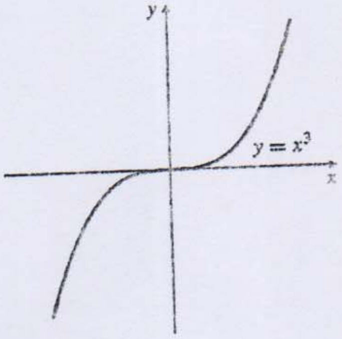
۱.۳ تابع وارون

تابع $f(x)=x^3$ را که نمودارش در شکل ۱.۳ آمده است در نظر می‌گیریم. مانند هر تابع دیگر، $f(x)$ نیز به‌ازای هر x متعلق به‌قلمرو خود (که کل خط حقیقی $\mathbb{R}$ است) فقط یک مقدار دارد. به‌زبان هندسی، هر خط قائم، نمودار f را فقط در یک نقطه قطع می‌کند. در مورد این تابع f، هر خط **افقی** نیز نمودار را فقط در یک نقطه قطع می‌کند. یعنی، مقادیر مختلف x همواره مقادیر مختلفی به $f(x)$ می‌دهند. چنین تابعی را **یک‌به‌یک** می‌نامیم.

تعریف ۱ می‌گوییم تابع f یک‌به‌یک است هرگاه به‌ازای هر دو نقطهٔ x_1 و x_2 متعلق به‌قلمرو f به‌طوری که $x_1 \neq x_2$، داشته باشیم $f(x_1)\neq f(x_2)$. به‌عبارت دیگر، هرگاه

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$$

تابعی که بر یک بازه معین و صعودی یا نزولی است، بر این بازه یک‌به‌یک است. (برای بحث بیشتر در این مورد، بخش ۶.۲ را ببینید.)



شکل ۱.۳ نمودار $f(x)=x^3$

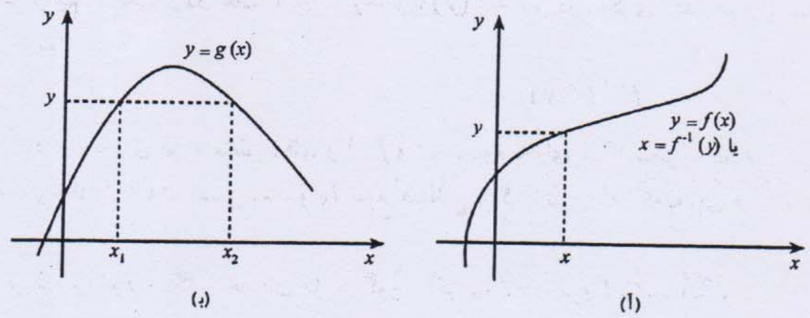
تابع $f(x)=x^3$ را مجدداً در نظر می‌گیریم (شکل ۱.۳). چون معادلهٔ $y=x^3$ به‌ازای هر مقدار مفروض y متعلق به‌برد f، جواب یکتایی برای x دارد، پس f یک‌به‌یک است. مشخصاً داریم $x=y^{1/3}$. این معادله x را به‌عنوان تابعی از y تعریف می‌کند. این تابع جدید را **وارون** f می‌نامیم و آن را با f^{-1} نشان می‌دهیم. بدین‌سان،

$$f^{-1}(y)=y^{1/3}$$

نماد ۱ — در f^{-1} را با توان اشتباه نگیرید. تابع وارون، یعنی f^{-1}، عکس تابع، یعنی $\frac{1}{f}$، نیست. اگر بخواهیم عکس تابع، یعنی $\frac{1}{f(x)}$، را با توان نشان دهیم می‌توانیم آن را به‌صورت $(f(x))^{-1}$ بنویسیم.

اگر تابع f یک‌به‌یک باشد، به‌ازای هر عدد y متعلق به‌برد آن همواره عدد یکتایی مانند x در قلمرواش هست به‌طوری که $y=f(x)$. چون x به‌طور یکتا به‌وسیلهٔ y معین می‌شود، پس تابعی از y است. می‌نویسیم $x=f^{-1}(y)$ و f^{-1} را وارون f می‌نامیم. تابع f که نمودار آن در شکل ۲.۳ (آ) نشان‌داده‌شده یک‌به‌یک است و وارون دارد. تابع g که نمودار آن در شکل ۲.۳ (ب) نشان داده شده است یک‌به‌یک نیست و وارون ندارد.

معمولاً مایلیم متغیر متعلق به‌قلمرو توابع را با x نشان دهیم و نه y. به‌همین سبب نقش x و y را عوض می‌کنیم و تعریف قبل را به‌صورت زیر ارائه می‌دهیم.



شکل ۲.۳ (آ) f یک‌به‌یک است و وارون دارد. $y = f(x)$ به‌همان معنی $x = f^{-1}(y)$ است (ب) g یک‌به‌یک نیست

تعریف ۲ اگر f یک‌به‌یک باشد، آنگاه **تابع وارون** (f^{-1}) دارد. مقدار $f^{-1}(x)$ عبارت است از عدد یکتای y متعلق به‌قلمرو f که به‌ازای آن داریم $x = f(y)$. بدین‌سان،

$$y = f^{-1}(x) \iff x = f(y)$$

همان‌طور که قبلاً مشاهده شد، $y = x^۳$ هم‌ارز است با $x = y^{۱/۳}$ یا با تعویض نقش x و y،

$$y = x^{۱/۳} \iff x = y^۳$$

مثال ۱ نشان دهید که $f(x) = ۲x - ۱$ یک‌به‌یک است و وارون آن، یعنی $f^{-1}(x)$ را بیابید.

حل. چون بر $\mathbb{R}$ داریم $f'(x) = ۲ > ۰$، f صعودی است و بنابراین بر $\mathbb{R}$ یک‌به‌یک است. قرار می‌دهیم $y = f^{-1}(x)$. دراین‌صورت

$$x = f(y) = ۲y - ۱$$

اگر این معادله را نسبت به‌مجهول y حل کنیم، آنگاه $y = \frac{x + ۱}{۲}$ و از این رو، $f^{-1}(x) = \frac{x + ۱}{۲}$.

چند نکته دربارهٔ تابعی مانند f و وارون آن، یعنی f^{-1} هست که باید آنها را به‌خاطر بسپارید. مهمترینِ آنها این است که هر دو معادلهٔ

$$y = f^{-1}(x) \qquad , \qquad x = f(y)$$

دارای یک معنی هستند. این دو معادله هم‌ارزند، درست مانند هم‌ارزی معادله‌های $y = x + ۱$ و $x = y - ۱$. هر یک از این دو معادله را می‌توان به‌جای دیگری گذاشت. بنابراین، قلمرو f^{-1} برد f است و برعکس.

وارون هر تابع یک‌به‌یک، تابعی یک‌به‌یک بوده و از این رو، دارای وارون است. شگفت‌آور نیست بگوییم وارون f^{-1} همان f است:

$$y = (f^{-1})^{-1}(x) \iff x = f^{-1}(y) \iff y = f(x)$$

می‌توانیم هر یک از دو معادلهٔ $y=f^{-1}(x)$ یا $x=f(y)$ را در دیگری بگذاریم و اتحادهای زیر را به‌دست آوریم:

$$f(f^{-1}(x))=x \qquad , \qquad f^{-1}(f(y))=y$$

اتحاد اول به‌ازای هر x متعلق به‌قلمرو f^{-1} و اتحاد دوم به‌ازای هر y متعلق به‌قلمرو f برقرار است. اگر S مجموعه‌ای از اعداد حقیقی باشد و I_S **تابع همانی** بر S را نشان دهد که به‌ازای هر x متعلق به S با ضابطهٔ

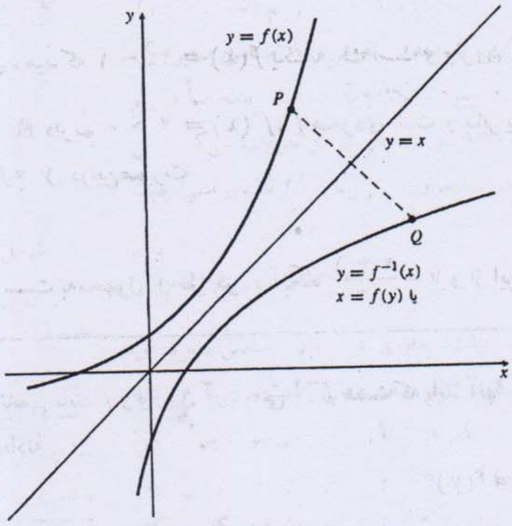
$I_S(x)=x$

تعریف می‌شود، آنگاه اتحادهای قبل می‌گویند اگر $\mathfrak{D}(f)$ قلمرو f باشد، آنگاه

$$f\circ f^{-1}=I_{\mathfrak{D}(f^{-1})} \qquad , \qquad f^{-1}\circ f=I_{\mathfrak{D}(f)}$$

که در آن $f\circ g(x)$ عبارت است از ترکیب $f(g(x))$.

اگر مختصات نقطهٔ $P=(a\,,b)$ را جابه‌جا کنیم تا نقطهٔ $Q=(b\,,a)$ حاصل شود، آنگاه هر یک از این دو نقطه بازتاب دیگری نسبت به‌خط $y=x$ است. (برای اثبات، ملاحظه می‌کنیم که شیب خط PQ برابر است با -۱ و از این رو، بر $y=x$ عمود است. همچنین، وسط PQ نقطهٔ $\left(\frac{a+b}{۲},\frac{b+a}{۲}\right)$ است که روی $y=x$ قرار دارد.) در نتیجه، نمودارهای معادله‌های $x=f(y)$ و $y=f(x)$ نسبت به‌خط $x=y$ بازتاب یکدیگرند. چون معادلهٔ $x=f(y)$ هم‌ارز است با $y=f^{-1}(x)$، نمودارهای توابع f^{-1} و f نسبت به $y=x$ بازتاب یکدیگرند. شکل ۳.۳ را ببینید.



شکل ۳.۳ نمودار $y=f^{-1}(x)$ بازتاب نمودار $y=f(x)$ نسبت به‌خط $y=x$ است

فهرست ویژگی‌های توابع وارون را که در بالا مورد بحث قرار دادیم در زیر آورده‌ایم:

ویژگی‌های توابع وارون

۱. $y=f^{-1}(x) \Leftrightarrow x=f(y)$

۲. قلمرو f^{-1} برد f است.
۳. برد f^{-1} قلمرو f است.
۴. به‌ازای هر x متعلق به‌قلمرو f، $f^{-1}(f(x)) = x$.
۵. به‌ازای هر x متعلق به‌قلمرو f^{-1}، $f(f^{-1}(x)) = x$.
٦. به‌ازای هر x متعلق به‌قلمرو f، $(f^{-1})^{-1}(x) = f(x)$.
۷. نمودار f^{-1} بازتاب نمودار f نسبت به‌خط $y = x$ است.

مثال ۲ نشان دهید که $g(x) = \sqrt{۲x + ۱}$ وارون‌پذیر است و وارون آن را بیابید.

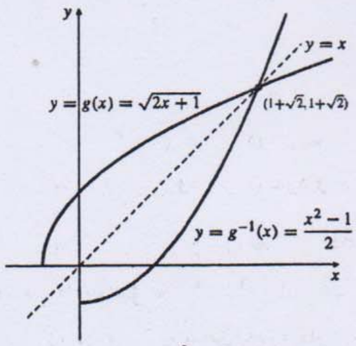
حل. اگر $g(x_۱) = g(x_۲)$، آنگاه $\sqrt{۲x_۱ + ۱} = \sqrt{۲x_۲ + ۱}$. اگر دو طرف را مجذور کنیم، می‌بینیم که $۲x_۱ + ۱ = ۲x_۲ + ۱$ و در نتیجه، $x_۱ = x_۲$. بنابراین، g یک‌به‌یک و وارون‌پذیر است. قرار می‌دهیم $y = g^{-۱}(x)$. دراین‌صورت

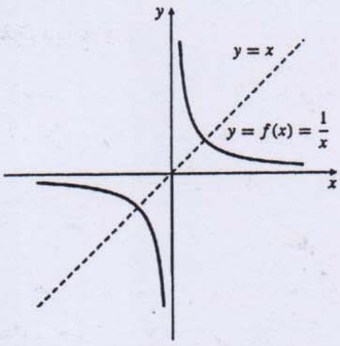
$$x = g(y) = \sqrt{۲y + ۱}$$

پس $x \geq ۰$ و $x^۲ = ۲y + ۱$. بنابراین، $y = \frac{x^۲ - ۱}{۲}$ و

$$g^{-۱}(x) = \frac{x^۲ - ۱}{۲} \quad , \quad x \geq ۰$$

(قید $x \geq ۰$ لازم است، زیرا برد g عبارت است از $[۰ , \infty[$.) نمودارهای g و $g^{-۱}$ را در شکل ۴.۳ (آ) ببینید. ■





شکل ۴.۳ (آ) نمودارهای $g(x) = \sqrt{۲x + ۱}$ و وارونِ آن (ب) نمودار تابع خود ـ وارون $f(x) = \frac{۱}{x}$

تعریف ۳ تابع f را **خود ـ وارون** می‌نامیم هرگاه $f^{-۱} = f$، یعنی هرگاه به‌ازای هر x متعلق به‌قلمرو f داشته باشیم $f(f(x)) = x$.

مثال ۳ تابع $f(x) = \frac{۱}{x}$ خود ـ وارون است. اگر $y = f^{-۱}(x)$، آنگاه $x = f(y) = \frac{۱}{y}$. بنابراین،

$y=\frac{1}{x}$ و از این رو، $f^{-1}(x)=\frac{1}{x}=f(x)$. شکل ۴.۳ (ب) را ببینید. نمودار هر تابع خود ـ وارون باید بازتاب خودش نسبت به‌خط $y=x$ باشد. بنابراین، باید نسبت به‌این خط متقارن باشد. ■

وارون‌سازی توابع غیر یک‌به‌یک

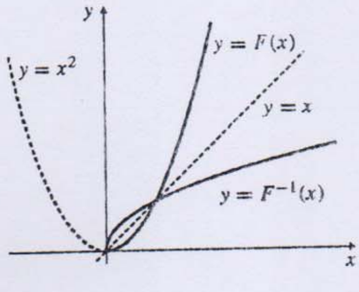
بسیاری از توابع مهم، نظیر توابع مثلثاتی، بر کل قلمرو خود یک‌به‌یک نیستند. ولی باز هم این امکان هست که برای این نوع توابع، وارون را تعریف کنیم مشروط بر اینکه قلمرو آنها را چنان کاهش دهیم که توابع محدودشدهٔ حاصل یک‌به‌یک بشوند.

برای مثال، تابع $f(x)=x^{2}$ را در نظر می‌گیریم. قلمرو این تابع، کل خط حقیقی است و f بر آن یک‌به‌یک نیست، زیرا به‌ازای هر a داریم $f(-a)=f(a)$. تابع جدید $F(x)$ را به‌صورت $f(x)$ ولی با قلمرو کوچکتر طوری تعریف می‌کنیم که یک‌به‌یک باشد. می‌توانیم بازهٔ $[0, \infty[$ را قلمرو F بگیریم:

$$F(x)=x^{2} \quad , \quad 0 \leq x < \infty$$

شکل ۵.۳ نمودار F را نشان می‌دهد. این نمودار عبارت است از نیمهٔ راست سهمی $y=x^{2}$ (که این سهمی همان نمودار f است). تابع F آشکارا یک‌به‌یک است و از این رو، دارای وارونی است که به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

فرض کنیم $y=F^{-1}(x)$. دراین‌صورت $x=F(y)=y^{2}$ و $y \geq 0$. بدین‌سان، $y=\sqrt{x}$. پس، $F^{-1}(x)=\sqrt{x}$.



شکل ۵.۳ تحدید x^{2} به $[0, \infty[$ (یعنی F) و وارون آن (یعنی F^{-1})

این روش تحدید قلمرو توابع غیر یک‌به‌یک به‌گونه‌ای که منجر به‌وارون‌پذیری آنها بشود، در بخش ۵.۳ به‌منظور به‌دست آوردن وارون توابع مثلثاتی مورد استفاده قرار خواهد گرفت.

مشتق توابع وارون

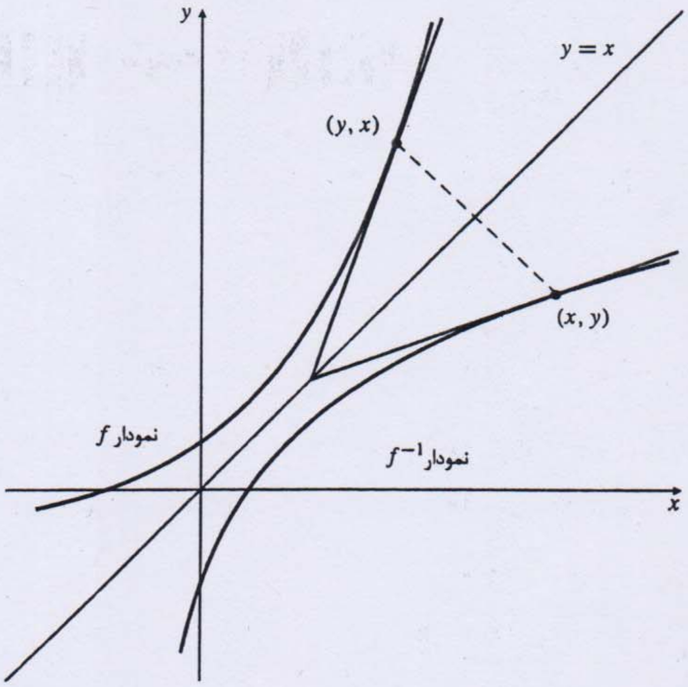
فرض کنیم تابع f بر بازهٔ $]a, b[$ مشتق‌پذیر باشد و به‌ازای هر $a<x<b$، $f'(x)>0$ (که دراین‌صورت f بر $]a, b[$ صعودی است) یا به‌ازای هر $a<x<b$، $f'(x)<0$ (که دراین‌صورت f بر $]a, b[$ نزولی است). در هر دو حالت، f بر $]a, b[$ یک‌به‌یک است و از این رو، وارون دارد و این وارون به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$y=f^{-1}(x) \iff x=f(y) \quad , \quad (a<x<b)$$

چون فرض بر این است که نمودار $y=f(x)$ در هر xای متعلق به $]a, b[$ مماس ***غیرافقی*** دارد، بازتاب آن (نسبت به‌خط $y=x$)، یعنی نمودار $y=f^{-1}(x)$، در هر xای متعلق به‌بازهٔ دارای دو نقطهٔ انتهایی $f(a)$ و $f(b)$ دارای مماس ***غیرقائم*** است. بنابراین، f^{-1} در هر یک از این xها مشتق‌پذیر است. (شکل ۶.۳ را ببینید.)

فرض کنیم $y=f^{-1}(x)$. می‌خواهیم $\frac{dy}{dx}$ را بیابیم. معادلهٔ $y=f^{-1}(x)$ را به‌صورت $x=f(y)$ می‌نویسیم و از رابطهٔ اخیر به‌طور ضمنی نسبت به x مشتق می‌گیریم. دراین‌صورت $1=f'(y) \cdot \frac{dy}{dx}$ و از این رو،

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{f'(y)}=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$



شکل ۶.۳ مماس‌های رسم شده بر نمودارهای f و f^{-1}

بنابراین، شیب نمودار f^{-1} در (x, y) برابر است با عکس شیب نمودار f در (y, x) (شکل ۶.۳) و

$$\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

با استفاده از نمادگذاری لایبنیتس داریم

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_x = \frac{1}{\left.\frac{dx}{dy}\right|_{y=f^{-1}(x)}}$$

مثال ٤ نشان دهید که $f(x) = x^3 + x$ بر کل خط حقیقی یک‌به‌یک است و با توجه به $f(2) = 10$، $(f^{-1})'(10)$ را بیابید.

حل. چون به‌ازای هر عدد حقیقی x داریم $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$، f صعودی و بنابراین، یک‌به‌یک و وارون‌پذیر است. اگر $y = f^{-1}(x)$، آنگاه

$$x = f(y) = y^3 + y \quad \Rightarrow \quad 1 = (3y^2 + 1)y'$$

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{1}{3y^2 + 1}$$

از $f(2) = 10 = x$ نتیجه می‌شود که $y = f^{-1}(10) = 2$. پس

$$(f^{-1})'(10) = \left.\frac{1}{3y^2 + 1}\right|_{y=2} = \frac{1}{13}$$

تمرینات ۱.۳

در تمرین‌های ۱ تا ۱۲، نشان دهید که تابع f یک‌به‌یک است و تابع وارون آن، یعنی $f^{-۱}$ را محاسبه کنید. قلمرو و برد هر دو تابع f و $f^{-۱}$ را مشخص کنید.

۱. $f(x)=x-۱$

۲. $f(x)=۲x-۱$

۳. $f(x)=\sqrt{x-۱}$

۴. $f(x)=-\sqrt{x-۱}$

۵. $f(x)=x^{۳}$

۶. $f(x)=۱+\sqrt[۳]{x}$

۷. $f(x)=x^{۲}$، $x\le ۰$

۸. $f(x)=(۱-۲x)^{۳}$

۹. $f(x)=\frac{۱}{x+۱}$

۱۰. $f(x)=\frac{x}{۱+x}$

۱۱. $f(x)=\frac{۱-۲x}{۱+x}$

۱۲. $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^{۲}+۱}}$

در تمرین‌های ۱۳ تا ۲۰، f تابعی یک‌به‌یک و $f^{-۱}$ وارون آن است. وارون هر یک از توابع مفروض را برحسب $f^{-۱}$ محاسبه کنید.

۱۳. $g(x)=f(x)-۲$

۱۴. $h(x)=f(۲x)$

۱۵. $k(x)=-۳f(x)$

۱۶. $m(x)=f(x-۲)$

۱۷. $p(x)=\frac{۱}{۱+f(x)}$

۱۸. $q(x)=\frac{f(x)-۳}{۲}$

۱۹. $r(x)=۱-۲f(۳-۴x)$

۲۰. $s(x)=\frac{۱+f(x)}{۱-f(x)}$

در تمرین‌های ۲۱ تا ۲۳ نشان دهید که تابع مفروض یک‌به‌یک است و وارون آن را بیابید.

۲۱. $f(x)=\begin{cases} x^{۲}+۱ & x\ge ۰ \\ x+۱ & x<۰ \end{cases}$

۲۲. $g(x)=\begin{cases} x^{۳} & x\ge ۰ \\ x^{۱/۳} & x<۰ \end{cases}$

۲۳. $h(x)=x|x|+۱$

۲۴. اگر $f(x)=x^{۳}+x$، $f^{-۱}(۲)$ را بیابید.

۲۵. اگر $g(x)=x^{۳}+x-۹$، $g^{-۱}(۱)$ را بیابید.

۲۶. اگر $h(x)=x|x|+۱$، $h^{-۱}(-۳)$ را بیابید.

۲۷. فرض کنیم تابع f یک‌به‌یک باشد و در رابطهٔ $f'(x)=\frac{۱}{x}$ صدق کند. اگر $y=f^{-۱}(x)$، نشان دهید که $\frac{dy}{dx}=y$.

۲۸. اگر $f(x)=۱+۲x^{۳}$، $(f^{-۱})'(x)$ را بیابید.

۲۹. نشان دهید که $f(x)=\frac{۴x^{۳}}{x^{۲}+۱}$ وارون دارد و $(f^{-۱})'(۲)$ را بیابید.

*۳۰. اگر $f(x)=x\sqrt{۳+x^{۲}}$، $(f^{-۱})'(-۲)$ را بیابید.

۳۱. اگر $f(x)=\frac{x^{۲}}{۱+\sqrt{x}}$، $f^{-۱}(۲)$ را تا ۵ رقم اعشاری بیابید.

۳۲. اگر $g(x)=۲x+\sin x$، نشان دهید که g وارون‌پذیر است و $g^{-۱}(۲)$ و $(g^{-۱})'(۲)$ را تا پنج رقم اعشاری بیابید.

۳۳. نشان دهید که $f(x)=x\sec x$ بر $]-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}[$ یک‌به‌یک است. قلمرو $f^{-۱}(x)$ کدام است؟ $(f^{-۱})'(۰)$ را بیابید.

۳۴. اگر f و g به‌ترتیب دارای وارون‌های $f^{-۱}$ و $g^{-۱}$ باشند، نشان دهید که تابع مرکب $f\circ g$ دارای وارون $(f\circ g)^{-۱}=g^{-۱}\circ f^{-۱}$ است.

*۳۵. به‌ازای کدام مقادیر برای ثابت‌های a، b و c، تابع $f(x)=\frac{x-a}{bx-c}$ خود-وارون است؟

*۳۶. آیا یک تابع زوج می‌تواند خود-وارون باشد؟ یک تابع فرد چطور؟

*۳۷. در این بخش ادعا شد که هر تابع صعودی (یا نزولی) معین بر یک بازه الزاماً یک‌به‌یک است. آیا عکس این گزاره درست است؟ توضیح دهید.

*۳۸. تمرین قبل را با این فرض اضافی تکرار کنید که f بر بازهٔ مورد بحث پیوسته است.

از $45°C$ به $20°C$ برسد، چند دقیقهٔ دیگر لازم است تا دمای آن $0°C$ بشود؟

۲۷. **(گرمایش)** اگر شیئی در یک اتاق در مدت ۴ دقیقه از دمای $5°C$ به $10°C$ برسد و دمای اتاق $20°C$ باشد، چند دقیقهٔ دیگر طول می‌کشد تا دمای شیء به $15°C$ برسد؟ فرض بر این است که شیء با آهنگی متناسب با اختلاف دمای خود و دمای اتاق گرمتر می‌شود.

معادلهٔ تدارکاتی

*۲۸. فرض کنیم کمیت $y(t)$ رشد تدارکاتی را نشان دهد. اگر مقادیر $y(t)$ در لحظات $t=0$، $t=1$ و $t=2$ به‌ترتیب عبارت باشند از y_0، y_1 و y_2، معادله‌ای بیابید که مقدار حدی $y(t)$، یعنی L، در آن صدق کند و سپس معادله را نسبت به‌مجهول L حل کنید. اگر $y_0 = 3$، $y_1 = 5$ و $y_2 = 6$، L را بیابید.

*۲۹. نشان دهید جواب $y(t)$ برای معادلهٔ تدارکاتی که در $0 < y(0) < L$ صدق می‌کند، وقتی سریعترین افزایش را دارد که مقدار آن $\frac{L}{2}$ باشد. (*راهنمایی*: برای اثبات این امر، به‌ضابطهٔ جواب نیاز ندارید.)

*۳۰. اگر $y_0 > L$، بازه‌ای را بیابید که جواب مفروض معادلهٔ تدارکاتی بر آن معتبر باشد. اگر t به‌انتهای چپ این بازه میل کند، چه وضعی برای جواب پیش می‌آید؟

*۳۱. اگر $y_0 < 0$، بازه‌ای را بیابید که جواب مفروض معادلهٔ تدارکاتی بر آن معتبر باشد. اگر t به‌انتهای راست این بازه میل کند، چه وضعی برای جواب پیش می‌آید؟

۳۲. **(مدلسازی شیوع یک بیماری همه‌گیر)** تعداد (y) اشخاصی که مبتلا به‌یک ویروس بسیار مسری شده‌اند به‌وسیلهٔ خم تدارکاتی

$$y = \frac{L}{1 + Me^{-kt}}$$

مدلسازی شده است که در آن t با شروع از لحظهٔ بروز بیماری، برحسب ماه اندازه‌گیری می‌شود. در آغاز تعداد مبتلایان ۲۰۰ نفر بود و یک ماه بعد، این تعداد به ۱۰۰۰ نفر افزایش یافت. سرانجام تعداد مبتلایان در عدد ۱۰۰۰۰ تثبیت شد. مقادیر پارامترهای L، M و k را بیابید.

۳۳. در ادامهٔ تمرین قبل، تعداد مبتلایان ۳ ماه بعد از بروز بیماری چند نفر بوده و آهنگ رشد در آن لحظه چقدر بوده است؟

۵.۳ توابع وارون مثلثاتی

هر شش تابع مثلثاتی، دوره‌ای‌اند و بنابراین یک‌به‌یک نیستند. ولی همان‌طور که در بخش ۱.۳ در مورد تابع x^2 دیدیم، می‌توانیم قلمروهای آنها را به‌گونه‌ای محدود کنیم که تحدیدشان یک‌به‌یک و وارون‌پذیر بشوند.

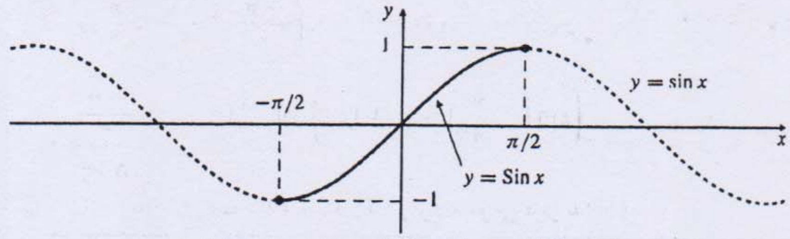
تابع وارون سینوس (یا تابع آرک سینوس)

تابع $\operatorname{Sin} x$ (با حرف بزرگ S) را برابر با تحدید $\sin x$ به‌بازهٔ $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ تعریف می‌کنیم:

تعریف ۸ تابع $\operatorname{Sin} x$

$\operatorname{Sin} x = \sin x$ هرگاه $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$

چون مشتق تابع اخیر، یعنی $\cos x$، بر بازهٔ $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ مثبت است، تابع $\operatorname{Sin} x$ بر قلمرو خود صعودی و از این رو، تابعی یک‌به‌یک است. قلمرو و برد این تابع به‌ترتیب عبارت‌اند از $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ و $[-1, 1]$. (شکل ۱۷.۳ را ببینید.)



شکل ۱۷.۳ نمودار $\text{Sin}\, x$ قسمتی از نمودار $\sin x$ است

چون Sin یک‌به‌یک است، وارون دارد و این وارون را با $\sin^{-۱}$ نشان می‌دهیم (بعضی از کتاب‌ها و برنامه‌های کامپیوتری، نماد arcsin ، Arcsin یا asin را به‌کار می‌برند) و آن را تابع **وارون سینوس** یا تابع **آرک سینوس** می‌نامیم.

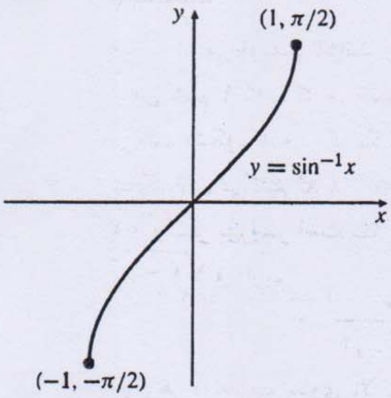
تعریف ۹ **تابع وارون سینوس $\sin^{-۱} x$ یا $\arcsin x$**

$$y = \sin^{-۱} x \quad \Leftrightarrow x = \text{Sin}\, y$$
$$\Leftrightarrow x = \sin y \quad , \quad -\frac{\pi}{۲} \le y \le \frac{\pi}{۲}$$

نمودار $\sin^{-۱}$ در شکل ۱۸.۳ نشان داده شده است. این نمودار عبارت است از بازتاب نمودار Sin نسبت به‌خط $y = x$. قلمرو $\sin^{-۱}$ برابر است با $[-۱ , ۱]$ (یعنی برد Sin) و برد $\sin^{-۱}$ برابر است با $\left[-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}\right]$ (یعنی قلمرو Sin) . روابط بین Sin و $\sin^{-۱}$ عبارت‌اند از

$$\sin^{-۱}(\text{Sin}\, x) = \arcsin(\text{Sin}\, x) = x \quad , \quad -\frac{\pi}{۲} \le x \le \frac{\pi}{۲}$$
$$\text{Sin}(\sin^{-۱} x) = \text{Sin}(\arcsin x) = x \quad , \quad -۱ \le x \le ۱$$

تذکر. همان‌طور که برای تابع وارون در حالت کلی (نظیر $f^{-۱}$) اشاره شد $\sin^{-۱} x$ نشان‌دهندهٔ **عکس سینوس**، یعنی $۱/\sin x$ نیست. (برای عکس سینوس، قبلاً نام کاملاً مشخصی را انتخاب کرده‌ایم: $\csc x$.) $\sin^{-۱} x$ «زاویه‌ای بین $-\frac{\pi}{۲}$ و $\frac{\pi}{۲}$ بوده که سینوس آن x است».



شکل ۱۸.۳ تابع آرک سینوس

مثال ۱

(آ) $\sin^{-۱} \frac{۱}{۲} = \frac{\pi}{۶}$

(زیرا $\sin \frac{\pi}{۶} = \frac{۱}{۲}$ و $\frac{-\pi}{۲} < \frac{\pi}{۶} < \frac{\pi}{۲}$).

(ب) $\sin^{-۱}\left(-\frac{۱}{\sqrt{۲}}\right) = \frac{-\pi}{۴}$ (زیرا $\sin\left(-\frac{\pi}{۴}\right) = \frac{-۱}{\sqrt{۲}}$)

و $\left(\frac{-\pi}{2} < \frac{-\pi}{4} < \frac{\pi}{2}\right)$.

(پ) $\sin^{-1}(-1) = \frac{-\pi}{2}$ $\left(\text{زیرا } \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1\right)$

(ت) $\sin^{-1} 2$ تعریف نشده است. (۲ در برد سینوس قرار ندارد.)

مثال ۲ مطلوب است محاسبهٔ (آ) $\sin(\sin^{-1} 0/7)$، (ب) $\sin^{-1}(\sin 0/3)$، (پ) $\sin^{-1}(\sin \frac{4\pi}{5})$ و (ت) $\cos(\sin^{-1} 0/6)$.

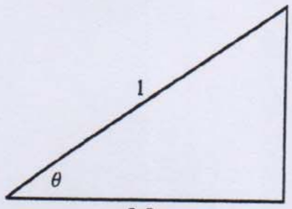
حل.

(آ) $\sin(\sin^{-1} 0/7) = 0/7$ (رابطهٔ بین تابع و تابع وارون).

(ب) $\sin^{-1}(\sin 0/3) = 0/3$ (رابطهٔ بین تابع و تابع وارون).

(پ) عدد $\frac{4\pi}{5}$ در $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ قرار ندارد و از این‌رو، نمی‌توانیم مستقیماً رابطهٔ بین تابع و تابع وارون را به‌کار ببریم. ولی با توجه به‌زاویه‌های متمم داریم $\sin \frac{4\pi}{5} = \sin(\pi - \frac{\pi}{5}) = \sin \frac{\pi}{5}$. بنابراین، $\sin^{-1}(\sin \frac{4\pi}{5}) = \sin^{-1}(\sin \frac{\pi}{5}) = \frac{\pi}{5}$.

(ت) مطابق مثلث قائم‌الزاویهٔ شکل ۱۹.۳ که در آن وتر برابر با ۱ و ضلع روبه‌روی θ برابر با ۰/۶ است، داریم $\theta = \sin^{-1} 0/6$. بنابر قضیهٔ فیثاغورس، ضلع مجاور θ برابر است با $\sqrt{1-(0/6)^2} = 0/8$. بنابراین، $\cos(\sin^{-1} 0/6) = \cos\theta = 0/8$.

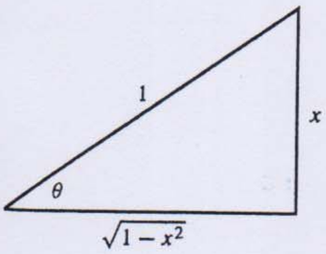


شکل ۱۹.۳

مثال ۳ عبارت $\tan(\sin^{-1} x)$ را ساده کنید.

حل. می‌خواهیم تانژانت زاویه‌ای را بیابیم که سینوس آن x است. فرض کنیم $0 \le x < 1$. مانند مثال ۲، مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم می‌کنیم (شکل ۲۰.۳) که یک زاویه‌اش θ باشد و اضلاع را طوری نشانگذاری می‌کنیم که $\theta = \sin^{-1} x$. ضلع روبه‌روی θ برابر است با x و وتر برابر است با ۱. ضلع سوم برابر می‌شود با $\sqrt{1-x^2}$ و داریم

$$\tan(\sin^{-1} x) = \tan\theta = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$



شکل ۲۰.۳

چون هر دو طرف تساوی بالا توابعی فرد از x هستند، همین نتیجه به‌ازای $-1 < x < 0$ نیز برقرار است.

اکنون با استفاده از مشتق‌گیری ضمنی، مشتق تابع وارون سینوس را می‌یابیم. اگر $y = \sin^{-1} x$، آنگاه

$x = \sin y$ و $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$. پس از مشتق‌گیری نسبت به x می‌بینیم که

$$1 = (\cos y)\frac{dy}{dx}$$

چون $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$، می‌دانیم که $\cos y \ge 0$. بنابراین،

$$\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$$

و از این رو، $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1} x = \frac{d}{dx}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

توجه داشته باشید که تابع وارون سینوس فقط بر بازهٔ **باز** $]-1, 1[$ مشتق‌پذیر است و شیب نمودار آن به‌ازای $x \longrightarrow -1^+$ یا $x \longrightarrow 1^-$ به‌بینهایت میل می‌کند. (شکل ۱۸.۳ را ببینید.)

مثال ٤ به‌ازای $a > 0$، مشتق $\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$ را بیابید و سپس $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ را محاسبه کنید.

حل. بنابر قاعدهٔ زنجیری (و با فرض $a > 0$) داریم

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1}\frac{x}{a} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{\sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2}}} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

بنابراین،

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx = \sin^{-1}\frac{x}{a} + C \qquad (a > 0)$$

مثال ٥ جواب مسألهٔ مقدار آغازی زیر را بیابید:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{4}{\sqrt{2 - x^2}} & (-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}) \\ y(1) = 2\pi \end{cases}$$

حل. با استفاده از انتگرال مثال قبل، به‌ازای ثابتی مانند C داریم

$$y = \int \frac{4}{\sqrt{2 - x^2}}\, dx = 4\sin^{-1}\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right) + C$$

همچنین،

$$2\pi = y(1) = 4\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + C = 4\left(\frac{\pi}{4}\right) + C = \pi + C$$

بدین‌سان، $C = \pi$ و $y = 4\sin^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + \pi$.

مثال ۶ **(یک خم دندان‌اره‌ای)** به‌ازای هر عدد حقیقی x فرض می‌کنیم $f(x) = \sin^{-1}(\sin x)$.

(آ) $f'(x)$ را محاسبه و ساده کنید.

(ب) کجا f مشتق‌پذیر است؟ کجا f پیوسته است؟

(پ) با استفاده از نتایج (آ) و (ب) نمودار f را رسم کنید.

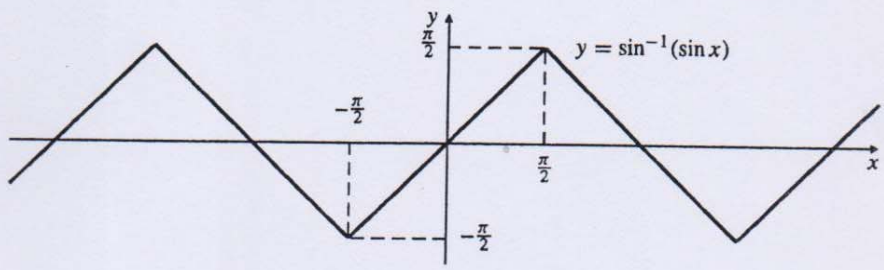
حل. (آ) با به‌کارگیری قاعدهٔ زنجیری و اتحاد فیثاغورس، ملاحظه می‌کنیم که

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(\sin x)^2}}(\cos x)$$

$$= \frac{\cos x}{\sqrt{\cos^2 x}} = \frac{\cos x}{|\cos x|} = \begin{cases} 1 & \text{اگر } \cos x > 0 \\ -1 & \text{اگر } \cos x < 0 \end{cases}$$

(ب) f در همهٔ نقاطی که به‌ازای آنها $\cos x$ صفر نشود مشتق‌پذیر است. به‌عبارت دیگر f همه جا به‌استثنای مضارب فرد $\frac{\pi}{2}$، یعنی $\pm\frac{\pi}{2}$، $\pm\frac{3\pi}{2}$، $\pm\frac{5\pi}{2}$، ...، مشتق‌پذیر است.
چون سینوس همه جا پیوسته است و مقادیر آن متعلق به $[-1, 1]$ هستند و $\sin^{-1}$ بر $[-1, 1]$ پیوسته است، بنابراین f بر کل خط حقیقی پیوسته است.

(پ) چون f پیوسته است، نمودار آن پارگی ندارد. این نمودار از پاره‌خط‌هایی تشکیل شده است که شیب‌های آنها بر بازه‌های واقع بین مضرب‌های فردِ متوالیِ $\frac{\pi}{2}$، یک در میان ۱ و ۱ − هستند. چون بر $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (که در آن $\cos x \geq 0$) داریم $f'(x) = 1$، این نمودار مطابق شکل ۲۱.۳ خواهند بود. ■



شکل ۲۱.۳ یک نمودار دندان‌اره‌ای

تابع وارون تانژانت (یا تابع آرک تانژانت)

تابع وارون تانژانت را با روشی مشابه تابع وارون سینوس تعریف می‌کنیم. نخست قلمرو تانژانت را به‌بازه‌ای محدود می‌کنیم که بر آن یک‌به‌یک باشد. در اینجا بازهٔ باز $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ را به‌کار می‌بریم. شکل ۲۲.۳ (آ) را ببینید.

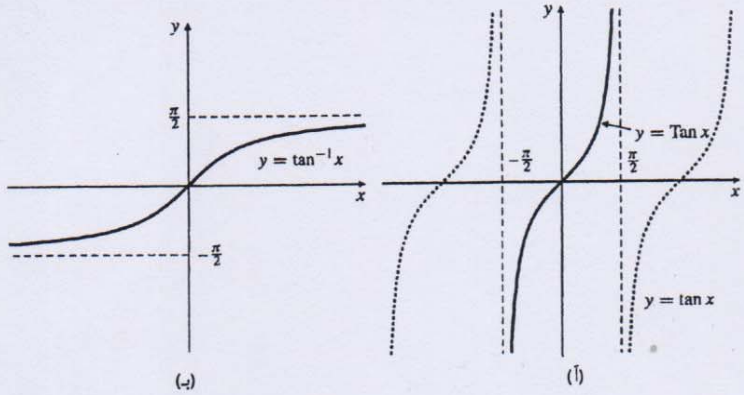
تعریف ۱۰ تابع $\operatorname{Tan} x$

$$\operatorname{Tan} x = \tan x \quad \text{هرگاه} \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

وارون تابع Tan را تابع **وارون تانژانت** می‌نامیم و آن را با $\tan^{-1}$ (یا arctan ، Arctan یا atan) نشان می‌دهیم. قلمرو $\tan^{-1}$ کل خط حقیقی (یعنی برد Tan) است. برد آن عبارت است از بازهٔ باز $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

تعریف ۱۱ تابع وارون تانژانت $\tan^{-1} x$ یا $\arctan x$

$$y = \tan^{-1} x \quad \Leftrightarrow \quad x \operatorname{Tan} y$$
$$\Leftrightarrow \quad x = \tan y \quad , \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$



شکل ۲۲.۳ (آ) نمودار $\operatorname{Tan} x$ (ب) نمودار $\tan^{-1} x$

نمودار $\tan^{-1}$ در شکل ۲۲.۳ (ب) نشان داده شده است. این نمودار، بازتاب نمودار Tan نسبت به‌خط $y = x$ است. روابط بین Tan و $\tan^{-1}$ عبارت‌اند از

$$\tan^{-1}(\operatorname{Tan} x) = \arctan(\operatorname{Tan} x) = x \quad , \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$
$$\operatorname{Tan}(\tan^{-1} x) = \operatorname{Tan}(\arctan x) = x \quad , \quad -\infty < x < \infty$$

مثال ۷ مطلوب است محاسبهٔ (آ) $\tan(\tan^{-1} ۳)$، (ب) $\tan^{-1}\left(\tan \frac{۳\pi}{۴}\right)$ و (پ) $\cos(\tan^{-1} ۲)$.

حل.

(آ) $\tan(\tan^{-1} ۳) = ۳$ (رابطهٔ بین تابع و تابع وارون).

(ب) $\tan^{-1}\left(\tan \frac{۳\pi}{۴}\right) = \tan^{-1}(-۱) = -\frac{\pi}{۴}$.

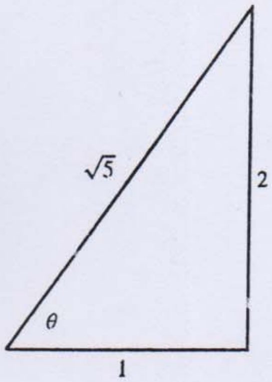
(پ) با توجه به‌مثلث شکل ۲۳.۳، $\cos(\tan^{-1} ۲) = \cos\theta = \frac{۱}{\sqrt{۵}}$. به‌روشی دیگر داریم $\tan(\tan^{-1} ۲) = ۲$ و از این رو، $\sec^{۲}(\tan^{-1} ۲) = ۱ + ۲^{۲} = ۵$. بنابراین، $\cos^{۲}(\tan^{-1} ۲) = \frac{۱}{۵}$.
چون کوسینوس بر برد $\tan^{-1}$ مثبت است، پس، $\cos(\tan^{-1} ۲) = \frac{۱}{\sqrt{۵}}$.

مشتق تابع وارون تانژانت نیز با استفاده از مشتق‌گیری ضمنی به‌دست می‌آید:
اگر $y = \tan^{-1} x$، آنگاه $x = \tan y$ و

$$1 = (\sec^2 y)\frac{dy}{dx} = (1 + \tan^2 y)\frac{dy}{dx} = (1 + x^2)\frac{dy}{dx}$$

بدین‌سان،

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1} x = \frac{1}{1 + x^2}$$



شکل ۲۳.۳

مثال ۸ مشتق $\frac{d}{dx}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$ را بیابید و سپس $\int \frac{1}{x^2 + a^2}\,dx$ را محاسبه کنید.

حل. داریم

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{a^2}} \cdot \frac{1}{a} = \frac{a}{a^2 + x^2}$$

بنابراین،

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

مثال ۹ ثابت کنید که به‌ازای $x > -1$ داریم $\tan^{-1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \tan^{-1}x - \frac{\pi}{4}$.

حل. قرار می‌دهیم $f(x) = \tan^{-1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) - \tan^{-1}x$. بر بازهٔ $]-1\,,\,\infty[$ با استفاده از قاعدهٔ زنجیری و قاعدهٔ خارج‌قسمت داریم

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2} \cdot \frac{(x+1) - (x-1)}{(x+1)^2} - \frac{1}{1 + x^2}$$

$$= \frac{(x+1)^2}{(x^2 + 2x + 1) + (x^2 - 2x + 1)} \cdot \frac{2}{(x+1)^2} - \frac{1}{1 + x^2}$$

$$= \frac{2}{2 + 2x^2} - \frac{1}{1 + x^2} = 0$$

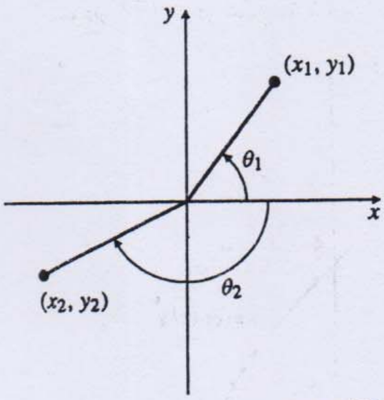
بنابراین، بر این بازه به‌ازای ثابتی مانند C، $f(x) = C$. با محاسبهٔ $f(0)$ می‌توان C را به‌دست آورد:

$$C = f(0) = \tan^{-1}(-1) - \tan^{-1} 0 = -\frac{\pi}{4}$$

در نتیجه، تساوی مفروض بر $]-1\,,\,\infty[$ برقرار است.

تذکر. بعضی از برنامه‌های کامپیوتری، بویژه صفحهٔ گسترده، دو نوع تابع آرک‌تانژانت را که معمولاً «atan» و «atan ۲» نام دارند اجرا می‌کنند. تابع atan همان تابع $\tan^{-1}$ است که تعریف آن را قبلاً ارائه

کرده‌ایم. اگر نقطهٔ (x, y) در نواحی I یا IV صفحه باشد، $\operatorname{atan}\left(\frac{y}{x}\right)$ زاویهٔ بین خط گذرنده از مبدأ به‌نقطهٔ (x, y) و جهت مثبت محور x را (برحسب رادیان) به‌دست می‌دهد. تابع atan ۲ تابعی دو متغیره است: $\operatorname{atan2}(x, y)$ زاویهٔ قبل را به‌ازای هر نقطهٔ (x, y) غیرواقع بر محور y به‌دست می‌دهد. شکل ۲۴.۳ را ببینید. بعضی از برنامه‌ها، مثلاً متلب (Matlab)، ترتیب متغیرهای x و y را در تابع atan ۲ عوض می‌کنند. میپل، برای آرک‌تانژانت یک متغیره و دو متغیره به‌ترتیب $\arctan x$ و $\arctan(x, y)$ را به‌کار می‌برد.



شکل ۲۴.۳

$$\begin{aligned}
\theta_1 &= \tan^{-1}(y_1/x_1)\\
&= \operatorname{atan}(y_1/x_1)\\
&= \operatorname{atan2}(x_1, y_1)\\
&= \arctan(y_1/x_1) \qquad \text{(میپل)}\\
&= \arctan(y_1, x_1) \qquad \text{(میپل)}\\
\theta_2 &= \operatorname{atan2}(x_2, y_2)\\
&= \arctan(y_2, x_2) \qquad \text{(میپل)}
\end{aligned}$$

توابع وارون توابع مثلثاتی دیگر

تابع $\cos x$ بر بازهٔ $[0, \pi]$ یک‌به‌یک است و از این رو، می‌توانیم **تابع وارون کوسینوس**، یعنی $\cos^{-1} x$ (یا $\arccos x$ یا $\operatorname{Arccos} x$ یا $\operatorname{acos} x$) را تعریف کنیم. پس

$$y = \cos^{-1} x \iff x = \cos y \quad , \quad 0 \le y \le \pi$$

ولی به‌ازای $0 \le y \le \pi$ داریم $\cos y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right)$ (رابطهٔ بین زاویه‌های متمم) و $\frac{\pi}{2} - y$ در بازهٔ $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ قرار دارد. بدین‌سان، تعریف بالا منجر می‌شود به

$$y = \cos^{-1} x \iff x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right) \iff \sin^{-1} x = \frac{\pi}{2} - y = \frac{\pi}{2} - \cos^{-1} x$$

آسانتر این است که با استفاده از این نتیجه، $\cos^{-1} x$ را مستقیماً تعریف کنیم:

تعریف ۱۲ **تابع وارون کوسینوس $\cos^{-1} x$ یا $\arccos x$**

$$\cos^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} x \quad , \quad -1 \le x \le 1$$

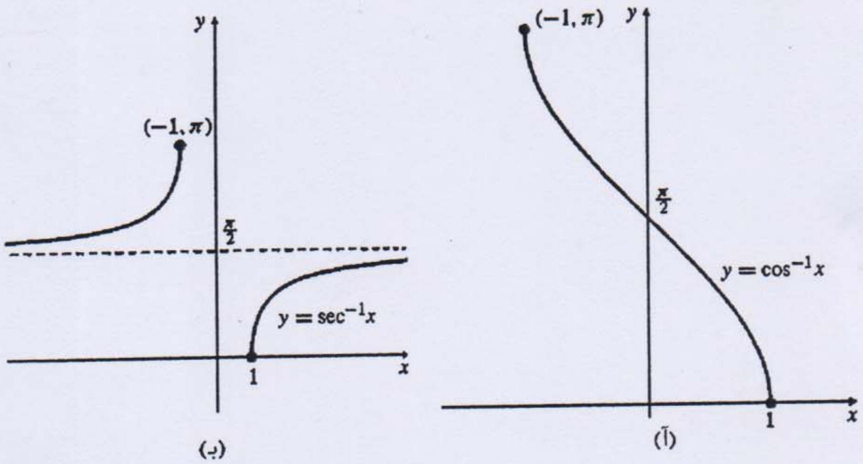
روابط بین $\cos x$ و $\cos^{-1} x$ عبارت‌اند از

$$\cos^{-1}(\cos x) = \arccos(\cos x) = x \quad , \quad 0 \le x \le \pi$$
$$\cos(\cos^{-1} x) = \cos(\arccos x) = x \quad , \quad -1 \le x \le 1$$

مشتق $\cos^{-1} x$ برابر است با قرینهٔ مشتق $\sin^{-1} x$ (چرا؟):

$$\frac{d}{dx} \cos^{-1} x = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

نمودار $\cos^{-1}$ در شکل ۲۵.۳ (آ) نشان داده شده است.



شکل ۲۵.۳ نمودارهای $\cos^{-1}$ و $\sec^{-1}$

ماشین‌حساب معمولاً توابع مثلثاتی اصلی، یعنی سینوس، کوسینوس و تانژانت، و وارون‌های این سه را اجرا می‌کند. توابع مثلثاتی فرعی، یعنی سکانت، کوسکانت و کوتانژانت، با استفاده از دکمهٔ وارون‌یاب محاسبه می‌شوند. یعنی ماشین‌حساب برای محاسبهٔ $\sec x$ ، $\cos x$ را محاسبه و نتیجهٔ حاصل را عکس می‌کند. وارون توابع مثلثاتی فرعی بآسانی برحسب وارون توابع عکس بیان می‌شوند. مثلاً تعریف می‌کنیم:

تعریف ۱۳ **تابع وارون سکانت $\sec^{-1} x$ (یا تابع $\operatorname{arcsec} x$)**

$$\sec^{-1} x = \cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) \quad , \quad |x| \geq 1$$

قلمرو $\sec^{-1}$ اجتماع بازه‌های $[1, \infty[$ و $]-\infty, -1]$ است و برد آن برابر است با $[0, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, \pi]$.
نمودار $y = \sec^{-1} x$ در شکل ۲۵.۳ (ب) نشان داده شده است. این نمودار عبارت است از بازتاب نمودار $\sec x$ (به‌ازای xهای بین ۰ و π) نسبت به‌خط $y = x$. به‌ازای $|x| \geq 1$ ملاحظه می‌کنیم که

$$\begin{aligned}
\sec(\sec^{-1} x) &= \sec\left(\cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)\right) \\
&= \frac{1}{\cos\left(\cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)\right)} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x
\end{aligned}$$

و به‌ازای x متعلق به $[0, \pi]$، $x \neq \frac{\pi}{2}$،

$$\begin{aligned}
\sec^{-1}(\sec x) &= \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sec x}\right) \\
&= \cos^{-1}(\cos x) = x
\end{aligned}$$

مشتق $\sec^{-1}$ را با استفاده از مشتق $\cos^{-1}$ محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{d}{dx}\sec^{-1}x = \frac{d}{dx}\cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{x^2}{x^2-1}} = \frac{1}{x^2}\cdot\frac{|x|}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

در سطر اخیر رابطهٔ $|x| = \sqrt{x^2}$ را به‌کار برده‌ایم. در قلمرو $\sec^{-1}$، xهای منفی نیز وجود دارند. در شکل ۲۵.۳ (ب) توجه داشته باشید که شیب $y = \sec^{-1}(x)$ همواره مثبت است.

$$\frac{d}{dx}\sec^{-1}x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

بعضی از مؤلفان ترجیح می‌دهند $\sec^{-1}$ را برابر با وارون تحدید $\sec x$ به‌بازه‌های جدا از هم $[0, \frac{\pi}{2}[$ و $[\pi, \frac{3\pi}{2}[$ تعریف کنند، زیرا این کار مانع حضور قدرمطلق در فرمول مشتق می‌شود. ولی با تعریف آنها محاسبهٔ مقادیر، بسیار دشوارتر می‌شود. تعریفی که در اینجا ارائه شد محاسبهٔ مقداری نظیر $\sec^{-1}(-3)$ را با ماشین‌حساب آسان می‌کند. ماشین‌حساب معمولاً فقط برای وارون‌های سینوس، کوسینوس و تانژانت برنامه‌ریزی شده است.

فرمول متناظر برای انتگرال، بر بازه‌های $x \geq 1$ یا $x \leq -1$ صورت‌های متفاوت دارد:

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx = \begin{cases} \sec^{-1}x + C & x \geq 1 \text{ بر بازه‌هایی که در آنها } \\ -\sec^{-1}x + C & x \leq -1 \text{ بر بازه‌هایی که در آنها } \end{cases}$$

سرانجام، $\csc^{-1}$ و $\cot^{-1}$ نیز مشابه $\sec^{-1}$ تعریف می‌شوند. البته بندرت با این توابع سروکار داریم.

تعریف ۱۴ تابع وارون کوسکانت و تابع وارون کوتانژانت

$$\csc^{-1}x = \sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right),\ (|x| \geq 1); \qquad \cot^{-1}x = \tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right),\ (x \neq 0)$$

تمرینات ۵.۳

در تمرین‌های ۱ تا ۱۲، عبارت مفروض را محاسبه کنید.

۱. $\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}$

۲. $\cos^{-1}\left(\frac{-1}{2}\right)$

۳. $\tan^{-1}(-1)$

۴. $\sec^{-1}\sqrt{2}$

۵. $\sin(\sin^{-1} 0{,}7)$

۶. $\cos(\sin^{-1} 0{,}7)$

۷. $\tan^{-1}\left(\tan\frac{2\pi}{3}\right)$

۸. $\sin^{-1}(\cos 40°)$

۹. $\cos^{-1}(\sin(-0{,}2))$

۱۰. $\sin\left(\cos^{-1}\left(\frac{-1}{3}\right)\right)$

۱۱. $\cos\left(\tan^{-1}\frac{1}{2}\right)$

۱۲. $\tan(\tan^{-1} 200)$

در تمرین‌های ۱۳ تا ۱۸، عبارت مفروض را ساده کنید.

۱۳. $\sin(\cos^{-1}x)$ ۱۴. $\cos(\sin^{-1}x)$

۱۵. $\cos(\tan^{-1}x)$ ۱۶. $\sin(\tan^{-1}x)$

۱۷. $\tan(\cos^{-1}x)$ ۱۸. $\tan(\sec^{-1}x)$

در تمرین‌های ۱۹ تا ۳۲، مشتق تابع مفروض را محاسبه و در صورت امکان آن را ساده کنید.

۱۹. $y=\sin^{-1}\left(\frac{2x-1}{3}\right)$

۲۰. $y=\tan^{-1}(ax+b)$

۲۱. $y=\cos^{-1}\left(\frac{x-b}{a}\right)$

۲۲. $f(x)=x\sin^{-1}x$

۲۳. $f(t)=t\tan^{-1}t$

۲۴. $u=z^2\sec^{-1}(1+z^2)$

۲۵. $F(x)=(1+x^2)\tan^{-1}x$

۲۶. $y=\sin^{-1}\frac{a}{x}$

۲۷. $G(x)=\frac{\sin^{-1}x}{\sin^{-1}2x}$

۲۸. $H(t)=\frac{\sin^{-1}t}{\sin t}$

۲۹. $f(x)=(\sin^{-1}x^2)^{1/2}$

۳۰. $y=\cos^{-1}\frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}$

۳۱. $y=\sqrt{a^2+x^2}+a\sin^{-1}\frac{x}{2}\quad (a>0)$

۳۲. $y=a\cos^{-1}\left(1-\frac{x}{a}\right)-\sqrt{2ax-x^2}\quad (a>0)$

۳۳. شیب خم $\tan^{-1}\left(\frac{2x}{y}\right)=\frac{\pi x}{y^2}$ را در نقطهٔ (۱ ,۲) بیابید.

۳۴. معادلهٔ دو خط مماس بر نمودار $y=\sin^{-1}x$ و دارای شیب ۲ را بیابید.

۳۵. نشان دهید که $\sin^{-1}$ و $\tan^{-1}$ بر قلمرو خود توابعی صعودی هستند و $\cos^{-1}$ بر قلمرو خود تابعی نزولی است.

۳۶. مشتق $\sec^{-1}x$ به‌ازای هر x متعلق به‌قلمرواش مثبت است. آیا از این امر می‌شود نتیجه گرفت که $\sec^{-1}$ بر قلمرو خود صعودی است؟ چرا؟

۳۷. نمودار $\csc^{-1}x$ را رسم کنید و مشتق آن را بیابید.

۳۸. نمودار $\cot^{-1}x$ را رسم کنید و مشتق آن را بیابید.

۳۹. نشان دهید که به‌ازای $x>0$ داریم $\tan^{-1}x+\cot^{-1}x=\frac{\pi}{2}$. مقدار این مجموع به‌ازای $x<0$ کدام است؟

۴۰. مشتق $g(x)=\tan(\tan^{-1}x)$ را بیابید و نمودار g را رسم کنید.

در تمرین‌های ۴۱ تا ۴۴، نخست مشتق تابع مفروض را محاسبه و ساده کرده و سپس نمودار آن را رسم کنید. در هر مورد، تابع کجا پیوسته است؟ کجا مشتق‌پذیر است؟

*۴۱. $\cos^{-1}(\cos x)$ *۴۲. $\sin^{-1}(\cos x)$

*۴۳. $\tan^{-1}(\tan x)$ *۴۴. $\tan^{-1}(\cot x)$

۴۵. نشان دهید که به‌ازای $|x|<1$،

$$\sin^{-1}x=\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

۴۶. نشان دهید که

$$\sec^{-1}x=\begin{cases}\tan^{-1}\sqrt{x^2-1} & x\geq 1 \text{ اگر}\\ \pi-\tan^{-1}\sqrt{x^2-1} & x\leq -1 \text{ اگر}\end{cases}$$

۴۷. نشان دهید که به‌ازای هر x،

$$\tan^{-1}x=\sin^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

۴۸. نشان دهید که

$$\sec^{-1}x=\begin{cases}\sin^{-1}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} & x\geq 1 \text{ اگر}\\ \pi-\sin^{-1}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} & x\leq -1 \text{ اگر}\end{cases}$$

*۴۹. نشان دهید که تابع $f(x)$ در مثال ۹ بر بازهٔ $]-\infty, -1[$ نیز ثابت است. مقدار این ثابت را بیابید. ***راهنمایی:*** مقدار $\lim_{x\to-\infty}f(x)$ را بیابید.

*۵۰. مشتق $f(x)=x-\tan^{-1}(\tan x)$ را بیابید. با توجه به‌جواب، دربارهٔ $f(x)$ چه حکمی می‌کنید؟ مقادیر $f(0)$ و $f(\pi)$ را محاسبه کنید. آیا تناقضی مشاهده می‌شود؟

*۵۱. به‌ازای $-\pi\leq x\leq\pi$، مشتق $f(x)=x-\sin^{-1}(\sin x)$ را بیابید و نمودار f بر این بازه را رسم کنید.

در تمرین‌های ۵۲ تا ۵۵، مسألهٔ مقدار آغازی مفروض را حل کنید.

۵۲. $\begin{cases}y'=\frac{1}{1+x^2}\\ y(0)=1\end{cases}$

۵۳. $\begin{cases}y'=\frac{1}{9+x^2}\\ y(3)=2\end{cases}$

۵۴. $\begin{cases}y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\\ y\left(\frac{1}{2}\right)=1\end{cases}$

۵۵. $\begin{cases}y'=\frac{4}{\sqrt{25-x^2}}\\ y(0)=0\end{cases}$

۶.۳ توابع هذلولوی

هر تابع معین بر خط حقیقی را می‌توان (به‌طور یکتا) به‌صورت مجموع یک تابع زوج و یک تابع فرد بیان کرد. (تمرین ۳۵ در بخش پ.۵ را ببینید.) **توابع هذلولوی** $\cosh x$ و $\sinh x$ به‌ترتیب توابع زوج و فردی هستند که مجموعشان تابع نمایی e^x می‌شود.

تعریف ۱۵ **توابع کوسینوس هذلولوی و سینوس هذلولوی**

به‌ازای هر عدد حقیقی x، تابع **کوسینوس هذلولوی** x $\cosh x$ و **سینوس هذلولوی** x $\sinh x$، به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:[1]

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{۲}, \qquad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{۲}$$

یادآور می‌شویم که کوسینوس و سینوس را *توابع دایره‌ای* می‌نامیم، زیرا به‌ازای هر t، نقطهٔ $(\cos t , \sin t)$ بر دایرهٔ به‌معادلهٔ $x^۲ + y^۲ = ۱$ قرار دارد. به‌همین ترتیب $\cosh$ و $\sinh$ را به‌این سبب ***توابع هذلولوی*** می‌نامیم که نقطهٔ $(\cosh t , \sinh t)$ بر هذلولوی قائم به‌معادلهٔ $x^۲ - y^۲ = ۱$ قرار دارد،

به‌ازای هر t، $\quad \cosh^۲ t - \sinh^۲ t = ۱$

برای اثبات این رابطه، ملاحظه می‌کنیم که

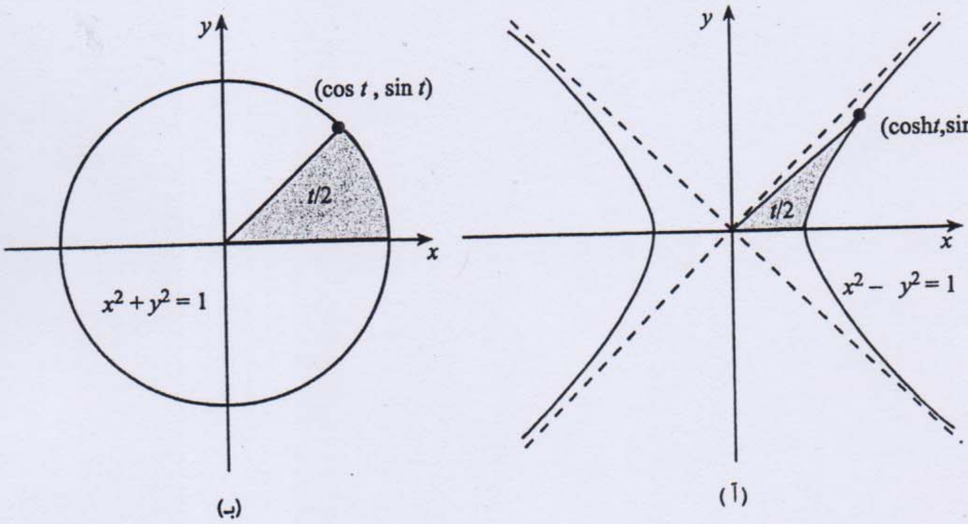
$$\begin{aligned}\cosh^۲ t - \sinh^۲ t &= \left(\frac{e^t + e^{-t}}{۲}\right)^۲ - \left(\frac{e^t - e^{-t}}{۲}\right)^۲ \\ &= \frac{۱}{۴}\left(e^{۲t} + ۲ + e^{-۲t} - (e^{۲t} - ۲ + e^{-۲t})\right) \\ &= \frac{۱}{۴}(۲ + ۲) = ۱\end{aligned}$$

برخلاف حالت مربوط به‌توابع دایره‌ای، هیچ تعبیری برای t برحسب طول کمان یا زاویه نداریم. ولی ***مساحت قطاع هذلولویِ*** محصور بین $y = ۰$، هذلولوی $x^۲ - y^۲ = ۱$ و پاره‌خطی که از مبدأ به $(\cosh t , \sinh t)$ وصل می‌شود برابر است با $\frac{t}{۲}$ واحد سطح (تمرین ۲۱ در بخش ۴.۸ را ببینید)، درست همان‌طور که مساحت قطاع دایره‌ایِ محصور بین $y = ۰$، دایرهٔ $x^۲ + y^۲ = ۱$ و پاره‌خطی که از مبدأ به $(\cos t , \sin t)$ وصل می‌شود نیز $\frac{t}{۲}$ واحد سطح است. (شکل ۲۶.۳ را ببینید.)

ملاحظه می‌کنیم که مشابه با مقادیر متناظر برای $\cos x$ و $\sin x$ داریم

$$\cosh ۰ = ۱, \quad \sinh ۰ = ۰$$

۱. تلفظ نساد «sinh» به‌صورت کامل کمی دشوار است. بعضی‌ها به آن می‌گویند «شینوس» و بعضی دیگر «سینوس چ».



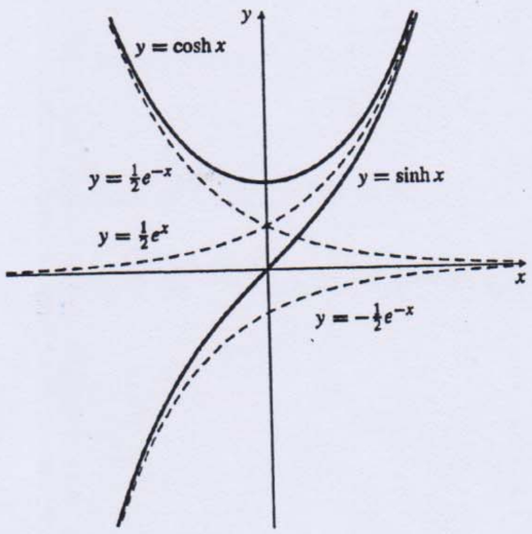
شکل ۲۶.۳ مساحت هر یک از دو قسمت سایه خورده، $\frac{t}{۲}$ واحد سطح است

تابع $\cosh x$، نظیر $\cos x$ تابعی زوج و $\sinh x$، نظیر $\sin x$ تابعی فرد است:

$$\cosh(-x)=\cosh x\,,\quad \sinh(-x)=-\sinh x$$

نمودارهای cosh و sinh در شکل ۲۷.۳ نشان داده شده‌اند. نمودار $y=\cosh x$ را یک **زنجیره** می‌نامیم. زنجیر آویزانی که دو انتهای آن ثابت باشند شکل زنجیره به‌خود می‌گیرد.

بسیاری از ویژگی‌های دیگرِ توابع هذلولوی با ویژگی‌های متناظرِ برای توابع دایره‌ای مشابهت دارند، البته گاهی با تغییر علامت.



شکل ۲۷.۳ نمودارهای cosh و sinh و چند نمودار نمایی که مجانب‌های آنها هستند

مثال ۱ نشان دهید که

$$\frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x\,, \quad \frac{d}{dx}\sinh x = \cosh x$$

حل. داریم

$$\frac{d}{dx}\cosh x = \frac{d}{dx}\frac{e^x + e^{-x}}{۲} = \frac{e^x + e^{-x}(-۱)}{۲} = \sinh x$$

$$\frac{d}{dx}\sinh x = \frac{d}{dx}\frac{e^x - e^{-x}}{۲} = \frac{e^x - e^{-x}(-۱)}{۲} = \cosh x$$

درستی فرمول‌های جمع و دو برابر زاویه را که در زیر آورده‌ایم می‌توان با اعمال جبری و با استفاده از تعریف cosh و sinh و قوانین نماها ثابت کرد:

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$
$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$
$$\cosh(۲x) = \cosh^۲ x + \sinh^۲ x = ۱ + ۲\sinh^۲ x = ۲\cosh^۲ - ۱$$
$$\sinh(۲x) = ۲\sinh x \cosh x$$

مشابه با توابع مثلثاتی، چهار تابع هذلولوی دیگر را به‌صورت زیر برحسب cosh و sinh تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱۶ **توابع هذلولوی دیگر**

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad \operatorname{sech} x = \frac{۱}{\cosh x} = \frac{۲}{e^x + e^{-x}}$$

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \qquad \operatorname{csch} x = \frac{۱}{\sinh x} = \frac{۲}{e^x - e^{-x}}$$

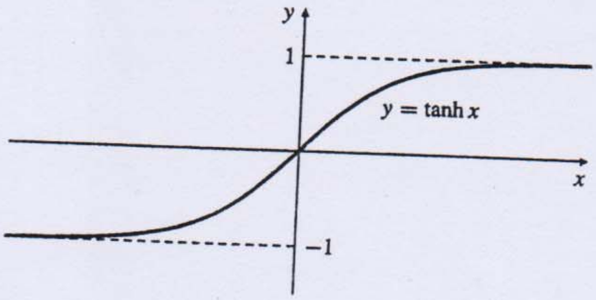
اگر صورت و مخرج کسر معرّف $\tanh x$ را به‌ترتیب در e^{-x} و e^x ضرب کنیم، می‌بینیم که

$$\lim_{x\to\infty}\tanh x = \lim_{x\to\infty}\frac{۱ - e^{-۲x}}{۱ + e^{-۲x}} = ۱$$

$$\lim_{x\to-\infty}\tanh x = \lim_{x\to-\infty}\frac{e^{۲x} - ۱}{e^{۲x} + ۱} = -۱$$

از این رو، نمودار $y = \tanh x$ دارای دو مجانب افقی است. نمودار $\tanh x$ (شکل ۲۸.۳) شبیه نمودارهای $\frac{x}{\sqrt{۱ + x^۲}}$ و $\frac{۲}{\pi}\tan^{-۱} x$ است و البته با آنها یکی نیست.

مشتق‌های توابع هذلولوی تعریف ۱۶ با استفاده از مشتق‌های $\cosh x$ و $\sinh x$ و قواعد عکس و خارج‌قسمت، بآسانی محاسبه می‌شوند:



شکل ۲۸.۳ نمودار $\tanh x$

$$\frac{d}{dx}\tanh x = \operatorname{sech}^2 x \qquad \frac{d}{dx}\operatorname{sech} x = -\operatorname{sech} x \tanh x$$

$$\frac{d}{dx}\coth x = -\operatorname{csch}^2 x \qquad \frac{d}{dx}\operatorname{csch} x = -\operatorname{csch} x \coth x$$

برای مثال،

$$\frac{d}{dx}\tanh x = \frac{d}{dx}\frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{(\cosh x)(\cosh x) - (\sinh x)(\sinh x)}{\cosh^2 x}$$
$$= \frac{1}{\cosh^2 x} = \operatorname{sech}^2 x$$

تذکر. اگر متغیرها اجازه داشته باشند نه فقط مقادیر حقیقی بلکه مقادیر مختلط را نیز اختیار کنند، آنگاه تمایز بین توابع مثلثاتی و توابع هذلولوی بسیار سخت می‌شود. اگر i واحد موهومی باشد (یعنی $i^2 = -1$) آنگاه

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x \quad , \quad e^{-ix} = \cos x - i\sin x$$

(پیوست I را ببینید[1].) بنابراین،

$$\cosh(ix) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \cos x, \qquad \cos(ix) = \cosh(-x) = \cosh x$$

$$\sinh(ix) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} = i\sin x, \qquad \sin(ix) = \frac{1}{i}\sinh(-x) = i\sinh x$$

وارون توابع هذلولوی

توابع sinh و tanh بر کل خط حقیقی صعودی هستند و از این رو، یک‌به‌یک و وارون‌پذیرند. وارون‌های آنها را به‌ترتیب با $\sinh^{-1}$ و $\tanh^{-1}$ نشان می‌دهیم:

$$y = \sinh^{-1} x \Leftrightarrow x = \sinh y$$
$$y = \tanh^{-1} x \Leftrightarrow x = \tanh y$$

چون توابع هذلولوی برحسب توابع نمایی تعریف شده‌اند، شگفت‌آور نیست که وارون‌های آنها می‌توانند برحسب لگاریتم بیان شوند.

---

۱. پیوست‌ها در پایان جلد دوم این کتاب آورده شده‌اند.

مثال ۲ توابع $\sinh^{-1} x$ و $\tanh^{-1} x$ را برحسب لگاریتم بیان کنید.

حل. فرض کنیم $y = \sinh^{-1} x$. دراین‌صورت

$$x = \sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2} = \frac{(e^y)^2 - 1}{2e^y}$$

(برای به‌دست آوردن کسر دوم، صورت و مخرج کسر اول را در e^y ضرب کرده‌ایم.) بنابراین،

$$(e^y)^2 - 2xe^y - 1 = 0$$

این معادله‌ای درجهٔ دوم برحسب e^y است و می‌توان آن را با استفاده از فرمول درجهٔ دوم حل کرد:

$$e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 + 4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2 + 1}$$

توجه داشته باشید که $x < \sqrt{x^2 + 1}$. چون e^y نمی‌تواند منفی باشد، پس باید ریشهٔ دوم مثبت را اختیار کنیم:

$$e^y = x + \sqrt{x^2 + 1}$$

بنابراین $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ و از این رو،

$$\sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

اکنون فرض کنیم $y = \tanh^{-1} x$. دراین‌صورت $(-1 < x < 1)$

$$x = \tanh y = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1}$$

$$xe^{2y} + x = e^{2y} - 1$$

$$e^{2y} = \frac{1 + x}{1 - x}, \qquad y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)$$

بدین‌سان،

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right), \qquad (-1 < x < 1)$$

چون $\cosh$ یک‌به‌یک نیست، لذا قبل از تعریف وارون برای آن، باید قلمرواش را محدود کنیم. مقدار اصلی $\cosh$ را با رابطهٔ

$$\operatorname{Cosh} x = \cosh x \qquad (x \geq 0)$$

تعریف می‌کنیم. اکنون وارون آن، یعنی $\cosh^{-1}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$y = \cosh^{-1} x \iff x = \operatorname{Cosh} y$$
$$\iff x = \cosh y \qquad (y \geq 0)$$

با محاسباتی نظیر آنچه برای $\sinh^{-1}$ انجام دادیم، فرمول زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$\cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \qquad (x \geq 1)$$

تمرینات ۶.۳

۱. درستی فرمول‌هایی را که در این بخش برای مشتق $\operatorname{sech} x$، $\operatorname{csch} x$ و $\coth x$ ارائه کردیم ثابت کنید.

۲. فرمول‌های جمع را که در زیر می‌آیند ثابت کنید:

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$
$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$

برای اثبات، طرف راست هر کدام را برحسب تابع نمایی بنویسید. فرمول‌های مشابهی را برای $\cosh(x-y)$ و $\sinh(x-y)$ بیابید.

۳. با استفاده از فرمول‌های جمع برای $\sinh$ و $\cosh$، فرمول‌های بسط $\tanh(x+y)$ و $\tanh(x-y)$ را به‌دست آورید.

۴. نمودارهای $y = \coth x$، $y = \operatorname{sech} x$ و $y = \operatorname{csch} x$ را رسم و مجانب‌ها را در صورت وجود مشخص کنید.

۵. مشتق $\sinh^{-1} x$، $\cosh^{-1} x$ و $\tanh^{-1} x$ را محاسبه کنید. اکنون هر یک از انتگرال‌های نامعین

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}, \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}, \int \frac{dx}{1-x^2}$$

را برحسب وارون یک تابع هذلولوی بیان کنید.

۶. مشتق توابع $\sinh^{-1}(x/a)$، $\cosh^{-1}(x/a)$ و $\tanh^{-1}(x/a)$ را (که در آنها $a > 0$) محاسبه کنید و با استفاده از جواب‌های حاصل، فرمول‌هایی برای چند انتگرال نامعین بنویسید.

۷. عبارت‌های زیر را ساده کنید: (آ) $\sinh \ln x$، (ب) $\cosh \ln x$، (پ) $\tanh \ln x$ و (ت) $\dfrac{\cosh \ln x + \sinh \ln x}{\cosh \ln x - \sinh \ln x}$.

۸. فرض کنیم $\operatorname{csch}^{-1} x = \sinh^{-1}(1/x)$. قلمرو، برد و مشتق $\operatorname{csch}^{-1} x$ را بیابید و نمودار آن را رسم کنید. تابع $\operatorname{csch}^{-1} x$ را برحسب لگاریتم بیان کنید.

۹. تمرین ۸ را برای $\coth^{-1} x$ تکرار کنید.

*۱۰. تابع $\operatorname{Sech} x$ را برابر با تحدید مناسبی از $\operatorname{sech} x$ تعریف و سپس تمرین ۸ را برای تابع $\operatorname{Sech}^{-1} x$ تکرار کنید.

۱۱. نشان دهید که هر یک از توابع

$$f_{A,B}(x) = Ae^{kx} + Be^{-kx}$$
$$g_{C,D}(x) = C \cosh kx + D \sinh kx$$

یک جواب معادلهٔ دیفرانسیل $y'' - k^2 y = 0$ است. (هر دو، جواب عمومی هستند.) تابع $f_{A,B}$ را برحسب $g_{C,D}$ و تابع $g_{C,D}$ را برحسب $f_{A,B}$ بیان کنید.

۱۲. نشان دهید که

$$h_{L,M}(x) = L \cosh k(x-a) + M \sinh k(x-a)$$

نیز یک جواب معادلهٔ دیفرانسیل تمرین قبل است. تابع $h_{L,M}(x)$ را برحسب $f_{A,B}$ (در تمرین قبل) بیان کنید.

۱۳. مسألهٔ مقدار آغازی $y'' - k^2 y = 0$، $y(a) = y_0$ و $y'(a) = v_0$ را حل کنید. جواب حاصل را برحسب تابع $h_{L,M}$ در تمرین ۱۲ بنویسید.

۷.۳ معادله‌های دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم با ضرایب ثابت

هر معادلهٔ دیفرانسیل به‌صورت

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad (*)$$

را که در آن a، b و c ثابت باشند و $a \neq 0$، یک معادلهٔ دیفرانسیل **خطی مرتبهٔ دوم همگن** با ضرایب ثابت می‌نامیم. **مرتبهٔ دوم**، به‌حضور مشتق دوم اشاره دارد؛ واژه‌های **خطی** و **همگن** به‌این حقیقت اشاره می‌کنند که اگر $y_1(t)$ و $y_2(t)$ دو جواب معادله باشند، آنگاه به‌ازای ثابت‌های دلخواه A و B تابع $y(t) = Ay_1(t) + By_2(t)$ نیز جواب معادله است:

اگر $ay_1''(t) + by_1'(t) + cy_1(t) = 0$ و $ay_2''(t) + by_2'(t) + cy_2(t) = 0$
و اگر $y(t) = Ay_1(t) + By_2(t)$، آنگاه $ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$.