۳) $A^{-۱}=\begin{pmatrix}-۵&۴&-۳\\۱۰&۷&۶\\۸&-۶&۵\end{pmatrix}$ ۴) $A^{-۱}=\begin{pmatrix}-۵&-۴&-۳\\۱۰&-۷&۶\\۸&-۶&۵\end{pmatrix}$

۱۸ـ دستگاه $\begin{cases}x+y+۲z=۱۰\\۲x+y-z=۱۲\\ax+y+۲z=۱۳\end{cases}$ به ازاء چه مقدار a دارای جواب <u>نیست</u>؟ (ریاضی کاربردی ـ آزاد ۸۶)

۱) $a=۳$ ۲) $a=۲$ ۳) $a=۱$ ۴) $a=-۱$

۱۹ـ $(ABC)^{-۱}$ مساوی است با: (ریاضی کاربردی ـ آزاد ۸۶)

۱) $A^{-۱}B^{-۱}C^{-۱}$ ۲) $(AB)^{-۱}C^{-۱}$ ۳) $A^{-۱}(BC)^{-۱}$ ۴) $C^{-۱}B^{-۱}A^{-۱}$

۲۰ـ $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ ، $A^{-۱}$ عبارت است از: $ad-bc\neq۰$ (ریاضی کاربردی ـ آزاد ۸۶)

۱) $A^{-۱}=\frac{۱}{ad-bc}\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}$ ۲) $A^{-۱}=\frac{۱}{ad-bc}\begin{bmatrix}d&b\\c&-a\end{bmatrix}$

۳) $A^{-۱}=\frac{۱}{ad-bc}\begin{bmatrix}-d&b\\c&a\end{bmatrix}$ ۴) $A^{-۱}=\frac{۱}{ad-bc}\begin{bmatrix}-a&+b\\+c&-d\end{bmatrix}$

۲۱ـ تعداد ماتریس‌های ۳×۳ روی $\mathbb{Z}_۲$ با شرط $A^t=-A$ برابر است با: (سراسری ۸۷)

۱) ۸ ۲) ۱۶ ۳) ۳۲ ۴) ۶۴

۲۲ـ فرض کنید A ماتریس مربعی دلخواه روی میدان اعداد حقیقی باشد؛ به طوریکه $A^۲=A$ و $(A-A^t)^۲=۰$ که در آن A^t ترانهادهٔ A است. در این صورت: (سراسری ۸۸)

۱) $(AA^t)^۲=A^tA$ ۲) $(AA^t)^۲=AA^t$ ۳) $(AA^t+A^tA)^۲=۰$ ۴) $(AA^t-A^tA)^۲=۰$

۲۳ـ تعداد ماتریس‌های مقدماتی ۲×۲ روی میدان $\mathbb{Z}_p$ برابر است با: (ریاضی محض ـ آزاد ۸۸)

۱) $۴p$ ۲) $۴(p-۱)$ ۳) ۵ ۴) $۴p-۲$

۲۴ـ کدام یک از گزاره‌های زیر نادرست است؟ (ریاضی محض ـ آزاد ۸۸)

۱) هر ماتریس مقدماتی معکوس پذیر است و معکوس آن نیز مقدماتی است.

۲) هر ماتریس مقدماتی معکوس‌پذیر است و معکوس آن نیز یک ماتریس مقدماتی از همان نوع است.

۳) اگر A مثلثی باشد آنگاه $A^{-۱}$ نیز مثلثی است.

۴) هر دو ماتریس نامنفرد هم‌ارزند.

۲۵ـ اگر ماتریس مربعی A در رابطهٔ $A-A^۲-I=۰$ صدق کند حاصل $A^{۱۵}+A^{۱۶}$ کدام است؟ (ریاضی کاربردی ـ آزاد ۸۸)

۱) $-I+A$ ۲) $-I-A$ ۳) $I-A$ ۴) $I+A$

پاسخنامه تست‌های طبقه‌بندی شده فصل اول

۱ـ گزینه «۴» می‌دانیم که حاصلضرب ماتریس‌های وارون‌پذیر نیز، وارون‌پذیر است. همچنین داریم:

$$A^{-1}(A+B)=A^{-1}A+A^{-1}B=I+A^{-1}B \Rightarrow (A^{-1}(A+B))B^{-1}=(I+A^{-1}B)B^{-1}=B^{-1}+A^{-1}BB^{-1}=B^{-1}+A^{-1}$$

بنابراین، $A^{-1}+B^{-1}$، برابر با حاصلضرب ماتریس‌های وارون‌پذیر $(A+B)$، A^{-1} و B^{-1}، در نتیجه وارون‌پذیر است.

برای رد سایر گزینه‌ها، اگر قرار دهیم $A=B=I$، واضح است که A، B و $A+B=2I$ نیز وارون‌پذیر هستند؛ در حالی که $A-B=0$ و $A-B^{-1}=0$ هیچکدام وارون‌پذیر نیستند. پس گزینه‌های ۱ و ۳ نادرستند.

حال اگر قرار دهید $A=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$؛ واضح است که A، B و $A+B=\begin{bmatrix}\frac{3}{2} & 0\\ 0 & \frac{3}{2}\end{bmatrix}$ وارون‌پذیرند؛

در حالی که $A+B^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ وارون‌ناپذیر است. لذا گزینه ۲ نیز، نادرست است.

۲ـ گزینه «۱» با توجه به نکته گفته شده، می‌دانیم که اگر $A_{m\times n}$ و $B_{n\times m}$ دو ماتریس دلخواه و $m>n$ باشد، آنگاه AB وارون‌ناپذیر است. بنابراین، اگر عکس نقیض این گزاره را در نظر بگیریم، نتیجه می‌شود؛ اگر AB وارون‌پذیر باشد، آنگاه $m\le n$ است.

۳ـ گزینه «۳» فرض کنید که $\mathbf{a}^1$، $\mathbf{a}^2$، $\cdots$، $\mathbf{a}^n$ سطرهای A و $\mathbf{a}'_1$، $\mathbf{a}'_2$، $\cdots$، $\mathbf{a}'_n$ ستون‌های A^{-1} باشند. از آنجا که $AA^{-1}=I$؛ پس، به ازای هر i و j داریم:

$$a^i\bullet a'_j=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

بنابراین، ستون‌های ماتریس A^{-1}، وابستگی مستقیم به سطرهای A دارند و در واقع، هر جابجایی در سطرهای A باعث ایجاد جابجایی متناظری در ستون‌های A^{-1} می‌شود. البته توجه کنید که با در نظر گرفتن یک ماتریس ساده 2×2 مانند $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$ می‌توان گزینه‌های ۱، ۲ و ۴ را رد کرد.

۴ـ گزینه «۱» با توجه به نکته گفته شده در درس می‌دانیم که تعداد ماتریس‌های مقدماتی 2×2 روی میدان p عضوی برابر با $2^2(p-1)$ است. بنابراین چون $\mathbb{Z}_{31}$ یک میدان ۳۱ عضوی است؛ با قرار دادن $p=31$ در رابطه بالا نتیجه می‌شود:

تعداد ماتریس‌های مقدماتی 2×2 روی $\mathbb{Z}_{31}$ $=2^2(31-1)=120$

۵ـ گزینه «۲» می‌دانیم که اگر A وارون ناپذیر باشد، آنگاه ماتریس ناصفری مانند B وجود دارد؛ بطوریکه $AB=0$ باشد. بنابراین، A مقسوم علیه نابدیهی صفر است. (توجه کنید که A یک ماتریس ناصفر است).

۶ـ گزینه «۱» از قبل می‌دانیم که تعداد ماتریس‌های مقدماتی 2×2 روی $\mathbb{Z}_p$ برابر با $2^2(p-1)$ است. بنابراین $40=2^2(11-1)$ ماتریس مقدماتی 2×2 روی $\mathbb{Z}_{11}$ داریم.

۷ـ گزینه «۱، ۳ و ۴»

در واقع مرتبه‌ی A می‌تواند گزینه‌های (۱)، (۳) و یا (۴) باشد. برای $n=2$ فرض کنید.

$A=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{7}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}$ واضح است که $A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{7}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$ و $A+A^{-1}=I_2$، بنابراین شرایط مساله برقرار است. برای $n=4$ فرض کنید $B=\begin{bmatrix}A & 0\\ 0 & A\end{bmatrix}$،

برای $n=۶$ فرض کنید $C=\begin{bmatrix} A & o & o \\ o & A & o \\ o & o & A \end{bmatrix}$ که o یک ماتریس صفر ۲×۲ است و به همین ترتیب برای هر n زوج $(n=۲k)$ قرار دهید:

$A_n=\begin{bmatrix} A & o & \cdots & o \\ o & A & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ o & o & \cdots & A \end{bmatrix}$ که در آن o ماتریس صفر ۲×۲ و A ماتریس بالا می‌باشد. به سادگی می‌بینیم که شرط $A+A^{-۱}=I_n$ برقرار است.

◆ ◆ ◆ ◆

۸ـ گزینه «۱» می‌دانیم که $tr(AB-BA)=tr(AB)-tr(BA)=۰$ است. بنابراین، با توجه به اینکه اثر ماتریس داده شده برابر با $۱+۱+\sqrt{۲}=۲+\sqrt{۲}\neq ۰$ می‌باشد پس، چنین ماتریس‌هایی وجود ندارند.

◆ ◆ ◆ ◆

۹ـ گزینه «۱» می‌دانیم تعداد ماتریس‌های مقدماتی ۲×۲ روی $\mathbb{Z}_p$ برابر با $۴(p-۱)$ است. بنابراین، تعداد ماتریس‌های مقدماتی ۲×۲ روی $\mathbb{Z}_۷$ برابر با $۴(۷-۱)=۲۴$ است.

◆ ◆ ◆ ◆

۱۰ـ گزینه «۱و۴» اولاً، بوضوح می‌دانیم که، AB یک ماتریس ۶×۶ و BA یک ماتریس ۴×۴ است پس، هیچ گاه ماتریس‌های AB و BA نمی‌توانند مساوی باشند. در ثانی، می‌دانیم که اگر A، $m\times n$ و B، $n\times m$ و $m>n$ باشد، آنگاه AB وارون ناپذیر است. لذا چون $۴<۶$ است، AB نمی‌تواند وارون پذیر باشد، یعنی گزینه «۱» نیز درست است.

◆ ◆ ◆ ◆

۱۱ـ گزینه «۴» بنابر نکته گفته شده در درس، می‌دانیم که اگر $A=[a_{ij}]_{nxn}$ یک ماتریس دلخواه باشد، آنگاه: $tr(AA^t)=\sum_{i=۱}^{n}\sum_{j=۱}^{n}a_{ij}^{۲}$

با توجه به مطلب فوق، در این تست داریم:

$$tr(AA^t)=\underbrace{۱^۲+\cdots+۱^۲}_{n\ \text{بار}}+\underbrace{۲^۲+\cdots+۲^۲}_{n\ \text{بار}}+\cdots+\underbrace{n^۲+\cdots+n^۲}_{n\ \text{بار}}=n(۱^۲+۲^۲+\cdots+n^۲)=n(\frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶})=\frac{۱}{۶}n^۲(n+۱)(۲n+۱)$$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۲ـ گزینه «۱» می‌دانیم که یک دستگاه معادلات خطی دارای بینهایت جواب است، هرگاه در فرم سطری ـ پلکانی شده‌ی ماتریس افزودهٔ آن تعداد سطرهای ناصفر ماتریس کمتر از تعداد متغیرها باشد.

ماتریس افزوده دستگاه: $\left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۱ & ۱ & ۱۰ \\ ۲ & ۳ & ۴ & ۱۵ \\ a & b & c & ۲۵ \end{array}\right] \xrightarrow{-(R_۱+R_۲)} \left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۱ & ۱ & ۱۰ \\ ۲ & ۳ & ۴ & ۱۵ \\ a-۳ & b-۴ & c-۵ & ۰ \end{array}\right]$

برای اینکه دستگاه دارای بینهایت جواب باشد، کافیست که سطر سوم ماتریس صفر شود و برای این منظور باید قرار دهیم: $a=۳, b=۴, c=۵$

استدلالی دیگر: لازم به ذکر است که با توجه به مقادیر سمت راست دستگاه به سادگی می‌بینیم که به کمک هر ترکیب خطی از اعداد ۱۰و ۱۵ که بتوان عدد ۲۵ را بدست آورد می توان با اِعمال همان ترکیب خطی روی ضرایب معادلات، مقادیر a، b و c را بدست آورد. در واقع کافیست که معادله سوم دستگاه به صورت ترکیب خطی از دو معادله دیگر باشد. به عنوان مثال:

$$۲۵=(۱۰+۱۵)\Rightarrow\begin{cases} a=(۱+۲)=۳ \\ b-(۱+۳)=۴ \\ c-(۱+۴)=۵ \end{cases} \quad \text{یا} \quad ۲۵=۲\times۱۵-\frac{۱}{۲}\times۱۰\Rightarrow\begin{cases} a=۲\times۲-\frac{۱}{۲}\times۱=\frac{۷}{۲} \\ b=۲\times۳-\frac{۱}{۲}\times۱=\frac{۱۱}{۲} \\ c=۲\times۴-\times\frac{۱}{۲}\times۱=\frac{۱۵}{۲} \end{cases}$$

و به همین‌ترتیب می‌توان بینهایت مقدار برای a، b و c بدست آورد.

◆ ◆ ◆ ◆

۱۳ـ گزینه «۲» با توجه به مثال ۱۳ از درس می‌دانیم معکوس ماتریس $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ برابر با $\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ است. بنابراین عکس مـاتریس $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$ برابر است با:

$$\frac{1}{3\times 5-2\times 7}\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}$$

۱۴ـ گزینه «۱» با بررسی حالت $n=1$ و $n=3$ به سادگی گزینه‌های ۲، ۳و ۴ رد می‌شوند.

$n=1\Rightarrow A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\Rightarrow$ گزینه‌های ۳و ۴ نادرستند.

$n=3\Rightarrow A^3=\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\Rightarrow$ گزینه ۲ نادرست است.

پس فقط گزینه (۱) می‌تواند صحیح باشد. **حال به کمک استقراء** گزینه (۱) را ثابت می‌کنیم.

$n=1\Rightarrow A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ حکم برقرار است.

فرض می‌کنیم $A^n=\begin{bmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ و ثابت می‌کنیم $A^{n+1}=\begin{bmatrix} 1 & 2(n+1) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$:

$$A^{n+1}=A.A^n \xlongequal{\text{فرض استقرا}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2n+2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2(n+1) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

بدین‌ترتیب اثبات تمام است.

۱۵ـ گزینه «۳» ابتدا ماتریس افزوده دستگاه را تشکیل می‌دهیم:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & a \\ 1 & -1 & 3 & b \\ 0 & 2 & -4 & c \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{1}{2}R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & a \\ 0 & -\frac{3}{2} & 3 & b-\frac{1}{2a} \\ 0 & 2 & -4 & c \end{array}\right] \xrightarrow{+\frac{4}{3}R_2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & a \\ 0 & -\frac{3}{2} & 3 & b-\frac{1}{2}a \\ 0 & 0 & 0 & c+\frac{4}{3}(b-\frac{1}{2}a) \end{bmatrix}$$

بنابراین، برای وجود جواب در دستگاه باید $c+\frac{4}{3}(b-\frac{1}{2}a)$ نیز برابر صفر شود.

$$c+\frac{4}{3}(b-\frac{1}{2}a)=0\Rightarrow 3c+4(b-\frac{1}{2}a)=0\Rightarrow 3c+4b-2a=0\Rightarrow 2a-4b-3c=0$$

۱۶ـ گزینه «۳»

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}=x\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}+y\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}+z\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases} x=3 \\ x+2z=1 \\ x+y=1 \\ y-z=-1 \end{cases}$$

با حل دستگاه فوق به سادگی جواب $x=3$، $y=-2$ و $z=-1$ بدست می‌آید.

۱۷ـ گزینه «۱»

روش اول: از ماتریس افزوده استفاده می‌کنیم.

$$[A\,I_3]=\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \xrightarrow{\times -1} \\ \xrightarrow{+2R_1} \\ \xrightarrow{+4R_1} \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -6 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -7 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \xrightarrow{+\frac{2}{5}R_2} \\ \xrightarrow{\times\frac{1}{5}} \\ \xrightarrow{-\frac{6}{5}R_2} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} ۱ & ۰ & \frac{۳}{۵} & -\frac{۱}{۵} & \frac{۲}{۵} & ۰ \\ ۰ & ۱ & -\frac{۶}{۵} & \frac{۲}{۵} & \frac{۱}{۵} & ۰ \\ ۰ & ۰ & \frac{۱}{۵} & \frac{۸}{۵} & -\frac{۶}{۵} & ۱ \end{array}\right] \begin{array}{c} \xrightarrow{-۳R_۳} \\ \xrightarrow{+۶R_۳} \\ \xrightarrow{\times ۵} \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} ۱ & ۰ & ۰ & -۵ & ۴ & -۳ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۱۰ & -۷ & ۶ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۸ & -۶ & ۵ \end{array}\right]$$

با توجه به روش توضیح داده شده در درس نتیجه می‌شود که $A^{-۱} = \begin{bmatrix} -۵ & ۴ & -۳ \\ ۱۰ & -۷ & ۶ \\ ۸ & -۶ & ۵ \end{bmatrix}$.

روش دوم: (بعد از مطالعه فصل دوم بخوانید) با توجه به رابطهٔ $A^{-۱} = \dfrac{adjA}{\det A}$ می‌توان $A^{-۱}$ را محاسبه کرد، البته محاسبهٔ کامل $adjA$ وقت‌گیر است و می‌توان با محاسبهٔ فقط چند درایه (حداکثر ۳ درایه) از آن و با توجه به گزینه‌ها، گزینهٔ درست را پیدا کرد.

روش سوم: با توجه به اینکه باید $AA^{-۱} = I$ شود، می‌توان با محاسبهٔ چند ضرب، گزینه درست را حدس زد. به عنوان مثال از آنجا که حاصلضرب سطر دوم A در ستون دوم $A^{-۱}$ باید برابر با یک شود؛ فقط گزینه (۱) می‌تواند درست باشد.

۱۸ـ گزینه «۳» با توجه به توضیحات داده شده در درس می‌دانیم که یک دستگاه دارای جواب نیست، هرگاه در فرم سطری ـ پلکانی شده ماتریس افزوده آن یک سطر ماتریس صفر و مقدار سمت راست متناظر با آن ناصفر باشد. بنابراین ماتریس افزوده دستگاه را تشکیل می‌دهیم:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۱ & ۲ & ۱۰ \\ ۲ & ۱ & -۱ & ۱۲ \\ a & ۱ & ۲ & ۱۳ \end{array}\right] \begin{array}{c} \xrightarrow{-۲R_۱} \\ \xrightarrow{-aR_۱} \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۱ & ۲ & ۱۰ \\ ۰ & -۱ & -۳ & -۸ \\ ۰ & ۱-a & ۲-۲a & ۱۳-۱۰a \end{array}\right] \xrightarrow{+(۱-a)R_۲} \left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۱ & ۲ & ۱۰ \\ ۰ & -۱ & -۳ & -۸ \\ ۰ & ۰ & a-۱ & ۵-۲a \end{array}\right]$$

واضح است که با قرار دادن $a = ۱$ سطر سوم ماتریس ضرایب صفر و مقدار سمت راست برابر ۳ می‌شود و در اینصورت دستگاه جواب ندارد.

۱۹ـ گزینه «۴» با توجه به توضیحات درس واضح است که: $(ABC)^{-۱} = C^{-۱}B^{-۱}A^{-۱}$

۲۰ـ گزینه «۱» با توجه به مثال بیان شده در درس (مثال ۱۳) واضح است.

۲۱ـ گزینه «۱» می‌دانیم که در ماتریس‌های پاد متقارن $(A^t = -A)$ درایه‌های قطری ماتریس، صفرند و همچنین با تعیین درایه‌های بالای قطر اصلی، درایه‌های زیر قطر نیز تعیین می‌شوند. پس، در یک ماتریس پاد متقارن فقط درایه‌های بالای قطر آزادانه انتخاب می‌شوند. در واقع فرم کلی یک ماتریس پاد متقارن ۳×۳ به صورت $A = \begin{bmatrix} ۰ & a & b \\ -a & ۰ & c \\ -b & -c & ۰ \end{bmatrix}$ است. از آن‌جا که تعداد چنین ماتریس‌هایی روی $\mathbb{Z}_۲$ مورد نظر است؛ پس، مقادیر a، b و c فقط می‌توانند دو مقدار ۰ یا یک اختیار کنند. بنابراین، تعداد کل چنین ماتریس‌هایی برابر با: $۸ = ۲\times۲\times۲ =$ (تعداد حالات c) × (تعداد حالات b) × (تعداد حالات a)

توجه کنید که با تعمیم استدلال فوق می‌توان نشان داد که تعداد ماتریس‌های پادمتقارن $n\times n$ روی $\mathbb{Z}_p$ برابر با $p^{\frac{n(n-۱)}{۲}}$ است.

۲۲ـ گزینه «۲و۴»

$$(A-A^t)^۲ = ۰ \Rightarrow A^۲ + (A^t)^۲ - AA^t - A^tA = ۰ \xrightarrow{A^۲=A} A + A^t - AA^t - A^tA = ۰ \Rightarrow A + A^t = AA^t + A^tA \quad (۱)$$

اگر دو طرف رابطه «۱» را از چپ در A و از راست در A^t ضرب کنیم، نتیجه می‌شود:

$$A(A+A^t)A^t = A(AA^t + A^tA)A^t \Rightarrow A^۲A^t + A(A^t)^۲ = A^۲(A^t)^۲ + AA^tAA^t \xrightarrow{A^۲=A}$$

$$AA^t + AA^t = AA^t + (AA^t)^۲ \Rightarrow (AA^t)^۲ = AA^t \quad (۲)$$

بنابراین، گزینه «۲» درست است.

به همین ترتیب اگر دو طرف رابطه (۱) را از چپ در A^t و از راست در A ضرب کنیم، به طور مشابه می‌توان نشان داد؛ $(A^tA)^۲ = A^tA \quad (۳)$

اگر دو طرف رابطه (۱) را فقط از چپ در A ضرب کنیم، نتیجه می‌شود.

$$A(A+A^t)=A(AA^t+A^tA)\Rightarrow A^2+AA^t=A^2A^t+AA^tA \xrightarrow{A^2=A} A+AA^t=AA^t+AA^tA \Rightarrow AA^tA=A \quad (4)$$

به طریق مشابه، اگر دو طرف رابطه (۱) را فقط از راست در A^t ضرب کنیم، نتیجه می‌شود؛

$$A^tAA^t=A^t \quad (5)$$

حال با استفاده از روابط پنج گانه بالا داریم:

$$(AA^t-A^tA)^2=(AA^t)^2+(A^tA)^2-(AA^t)(A^tA)-(A^tA)(AA^t)\overset{2,3}{=\!=}AA^t+A^tA-A(A^t)^2A-A^t(A^2)A^t \overset{A^2=A}{=\!=}$$

$$AA^t+A^tA-AA^tA-A^tAA^t \overset{4,5}{=\!=} AA^t+A^tA-A-A^t \overset{(1)}{=\!=} 0 \Rightarrow$$ گزینه «۴» درست است.

توجه کنید که، با توجه به روابط (۲) و (۳)، بوضوح گزینه «۱» نادرست است. همچنین، با قرار دادن $A=I$، به سادگی می‌بینیم که گزینه «۳» نیز رد می‌شود.

۲۳ـ گزینه «۲» بنابر نکته گفته شده در درس واضح است.

۲۴ـ گزینه «۴» باتوجه نکات گفته شده در درس گزینه‌های ۱و۲برقرارند. همچنین باتوجه به روند یافتن معکوس یک ماتریس به کمک ماتریس افزوده بوضوح معکوس یک ماتریس مثلثی نیز مثلثی است. در گزینهٔ (۴) اشاره‌ای به مرتبه ماتریس‌ها نشده است. در واقع صورت صحیح آن به این شکل است که؛ هر دو ماتریس نامنفرد هم مرتبه، هم‌ارزند. واضح است که دو ماتریس نامنفرد با مرتبه‌های غیر یکسان به هیچ‌وجه هم ارز نیستند، پس گزینه (۴) نادرست است.

۲۵ـ گزینه «۲»

$$A-A^2-I=0\Rightarrow A^2=A-I \xrightarrow{\text{طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم.}}$$

$$A^4=(A-I)^2=A^2-2A+I \overset{A^2=A-I}{=\!=} A-I-2A+I=-A\Rightarrow A^4=-A \quad (1)$$

بنابراین داریم:

$$A^{16}=(A^4)^4\overset{(1)}{=\!=}(-A)^4=A^4\overset{(1)}{=\!=}-A \quad (2)$$

$$A^{15}=(A^4)^3.A^3\overset{(1)}{=\!=}(-A)^3.A^3=-A^6=-A^4.A^2\overset{(1)}{=\!=}-(-A).A^2\overset{A^2=A-I}{=\!=}A(A-I)=A^2-A\overset{\text{فرض}}{=\!=}-I \quad (3)$$

$$2,3\Rightarrow A^{16}+A^{15}=-A-I$$

آزمون فصل اول

۱ـ کدام گزینه نمی‌تواند تعداد اعضای یک میدان باشد؟

۱) ۳۱ ۲) ۴۱ ۳) ۵۱ ۴) ۶۱

۲ـ اگر $A=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۲} & ۰\\ ۰ & \frac{۱}{۲}\end{bmatrix}$ ، $\sum\limits_{i=۱}^{\infty}A^i$ برابر است با:

۱) I ۲) وجود ندارد. ۳) $۲I$ ۴) $\frac{۱}{۲}I$

۳ـ اگر A یک ماتریس پادمتقارن حقیقی و $P=(I-A)(I+A)^{-۱}$ ، آنگاه P^tP برابر است با:

۱) $A^۲$ ۲) A ۳) $A-I$ ۴) I

۴ـ اگر $A_{۲\times۳}$ و $B_{۳\times۲}$ دو ماتریس حقیقی باشند، آنگاه کدام گزینه درست است؟

۱) AB نامنفرد است. ۲) BA نامنفرد است. ۳) ممکن است AB منفرد باشد. ۴) ممکن است BA منفرد باشد.

۵ـ تعداد ماتریس‌های مقدماتی ۲×۲ روی $\mathbb{Z}_{۱۷}$ برابر است با:

۱) ۶۸ ۲) ۶۴ ۳) ۶۰ ۴) ۷۲

۶ـ اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۳\\ -۲ & -۳ & ۲\\ ۱ & -۲ & -۲۸\end{bmatrix}$ ، $A^{-۱}$ برابر است با:

۱) $\begin{bmatrix}۸۸ & ۵۰ & ۱۳\\ -۵۴ & -۳۱ & ۸\\ ۷ & ۴ & ۱\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}۸۸ & ۵۰ & ۱۳\\ -۵۴ & -۳۱ & -۸\\ ۷ & ۴ & ۲\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}۸۸ & ۵۰ & ۱۳\\ -۵۴ & -۳۱ & -۸\\ ۷ & ۴ & ۱\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}۸۸ & ۵۰ & ۱۳\\ -۵۴ & -۳۱ & -۸\\ ۷ & -۴ & ۱\end{bmatrix}$

۷ـ اگر ماتریس A به گونه‌ای باشد که $tr(A)=\det(A)=۱$ ، تعداد ماتریس‌هایی مانند B که در رابطهٔ $AB-BA=A$ صدق می‌کنند؛ برابر است با:

۱) صفر ۲) ۳ ۳) ۱ ۴) بینهایت

۸ـ فرض کنید $A=\left[a_{ij}\right]_{۵\times۵}$ که $a_{ij}=\begin{cases}۲ & i=j\\ ۱ & i+j\end{cases}$. در اینصورت $tr(AA^t)$ برابر است با:

۱) ۴۰ ۲) ۳۰ ۳) ۱۰۰ ۴) ۲۰

۹ـ تعداد ماتریس‌های متقارن ۳×۳ روی $\mathbb{Z}_۳$ برابر است با:

۱) ۲×۳^۵ ۲) $۳^۳$ ۳) $۳^۶$ ۴) $۶^۳$

۱۰ـ تعداد ماتریس‌های تحویل شده سطری ـ پلکانی ۵×۳ روی $\mathbb{Z}_۲$ که سطر صفر ندارند، برابر است با:

۱) ۳۲ ۲) ۶۴ ۳) ۳۶ ۴) ۱۲۸

۱۱ـ کدام گزینه در رابطهٔ $P\begin{bmatrix}۱ & -۲ & ۱\\ ۲ & -۳ & ۲\\ -۱ & ۲ & ۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۱\\ ۰ & ۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۴\end{bmatrix}$ صدق می‌کند؟

۱) $P=\begin{bmatrix}-۳ & ۲ & ۰\\ -۲ & ۱ & ۰\\ ۱ & ۰ & -۱\end{bmatrix}$ ۲) $P=\begin{bmatrix}-۳ & ۲ & ۰\\ -۲ & -۱ & ۰\\ ۱ & ۰ & ۱\end{bmatrix}$ ۳) $P=\begin{bmatrix}-۳ & ۲ & ۰\\ -۲ & ۱ & ۰\\ ۱ & ۰ & ۱\end{bmatrix}$ ۴) $P=\begin{bmatrix}۳ & ۲ & ۰\\ ۲ & -۱ & ۰\\ ۱ & ۰ & ۱\end{bmatrix}$

۱۲ـ کدام گزینه نادرست است؟

۱) تنها ماتریس‌های خود توان $(A^{2} = A)$ ماتریس همانی و ماتریس صفرند.

۲) هر ماتریس مقدماتی، معکوس‌پذیر و معکوس آن نیز یک ماتریس مقدماتی است.

۳) اگر A و B دو ماتریس وارون‌پذیر باشند، لزوماً AB نیز وارون‌پذیر است.

۴) اگر A نامنفرد باشد، آنگاه ماتریس‌های وارون‌پذیری مانند P و Q وجود دارند؛ بطوریکه $PAQ = I$.

۱۳ـ دستگاه $\begin{cases} 2x - 3y - z = a \\ x - y + 2z = b \\ x + 7z = c \end{cases}$ دارای جواب است، اگر و تنها اگر:

۱) $a + 3b + c = 0$ ۲) $a + 3b = c$ ۳) $3b + c = a$ ۴) $a + c = 3b$

۱۴ـ فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ ، $C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ و $D = CBA$ در این‌صورت درایه d_{21} برابر است با:

۱) ۸۸ ۲) ۸۰ ۳) ۲۴ ۴) ۷۶

۱۵ـ اگر A، B و C ماتریس‌های مربعی، ناصفر و به ترتیب متقارن، پادمتقارن و قطری باشند، کدامیک از ماتریس‌های زیر متقارن است؟ (تمام ماتریس‌ها هم مرتبه هستند)

۱) ABC ۲) $AB^{2}C^{3}$ ۳) $A^{2}BC^{3}$ ۴) $A^{3}BC^{3}$

۱۶ـ کدام گزینه غلط نیست؟

۱) ماتریس مربعی مانند A وجود دارد؛ به طوری‌که $tr(AA^{t}) < 0$.

۲) ماتریس‌های مربعی مانند A و B وجود دارند؛ به طوری‌که $tr(AB) < tr(BA)$.

۳) به ازای هر ماترس خود توان مانند $A(A^{2} = A)$ و هر عدد حقیقی $a \neq 1$، ماتریس $I - aA$ وارون‌پذیر است.

۴) ماتریسی پوچ توان مانند A وجود دارد؛ به طوری‌که ماتریس $I - A$ منفرد باشد.

۱۷ـ فرض کنید مرتبهٔ پوچی ماتریس A برابر با ۴ باشد. در این‌صورت $(I + \frac{1}{3}A)^{-1}$ برابر است با:

۱) لزوماً ماتریس $I + \frac{1}{3}A$ وارون‌پذیر نیست.

۲) $I + \frac{1}{3}A + \frac{1}{9}A^{2} + \frac{1}{27}A^{3}$

۳) $I - \frac{1}{3}A + \frac{1}{9}A^{2}$

۴) $I - \frac{1}{3}A + \frac{1}{9}A^{2} - \frac{1}{27}A^{3}$

۱۸ـ کدام گزیه درست نیست؟

۱) هر ماتریس پوچ توان منفرد است.

۲) هر ماتریس بالا مثلثی با درایه‌های قطری صفر، پوچ توان است.

۳) هر ماتریس پائین مثلثی $n \times n$ با درایه‌های قطری صفر در رابطهٔ $A^{n} = 0$ صدق می‌کند.

۴)اگر A و B می‌توان باشند، آن‌گاه AB یا BA نیز پوچ می‌توانند.

۱۹ـ کدام گزینه هم ارز سطری مقدماتی با یکدیگر گزینه‌ها نیست؟

۱) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & -5 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

۲۰ـ اگر A یک ماتریس 5×7 باشد، آنگاه دستگاه $AX = 0$

۱) دارای بینهایت جواب است.

۲) دارای تعداد متناهی جواب غیر بدیهی است.

۳) با توجه به درایه‌های A ممکن است فقط جواب بدیهی داشته باشند.

۴) چون تعداد مجهولات بیشتر از تعداد معادلات است، پس فقط جواب بدیهی دارد.