۱۸
حساب دیفرانسیل توابع چند متغیره

۱۰۱۸ توابع با بیش از یک متغیر

حال مفهوم تابع را به تابع n متغیره تعمیم داده، و در بخشهای آتی مفاهیم **حد** تابع، **پیوستگی** تابع، و **مشتق** تابع را به این توابع تعمیم خواهیم داد. بحث کامل این مباحث تعلق به حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته دارد. دراین کتاب بیشتر بحث ما از توابع با بیش از یک متغیر منحصر به توابع دو و سه متغیره است؛ با اینحال، تعاریف را برای توابع n متغیره آورده و سپس کاربرد این تعاریف را برای توابع دو و سه متغیره نشان می‌دهیم. همچنین، نشان می‌دهیم که وقتی هریک از این تعاریف بریک تابع یک متغیره اعمال می‌شود، تعریف قبلی بدست می‌آید.

برای تعمیم مفهوم تابع به توابع باهر تعداد متغیر، ابتدا باید نقاط در فضای عددی n بعدی را درنظرگرفت. همانطور که یک نقطه در R^1 را با عدد حقیقی x نشان دادیم، یک نقطه در R^2 را با یک جفت مرتب (x, y) از اعداد حقیقی، یک نقطه در R^3 را بایک جفت مرتب (x, y, z) از اعداد حقیقی، یک نقطه در فضای عددی n بعدی R^n را با یک n تایی مرتب از اعداد حقیقی نمایش می‌دهیم که معمولاً می‌نویسیم $P = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. بالاخص، اگر $n = 1$، می‌نویسیم $P = x$؛ اگر $n = 2$، می‌نویسیم $P = (x, y)$؛ اگر $n = 3$، می‌نویسیم $P = (x, y, z)$؛ واگر $n = 6$، می‌نویسیم $P = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$.

۱۰۱۰۱۸ تعریف. مجموعهٔ تمام n تاییهای مرتب ازاعداد حقیقی **فضای عددی n بعدی** نامیده وبا R^n نموده می‌شود. هر n تایی مرتب $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ یک **نقطه** در فضای عددی n بعدی نام دارد.

۲۰۱۰۱۸ تعریف. یک **تابع n متغیره** مجموعه‌ای است از جفتهای مرتب به شکل (P, w) که درآن هیچ دو جفت مرتب متمایز عنصر اول مساوی ندارند. P نقطه‌ای در فضای عددی

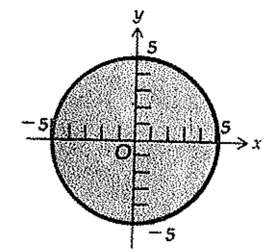
n بعدی و w عددی حقیقی است. مجموعهٔ تمام مقادیر ممکن P **قلمرو** تابع، و مجموعهٔ تمام مقادیر ممکن w **برد** تابع نام دارد.

از این تعریف معلوم می‌شود که قلمرو یک تابع n متغیره مجموعه‌ای است از نقاط در R^n و برد آن مجموعه‌ای است از اعداد حقیقی یا، معادلاً، مجموعه‌ای از نقاط در R^1. وقتی $n = 1$، تابع یک‌متغیره داریم؛ لذا، قلمرو مجموعه‌ای از نقاط در R^1 یا، معادلاً، مجموعه‌ای از اعداد حقیقی است، و برد مجموعه‌ای از اعداد حقیقی است. از اینرو، تعریف ۱.۵.۱ یک حالت خاص تعریف ۲.۱.۱۸ است. اگر $n = 2$، تابع دو متغیره داریم، و قلمرو مجموعه‌ای از نقاط در R^2 یا، معادلاً، مجموعه‌ای از جفتهای مرتب (x, y) از اعداد حقیقی است. برد مجموعه‌ای از اعداد حقیقی می‌باشد.

توضیح ۱. فرض کنیم تابع f از دو متغیر x و y مجموعهٔ جمیع جفتهای مرتب به‌شکل (P, z) است بطوری که

$$z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$$

قلمرو f مجموعهٔ جمیع جفتهای مرتب (x, y) است که $25 - x^2 - y^2 \geq 0$. این مجموعهٔ تمام نقاطی در صفحهٔ xy بر دایرهٔ $x^2 + y^2 = 25$ و درون ناحیهٔ محدود به دایره می‌باشد. چون $z = \sqrt{25 - (x^2 + y^2)}$، داریم $0 \leq z \leq 5$؛ لذا، برد f مجموعهٔ تمام اعداد حقیقی در بازهٔ بستهٔ $[0, 5]$ است. شکل ۱.۱.۱۸ مجموعهٔ نقاط قلمرو f را به صورت ناحیه‌ای سایه‌دار در R^2 نشان می‌دهد.

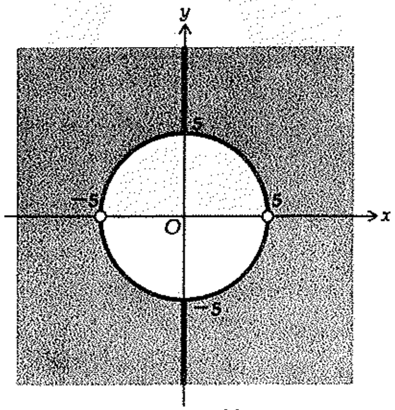


شکل ۱.۱.۱۸

توضیح ۲. تابع g از دو متغیر x و y مجموعهٔ تمام جفتهای مرتب به شکل (P, z) است بطوری که

$$z = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 - 25}}{y}$$

قلمرو g مجموعهٔ $\{(x, y) | x^2 + y^2 \geq 25\}$ است. این مجموعهٔ نقاط غیر واقع بر محور x است که یا بر دایرهٔ $x^2 + y^2 = 25$ قرار دارد یا در ناحیهٔ برونی محدود به دایره. شکل ۲.۱.۱۸ مجموعهٔ نقاط قلمرو g را به صورت ناحیه‌ای سایه‌دار در R^2 نشان می‌دهد.



شکل ۲.۱.۱۸

توضیح ۳. تابع f از دو متغیر x و y مجموعهٔ تمام جفتهای مرتب به شکل (P, z) است بطوری که

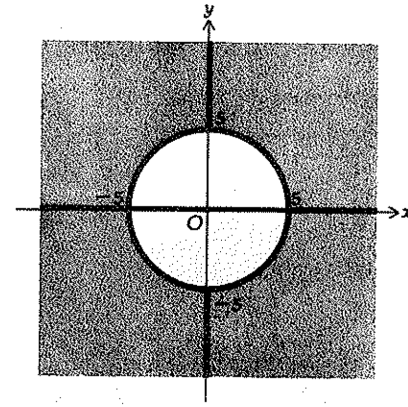
$$z = y\sqrt{x^2 + y^2 - 25}$$

اگر $y = 0$، بی‌توجه به مقدار x، $z = 0$. اما، اگر $y \neq 0$، $x^2 + y^2 - 25$ باید نامنفی باشد که z تعریف شود. لذا، قلمرو F از تمام جفتهای مرتب (x, y) ی تشکیل شده است که در آنها $y = 0$ یا $x^2 + y^2 - 25 \geq 0$. این مجموعهٔ تمام نقاط واقع بر دایرهٔ $x^2 + y^2 = 25$، تمام نقاط در ناحیهٔ برونی محدود به دایره، و تمام نقاط واقع بر محور x که $-5 < x < 5$ می‌باشد. در شکل ۳.۱.۱۸، مجموعهٔ نقاط قلمرو F به صورت ناحیهٔ سایه‌داری در R^2 نموده شده است.

توضیح ۴. تابع G از دو متغیر x و y مجموعهٔ تمام جفتهای مرتب به شکل (P, z) است بطوری که

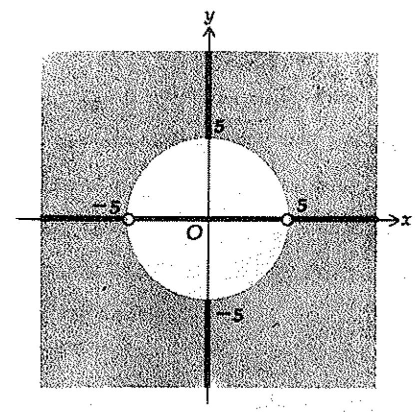
$$z = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 - 25}}$$

هرگاه $y = 0$، آنگاه $z = 0$ مشروط بر اینکه $x^2 + y^2 - 25 \neq 0$. هرگاه $y \neq 0$، آنگاه $x^2 + y^2 - 25$ باید مثبت باشد تا z تعریف شود. لذا، قلمرو G از تمام جفتهای



شکل ۳۰۱۰۱۸

مرتب (x, y) ی تشکیل شده‌که به‌ازای آنها $x^2 + y^2 - 25 > 0$ و جفتهایی که به‌ازای آنها $y = 0$ و $x \neq \pm 5$. اینها همه‌نقاطی هستند خارج ناحیهٔ محدود به دایرهٔ $x^2 + y^2 = 25$ ونقاطی از محور x که $-5 < x < 5$. شکل ۴۰۱۰۱۸ مجموعهٔ نقاط قلمرو G را به‌صورت یک ناحیهٔ سایه‌دار در R^2 نشان می‌دهد.



شکل ۴۰۱۰۱۸

هرگاه f یک تابع n متغیره باشد، آنگاه طبق تعریف ۲۰۱۰۱۸ ، f مجموعه‌ای از جفتهای مرتب به شکل (P, w) است، که در آن $P = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ یک نقطه در R^n

است و w عددی حقیقی است. مقدار w که نظیر نقطهٔ P است با علامت $f(P)$ یا $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ نموده می‌شود. بالاخص، اگر $n = 2$ و $P = (x, y)$ ، می‌توان مقدار تابع را با $f(P)$ یا $f(x, y)$ نمایش‌داد. بهمین نحو، اگر $n = 3$ و $P = (x, y, z)$ ، مقدار تابع را با $f(P)$ یا $f(x, y, z)$ نشان می‌دهیم. توجه‌کنید که اگر $n = 1$ ، $P = x$ ؛ ازاینرو، اگر f یک‌تابع یک متغیره باشد، $f(P) = f(x)$. لذا، این نماد با نماد مقادیر تابع یک متغیره سازگار است.

تابع n متغیرهٔ f را می‌توان با معادلهٔ

$$w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

تعریف‌کرد. متغیرهای $x_1, x_2, \ldots, x_n$ را **متغیرهای مستقل**، و w را **متغیروابسته** می‌نامند.

توضیح ۵. فرض کنیم f تابع توضیح ۱ باشد؛ یعنی،

$$f(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$$

دراین صورت،

$$f(3, -4) = \sqrt{25 - (3)^2 - (-4)^2} = \sqrt{25 - 9 - 16} = 0$$
$$f(-2, 1) = \sqrt{25 - (-2)^2 - (1)^2} = \sqrt{25 - 4 - 1} = 2\sqrt{5}$$
$$f(u, 3v) = \sqrt{25 - u^2 - (3v)^2} = \sqrt{25 - u^2 - 9v^2}$$

مثال ۱. تابع g با $g(x, y, z) = x^2 - 5xz + yz^2$ تعریف شده است. (آ) $g(1, 4, -2)$ ؛ (ب) $g(2a, -b, 3c)$ ؛ (پ) $g(x^2, y^2, z^2)$ ؛ (ت) $g(y, z, -x)$ را بیابید.

حل

(آ) $g(1, 4, -2) = 1^2 - 5(1)(-2) + 4(-2)^2 = 1 + 10 + 16 = 27$

(ب) $g(2a, -b, 3c) = (2a)^2 - 5(2a)(3c) + (-b)(3c)^2$
$= 4a^2 - 30ac - 9bc^2$

(پ) $g(x^2, y^2, z^2) = (x^2)^2 - 5(x^2)(z^2) + (y^2)(z^2)^2 = x^4 - 5x^2z^2 + y^2z^4$

(ت) $g(y, z, -x) = y^2 - 5y(-x) + z(-x)^2 = y^2 + 5xy + x^2z$

۳۰۱۰۱۸ تعریف. هرگاه f تابعی یک متغیره و g تابعی دو متغیره باشد، آنگاه **تابع مرکب** $(f \circ g)$ تابعی دو متغیره است که با

$$(f \circ g)(x, y) = f(g(x, y))$$

تعریف شده است، و قلمرو $f\circ g$ مجموعهٔ جمیع نقاط (x, y) در قلمرو g است بطوری که $g(x, y)$ در قلمرو f می‌باشد.

مثال ۲. به‌فرض آنکه $f(t) = \ln t$ و $g(x, y) = x^2 + y$، $h(x, y)$ را در صورتی بیابید که $h = f\circ g$، و قلمرو h را پیدا کنید.

حل

$$\begin{aligned} h(x, y) &= (f\circ g)(x, y) \\ &= f(g(x, y)) \\ &= f(x^2 + y) \\ &= \ln(x^2 + y) \end{aligned}$$

قلمرو g مجموعهٔ تمام نقاط در R^2 است، و قلمرو f $(0, +\infty)$ می‌باشد. لذا، قلمرو h مجموعهٔ $\{(x, y)|x^2 + y \ge 0\}$ می‌باشد.

تعریف ۳۰۱۰۱۸ را می‌توان به تابع مرکب n متغیره به صورت زیر تعمیم داد.

۴۰۱۰۱۸ تعریف. هرگاه f تابعی یک متغیره و g تابعی n متغیره باشد، آنگاه **تابع مرکب** $f\circ g$ تابعی n متغیره است که با

$$(f\circ g)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(g(x_1, x_2, \ldots, x_n))$$

تعریف می‌شود و قلمرو $f\circ g$ مجموعهٔ تمام نقاط $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ در قلمرو g است بطوری که $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ در قلمرو f می‌باشد.

مثال ۳. به فرض آنکه $F(x) = \sin^{-1} x$ و

$$G(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 4}$$

تابع $F\circ G$ و قلمرو آن را بیابید.

حل

$$\begin{aligned} (F\circ G)(x, y, z) &= F(G(x, y, z)) \\ &= F(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 4}) \\ &= \sin^{-1}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 4} \end{aligned}$$

قلمرو G مجموعهٔ $\{(x, y, z)|x^2 + y^2 + z^2 - 4 \ge 0\}$ است، و قلمرو F مساوی $[-1, 1]$ می‌باشد. درنتیجه، قلمرو $F\circ G$ مجموعهٔ تمام نقاط (x, y, z) در R^3 است بطوری که $0 \le x^2 + y^2 + z^2 - 4 \le 1$ یا، معادلاً، $4 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 5$.

یک **تابع چندجمله‌ای** از دو متغیر x و y تابعی است مانند f بطوری که $f(x, y)$ مجموع جملاتی به شکل cx^ny^m است، که در آن c عددی حقیقی است و n و m اعداد صحیح نامنفیی هستند. **درجهٔ** تابع چندجمله‌ای با بزرگترین مجموع نماهای x و y که در یک جمله می‌آیند مشخص می‌شود. مثلاً، تابع f تعریف شده با

$$f(x, y) = 6x^3y^2 - 5xy^3 + 7x^2y - 2x^2 + y$$

یک تابع چندجمله‌ای از درجهٔ 5 است.

نمودار تابع f از یک متغیر عبارت است از مجموعهٔ نقاطی مانند (x, y) در R^2 که $y = f(x)$. بهمین‌نحو، نمودار یک تابع دو متغیره مجموعه‌ای از نقاط در R^3 می‌باشد.

۵۰۱۰۱۸ تعریف. هرگاه f یک تابع دو متغیره باشد، آنگاه **نمودار** f مجموعهٔ تمام نقاط (x, y, z) در R^3 است که به‌ازای آنها (x, y) نقطه‌ای در قلمرو f بوده و $z = f(x, y)$.

از اینرو، نمودار تابع دو متغیرهٔ f یک سطح است؛ یعنی، مجموعهٔ تمام نقاطی درفضای سه‌بعدی که مختصات دکارتی آنها با سه‌تاییهای مرتب از اعداد حقیقی (x, y, z) داده شده است. چون قلمرو f مجموعه‌ای از نقاط در صفحهٔ xy است، و چون به‌ازای هر جفت مرتب (x, y) در قلمرو f مقدار منحصر بفردی از z نظیر است، هیچ خط عمود بر صفحهٔ xy نمی‌تواند نمودار f را در بیش از یک نقطه قطع کند.

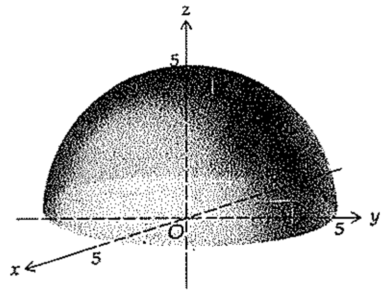
توضیح ۶. تابع توضیح ۱ تابع f است یعنی مجموعهٔ تمام جفتهای مرتب به شکل (P, z) بطوری که

$$z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$$

درنتیجه، نمودار f نیمکره‌ای است بر و بالای صفحهٔ xz به شعاع 5 و مرکز مبداء. نمودار این نیمکره در شکل ۵۰۱۰۱۸ نموده شده است.

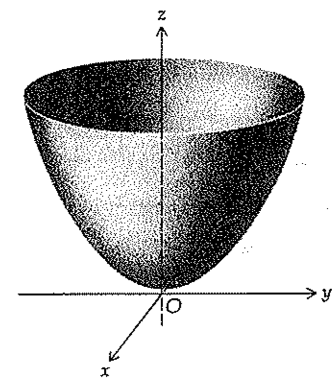
مثال ۴. نمودار تابع f با مقادیر $f(x, y) = x^2 + y^2$ را رسم کنید.

حل. نمودار f سطحی است به‌معادلهٔ $z = x^2 + y^2$. اثر سطح در صفحهٔ xy با استفاده



شکل ۵.۱.۱۸

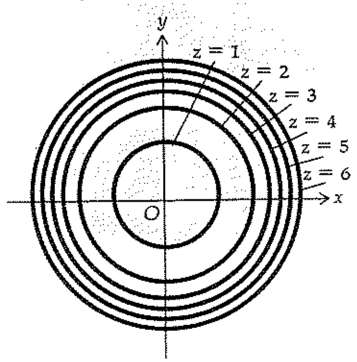
ازمعادلهٔ $z = 0$ و معادلهٔ سطح بدست‌می‌آید. خواهیم داشت $x^2 + y^2 = 0$ ، که مبداء است. اثر در صفحات xz و yz بترتیب با استفاده از معادلات $y = 0$ و $x = 0$ ، ومعادلهٔ $z = x^2 + y^2$ ، بدست می‌آید. این اثرها عبارتند از سهمیهای $z = x^2$ و $z = y^2$. مقطع عرضی سطح در صفحهٔ $z = k$ ، موازی صفحهٔ xy ، دایره‌ای است که مرکزش بر محور z بوده و شعاعش $\sqrt{k}$ است. با این اطلاعات، شکل مطلوب ۶.۱.۱۸ کشیده شده است.



شکل ۶.۱.۱۸

روش مفید دیگر نمایش هندسی یک تابع دو متغیره شبیه نمایش سه بعدی دورنما با یک نقشهٔ دوبعدی است. فرض‌کنیم سطح $z = f(x,y)$ با صفحهٔ $z = k$ قطع شده، و منحنی فصل مشترک روی صفحهٔ xy تصویر شده باشد. این منحنی تصویر شده به‌معادلهٔ $f(x, y) = k$ است، و **منحنی‌تراز** (یا **منحنی کنتوری**) تابع f در k نام دارد. هرنقطه

بر منحنی تراز نظیر نقطهٔ منحصر بفردی بر سطح است که k واحد بالای آن است اگر k مثبت باشد، یا k واحد پایین است اگر k منفی باشد. با توجه به مقادیر مختلف ثابت k ، مجموعه‌ای از منحنیهای تراز به‌نام **نگاشت کنتوری** بدست می‌آید. مجموعهٔ تمام مقادیر ممکن k برد تابع f است، و هر منحنی تراز، یعنی $f(x, y) = k$ ، در نگاشت کنتوری عبارت‌است از نقاط (x, y) در قلمرو f که مقادیر تابعی k مساوی دارند. مثلاً، در تابع f مثال ۲، منحنیهای تراز عبارتند از دوایری به مرکز مبداء. منحنیهای تراز خاص به‌ازای $z = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ در شکل ۷.۱.۱۸ نموده شده‌اند.

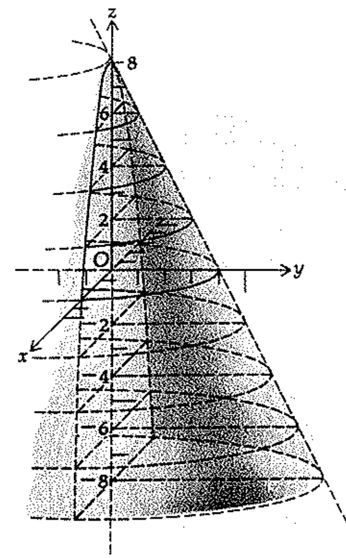


شکل ۷.۱.۱۸

یک نگاشت کنتوری تغییر z را با x و y نشان می‌دهد. منحنیهای تراز معمولاً به‌ازای مقادیر z در بازه‌های ثابت نموده می‌شوند، و مقادیر z وقتی منحنیهای تراز بهم نزدیکترند تغییر سریعتری می‌کنند؛ یعنی، وقتی منحنیهای تراز بهم نزدیک‌اند، سطح شیب دارد، و وقتی منحنیهای تراز از هم دورند، ارتفاع سطح به کندی تغییر می‌کند. در یک نقشهٔ دوبعدی یک دورنما، مفهوم کلی شیب آن با توجه به فاصلهٔ منحنیهای ترازآن بدست می‌آید. همچنین، در یک نقشه، اگر روی یک منحنی تراز حرکت شود، ارتفاع ثابت خواهد ماند.

مثال ۵. فرض‌کنیم f تابعی باشد که $f(x, y) = 8 - x^2 - 2y$. نمودار f و نگاشت کنتوری f و منحنیهای تراز f در 10 ، 8 ، 6 ، 4 ، 2 ، 0 ، -2 ، -4 ، -6 ، و -8 را رسم کنید.

حل. نمودار f در شکل ۸.۱.۱۸ نموده شده است. این عبارت است از سطح

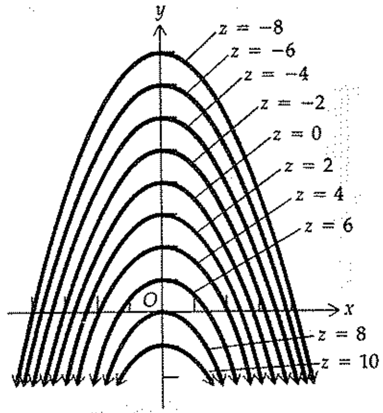


شکل ۸۰۱۰۱۸

$z = 8 - x^2 - 2y$. اثر در صفحهٔ xy با قرار دادن $z = 0$ بدست می‌آید، که عبارت است از سهمی $x^2 = -2(y - 4)$. با قرار دادن $y = 0$ و $x = 0$ ، اثر در صفحات xz و yz بدست می‌آیند، که بترتیب عبارتند از سهمی $x^2 = -(z - 8)$ و خط $2y + z = 8$. مقطع عرضی سطح حاصل از صفحهٔ $z = k$ یک سهمی است که راسش بر خط $2y + z = 8$ در صفحهٔ yz است و به‌چپ باز می‌شود. در شکل، مقاطع عرضی به‌ازای $z = 8, 6, 4, 2, -2, -4, -6, -8$ نموده شده‌اند.

منحنیهای‌تراز f عبارتنداز سهمیهای $x^2 = -2(y - 4 + \frac{1}{2}k)$. درشکل ۹۰۱۰۱۸، نگاشت کنتوری f و منحنیهای تراز نموده شده‌اند.

برای نشان دادن مورد استعمال منحنیهای تراز، فرض‌کنیم دما در هر نقطهٔ یک صفحهٔ فلزی تخت با تابع f داده شده است؛ یعنی، اگر دما t درجه باشد، در نقطهٔ (x, y) داریم $t = f(x, y)$. دراین صورت، منحنیها به معادلات $f(x, y) = k$ ، که k ثابت است، منحنیهایی هستند که برآنها دما ثابت است. اینها منحنیهای تراز f اند و **همگرما** نام دارند. بعلاوه، اگر پتانسیل الکتریکی در هر نقطهٔ (x, y) از صفحهٔ xy مساوی V ولت بوده، و $V = f(x, y)$ ، آنگاه منحنیهای تراز f **منحنیهای همپتانسیل**



شکل ۹۰۱۰۱۸

نام دارند، زیرا پتانسیل الکتریکی در تمام نقاط یک چنین منحنی یکی می‌باشد.

برای کاربردی از منحنیهای تراز در اقتصاد، تولید (یا خروجی) یک کارخانه که به چندورودی‌وابسته است را درنظر می‌گیریم. در بین ورودیها ممکن است تعداد ماشینهای بکار درتولید، ساعات کار، مقدار سرمایهٔ بکار، کمیت مادهٔ بکار، و وسعت زمین کارخانه باشند. فرض‌کنیم ورودیها x و y ، خروجی z باشد، و $z = f(x, y)$. چنین تابع یک **تابع تولید** نام دارد، و منحنیهای تراز f به معادلات $f(x, y) = k$ ، که k ثابت است، **منحنیهای تولید ثابت** نامیده می‌شوند.

مثال ۶. فرض‌کنیم f تابع تولید باشد که در آن $f(x, y) = 2x^{1/2}y^{1/2}$. نگاشت کنتوری f را بکشید که منحنیهای تولید ثابت در 8 ، 6 ، 4 ، و 2 را نشان دهند.

حل. نگاشت کنتوری از منحنیهایی تشکیل شده که فصل مشترک سطح

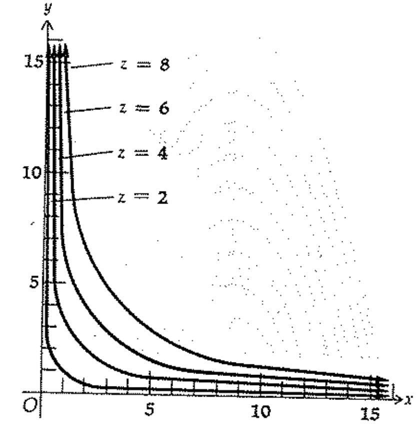
(۱) $$z = 2x^{1/2}y^{1/2}$$

با صفحات $z = k$ ، به‌ازای $k = 8, 6, 4, 2, 1$ ، می‌باشد. با گذاردن $z = 8$ در معادلهٔ (۱)، بدست می‌آوریم $x^{1/2}y^{1/2} = 4$ یا، معادلاً،

(۲) $$xy = 16 \quad x > 0 \quad y > 0$$

منحنی در صفحهٔ xy نموده شده با (۲) شاخه‌ای از یک هذلولی است که در ربع اول‌قرار دارد. با هریک از اعداد 6 ، 4 ، و 2 نیز شاخه‌ای از یک هذلولی در ربع اول بدست

می‌آوریم . اینها منحنیهای تولید ثابت است ، و در شکل ۱۰۰۱۰۱۸ نموده شده‌اند .



شکل ۱۰۰۱۰۱۸

تعریف زیر تعمیم مفهوم نمودار تابع به تابع n متغیره را بدست می‌دهد .

۶۰۱۰۱۸ تعریف. هرگاه f یک تابع n متغیره باشد ، **نمودار** f مجموعهٔ تمام نقاط $(x_1, x_2, \ldots, x_n, w)$ در R^{n+1} است که در آن $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ نقطه‌ای در قلمرو f است و $w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

برای توابع سه متغیره چیزی شبیه منحنیهای تراز یک تابع دو متغیره وجود دارد. هرگاه f تابعی باشد که قلمروش مجموعه‌ای از نقاط در R^3 است ، آنگاه اگر k عددی در برد f باشد ، نمودار معادلهٔ $f(x, y, z) = k$ یک سطح است . این سطح **سطح تراز** f در k است . هر سطح در فضای سه‌بعدی را می‌توان یک سطح تراز تابعی سه متغیره گرفت . مثلاً ، اگر تابع g با معادلهٔ $g(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$ تعریف شده باشد ، سطح نموده شده در شکل ۶۰۱۰۱۸ سطح تراز g در 0 است . بهمین نحو ، سطح به معادلهٔ $z - x^2 - y^2 + 5 = 0$ سطح تراز g در 5 است .

تمرینات ۱۰۱۸

۱ . فرض‌کنید تابع f از دو متغیر x و y و مجموعهٔ تمام جفتهای مرتب به شکل (P, z)

باشد که $z = (x + y)/(x - y)$. کمیتهای زیر را بیابید : (آ) $f(-3,4)$ ؛ (ب) $f(x^2, y^2)$ ؛ (پ) $[f(x, y)]^2$ ؛ (ت) $f(-x, y) - f(x, -y)$ ؛ (ث) قلمرو f ؛ (ج) برد f .
شکلی بکشید که در آن مجموعهٔ نقاط غیر واقع در قلمرو f را به‌صورت ناحیهٔ سایه‌داری در R^2 نشان دهد .

۲ . فرض‌کنید تابع g از سه‌متغیر x ، y ، و z مجموعهٔ تمام جفتهای مرتب به شکل (P, w) باشدکه $w = \sqrt{4 - x^2 - y^2 - z^2}$. کمیات‌زیررا بیابید : (آ) $g(1, -1, -1)$ ؛ (ب) $g(-a, 2b, \frac{1}{2}c)$ ؛ (پ) $g(y, -x, -y)$ ؛ (ت) قلمرو g ؛ (ث) برد g ؛ (ج) $[g(x, y, z)]^2 - [g(x + 2, y + 2, z)]^2$. شکلی بکشید که مجموعهٔ نقاط قلمرو g را به‌صورت یک جسم سایه‌دار در R^3 نشان دهد .

در تمرینهای ۳ تا ۱۶ ، قلمرو و برد تابع f را یافته ، و مجموعهٔ نقاط قلمرو f را به‌صورت یک ناحیهٔ سایه‌دار در R^2 رسم کنید .

۳ . $f(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$

۴ . $f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - 4y^2}$

۵ . $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}{x}$

۶ . $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{16 - x^2 - 4y^2}}{y}$

۷ . $f(x, y) = x\sqrt{25 - x^2 - y^2}$

۸ . $f(x, y) = y\sqrt{16 - x^2 - 4y^2}$

۹ . $f(x, y) = \dfrac{x}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}$

۱۰ . $f(x, y) = \dfrac{y}{\sqrt{16 - x^2 - 4y^2}}$

۱۱ . $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x - y}$

۱۲ . $f(x, y) = \sqrt{\dfrac{x - y}{x + y}}$

۱۳ . $f(x, y) = \dfrac{x}{|y|}$

۱۴ . $f(x, y) = \dfrac{x + y}{xy}$

۱۵ . $f(x, y) = \ln(xy - 1)$

۱۶ . $f(x, y) = \sin^{-1}(x + y)$

در تمرینهای ۱۷ تا ۱۹ ، قلمرو و برد تابع f را بیابید .

۱۷ . $f(x, y, z) = (x + y)\sqrt{z - 2}$

۱۸ . $f(x, y, z) = |x|e^{y/z}$

۱۹ . $f(x, y, z) = \sin^{-1} x + \cos^{-1} y + \tan^{-1} z$

در تمرینهای ۲۰ تا ۲۶ ، قلمرو و برد تابع f را یافته و نمودار را رسم نمایید .

۲۰ . $f(x, y) = \sqrt{x + y}$

۲۱ . $f(x, y) = 4x^2 + 9y^2$

۲۲ . $f(x, y) = 144 - 9x^2 - 16y^2$

۲۳ . $f(x, y) = 16 - x^2 - y^2$

۲۴ . $f(x, y) = \sqrt{100 - 25x^2 - 4y^2}$

۲۵ . $f(x, y) = \sqrt{10 - x - y^2}$

۲۶ . $f(x, y) = \begin{cases} 2 \text{ ، } x \neq y & \text{اگر} \\ 0 \text{ ، } x = y & \text{اگر} \end{cases}$

در تمرینهای ۲۷ تا ۳۲ ، نگاشت کنتوری تابع f را بکشید که منحنیهای تراز f در اعداد داده شده را نشان دهد.

۲۷ . تابع تمرین ۲۱ در 36 ، 25 ، 16 ، 9 ، 4 ، 1 ، و 0 .

۲۸ . تابع تمرین ۲۰ در 5 ، 4 ، 3 ، 2 ، 1 ، و 0 .

۲۹ . تابع تمرین ۲۳ در 8 ، 4 ، 0 ، 4− ، و 8− .

۳۰ . تابع تمرین ۲۴ در 10 ، 8 ، 6 ، 5 ، و 0 .

۳۱ . تابع f که $f(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ در 8 ، 6 ، 4 ، 2 ، و 0 .

۳۲ . تابع f که $f(x, y) = (x-3)/(y+2)$ در 4 ، 2 ، 1 ، $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{4}$ ، 0 ، $-\frac{1}{4}$ ، $-\frac{1}{2}$ ، 1− ، 2− ، و 4− .

در تمرینهای ۳۳ و ۳۴، $h(x, y)$ را درصورتی بیابید که $h = f \circ g$ ؛ همچنین، قلمرو h را پیدا کنید.

۳۳ . $f(t) = \sin^{-1} t; g(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

۳۴ . $f(t) = e^t; g(x, y) = y \ln x$

۳۵ . فرض کنید $f(x, y) = x - y, g(t) = \sqrt{t}, h(s) = s^2$. مقادیر زیر را پیدا کنید:
(آ) $(g \circ f)(5, 1)$ ؛ (ب) $f(h(3), g(9))$ ؛ (پ) $f(g(x), h(y))$ ؛
(ت) $g((h \circ f)(x, y))$ ؛ (ث) $(g \circ h)(f(x, y))$.

۳۶ . فرض کنید $f(x, y) = x/y^2, g(x) = x^2, h(x) = \sqrt{x}$. مقادیرزیر را بیابید: (آ)
$(h \circ f)(2, 1)$ ؛ (ب) $f(g(2), h(4))$ ؛ (پ) $f(g(\sqrt{x}), h(x^2))$ ؛
(ت) $h((g \circ f)(x, y))$ ؛ (ث) $(h \circ g)(f(x, y))$.

۳۷ . پتانسیل الکتریکی در نقطهٔ (x, y) از صفحهٔ xy مساوی V ولت بوده و $V = 4/\sqrt{9 - x^2 - y^2}$. منحنیهای همپتانسیل را بهازای $V = 16, 12, 8, 4, 2$ رسم کنید.

۳۸ . تابع تولید f یک کالای خاص دارای مقادیر $f(x, y) = 4x^{1/3}y^{2/3}$ است، که در آن x و y مقادیر دو ورودیاند. نگاشت کنتوری f را رسم کنید که منحنیهای تولید ثابت در 16 ، 12 ، 8 ، 4 ، و 2 را نشان دهد.

۳۹ . فرض‌کنید تعداد تولید یک کالا z باشد، و $z = 6xy$ ، که درآن x تعدادماشینهای بکار بوده و y ساعات کار کارگران باشد. دراین صورت، تابع f تعریف شده با $f(x, y) = 6xy$ یک تابع تولید است. نگاشت کنتوری f را طوری رسم کنید که منحنیهای تولید ثابت بهازای $z = 30, 24, 18, 12, 6$ را نشان دهد.

۴۰ . دما در نقطهٔ (x, y) از یک صفحهٔ فلزی تخت t درجه است و $t = 4x^2 + 2y^2$. همگرماها را بهازای $t = 12, 8, 4, 1, 0$ رسم کنید.

در تمرینهای ۴۱ و ۴۲، سطوح تراز تابع f در اعداد داده شده را رسم کنید.

۴۱ . $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 4z$ در 8 ، 4 ، 0 ، 4− ، و 8− .

۴۲ . $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ در 9 ، 4 ، 1 ، و 0 .

۲۰۱۸ حدود توابع با بیش‌از یک متغیر

فاصلهٔ بین دو نقطه در R^1 قدر مطلق تفاضل دو عدد حقیقی است. یعنی، $|x - a|$ فاصلهٔ بین نقاط x و a است. در R^2 فاصلهٔ بین دو نقطهٔ $P(x, y)$ و $P_0(x_0, y_0)$ عبارت است از $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$. در R^3 فاصلهٔ بین دو نقطهٔ $P(x, y, z)$ و $P_0(x_0, y_0, z_0)$ عبارت است از

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$$

در R^n فاصلهٔ بین دو نقطه بههمین نحو تعریف میشود.

۱۰۲۰۱۸ تعریف. هرگاه $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ و $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ دو نقطه در R^n باشند، آنگاه فاصلهٔ بین P و A ، که با $\|P - A\|$ نموده میشود، عبارت است از

$$\|P - A\| = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \cdots + (x_n - a_n)^2} \quad (۱)$$

اگر در R^1 ، $P = x$ و $A = a$ ، رابطهٔ (۱) خواهد شد

$$\|x - a\| = \sqrt{(x - a)^2} = |x - a| \quad (۲)$$

اگر در R^2 ، $P = (x, y)$ و $A = (x_0, y_0)$ ، رابطهٔ (۱) خواهد شد

$$\|(x, y) - (x_0, y_0)\| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \quad (۳)$$

و اگر در R^3 ، $P = (x, y, z)$ و $A = (x_0, y_0, z_0)$ ، رابطهٔ (۱) خواهد شد

$$\|(x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)\| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} \quad (۴)$$

$\|P - A\|$ خوانده میشود: "فاصلهٔ بین P و A ." این یک عدد نامنفی میباشد.

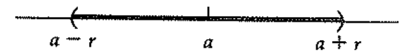
۲۰۲۰۱۸ تعریف. هرگاه A نقطهای در R^n بوده و r عدد مثبتی باشد، آنگاه گوی باز $B(A; r)$ مجموعهٔ تمام نقاط P در R^n تعریف میشود که $\|P - A\| < r$.

۳۰۲۰۱۸ تعریف. هرگاه A نقطه‌ای در R^n بوده و r عدد مثبتی باشد، آنگاه **گوی بستهٔ** $B[A; r]$ مجموعهٔ تمام نقاط P در R^n تعریف می‌شود که $\|P - A\| \le r$.

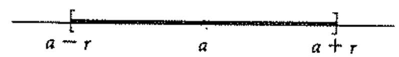
برای توضیح این تعاریف، نشان می‌دهیم که منظور ما در R^1، R^2، و R^3 چیست. پیش‌ازهمه، اگر a نقطه‌ای در R^1 باشد، گوی باز $B(a; r)$ مجموعهٔ تمام نقاط x در R^1 است که

$$|x - a| < r \qquad (۵)$$

مجموعهٔ تمام نقاط x صادق در (۵) مجموعهٔ تمام نقاط بازهٔ باز $(a - r, a + r)$ است؛ درنتیجه، گوی باز $B(a; r)$ در R^1 (ر.ک. شکل ۱۰۲۰۱۸) چیزی جز یک بازهٔ باز با نقطهٔ میانی a و نقاط انتهایی $a - r$ و $a + r$ نیست. گوی بستهٔ $B[a; r]$ در R^1 (شکل ۲۰۲۰۱۸) بازهٔ بستهٔ $[a - r, a + r]$ می‌باشد.



گوی باز $B(a; r)$ در R^1
شکل ۱۰۲۰۱۸



گوی بستهٔ $B[a; r]$ در R^1
شکل ۲۰۲۰۱۸

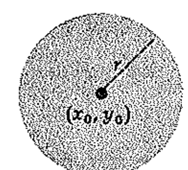
اگر (x_0, y_0) نقطه‌ای در R^2 باشد، گوی باز $B((x_0, y_0); r)$ مجموعهٔ تمام نقاط (x, y) در R^2 است بطوری که

$$\|(x, y) - (x_0, y_0)\| < r \qquad (۶)$$

از (۳) معلوم می‌شود که (۶) معادل است با

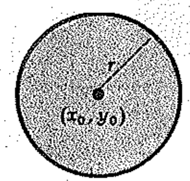
$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r$$

درنتیجه، گوی باز $B((x_0, y_0); r)$ در R^2 (شکل ۳۰۲۰۱۸) از تمام نقاط درون ناحیهٔ



گوی باز $B((x_0, y_0); r)$ در R^2
شکل ۳۰۲۰۱۸

محدود به دایره به مرکز (x_0, y_0) و شعاع r تشکیل شده است. یک گوی باز در R^2 راگاهی یک **قرص باز** می‌نامند. گوی بسته یا قرص بستهٔ $B[(x_0, y_0); r]$ در R^2 (شکل ۴۰۲۰۱۸) مجموعهٔ تمام نقاط درگوی باز $B((x_0, y_0); r)$ و بر دایره به مرکز (x_0, y_0) و شعاع r است.

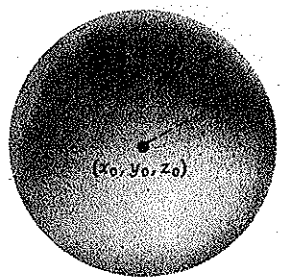


گوی بستهٔ $B[(x_0, y_0); r]$ در R^2
شکل ۴۰۲۰۱۸

هرگاه (x_0, y_0, z_0) نقطه‌ای در R^3 باشد، گوی باز $B((x_0, y_0, z_0); r)$ مجموعهٔ تمام نقاط (x, y, z) در R^3 است که

$$\|(x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)\| < r \qquad (۷)$$

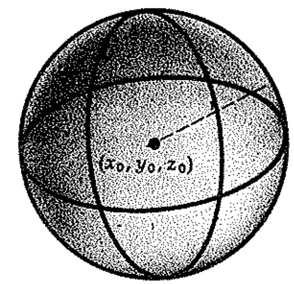
از (۴) و (۷) معلوم می‌شود که گوی باز $B((x_0, y_0, z_0); r)$ در R^3 (شکل ۵۰۲۰۱۸)



گوی باز $B((x_0, y_0, z_0); r)$ در R^3
شکل ۵۰۲۰۱۸

از تمام نقاط درون ناحیهٔ محدود به کره به مرکز P_0 و شعاع r تشکیل شده است. بهمین نحو، گوی بستهٔ $B[(x_0, y_0, z_0); r]$ در R^3 (شکل ۶۰۲۰۱۸) از تمام نقاط در گوی باز $B((x_0, y_0, z_0); r)$ و بر کره به مرکز (x_0, y_0, z_0) و شعاع r تشکیل شده است. حال می‌توان منظور از حد یک تابع n متغیره را بیان کرد.

۴۰۲۰۱۸ تعریف. فرض کنیم f یک تابع n متغیره باشد که بر گوی باز $B(A; r)$، جز



گوی بستهٔ $B[(x_0, y_0, z_0); r]$ در R^3

شکل ۶۰۲۰۱۸

احتمالاً" درخود نقطهٔ A ، تعریف شده باشد. دراین صورت، **حد $f(P)$ وقتی P به A نزدیک می‌شود L است**، و می‌نویسیم

$$\lim_{P \to A} f(P) = L \qquad (۸)$$

در صورتی که به‌ازای هر $\epsilon > 0$ ، ولو کوچک، $\delta > 0$ ای باشد بطوری که

$$|f(P) - L| < \epsilon \text{ ، هر وقت } 0 < \|P - A\| < \delta \qquad (۹)$$

هرگاه f یک تابع یک‌متغیره بوده و در تعریف فوق $A = a$ در R^1 باشد و $P = x$ ، آنگاه (۸) خواهد شد

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

و (۹) به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$|f(x) - L| < \epsilon \text{ ، هر وقت } 0 < |x - a| < \delta$$

درنتیجه، تعریف (۱۰۱۰۲) حد یک تابع یک متغیره حالت خاصی از تعریف ۴۰۲۰۱۸ است.

حال تعریف حد تابع دو متغیره را بیان می‌کنیم. این تعریف حالت خاصی از تعریف ۴۰۲۰۱۸ است، که در آن A نقطهٔ (x_0, y_0) و P نقطهٔ (x, y) می‌باشد.

۵۰۲۰۱۸ تعریف. فرض کنیم تابع دومتغیرهٔ f برقرص‌باز $B((x_0, y_0); r)$ ، جز احتمالاً" در خود نقطهٔ (x_0, y_0) ، تعریف شده باشد. دراین صورت، **حد $f(x, y)$ وقتی (x, y) به (x_0, y_0) نزدیک می‌شود L است**، و می‌نویسیم

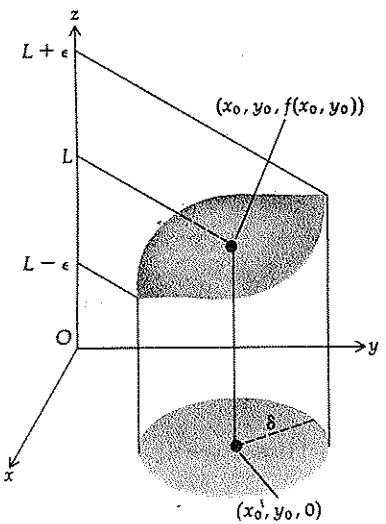
$$\lim_{(x, y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = L$$

در صورتی که به‌ازای هر $\epsilon > 0$ ، ولو کوچک، $\delta > 0$ ای باشد بطوری که

$$|f(x, y) - L| < \epsilon \text{ ، هر وقت } 0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \qquad (۱۰)$$

تعریف ۵۰۲۰۱۸، با کلمات، می‌گوید که مقادیر تابعی $f(x, y)$ ، وقتی نقطهٔ (x, y) به نقطهٔ (x_0, y_0) نزدیک شود، به حد L نزدیک می‌شوند. درصورتی که، با اختیار نقطهٔ (x, y) به‌قدر کافی نزدیک (x_0, y_0) ولی نه مساوی آن، قدر مطلق تفاضل بین $f(x, y)$ و L را بتوان بدلخواه کوچک کرد. در تعریف ۵۰۲۰۱۸ چیزی در باب مقدار تابع در (x_0, y_0) گفته نشده است؛ یعنی، برای وجود $\lim_{(x, y) \to (x_0, y_0)} f(x, y)$ لازم نیست تابع در (x_0, y_0) تعریف شده باشد.

تعبیر هندسی تعریف ۵۰۲۰۱۸ در شکل ۷۰۲۰۱۸ آمده است. بخشی از سطح به



شکل ۷۰۲۰۱۸

معادلهٔ $z = f(x, y)$ که بالای قرص باز $B((x_0, y_0); \delta)$ است نموده شده است. می‌بینیم که وقتی نقطهٔ (x, y) در صفحهٔ xy در قرص باز $B((x_0, y_0); \delta)$ باشد، $f(x, y)$ بر محور z بین $L - \epsilon$ و $L + \epsilon$ قرار دارد. طریقهٔ دیگر بیان این امر آن است که، با تحدید نقطهٔ (x, y) در صفحهٔ xy به قرص باز $B((x_0, y_0); \delta)$ ، می‌توان $f(x, y)$ بر محور z را بین $L - \epsilon$ و $L + \epsilon$ مقید کرد.

توضیح ۱. با اعمال تعریف ۵۰۲۰۱۸ ثابت می‌کنیم که

$$\lim_{(x,y)\to(1,3)} (2x+3y) = 11$$

اولین شرط تعریف این است که $2x + 3y$ باید بر قرص بازی به مرکز $(1, 3)$، جز احتمالاً در $(1, 3)$، محدود شده باشد، چون $2x + 3y$ در هر نقطهٔ (x, y) تعریف شده است، هر قرص باز به مرکز $(1, 3)$ در این شرط صدق می‌کند. حال باید نشان داد که به ازای هر $\epsilon > 0$، $\delta > 0$ ای هست بطوری که

هر وقت $0 < \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2} < \delta$، $|(2x + 3y) - 11| < \epsilon$

از نامساوی مثلثی داریم

$$|2x + 3y - 11| = |2x - 2 + 3y - 9| \le 2|x - 1| + 3|y - 3|$$

چون

$$|x - 1| \le \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2}$$

و

$$|y - 3| \le \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2}$$

پس، هر وقت

$$0 < \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2} < \delta$$

داریم

$$2|x - 1| + 3|y - 3| < 2\delta + 3\delta$$

درنتیجه، اگر $\delta = \frac{1}{5}\epsilon$ اختیار شود، هر وقت

$$0 < \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2} < \delta$$

خواهیم داشت

$$|2x + 3y - 11| \le 2|x - 1| + 3|y - 3| < 5\delta = \epsilon$$

این ثابت می‌کند که $\lim_{(x,y)\to(1,3)} (2x + 3y) = 11$.

مثال ۱. با اعمال تعریف ۵.۲.۱۸ ثابت کنید $\lim_{(x,y)\to(1,2)} (3x^2 + y) = 5$.

حل. چون $3x^2 + y$ در هر نقطهٔ (x, y) تعریف شده است، هر قرص باز به مرکز $(1, 2)$ در اولین شرط تعریف ۵.۲.۱۸ صدق می‌کند.

باید نشان دهیم که به‌ازای هر $\epsilon > 0$، $\delta > 0$ ای هست بطوری که

هر وقت $0 < \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} < \delta$، $|(3x^2 + y) - 5| < \epsilon$

از نامساوی مثلثی داریم

(۱۱) $$|3x^2 + y - 5| = |3x^2 - 3 + y - 2| \le 3|x - 1||x + 1| + |y - 2|$$

اگر δ ای را که در پی آنیم نابیشتر از 1 بگیریم، هر وقت

$$0 < \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} < \delta \le 1$$

خواهیم داشت $|x - 1| < \delta \le 1$ و $|y - 2| < \delta \le 1$. بعلاوه، هر وقت $|x - 1| < 1$، داریم $-1 < x - 1 < 1$؛ و درنتیجه، $1 < x + 1 < 3$. لذا، هر وقت

$$0 < \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} < \delta \le 1$$

(۱۲) $$3|x - 1||x + 1| + |y - 2| < 3 \cdot \delta \cdot 3 + \delta = 10\delta$$

درنتیجه، اگر به‌ازای هر $\epsilon > 0$، $\delta = \min(1, \frac{1}{10}\epsilon)$ را اختیار کنیم، از (۱۱) و (۱۲) معلوم می‌شود که

هر وقت $0 < \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} < \delta$، $|3x^2 + y - 5| < 10\delta \le \epsilon$

این ثابت می‌کند که $\lim_{(x,y)\to(1,2)} (3x^2 + y) = 5$.

قضایای حدی فصل ۲ و برهانهای آنها، با تغییرات کم، درمورد توابع چند متغیره برقرارند. از این قضایا بدون بیان مجدد آنها و برهانهایشان استفاده خواهیم کرد.

توضیح ۲. با اعمال قضایای حدی بر مجموعها و حاصل‌ضربها،

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(-2,1)} (x^3 + 2x^2y - y^2 + 2) &= (-2)^3 + 2(-2)^2(1) - (1)^2 + 2 \\ &= 1\end{aligned}$$

مثال ۲. حد

$$\lim_{(x,y)\to(1,3)} \frac{3x - y}{27x^3 - y^3}$$

را بیابید.

حل

$$\lim_{(x,y)\to(1,3)} \frac{3x - y}{27x^3 - y^3} = \lim_{(x,y)\to(1,3)} \frac{3x - y}{(3x - y)(9x^2 + 3xy + y^2)}$$

(x − ۱)
(y − ۳)

$$= \lim_{(x,y)\to(1,3)} \frac{1}{9x^2 + 3xy + y^2}$$

$$= \frac{1}{\lim_{(x,y)\to(1,3)} (9x^2 + 3xy + y^2)}$$

$$= \frac{1}{9+9+9}$$
$$= \tfrac{1}{27}$$

قضیهٔ زیر شبیه است به قضیهٔ ۶.۷.۲ که در مورد توابع یک متغیره بود، و این قضیه درمورد حد یک تابع مرکب دو متغیره می‌باشد.

۶.۲.۱۸ قضیه. هرگاه g **یک تابع دو متغیره بوده و** $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = b$ **، و** f **یک تابع یک متغیرهٔ پیوسته در** b **باشد، آنگاه**

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f\circ g)(x,y) = f(b)$$

یا، معادلاً "،

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(g(x,y)) = f\Big(\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)\Big)}$$

اثبات این قضیه شبیه اثبات قضیهٔ ۶.۷.۲ است و به‌عنوان تمرین می‌ماند (ر.ک. تمرین ۴۹).

مثال ۳. با استفاده از قضیهٔ ۶.۲.۱۸، $\lim_{(x,y)\to(2,1)} \ln(xy-1)$ را بیابید.

حل. فرض کنیم تابع g چنان باشد که $g(x,y) = xy - 1$ ، و تابع f چنان باشد که $f(t) = \ln t$.

$$\lim_{(x,y)\to(2,1)} (xy-1) = 1$$

و چون f در 1 پیوسته است، از قضیهٔ ۶.۲.۱۸ داریم

$$\lim_{(x,y)\to(2,1)} \ln(xy-1) = \ln\Big(\lim_{(x,y)\to(2,1)} (xy-1)\Big)$$
$$= \ln 1$$
$$= 0$$

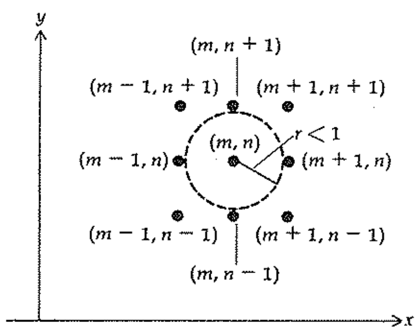
حال مفهوم **نقطهٔ انباشتگی**، که برای ادامهٔ بحث حدود توابع دو متغیره لازم است، معرفی می‌شود.

۷.۲.۱۸ تعریف. نقطهٔ P_0 را یک **نقطهٔ انباشتگی** مجموعهٔ S از نقاط در R^n گویند

هرگاه هر گوی باز $B(P_0; r)$ شامل بی‌نهایت نقطه از S باشد.

توضیح ۳. هرگاه S مجموعهٔ تمام نقاطی در R^2 باشد که بر جهت مثبت محور x واقعند، مبداء یک نقطهٔ انباشتگی S است، زیرا هر قرص باز به مرکز مبداء و شعاع r ، مهم نیست چقدر r کوچک باشد، بی‌نهایت نقطه از S را دارد. این مثالی است از یک مجموعهٔ نقطهٔ انباشتگی دار که نقطهٔ انباشتگی غیر متعلق به‌خود دارد. هر نقطهٔ S نیز یک نقطهٔ انباشتگی S می‌باشد.

توضیح ۴. هرگاه S مجموعهٔ تمام نقاطی در R^2 باشد که مختصات دکارتی آنها اعدادی مثبت‌اند، این مجموعه نقطهٔ انباشتگی ندارد. به این امر می‌توان با توجه به نقطهٔ (m,n) ، که در آن m و n اعداد صحیح مثبتی هستند، رسید. هر قرص باز به مرکز (m,n) و شعاع کمتر از 1 شامل نقطه‌ای از S غیر از (m,n) نیست؛ لذا، تعریف ۷.۲.۱۸ برقرار نیست (ر.ک. شکل ۸.۲.۱۸).



شکل ۸.۲.۱۸

حال حد یک تابع دو متغیره وقتی نقطهٔ (x,y) به نقطهٔ (x_0,y_0) نزدیک می‌شود و (x,y) به مجموعهٔ مشخصی از نقاط محدود شده است، را درنظر می‌گیریم.

۸.۲.۱۸ تعریف. فرض‌کنیم تابع f بر مجموعهٔ S از نقاط در R^2 تعریف شده باشد، و (x_0,y_0) یک نقطهٔ انباشتگی S باشد. دراین صورت، **حد** $f(x,y)$ **وقتی** (x,y) **به** (x_0,y_0) **در** S **نزدیک می‌شود** L **است**، و می‌نویسیم

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(P\ \text{in}\ S)}} f(x,y) = L \qquad (۱۳)$$

اگر به‌ازای هر $\epsilon > 0$ ، ولو کوچک ، $\delta > 0$ ای باشد بطوری که
هر وقت $0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta$ و (x, y) در S باشد ،

$$|f(x, y) - L| < \epsilon$$

حالت خاصی از (۱۳) وقتی است که S مجموعهٔ نقاط واقع بر یک منحنی شامل (x_0, y_0) است . درچنین حالات ، حد (۱۳) حد یک تابع یک متغیره است . به‌عنوان‌مثال ، $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ را درنظر می‌گیریم . دراین صورت ، اگر S_1 مجموعهٔ تمام نقاط طرف مثبت محور x است ،

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (P \text{ در } S_1)}} f(x, y) = \lim_{x\to 0^+} f(x, 0)$$

هرگاه S_2 مجموعهٔ تمام نقاط واقع در طرف منفی محور y باشد ،

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (P \text{ در } S_2)}} f(x, y) = \lim_{y\to 0^-} f(0, y)$$

هرگاه S_3 مجموعهٔ تمام نقاط واقع بر محور x باشد ،

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (P \text{ در } S_3)}} f(x, y) = \lim_{x\to 0} f(x, 0)$$

هرگاه S_4 مجموعهٔ تمام نقاط واقع بر سهمی $y = x^2$ باشد ،

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (P \text{ در } S_4)}} f(x, y) = \lim_{x\to 0} f(x, x^2)$$

۹.۲.۱۸ قضیه. *فرض‌کنیم تابع f در هر نقطهٔ یک قرص باز به مرکز (x_0, y_0) ، جز احتمالاً" درخود (x_0, y_0) ، تعریف شده باشد ، و*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L$$

دراین صورت ، اگر S مجموعه‌ای از نقاط در R^2 با نقطهٔ انباشتگی (x_0, y_0) باشد ،

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ (P \text{ در } S)}} f(x, y)$$

موجود و همواره مقدار L را دارد .

برهان. چون $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L$ ، طبق تعریف ۵.۲.۱۸ ، به‌ازای هر $\epsilon > 0$ ، $\delta > 0$ ای هست بطوری که

هر وقت $0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta$ ، $|f(x, y) - L| < \epsilon$

مطلب فوق درصورت تحدید (x, y) به اینکه در مجموعهٔ S باشد ، که S مجموعه‌ای از نقاط با نقطهٔ انباشتگی (x_0, y_0) است ، نیز درست می‌باشد . لذا ، طبق تعریف ۸.۲.۱۸ ،

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ (P \text{ در } S)}} f(x, y) = L$$

و L به مجموعهٔ S که (x, y) در آن به (x_0, y_0) نزدیک می‌شود بستگی ندارد . این قضیه را ثابت خواهد کرد .

قضیهٔ زیر نتیجهٔ فوری قضیهٔ ۹.۲.۱۸ است .

۱۰.۲.۱۸ قضیه. *هرگاه وقتی (x, y) از طریق دو مجموعهٔ مختلف از نقاط به نقطهٔ انباشتگی (x_0, y_0) نزدیک می‌شود ، تابع f حدود مختلف داشته باشد ، آنگاه $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$ وجود نخواهد داشت .*

برهان. فرض کنیم S_1 و S_2 دو مجموعهٔ متمایز از نقاط در R^2 با نقطهٔ انباشتگی (x_0, y_0) باشد ، و

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ (P \text{ در } S_2)}} f(x, y) = L_2 \quad \text{و} \quad \lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ (P \text{ در } S_1)}} f(x, y) = L_1$$

فرض کنیم $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$ وجود داشته باشد . دراین صورت ، طبق قضیهٔ ۹.۲.۱۸ ، L_1 باید مساوی L_2 باشد ، اما بنابر فرض $L_1 \neq L_2$ ؛ و درنتیجه ، تناقض داریم . بنابر این ، $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$ وجود ندارد .

مثال ۴. به فرض آنکه

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ را درصورت وجود بیابید .

حل. تابع f درجمیع نقاط R^2 جزدر $(0,0)$ تعریف شده است . فرض کنیم S_1 مجموعهٔ تمام نقاط واقع بر محور x باشد . دراین صورت ،

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (P \text{ در } S_1)}} f(x, y) = \lim_{x\to 0} f(x, 0) = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^2 + 0} = 0$$

فرض‌کنیم S_2 مجموعهٔ تمام نقاط‌واقع بر خط $x = y$ باشد. دراین صورت،

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (P \text{ در } S_2)}} f(x,y) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

چون

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (P \text{ در } S_1)}} f(x,y) \neq \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (P \text{ در } S_2)}} f(x,y)$$

از قضیهٔ ۱۰.۲.۱۸ نتیجه می‌شود که $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ وجود ندارد.

مثال ۵. به فرض آنکه

$$f(x,y) = \frac{3x^2y}{x^2+y^2}$$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ را درصورت وجود بیابید.

حل. تابع f همه‌جا در R^2 جز در مبداء تعریف شده است. فرض‌کنیم S_1 مجموعهٔ تمام نقاط‌واقع بر محور x باشد. دراین صورت،

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (P \text{ در } S_1)}} f(x,y) = \lim_{x\to 0}\frac{0}{x^2+0} = 0$$

فرض‌کنیم S_2 مجموعهٔ تمام نقاط‌واقع بر خط‌ماربر مبداء باشد؛ یعنی، به‌ازای هر نقطهٔ (x,y) در S_2، $y = mx$.

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (P \text{ در } S_2)}} f(x,y) = \lim_{x\to 0}\frac{3x^2(mx)}{x^2+m^2x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{3mx}{1+m^2} = 0$$

باآنکه‌اگر (x,y) از طریق مجموعهٔ نقاط‌واقع بر هر خط‌ماربر مبداء به $(0,0)$ نزدیک‌شود همان‌حد 0 بدست می‌آید، نمی‌توان نتیجه گرفت که $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ وجود دارد و صفر است (ر.ک. مثال ۶). با اینحال، سعی می‌کنیم ثابت کنیم $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$. یک قرص بـاز به مرکز مبداء در شرط‌اول تعـریف ۵.۲.۱۸ صدق می‌کند. اگر نشان دهیم که به‌ازای هر $\epsilon > 0$، $\delta > 0$ ای هست بطوری که

(۱۴) هر وقت $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$، $\left|\frac{3x^2y}{x^2+y^2}\right| < \epsilon$

ثابت کرده‌ایم که $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

چون $x^2 \le x^2+y^2$ و $|y| \le \sqrt{x^2+y^2}$،

$$\left|\frac{3x^2y}{x^2+y^2}\right| = \frac{3x^2|y|}{x^2+y^2} \le \frac{3(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} = 3\sqrt{x^2+y^2}$$

درنتیجه، اگر $\delta = \frac{1}{3}\epsilon$،

هر وقت $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$، $\left|\frac{3x^2y}{x^2+y^2}\right| < \epsilon$

که همان (۱۴) است. لذا، ثابت کرده‌ایم که $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

مثال ۶. به فرض آنکه

$$f(x,y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2}$$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ را درصورت وجود بیابید.

حل. تابـع f همه‌جا در R^2 جز در $(0,0)$ تعریف شده است، فرض‌کنیم S_1 مجموعهٔ تمام نقاط‌واقع برمحور x یامحور y باشد. درنتیجه، اگر (x,y) در S_1 باشد، $xy = 0$. بنابراین،

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (P \text{ در } S_1)}} f(x,y) = 0$$

فرض‌کنیم S_2 مجموعهٔ تمام نقاط‌واقع بر هر خط‌ماربر مبداء باشد؛ درنتیجه، اگر (x,y) نقطه‌ای در S_2 باشد، $y = mx$. پس

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (P \text{ در } S_2)}} f(x,y) = \lim_{x\to 0}\frac{mx^3}{x^4+m^2x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{mx}{x^2+m^2} = 0$$

فرض کنیم S_3 مجموعهٔ تمام نقاط‌واقع بر سهمی $y = x^2$ باشد. در این صورت،

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (P \text{ در } S_3)}} f(x,y) = \lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4+x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

چون

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (P \text{ در } S_3)}} f(x,y) \neq \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (P \text{ در } S_1)}} f(x,y)$$

نتیجه می‌شود که $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ وجود ندارد.

مثال ۷. به فرض آنکه

$$f(x,y)=\begin{cases}(x+y)\sin\dfrac{1}{x} & \text{، } x\neq 0 \text{ اگر} \\ 0 & \text{، } x=0 \text{ اگر}\end{cases}$$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ را در صورت وجود بیابید.

حل. تابع f در تمام نقاط R^2 تعریف شده است. فرض کنیم S_1 مجموعهٔ تمام نقاط واقع بر محور y باشد. دراین صورت،

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (S_1 \text{ در } P)}} f(x,y)=\lim_{x\to 0} 0 = 0$$

فرض کنیم S_2 مجموعهٔ تمام نقاط واقع بر هر خط ماربر مبداء جز محور y باشد؛ یعنی، اگر (x,y) نقطه‌ای در S_2 باشد، $y=kx$، که در آن $x\neq 0$. دراین صورت،

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (S_2 \text{ در } P)}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}(x+kx)\sin\frac{1}{x}$$

برای یافتن حد فوق از این استفاده می‌کنیم که $\lim_{x\to 0}(x+kx)=0$. چون $\lim_{x\to 0}\sin(1/x)$ وجود ندارد، قضیهٔ حد حاصل ضرب را نمی‌توان بکار برد. اما، چون $\lim_{x\to 0}(x+kx)=0$، معلوم می‌شود که به‌ازای هر $\epsilon>0$، $\delta>0$ ای هست بطوری که

هر وقت $0<|x|<\delta$، $|x+kx|<\epsilon$

δ درواقع $\epsilon/|1+k|$ است. اما

$$\left|(x+kx)\sin\frac{1}{x}\right| = |x+kx|\left|\sin\frac{1}{x}\right| \le |x+kx|\cdot 1$$

لذا، به‌ازای هر $\epsilon>0$، $\delta>0$ ای هست بطوری که

هر وقت $0<|x|<\delta$، $\left|(x+kx)\sin\frac{1}{x}\right|<\epsilon$

پس

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (S_2 \text{ در } P)}} f(x,y)=0 \qquad (۱۵)$$

فرض کنیم S_3 مجموعهٔ تمام نقاط (x,y) باشد که $y=kx^n$، که در آن n عدد صحیح مثبت دلخواهی است و $x\neq 0$. بااستدلالی مشابه آن که در اثبات (۱۵) بکار رفت نتیجه می‌شود که

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (S_3 \text{ در } P)}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}(x+kx^n)\sin\frac{1}{x}=0$$

حال سعی می‌کنیم به‌ازای هر $\epsilon>0$، $\delta>0$ ای بیابیم که

(۱۶) هر وقت $0<\|(x,y)-(0,0)\|<\delta$، $|f(x,y)-0|<\epsilon$

که ثابت می‌کند $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$. دو حالت تمیز می‌دهیم: $x=0$ و $x\neq 0$.

حالت ۱. اگر $x=0$، $|f(x,y)-0|=|0-0|=0$، که به‌ازای هر $\delta>0$ کوچکتر از ϵ است.

حالت ۲. اگر $x\neq 0$، $|f(x,y)-0|=|(x+y)\sin(1/x)|$.

$$\begin{aligned}\left|(x+y)\sin\frac{1}{x}\right| &= |x+y|\left|\sin\frac{1}{x}\right|\\ &\le |x+y|(1)\\ &\le |x|+|y|\\ &\le \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2+y^2}\end{aligned}$$

یعنی،

$$\left|(x+y)\sin\frac{1}{x}\right| \le 2\sqrt{x^2+y^2}$$

دراین صورت،

هر وقت $0<\sqrt{x^2+y^2}<\frac{1}{2}\epsilon$، $\left|(x+y)\sin\frac{1}{x}\right|<2\cdot\frac{1}{2}\epsilon$

درنتیجه، $\delta=\frac{1}{2}\epsilon$ را اختیار می‌کنیم.

پس، درهر دو حالت به‌ازای هر $\epsilon>0$، $\delta>0$ ای یافته‌ایم که (۱۶) برقرار می‌شود، و این ثابت می‌کند که $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$.

تمرینات ۲۰۱۸

در تمرینهای ۱ تا ۸، با استفاده از قضایای حدی، حد داده شده را حساب کنید.

۱. $\lim_{(x,y)\to(2,3)}(3x^2+xy-2y^2)$

۲. $\lim_{(x,y)\to(1,1)}\dfrac{x^2-y^2}{x-y}$

۳. $\lim_{(x,y)\to(2,-1)}\dfrac{x^3+8y^3}{x+2y}$

۴. $\lim_{(x,y)\to(-2,4)} y\sqrt[3]{x^3+2y}$

۵. $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{e^x+e^y}{\cos x+\sin y}$

۶. $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{e^x-e^y}{e^{-x}-e^{-y}}$

۷. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{\sqrt{x+y}-\sqrt{y}}{x}$

۸. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}}{x-y}$

در تمرینهای ۹ تا ۱۶، با یافتن $\delta > 0$ بهازای هر $\epsilon > 0$ که تعریف ۵.۲.۱۸ برقرار شود، حد را ثابت نمایید.

۹. $\lim\limits_{(x,y)\to(3,2)} (3x-4y) = 1$

۱۰. $\lim\limits_{(x,y)\to(2,4)} (5x-3y) = -2$

۱۱. $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,3)} (3x-2y) = -9$

۱۲. $\lim\limits_{(x,y)\to(-2,1)} (5x+4y) = -6$

۱۳. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} (x^2+y^2) = 2$

۱۴. $\lim\limits_{(x,y)\to(2,3)} (2x^2-y^2) = -1$

۱۵. $\lim\limits_{(x,y)\to(2,4)} (x^2+2x-y) = 4$

۱۶. $\lim\limits_{(x,y)\to(3,-1)} (x^2+y^2-4x+2y) = -4$

در تمرینهای ۱۷ تا ۲۲، ثابت کنید بهازای تابع f داده شده، $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ وجود ندارد.

۱۷. $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

۱۸. $f(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$

۱۹. $f(x,y) = \dfrac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^3}$

۲۰. $f(x,y) = \dfrac{x^4+3x^2y^2+2xy^3}{(x^2+y^2)^2}$

۲۱. $f(x,y) = \dfrac{x^9y}{(x^6+y^2)^2}$

۲۲. $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^3+y^3}$

در تمرینهای ۲۳ تا ۲۶، ثابت کنید $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ وجود دارد.

۲۳. $f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

۲۴. $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

۲۵. $f(x,y) = \begin{cases} (x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y} & \text{اگر } x \neq 0 \text{ و } y \neq 0 \\ 0 & \text{اگر } x = 0 \text{ یا } y = 0 \end{cases}$

۲۶. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\sin(xy) & \text{اگر } x \neq 0 \\ y & \text{اگر } x = 0 \end{cases}$

در تمرینهای ۲۷ تا ۲۹، کاربرد قضیهٔ ۶.۲.۱۸ را با یافتن حد ذکر شده نشان دهید.

۲۷. $\lim\limits_{(x,y)\to(2,2)} \tan^{-1}\dfrac{y}{x}$

۲۸. $\lim\limits_{(x,y)\to(-2,3)} [\![5x+\tfrac{1}{2}y^2]\!]$

۲۹. $\lim\limits_{(x,y)\to(4,2)} \sqrt{\dfrac{1}{3x-4y}}$

در تمرینهای ۳۰ تا ۳۵، وجود حد ذکر شده را معین کنید.

۳۰. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4}$

۳۱. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$

۳۲. $\lim\limits_{(x,y)\to(2,-2)} \dfrac{\sin(x+y)}{x+y}$

۳۳. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y}{x^2+y^2}$

۳۴. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ ؛ $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} + y\sin\dfrac{1}{x} & \text{اگر } x \neq 0 \\ 0 & \text{اگر } x = 0 \end{cases}$

۳۵. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ ؛ $f(x,y) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{y} + y\sin\dfrac{1}{x} & \text{اگر } x \neq 0 \text{ و } y \neq 0 \\ 0 & \text{اگر } x = 0 \text{ یا } y = 0 \end{cases}$

۳۶. (آ) حد یک تابع سه متغیره وقتی نقطهٔ (x,y,z) به نقطهٔ (x_0,y_0,z_0) نزدیک می‌شود را مشابه تعریف ۵.۲.۱۸ تعریف کنید. (ب) حد یک تابع سه متغیره وقتی نقطهٔ (x,y,z) به‌نقطهٔ (x_0,y_0,z_0) در مجموعهٔ مشخص S از نقاط در R^3 نزدیک می‌شود را مشابه تعریف ۸.۲.۱۸ تعریف کنید.

۳۷. (آ) برای تابع سه متغیرهٔ f قضیه‌ای شبیه قضیهٔ ۹.۲.۱۸ بیان و ثابت کنید.
(ب) برای تابع سه متغیرهٔ f قضیه‌ای شبیه قضیهٔ ۱۰.۲.۱۸ بیان و ثابت کنید.

در تمرینهای ۳۸ تا ۴۱، حد را با استفاده از قضایای حدی حساب کنید.

۳۸. $\lim\limits_{(x,y,z)\to(-2,1,4)} (4x^2y-3xyz^2+7y^2z^3)$

۳۹. $\lim\limits_{(x,y,z)\to(\pi/3,1,\pi)} \dfrac{\sec xy+\sec yz}{y-\sec z}$

۴۰. $\lim\limits_{(x,y,z)\to(1,-1,1)} \dfrac{x^3+y^3z^3}{x+yz}$

۴۱. $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{e^xe^z-e^ye^z}{e^{2x}-e^{2y}}$

در تمرینهای ۴۲ تا ۴۵، با استفاده از تعاریف و قضایای تمرینهای ۳۶ و ۳۷ ثابت کنید $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z)$ وجود ندارد.

۴۲. $f(x,y,z) = \dfrac{x^2+yz^2}{x^4+y^2+z^4}$

۴۳. $f(x,y,z) = \dfrac{x^2+y^2-z^2}{x^2+y^2+z^2}$

۴۴. $f(x,y,z) = \dfrac{x^4+yx^3+z^2x^2}{x^4+y^4+z^4}$

۴۵. $f(x,y,z) = \dfrac{x^2y^2z^2}{x^6+y^6+z^6}$

درتمرینهای ۴۶و۴۷، با استفاده ازتعریف تمرین ۳۶ (آ) ثابت کنید $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z)$ وجود دارد.

۴۶. $f(x,y,z) = \dfrac{y^3+xz^2}{x^2+y^2+z^2}$

۴۷ .
$$f(x, y, z) = \begin{cases} (x + y + z)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y} & \text{اگر } x \neq 0 \text{ و } y \neq 0 \text{ ،} \\ 0 & \text{اگر } x = 0 \text{ یا } y = 0 \text{ ،} \end{cases}$$

۴۸ . فرض کنید توابع دو متغیرهٔ f و g در شرایط زیر صدق کنند :

(یک) به‌ازای n ی و هر t ، $f(tx, ty) = t^n f(x, y);\ g(tx, ty) = t^n g(x, y)$ ؛

(دو) $g(1, 0) \neq 0$ و $g(1, 1) \neq 0$ ؛

(سه) $g(1, 1) \cdot f(1, 0) \neq g(1, 0) \cdot f(1, 1)$.

نشان دهید که $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{f(x, y)}{g(x, y)}$ وجود ندارد .

۴۹ . قضیهٔ ۶.۲.۱۸ را ثابت کنید .

۳.۱۸ پیوستگی توابع با بیش از یک متغیر

ذیلا" تعریف پیوستگی یک تابع n متغیره در یک نقطه از R^n آمده است .

۱.۳.۱۸ تعریف . فرض کنیم f یک تابع n متغیره و A نقطه‌ای در R^n باشد . گوییم f در نقطهٔ A **پیوسته** است اگر و فقط اگر سه شرط زیر برقرار باشند :

(یک) $f(A)$ وجود داشته باشد ؛

(دو) $\lim\limits_{P\to A} f(P)$ موجود باشد ؛

(سه) $\lim\limits_{P\to A} f(P) = f(A)$.

اگر از این سه شرط یکی یا بیشتر در نقطهٔ A برقرار نباشد ، گوییم f در A **ناپیوسته** است .

تعریف ۱.۶.۲ پیوستگی یک تابع یک متغیره در عدد a حالت خاصی از تعریف ۱.۳.۱۸ است .

هرگاه f یک تابع دو متغیره ، A نقطهٔ (x_0, y_0) ، و P نقطهٔ (x, y) باشد ، آنگاه تعریف ۱.۳.۱۸ به صورت زیر درمی‌آید .

۲.۳.۱۸ تعریف . تابع f از دو متغیر x و y را در نقطهٔ (x_0, y_0) **پیوسته** گوییم اگر و فقط اگر سه شرط زیر برقرار باشند :

(یک) $f(x_0, y_0)$ وجود داشته باشد ؛

(دو) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$ موجود باشد ؛

(سه) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$.

مثال ۱ : به فرض آنکه

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2y}{x^2 + y^2} & \text{اگر } f(x, y) \neq (0, 0) \text{ ،} \\ 0 & \text{اگر } f(x, y) = (0, 0) \text{ ،} \end{cases}$$

معین کنید f در $(0, 0)$ پیوسته است یا نه .

حل . سه شرط تعریف ۲.۳.۱۸ را در نقطهٔ $(0, 0)$ امتحان می‌کنیم .

(یک) $f(0, 0) = 0$. لذا ، شرط (یک) برقرار است .

(دو) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3x^2y}{x^2 + y^2} = 0$ ، که در مثال ۵ ، بخش ۲.۱۸ ، ثابت شد .

(سه) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = f(0, 0)$.

بنابراین ، f در $(0, 0)$ پیوسته است .

مثال ۲ . فرض کنیم تابع f به صورت زیر تعریف شده باشد :

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{اگر } f(x, y) \neq (0, 0) \text{ ،} \\ 0 & \text{اگر } f(x, y) = (0, 0) \text{ ،} \end{cases}$$

آیا f در $(0, 0)$ پیوسته است ؟

حل . شرایط تعریف ۲.۳.۱۸ را امتحان می‌کنیم .

(یک) $f(0, 0) = 0$ ؛ درنتیجه ، شرط (یک) برقرار است .

(دو) وقتی $(x, y) \neq (0, 0)$ ، $f(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$. در مثال ۴ ، بخش ۲.۱۸ ، نشان دادیم که $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} xy/(x^2 + y^2)$ وجود ندارد ؛ و درنتیجه ، $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ موجود نیست . بنابراین ، شرط (دو) برقرار نیست . لذا ، f در $(0, 0)$ ناپیوسته است .

هرگاه تابع دو متغیرهٔ f در نقطهٔ (x_0, y_0) ناپیوسته بوده ولی $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$

موجود باشد، گوییم f در (x_0, y_0) **ناپیوستگی قابل رفع** دارد، چرا که اگر f در (x_0, y_0) طوری تعریف شود که $f(x_0, y_0) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$ ، f در (x_0, y_0) پیوسته خواهد شد. اگر ناپیوستگی قابل رفع باشد، آن را **ناپیوستگی اساسی** می‌نامند.

توضیح ۱

(آ) هرگاه $g(x, y) = 3x^2y/(x^2 + y^2)$ ، g درمبداء ناپیوسته است زیرا $g(0, 0)$ تعریف نشده‌است. اما، درمثال ۵، بخش ۲۰۱۸، نشان دادیم که $\lim_{(x,y)\to(0,0)} 3x^2y/(x^2 + y^2) = 0$. لذا، ناپیوستگی درصورتی قابل رفع است که $g(0,0)$ مساوی 0 تعریف شده باشد. (به مثال ۱ رجوع کنید.)

(ب) فرض کنیم $h(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$. h در مبداء ناپیوسته است زیرا $h(0, 0)$ تعریف نشده است. در مثال ۴، بخش ۲۰۱۸، نشان دادیم که $\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy/(x^2 + y^2)$ وجود ندارد. لذا، ناپیوستگی اساسی است. (به مثال ۲ رجوع کنید.)

قضایای پیوستگی توابع یک متغیره را می‌توان به توابع دو متغیره تعمیم داد.

۳.۳.۱۸ قضیه. ***هرگاه دو تابع f و g در نقطهٔ (x_0, y_0) پیوسته باشند، آنگاه***

(یک) $f + g$ **در** (x_0, y_0) **پیوسته است؛**

(دو) $f - g$ **در** (x_0, y_0) **پیوسته است؛**

(سه) fg **در** (x_0, y_0) **پیوسته است؛**

(چهار) f/g **در** (x_0, y_0) **پیوسته است، مشروط براینکه** $g(x_0, y_0) \neq 0$.

اثبات این قضیه شبیه اثبات قضیهٔ نظیر (۱.۷.۲) برای توابع یک متغیره است؛ و لذا، حذف می‌شود.

۴.۳.۱۸ قضیه. ***یک تابع چندجمله‌ای دو متغیره در هر نقطه از R^2 پیوسته است.***

برهان. هرتابع چندجمله‌ای مجموع حاصل‌ضربهایی ازتوابع تعریف شده با $f(x, y) = x$ ، $g(x, y) = y$ ، و $h(x, y) = c$ ، که درآن c عددی حقیقی است، می‌باشد. چون f ، g ، و h درهرنقطه از R^2 پیوسته‌اند، قضیه ازکاربرد مکرر قضیهٔ ۳.۳.۱۸ ، قسمتهای (یک) و (سه) نتیجه می‌شود.

۵.۳.۱۸ قضیه. ***یک تابع گویای دو متغیره در هر نقطه از قلمرو خود پیوسته است.***

برهان. یک تابع گویا خارج قسمت دو تابع چندجمله‌ای f و g است که، طبق قضیهٔ ۴.۳.۱۸ ، در هر نقطه از R^2 پیوسته‌اند. هرگاه (x_0, y_0) نقطه‌ای از قلمرو f/g باشد، آنگاه $g(x_0, y_0) \neq 0$ ؛ درنتیجه، طبق قضیهٔ ۳.۳.۱۸ (چهار)، f/g در این نقطه پیوسته است.

مثال ۳. فرض کنیم تابع f به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{اگر } x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0 & \text{اگر } x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$$

در پیوستگی f بحث کنید. ناحیهٔ پیوستگی f چیست؟

حل. تابع f در تمام نقاط R^2 تعریف شده است. بنابراین، شرط (یک) تعریف ۲.۳.۱۸ به‌ازای هر نقطهٔ (x_0, y_0) برقرار است.

نقاط (x_0, y_0) را که $x_0^2 + y_0^2 \neq 1$ در نظر می‌گیریم. اگر $x_0^2 + y_0^2 < 1$ ،

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (x^2 + y^2) = x_0^2 + y_0^2 = f(x_0, y_0)$$

اگر $x_0^2 + y_0^2 > 1$ ،

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} 0 = 0 = f(x_0, y_0)$$

لذا، f در تمام نقاط (x_0, y_0) که $x_0^2 + y_0^2 \neq 1$ پیوسته است.

برای تعیین پیوستگی f در نقاط (x_0, y_0) که $x_0^2 + y_0^2 = 1$ ، ببینیم $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$ موجود و مساوی 1 است یا نه.

فرض کنیم S_1 مجموعهٔ تمام نقاط (x, y) باشد که $x^2 + y^2 \leq 1$. دراین صورت،

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0) \\ (P \text{ در } S_1)}} f(x, y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0) \\ (P \text{ در } S_1)}} (x^2 + y^2) = x_0^2 + y_0^2 = 1$$

فرض کنیم S_2 مجموعهٔ تمام نقاط (x, y) باشد که $x^2 + y^2 > 1$. در این‌صورت،

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0) \\ (P \text{ در } S_2)}} f(x, y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0) \\ (P \text{ در } S_2)}} 0 = 0$$

چون

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ (S_1 \text{ در } P)}} f(x,y) \neq \lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ (S_2 \text{ در } P)}} f(x,y)$$

نتیجه می‌شود که $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ وجود ندارد. لذا، f در تمام نقاط (x_0, y_0) که $x_0^2 + y_0^2 = 1$ ناپیوسته است. ناحیهٔ پیوستگی f عبارت است از تمام نقاط صفحهٔ xy جز نقاط واقع بر دایرهٔ $x^2 + y^2 = 1$.

۶.۳.۱۸ تعریف. تابع n متغیرهٔ f را بر یک **گوی باز پیوسته** گوییم اگر در هر نقطهٔ گوی باز پیوسته باشد.

در توضیح تعریف فوق، تابع مثال ۳ بر هر قرص باز که شامل نقطه‌ای از دایرهٔ $x^2 + y^2 = 1$ نباشد پیوسته است.

قضیهٔ زیر می‌گوید که یک تابع پیوسته از یک تابع پیوسته پیوسته است. این قضیه شبیه قضیهٔ ۷.۷.۲ است.

۷.۳.۱۸ قضیه. ***فرض کنیم f یک تابع یک متغیره و g یک تابع دو متغیره باشد. همچنین، g در (x_0, y_0) و f در $g(x_0, y_0)$ پیوسته باشد. دراین صورت، تابع مرکب $f \circ g$ در (x_0, y_0) پیوسته می‌باشد.***

اثبات این قضیه، که از قضیهٔ ۶.۲.۱۸ استفاده می‌کند، شبیه اثبات قضیهٔ ۷.۷.۲ است و به‌عنوان تمرین گذارده می‌شود (ر.ک. تمرین ۱۵).

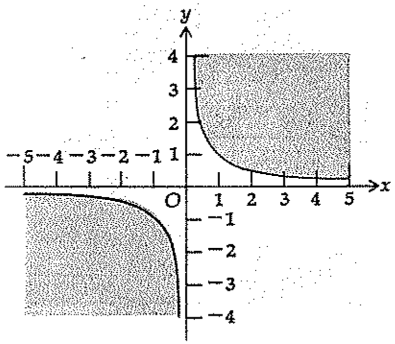
توضیح ۲. فرض کنیم

$$h(x, y) = \ln (xy - 1)$$

در پیوستگی h بحث می‌کنیم. اگر تابع g با $g(x, y) = xy - 1$ تعریف شده باشد، g در تمام نقاط R^2 پیوسته است. تابع لگاریتمی طبیعی بر تمام قلمرو خود، که مجموعهٔ تمام اعداد مثبت است، پیوسته می‌باشد. درنتیجه، اگر تابع f با $f(t) = \ln t$ تعریف شده باشد، f به‌ازای هر $t > 0$ پیوسته است. پس h تابع مرکب $f \circ g$ بوده و، طبق قضیهٔ ۷.۳.۱۸، در تمام نقاط (x, y) در R^2 که $xy - 1 > 0$، یا معادلاً "$xy > 1$"، پیوسته می‌باشد. ناحیهٔ سایه‌دار شکل ۱.۳.۱۸ ناحیهٔ پیوستگی h است.

مثال ۴. به فرض آنکه

$$f(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 - 25}}$$



شکل ۱.۳.۱۸

در پیوستگی f بحث کرده و ناحیهٔ پیوستگی f در R را رسم کرده آن را سایه بزنید.

حل. این همان تابع G توضیح ۴ در بخش ۱.۱۸ است. قلمرو این تابع مجموعهٔ تمام نقاط خارج ناحیهٔ محدود به دایرهٔ $x^2 + y^2 = 25$ و نقاط واقع بر محور x است که $-5 < x < 5$.

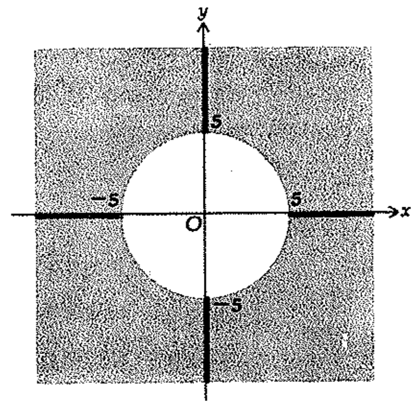
تابع f خارج‌قسمت توابع g و h است که $g(x, y) = y$ و $h(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 25}$. تابع g یک تابع چندجمله‌ای است؛ و لذا، همه‌جا پیوسته است. از قضیهٔ ۷.۳.۱۸ معلوم می‌شود که h در تمام نقاط R^2 که $x^2 + y^2 > 25$ پیوسته می‌باشد. لذا، طبق قضیهٔ ۳.۳.۱۸ (چهار)، f درتمام نقاط ناحیهٔ برونی محدود به دایرهٔ $x^2 + y^2 = 25$ پیوسته است.

حال نقاطی بر محور x را درنظر می‌گیریم که $-5 < x < 5$؛ یعنی، نقاطی چون $(a, 0)$ که $-5 < a < 5$. هرگاه S_1 مجموعهٔ نقاط واقع برخط $x = a$ باشد، آنگاه $(a, 0)$ یک نقطهٔ انباشتگی S_1 است، اما

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,0)\\ (S \text{ در } F)}} f(x, y) = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\sqrt{a^2 + y^2 - 25}}$$

که وجود ندارد، زیرا $y/\sqrt{a^2 + y^2 - 25}$ به‌ازای $|y| \le \sqrt{25 - a^2}$ تعریف نشده است. بنابراین، f در نقاطی ازمحور x که $-5 < x < 5$ ناپیوسته است. ناحیهٔ سایه‌دارشکل

۲۰۳۰۱۸ ناحیهٔ پیوستگی f می‌باشد.



شکل ۲۰۳۰۱۸

تمرینات ۳۰۱۸

درتمرینهای ۱ تا ۱۴، پیوستگی تابع داده شده را مورد بحث قرار دهید.

۱. $f(x, y) = \dfrac{x^2}{y - 1}$ ۲. $F(x, y) = \dfrac{1}{x - y}$

۳. $h(x, y) = \sin\dfrac{y}{x}$ ۴. $f(x, y) = \ln xy^2$

۵. $f(x, y) = \dfrac{4x^2y + 3y^2}{2x - y}$ ۶. $g(x, y) = \dfrac{5xy^2 + 2y}{16 - x^2 - 4y^2}$

۷. $g(x, y) = \ln(25 - x^2 - y^2)$ ۸. $f(x, y) = \cos^{-1}(x + y)$

۹. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{اگر } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{اگر } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ (**راهنمایی**. ر.ک. تمرین ۲۳ در تمرینات ۲۰۱۸.)

۱۰. $h(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4 + y^2} & \text{اگر } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{اگر } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ (**راهنمایی**. ر.ک. مثال ۶ دربخش ۱۸

۱۱. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x + y}{x^2 + y^2} & \text{اگر } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{اگر } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

۱۲. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & \text{اگر } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{اگر } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

۱۳. $G(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{|x| + |y|} & \text{اگر } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{اگر } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

۱۴. $F(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{|x^3| + |y^3|} & \text{اگر } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{اگر } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

۱۵. قضیهٔ ۷۰۳۰۱۸ را ثابت کنید.

در تمرینهای ۱۶ تا ۲۵، ناحیهٔ پیوستگی f را تعیین کرده، و ناحیهٔ پیوستگی f را به صورت یک ناحیهٔ سایه‌دار در R^2 رسم نمایید.

۱۶. $f(x, y) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 - y^2 - 4}}$ ۱۷. $f(x, y) = \dfrac{xy}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}}$

۱۸. $f(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}$ ۱۹. $f(x, y) = \dfrac{x}{\sqrt{4x^2 + 9y^2 - 36}}$

۲۰. $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 9) - \ln(1 - x^2 - y^2)$

۲۱. $f(x, y) = \sec^{-1}(xy)$

۲۲. $f(x, y) = \sin^{-1}(xy)$ ۲۳. $f(x, y) = \sin^{-1}(x + y) + \ln(xy)$

۲۴. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x - y} & \text{اگر } x \neq y \\ x - y & \text{اگر } x = y \end{cases}$

۲۵. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x + y)}{x + y} & \text{اگر } x + y \neq 0 \\ 1 & \text{اگر } x + y = 0 \end{cases}$

در تمرینهای ۲۶ تا ۳۱، تابع در مبداء ناپیوسته است، زیرا $f(0, 0)$ وجود ندارد. تعیین کنید که ناپیوستگی قابل رفع است یا اساسی. اگر ناپیوستگی قابل رفع باشد، $f(0, 0)$ را طوری تعریف کنید که ناپیوستگی رفع شود.

۲۶. $f(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$ ۲۷. $f(x, y) = (x + y)\sin\dfrac{x}{y}$

۲۸. $f(x, y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2 + y^2}$ ۲۹. $f(x, y) = \dfrac{x^3y^2}{x^6 + y^4}$

۳۰ . $f(x, y) = \dfrac{2y^2 - 3xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ ۳۱ . $f(x, y) = \dfrac{x^3 - 4xy^2}{x^2 + y^2}$

۳۲ . تابع F به صورت زیر تعریف شده است :

$$F(x, y) = \begin{cases} x^2 - 3y^2 & \text{اگر } x^2 - 3y^2 \leq 1 \text{ ،} \\ 2 & \text{اگر } x^2 - 3y^2 > 1 \text{ ،} \end{cases}$$

نشان دهید که ناحیهٔ پیوستگی F از جمیع نقاط R^2 جز نقاط واقع بر هذلولی $x^2 - 3y^2 = 1$ تشکیل شده است .

۳۳ . تابع G به صورت زیر تعریف شده است :

$$G(x, y) = \begin{cases} x^2 + 4y^2 & \text{اگر } x^2 + 4y^2 \leq 5 \text{ ،} \\ 3 & \text{اگر } x^2 + 4y^2 > 5 \text{ ،} \end{cases}$$

نشان دهید که ناحیهٔ پیوستگی G از جمیع نقاط R^2 جز نقاط واقع بر بیضی $x^2 + 4y^2 = 5$ تشکیل شده است .

۳۴ . (آ) پیوستگی یک تابع سه متغیره در یک نقطه را شبیه تعریف ۲۰۳۰۱۸ تعریف کنید .

(ب) برای توابع سه متغیره قضایایی شبیه قضایای ۳۰۳۰۱۸ و ۷۰۳۰۱۸ بیان کنید .

(پ) تابع چندجمله‌ای سه متغیره و تابع گویای سه متغیره را تعریف نمایید .

در تمرینهای ۳۵ تا ۳۸، با استفاده از تعاریف و قضایای تمرین ۳۴، در پیوستگی تابع داده شده بحث نمایید .

۳۵ . $f(x, y, z) = \dfrac{xz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 1}}$ ۳۶ . $f(x, y, z) = \ln(36 - 4x^2 - y^2 - 9z^2)$

۳۷ . $$f(x, y, z) = \begin{cases} \dfrac{3xyz}{x^2 + y^2 + z^2} & \text{اگر } (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \text{ ،} \\ 0 & \text{اگر } (x, y, z) = (0, 0, 0) \text{ ،} \end{cases}$$

۳۸ . $$f(x, y, z) = \begin{cases} \dfrac{xz - y^2}{x^2 + y^2 + z^2} & \text{اگر } (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \text{ ،} \\ 0 & \text{اگر } (x, y, z) = (0, 0, 0) \text{ ،} \end{cases}$$

۴۰۱۸ مشتقات جزئی

مشتقگیری از توابع حقیقی n متغیره با گرفتن یک تابع n متغیره به‌صورت یک تابع یک متغیره درهر لحظه و ثابت گرفتن بقیه به حالت یک بعدی تحویل می‌شود . این ما را به مفهوم **مشتق جزئی** می‌رساند . ابتدا مشتق جزئی یک تابع دو متغیره را تعریف می‌کنیم.

۱۰۴۰۱۸ تعریف . فرض کنیم f یک تابع از دو متغیر x و y باشد. **مشتق جزئی f نسبت به x** تابعی است که با D_1f نموده می‌شود و مقدار آن در هر نقطهٔ (x, y) درقلمرو f عبارت است از

$$D_1f(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \qquad (1)$$

مشروط بر اینکه حد موجود باشد. بهمین نحو، **مشتق جزئی f نسبت به y** تابعی است که با D_2f نموده می‌شود و مقدار آن در هر نقطهٔ (x, y) در قلمرو f عبارت است از

$$D_2f(x, y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \qquad (2)$$

مشروط براینکه حد وجود داشته باشد .

روند یافتن مشتق جزئی **مشتقگیری جزئی** نام دارد .

D_1f خوانده می‌شود : " د یک اف "، و این تابع مشتق جزئی f نسبت به متغیر اول است . $D_1f(x, y)$ خوانده می‌شود : " د یک اف ایکس و ایگرگ "، و این مقدار تابع D_1f درنقطهٔ (x, y) است . نمادهای دیگر برای D_1f عبارتند از f_1 ، f_x ، و $\partial f/\partial x$. نمادهای دیگر برای $D_1f(x, y)$ عبارتند از $f_1(x, y)$ ، $f_x(x, y)$ ، و $\partial f(x, y)/\partial x$. بهمین نحو، نمادهای دیگر برای D_2f عبارتند از f_2 ، f_y ، و $\partial f/\partial y$ ؛ نمادهای دیگر برای $D_2f(x, y)$ عبارتند از $f_2(x, y)$ ، $f_y(x, y)$ ، و $\partial f(x, y)/\partial y$. اگر $z = f(x, y)$ ، می‌توان به‌جای $D_1f(x, y)$ نوشت $\partial z/\partial x$. مشتق جزئی را نمی‌توان نسبت ∂z به ∂x گرفت، زیرا هیچیک از این علامات معنی جداگانه ندارند . وقتی y تنها تابع x است، نماد dy/dx را می‌توان به‌صورت نسبت دو دیفرانسیل گرفت، ولی تعبیر مشابه برای $\partial z/\partial x$ وجود ندارد .

مثال ۱ . به‌فرض آنکه $f(x, y) = 3x^2 - 2xy + y^2$ ، با اعمال تعریف ۱۰۴۰۱۸ ، $D_1f(x, y)$ و $D_2f(x, y)$ را بیابید .

حل

$$D_1f(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3(x + \Delta x)^2 - 2(x + \Delta x)y + y^2 - (3x^2 - 2xy + y^2)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x^2 + 6x\,\Delta x + 3(\Delta x)^2 - 2xy - 2y\,\Delta x + y^2 - 3x^2 + 2xy - y^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{6x\,\Delta x + 3(\Delta x)^2 - 2y\,\Delta x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (6x + 3\,\Delta x - 2y)$$

$$= 6x - 2y$$

$$D_2 f(x, y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{3x^2 - 2x(y + \Delta y) + (y + \Delta y)^2 - (3x^2 - 2xy + y^2)}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{3x^2 - 2xy - 2x\,\Delta y + y^2 + 2y\,\Delta y + (\Delta y)^2 - 3x^2 + 2xy - y^2}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{-2x\,\Delta y + 2y\,\Delta y + (\Delta y)^2}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} (-2x + 2y + \Delta y)$$

$$= -2x + 2y$$

هرگاه (x_0, y_0) نقطه‌ای در قلمرو f باشد، آنگاه، در صورت وجود حد،

(۳) $$D_1 f(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

و، درصورت وجود حد،

(۴) $$D_2 f(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

توضیح ۱. با اعمال فرمول (۳)، $D_1 f(3, -2)$ را برای تابع f مثال ۱ بیابید.

$$D_1 f(3, -2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(3 + \Delta x, -2) - f(3, -2)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3(3 + \Delta x)^2 - 2(3 + \Delta x)(-2) + (-2)^2 - (27 + 12 + 4)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{27 + 18\,\Delta x + 3(\Delta x)^2 + 12 + 4\,\Delta x + 4 - 43}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (18 + 3\,\Delta x + 4)$$

$$= 22$$

شکلهای دیگر فرمولهای (۳) و (۴) برای $D_1 f(x_0, y_0)$ و $D_2 f(x_0, y_0)$ عبارتند از

(۵) $$D_1 f(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

اگر حد وجود داشته باشد، و

(۶) $$D_2 f(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

اگر حد موجود باشد.

توضیح ۲. با اعمال فرمول (۵)، $D_1 f(3, -2)$ را برای تابع f مثال ۱ بیابید.

$$D_1 f(3, -2) = \lim_{x \to 3} \frac{f(x, -2) - f(3, -2)}{x - 3}$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{3x^2 + 4x + 4 - 43}{x - 3}$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{3x^2 + 4x - 39}{x - 3}$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{(3x + 13)(x - 3)}{x - 3}$$

$$= \lim_{x \to 3} (3x + 13)$$

$$= 22$$

توضیح ۳. در مثال ۱ نشان دادیم که

$$D_1 f(x, y) = 6x - 2y$$

بنابراین،

$$D_1 f(3, -2) = 18 + 4$$
$$= 22$$

این نتیجه با نتیجهٔ توضیحهای ۱ و ۲ یکی است.

از مقایسهٔ تعریف ۱.۴.۱۸ با تعریف عادی مشتق (۱.۲.۳) می‌بینیم که $D_1f(x, y)$ مشتق معمولی f است اگر f را تابعی از متغیر x بگیریم (یعنی، y را ثابت بگیریم)، و $D_2f(x, y)$ مشتق معمولی f است اگر f را تابعی از متغیر y بگیریم (و x را ثابت نگهداریم). لذا، نتایج مثال ۱ را می‌توان آسانتر با اعمال قضایای مشتقگیری معمولی درصورتی بدست‌آورد که وقتی $D_1f(x, y)$ را می‌یابیم y را ثابت بگیریم و وقتی $D_2f(x, y)$ را می‌یابیم x را ثابت بگیریم. مثال زیر این امر را توضیح می‌دهد.

مثال ۲. به فرض آنکه $f(x, y) = 3x^3 - 4x^2y + 3xy^2 + 7x - 8y$، $D_1f(x, y)$ و $D_2f(x, y)$ را بیابید.

حل. اگر f را تابعی از x گرفته و y را ثابت بگیریم، داریم

$$D_1f(x, y) = 9x^2 - 8xy + 3y^2 + 7$$

با گرفتن f به‌عنوان تابعی از y و ثابت گذاردن x، خواهیم داشت

$$D_2f(x, y) = -4x^2 + 6xy - 8$$

مثال ۳. به فرض آنکه

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{اگر } (x, y) \neq (0, 0) \text{ ،} \\ 0 & \text{اگر } (x, y) = (0, 0) \text{ ،} \end{cases}$$

مقادیر زیر را بیابید:

(آ) $f_1(0, y)$؛ (ب) $f_2(x, 0)$.

حل

(آ) اگر $y \neq 0$، از (۵) داریم

$$f_1(0, y) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x, y) - f(0, y)}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} - 0}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{y(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$$

$$= -\frac{y^3}{y^2}$$

$$= -y$$

اگر $y = 0$، خواهیم داشت

$$f_1(0, 0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{0 - 0}{x} = 0$$

چون $f_1(0, y) = -y$ اگر $y \neq 0$ و $f_1(0, 0) = 0$، نتیجه می‌گیریم که به‌ازای هر y، $f_1(0, y) = -y$.

(ب) اگر $x \neq 0$، از (۶) داریم

$$f_2(x, 0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(x, y) - f(x, 0)}{y - 0}$$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{\dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} - 0}{y}$$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{x(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$$

$$= \frac{x^3}{x^2}$$

$$= x$$

اگر $x = 0$، خواهیم داشت

$$f_2(0, 0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = \lim_{y \to 0} \frac{0 - 0}{y} = 0$$

چون $f_2(x, 0) = x$ اگر $x \neq 0$ و $f_2(0, 0) = 0$، به‌ازای‌هر x خواهیم داشت $f_2(x, 0) = x$.

تعبیرات هندسی مشتقات جزئی یک تابع دو متغیره شبیه تعبیرات هندسی تابع یک متغیره است. نمودار تابع دو متغیرهٔ f سطحی است به معادلهٔ $z = f(x, y)$. اگر y را ثابت بگیریم (مثلاً، $y = y_0$)، $z = f(x, y_0)$ معادلهٔ اثر این سطح در صفحهٔ $y = y_0$ است. این منحنی را می‌توان با دو معادلهٔ

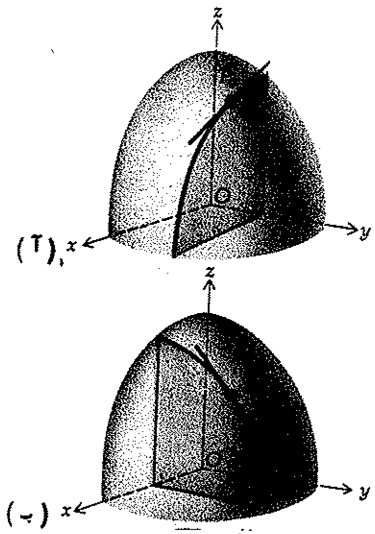
$$z = f(x, y) \quad \text{و} \quad y = y_0 \qquad (۷)$$

نمایش داد، چرا که این منحنی فصل مشترک این دو سطح است.

پس $D_1f(x_0, y_0)$ شیب خط مماس بر منحنی به معادلات (۷) در نقطهٔ $P_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ در صفحهٔ $y = y_0$ است. به‌نحو مشابه، $D_2f(x_0, y_0)$ شیب خط مماس بر منحنی به معادلات

$$z = f(x, y) \quad \text{و} \quad x = x_0$$

در نقطهٔ P_0 در صفحهٔ $x = x_0$ است. شکل ۱۰۴۰۱۸ (آ) و (ب) بخشهایی از منحنیها و خطوط مماس را نشان می‌دهند.



شکل ۱۰۴۰۱۸

مثال ۴. شیب خط مماس بر منحنی فصل مشترک سطح $z = \frac{1}{2}\sqrt{24 - x^2 - 2y^2}$ با صفحهٔ $y = 2$ در نقطهٔ $(2, 2, \sqrt{3})$ را بیابید.

حل. شیب مطلوب مقدار $\partial z/\partial x$ در نقطهٔ $(2, 2, \sqrt{3})$ است.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{2\sqrt{24 - x^2 - 2y^2}}$$

درنتیجه، در $(2, 2, \sqrt{3})$،

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-2}{2\sqrt{12}} = -\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

چون مشتق میزان تغییر است، مشتق جزئی را می‌توان این چنین تعبیر کرد. اگر f

یک تابع از دو متغیر x و y باشد، مشتق جزئی f نسبت به x در نقطهٔ $P_0(x_0, y_0)$ میزان تغییر لحظه‌ای $f(x, y)$ در P_0 در واحد تغییر در x را بدست می‌دهد (فقط x تغییر می‌کند و y در y_0 ثابت گرفته می‌شود). به‌همین نحو، مشتق جزئی f نسبت به y در P_0 میزان تغییر لحظه‌ای $f(x, y)$ در واحد تغییر در y در P_0 را بدست خواهد داد.

مثال ۵. بر طبق ***قانون گازهای کامل*** برای یک گاز محبوس، اگر P فشار به نیوتن برمجذور سانتیمتر، V حجم به سانتیمتر مکعب، و T دما به درجه باشد، فرمول زیر را داریم

$$PV = kT \qquad (۸)$$

که در آن k ثابت تناسب است. فرض کنیم حجم گاز در یک ظرف $100\ \text{cm}^3$ و دمای آن $90°$ باشد و $k = 8$.

(آ) میزان تغییر لحظه‌ای P در واحد تغییر T اگر V در 100 ثابت بماند را بیابید.
(ب) با استفاده از قسمت (آ)، تغییر فشار را درصورتی که دما تا $92°$ افزایش یابد را تقریب کنید. (پ) میزان تغییر لحظه‌ای V در واحد تغییر در P را درصورتی بیابید که T در 90 ثابت بماند. (ت) فرض کنید دما ثابت باشد. با استفاده از قسمت (پ)، تغییر تقریبی حجم لازم برای تولید همان تغییر در فشار قسمت (ب) را بیابید.

حل. با گذاردن $V = 100$، $T = 90$، و $k = 8$ در معادلهٔ (۸)، بدست می‌آوریم

$$P = 7.2$$

(آ) با حل (۸) نسبت به P وقتی $k = 8$، بدست می‌آوریم

$$P = \frac{8T}{V}$$

میزان تغییر لحظه‌ای P در واحد تغییر در T در صورت ثابت ماندن V عبارت است از $\partial P/\partial t$، و

$$\frac{\partial P}{\partial T} = \frac{8}{V}$$

وقتی $T = 90$ و $V = 100$، $\partial P/\partial T = 0.08$، که جواب مطلوب است.
(ب) از قسمت (آ) معلوم می‌شود که وقتی T به قدر 2 افزایش یابد (و V ثابت بماند) افزایش تقریبی در P عبارت است از $2(0.08) = 0.16$. پس نتیجه می‌شود که اگر دما از $90°$ تا $92°$ افزایش یابد، افزایش فشار تقریباً $0.16\ \text{nt/cm}^2$ است.
(پ) با حل (۸) نسبت به V، وقتی $k = 8$، بدست می‌آوریم

$$V = \frac{8T}{P}$$

میزان تغییر لحظه‌ای V بر واحد تغییر در P در صورت ثابت ماندن T عبارت است از $\partial V/\partial P$ ، و

$$\frac{\partial V}{\partial P} = -\frac{8T}{P^2}$$

وقتی $T = 90$ و $P = 7.2$ ،

$$\frac{\partial V}{\partial P} = -\frac{8(90)}{(7.2)^2} = -\frac{125}{9}$$

که میزان‌تغییر لحظه‌ای V بر واحد حجم در P وقتی $T = 90$ و $P = 7.2$ در صورت ثابت ماندن T در 90 است .

(ت) هرگاه P بخواهد به‌قدر 0.16 افزایش یابد و T ثابت بماند ، از قسمت (پ) معلوم می‌شود که تغییر در V تقریبا" باید $-\frac{20}{9} = (-\frac{125}{9})(0.16)$ باشد . لذا ، اگر فشار بخواهد از $7.2\ \mathrm{nt/cm^2}$ تا $7.36\ \mathrm{nt/cm^2}$ افزایش یابد ، حجم باید تقریبا" به‌قدر $\frac{20}{9}\ \mathrm{cm^3}$ کاهش یابد .

حال مفهوم مشتق جزئی توابع n متغیره را تعمیم می‌دهیم .

۲۰۴۰۱۸ تعریف . فرض کنیم $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ نقطه‌ای در R^n بوده ، و f یک تابع از n متغیر $x_1, x_2, \ldots, x_n$ باشد . دراین صورت ، مشتق جزئی f نسبت به x_k تابعی است که با $D_k f$ نموده می‌شود و مقدارش در هر نقطهٔ P در قلمرو f عبارت است از

$$D_k f(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$
$$\lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k + \Delta x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\Delta x_k}$$

مشروط بر اینکه حد موجود باشد .

بخصوص، اگر f یک‌تابع از سه متغیر x ، y ، و z باشد ، مشتقات‌جزئی f عبارتند از

$$D_1 f(x, y, z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}$$

$$D_2 f(x, y, z) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y, z) - f(x, y, z)}{\Delta y}$$

و

$$D_3 f(x, y, z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(x, y, z + \Delta z) - f(x, y, z)}{\Delta z}$$

اگر این حدود موجود باشند .

مثال ۶ . به فرض آنکه $f(x, y, z) = x^2y + yz^2 + z^3$ ، تحقیق کنید که

$$xf_1(x, y, z) + yf_2(x, y, z) + zf_3(x, y, z) = 3f(x, y, z)$$

حل . با ثابت گرفتن y و z ، داریم

$$f_1(x, y, z) = 2xy$$

با ثابت گرفتن x و z ، بدست می‌آوریم

$$f_2(x, y, z) = x^2 + z^2$$

و با ثابت گرفتن x و y ، خواهیم داشت

$$f_3(x, y, z) = 2yz + 3z^2$$

بنابراین ،

$$\begin{aligned} xf_1(x, y, z) + yf_2(x, y, z) + zf_3(x, y, z) &= x(2xy) + y(x^2 + z^2) + z(2yz + 3z^2) \\ &= 2x^2y + x^2y + yz^2 + 2yz^2 + 3z^3 \\ &= 3(x^2y + yz^2 + z^3) \\ &= 3f(x, y, z) \end{aligned}$$

تمرینات ۴۰۱۸

در تمرینهای ۱ تا ۶ ، با اعمال تعریف ۱۰۴۰۱۸ ، هریک از مشتقات جزئی را بیابید .

۱ . $f(x, y) = 6x + 3y - 7;\ D_1 f(x, y)$

۲ . $f(x, y) = 4x^2 - 3xy;\ D_1 f(x, y)$

۳ . $f(x, y) = 3xy + 6x - y^2;\ D_2 f(x, y)$

۴ . $f(x, y) = xy^2 - 5y + 6;\ D_2 f(x, y)$

۵ . $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2};\ D_1 f(x, y)$

۶ . $f(x, y) = \dfrac{x + 2y}{x^2 - y};\ D_2 f(x, y)$

در تمرینهای ۷ تا ۱۰ ، با اعمال تعریف ۲۰۴۰۱۸ ، هریک از مشتقات جزئی زیر را بیابید .

۷ . $f(x, y, z) = x^2y - 3xy^2 + 2yz;\ D_2f(x, y, z)$

۸ . $f(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + 9z^2;\ D_1f(x, y, z)$

۹ . $f(x, y, z, r, t) = xyr + yzt + yrt + zrt;\ D_4f(x, y, z, r, t)$

۱۰ . $f(r, s, t, u, v, w) = 3r^2st + st^2v - 2tuv^2 - tvw + 3uw^2;\ D_5f(r, s, t, u, v, w)$

۱۱ . به‌فرض آنکه $f(x, y) = x^2 - 9y^2$ ، $D_1f(2, 1)$ را (آ) با فرمول (۳)؛ (ب) بافرمول (۵)؛ (پ) با فرمول (۱) و سپس تعویض x و y بترتیب با 2 و 1 بیابید.

۱۲ . در تابع تمرین ۱۱، $D_2f(2, 1)$ را با (آ) فرمول (۴)؛ (ب) فرمول (۶)؛ (پ) فرمول (۲) و سپس تعویض x و y بترتیب با 2 و 1 بیابید.

در تمرینهای ۱۳ تا ۲۴، مشتق جزئی را با ثابت گرفتن همهٔ متغیرها جز یکی و اعمال قضایای مشتقگیری معمولی بیابید.

۱۳ . $f(x, y) = 4y^3 + \sqrt{x^2 + y^2};\ D_1f(x, y)$

۱۴ . $f(x, y) = \dfrac{x + y}{\sqrt{y^2 - x^2}};\ D_2f(x, y)$

۱۵ . $f(\theta, \phi) = \sin 3\theta \cos 2\phi;\ D_2f(\theta, \phi)$

۱۶ . $f(r, \theta) = r^2 \cos \theta - 2r \tan \theta;\ D_2f(r, \theta)$

۱۷ . $z = e^{y/x} \ln \dfrac{x^2}{y};\ \dfrac{\partial z}{\partial y}$

۱۸ . $r = e^{-\theta} \cos(\theta + \phi);\ \dfrac{\partial r}{\partial \theta}$

۱۹ . $u = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2};\ \dfrac{\partial u}{\partial z}$

۲۰ . $u = \tan^{-1}(xyzw);\ \dfrac{\partial u}{\partial w}$

۲۱ . $f(x, y, z) = 4xyz + \ln(2xyz);\ f_3(x, y, z)$

۲۲ . $f(x, y, z) = e^{xy} \sinh 2z - e^{xy} \cosh 2z;\ f_3(x, y, z)$

۲۳ . $f(x, y, z) = e^{xyz} + \tan^{-1} \dfrac{3xy}{z^2};\ f_2(x, y, z)$

۲۴ . $f(r, \theta, \phi) = 4r^2 \sin \theta + 5e^r \cos \theta \sin \phi - 2 \cos \phi;\ f_2(r, \theta, \phi)$

۲۵ . هرگاه $f(r, \theta) = r \tan \theta - r^2 \sin \theta$ ، (آ) $f_1(\sqrt{2}, \frac{1}{4}\pi)$ ؛ (ب) $f_2(3, \pi)$ را پیداکنید.

۲۶ . هرگاه $f(x, y, z) = e^{xy^2} + \ln(y + z)$ ، (آ) $f_1(3, 0, 17)$ ؛ (ب) $f_2(1, 0, 2)$ ؛ (پ) $f_3(0, 0, 1)$ را بیابید.

در تمرینهای ۲۷ و ۲۸، $f_x(x, y)$ و $f_y(x, y)$ را بیابید.

۲۷ . $f(x, y) = \int_x^y \ln \sin t\, dt$

۲۸ . $f(x, y) = \int_x^y e^{\cos t}\, dt$

۲۹ . به فرض آنکه $u = \sin \frac{r}{t} + \ln \frac{t}{r}$ ، تحقیق کنید که $t\dfrac{\partial u}{\partial t} + r\dfrac{\partial u}{\partial r} = 0$.

۳۰ . به فرض آنکه $w = x^2y + y^2z + z^2x$ ، تحقیق کنید که $\dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z} = (x + y + z)^2$.

۳۱ . به فرض آنکه

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & \text{اگر } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{اگر } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(آ) $f_1(0, 0)$ ؛ (ب) $f_2(0, 0)$ را بیابید.

۳۲ . به فرض آنکه

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - xy}{x + y} & \text{اگر } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{اگر } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(آ) $f_1(0, y)$ اگر $y \neq 0$ ؛ (ب) $f_1(0, 0)$ را بیابید.

۳۳ . برای تابع تمرین ۳۲، (آ) $f_2(x, 0)$ اگر $x \neq 0$ ؛ (ب) $f_2(0, 0)$ را بیابید.

۳۴ . شیب خط مماس بر منحنی فصل مشترک سطح $36x^2 - 9y^2 + 4z^2 + 36 = 0$ با صفحهٔ $x = 1$ در نقطهٔ $(1, \sqrt{12}, -3)$ را بیابید. این شیب را به‌صورت مشتق جزئی تعبیر کنید.

۳۵ . شیب خط مماس بر منحنی فصل مشترک سطح $z = x^2 + y^2$ با صفحهٔ $y = 1$ در نقطهٔ $(2, 1, 5)$ را بیابید. شکل بکشید. این شیب را به‌صورت مشتق جزئی تعبیر کنید.

۳۶ . معادلات خط مماس بر منحنی فصل مشترک سطح $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ با صفحهٔ $y = 2$ در نقطهٔ $(1, 2, 2)$ را بیابید.

۳۷ . دمای یک صفحهٔ تخت در هر نقطهٔ (x, y) مساوی T درجه بوده و $T = 54 - \frac{2}{3}x^2 - 4y^2$. اگر فاصله به سانتیمتر باشد، میزان تغییر دما نسبت به فاصله بترتیب در جهت مثبت محورهای x و y در نقطهٔ $(3, 1)$ را بیابید.

۳۸ . با استفاده از قانون گازهای کامل برای یک گاز محبوس (ر.ک. مثال ۵)، نشان دهید که

$$\frac{\partial V}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial P} \cdot \frac{\partial P}{\partial V} = -1$$

۳۹ . هرگاه V دلار مقدار فعلی یک ربح مرکب به اقساط مساوی 100 دلار در سال برای t سال با بهرهٔ $100i$ در سال باشد، آنگاه

$$V = 100\left[\frac{1 - (1 + i)^{-t}}{i}\right]$$

(آ) میزان تغییر لحظه‌ای V بر واحد تغییر i را درصورتی بیابید که i در t ثابت بماند. (ب) با استفاده از قسمت (آ)، تغییر تقریبی مقدار فعلی را درصورتی

بیابیدکه بهره‌از 6% به 7% تغییرکندوزمان در 8 سال ثابت بماند . (پ) میزان تغییرلحظه‌ای V برواحدتغییردر t رادرصورتی بیابید که i در 0.06 ثابت‌بماند . (ت) بااستفاده‌ازقسمت (پ) ، تغییرتقریبی‌مقدارفعلی را درصورتی بیابید که‌زمان از 8 به 7 تقلیل یابد و بهره در 6% ثابت بماند .

۴۰ . فرض‌کنید سرمایهٔ یک مغازه ده‌هزار x دلار، y تعداد منشیهای مغازه، P سود هفتگی مغازه به دلار باشد، و

$$P = 3000 + 240y + 20y(x - 2y) - 10(x - 12)^2$$

که درآن $15 \le x \le 25$ و $5 \le y \le 12$. سرمایهٔ فعلی 180,000 دلار است و 8 منشی وجود دارد . (آ) میزان تغییرلحظه‌ای P برواحدتغییر در x را درصورتی بیابید که y در 8 ثابت بماند. (ب) با استفاده از قسمت (آ) ، تغییر تقریبی سود هفتگی را درصورتی بیابید که سرمایه از 180,000 دلار به 200,000 تغییر یافته و تعداد منشیها در 8 ثابت بماند. (پ) میزان تغییر لحظه‌ای P بر واحد تغییر در y را درصورتی بیابید که x در 18 ثابت بماند. (ت) با استفاده از قسمت (پ) ، تغییر تقریبی سود هفتگی را درصورتی بیابید که تعداد منشیها از 8 به 10 افزایش یافته و سرمایه در 180,000 دلار ثابت بماند .

۵۰۱۸ مشتق‌پذیری و دیفرانسیل کل

در بخش ۷۰۳ ، در برهان قاعدهٔ زنجیره‌ای، نشان دادیم که اگر f تابع مشتق‌پذیری از تنها متغیر x بوده و $y = f(x)$ ، نمو Δy متغیر وابسته را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد:

$$\Delta y = f'(x)\,\Delta x + \eta\,\Delta x$$

که در آن η تابعی از Δx بوده و وقتی $\Delta x \to 0$ ، $\eta \to 0$.

از این مطلب معلوم می‌شود که اگر تابع f در x_0 مشتق‌پذیر باشد، نمو f در x_0 ، یعنی $\Delta f(x_0)$ ، از رابطهٔ زیر بدست می‌آید

(۱) $$\Delta f(x_0) = f'(x_0)\,\Delta x + \eta\,\Delta x$$

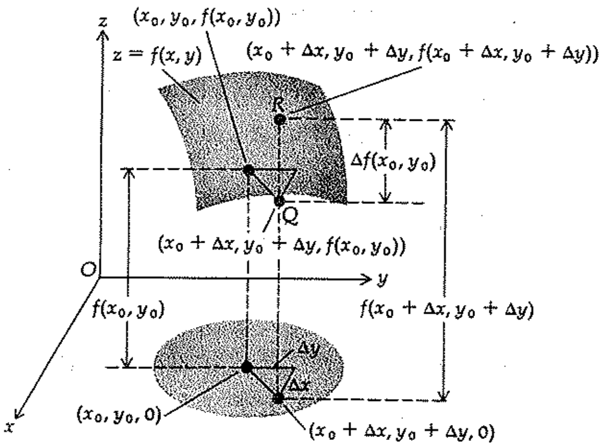
که در آن $\lim_{\Delta x \to 0} \eta = 0$.

برای‌توابع‌دویاچندمتغیره‌از معادله‌ای نظیر معادلهٔ (۱) برای تعریف **مشتق‌پذیری** یک تابع استفاده می‌شود. و از این تعریف محکهایی برای مشتق‌پذیری در یک نقطه بدست می‌آیند. ما به شرح مطلب برای یک تابع دومتغیره می‌پردازیم و بحث را با تعریف نمو چنین تابع آغاز می‌کنیم.

۱۰۵۰۱۸ تعریف. هرگاه f یک تابع از دو متغیر x و y باشد، **نمو** f در نقطهٔ (x_0, y_0) ، یعنی $\Delta f(x_0, y_0)$ ، عبارت است از

(۲) $$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

شکل ۱۰۵۰۱۸ معادلهٔ (۲) را برای تابعی که بر قرص بازی شامل نقاط (x_0, y_0) و $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ پیوسته است توضیح می‌دهد. دراین شکل بخشی ازسطح $z = f(x, y)$ نموده شده‌است. $\Delta f(x_0, y_0) = \overline{QR}$ ، که‌درآن Q نقطهٔ $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, f(x_0, y_0))$ است و R نقطهٔ $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y))$.



شکل ۱۰۵۰۱۸

توضیح ۱. برای تابع f تعریف شده با

$$f(x, y) = 3x - xy^2$$

نمو f را در نقطهٔ (x_0, y_0) می‌یابیم .

$$\begin{aligned}
\Delta f(x_0, y_0) &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \\
&= 3(x_0 + \Delta x) - (x_0 + \Delta x)(y_0 + \Delta y)^2 - (3x_0 - x_0 y_0^2) \\
&= 3x_0 + 3\,\Delta x - x_0 y_0^2 - y_0^2\,\Delta x - 2x_0 y_0\,\Delta y - 2y_0\,\Delta x\,\Delta y \\
&\quad - x_0(\Delta y)^2 - \Delta x(\Delta y)^2 - 3x_0 + x_0 y_0^2
\end{aligned}$$

$$= 3\Delta x - y_0^2\,\Delta x - 2x_0y_0\,\Delta y - 2y_0\,\Delta x\,\Delta y - x_0(\Delta y)^2 - \Delta x(\Delta y)^2$$

۲۰۵۰۱۸ تعریف. هرگاه f یک تابع از دو متغیر x و y بوده و نمو f در (x_0, y_0) را بتوان به‌صورت زیر نوشت:

$$\Delta f(x_0, y_0) = D_1f(x_0, y_0)\,\Delta x + D_2f(x_0, y_0)\,\Delta y + \epsilon_1\,\Delta x + \epsilon_2\,\Delta y \qquad (۳)$$

که درآن ϵ_1 و ϵ_2 توابعی از Δx و Δy باشند بطوری که وقتی $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$، $\epsilon_1 \to 0$ و $\epsilon_2 \to 0$، آنگاه گوییم f در (x_0, y_0) **مشتقپذیر** است.

توضیح ۲. با استفاده از تعریف ۲۰۵۰۱۸ ثابت می‌کنیم تابع توضیح ۱ در تمام نقاط R^2 مشتقپذیر است. باید نشان دهیم که به‌ازای تمام نقاط (x_0, y_0) در R^2 می‌توان ϵ_1 و ϵ_2 ای یافت که

$$\Delta f(x_0, y_0) - D_1f(x_0, y_0)\,\Delta x - D_2f(x_0, y_0)\,\Delta y = \epsilon_1\,\Delta x + \epsilon_2\,\Delta y$$

و وقتی $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$، $\epsilon_1 \to 0$ و $\epsilon_2 \to 0$.

چون $f(x, y) = 3x - xy^2$،

$$D_1f(x_0, y_0) = 3 - y_0^2 \quad \text{و} \quad D_2f(x_0, y_0) = -2x_0y_0$$

با این مقادیر و مقدار $\Delta f(x_0, y_0)$ از توضیح ۱،

$$\Delta f(x_0, y_0) - D_1f(x_0, y_0)\,\Delta x - D_2f(x_0, y_0)\,\Delta y = -x_0(\Delta y)^2 - 2y_0\,\Delta x\,\Delta y - \Delta x(\Delta y)^2$$

طرف راست معادلهٔ فوق را می‌توان به‌طرق زیر نوشت:

$$[-2y_0\,\Delta y - (\Delta y)^2]\,\Delta x + (-x_0\,\Delta y)\,\Delta y$$

یا

$$(-2y_0\,\Delta y)\,\Delta x + (-\Delta x\,\Delta y - x_0\,\Delta y)\,\Delta y$$

یا

$$[-(\Delta y)^2]\,\Delta x + (-2y_0\,\Delta x - x_0\,\Delta y)\,\Delta y$$

یا

$$0 \cdot \Delta x + [-2y_0\,\Delta x - \Delta x\,\Delta y - x_0\,\Delta y]\,\Delta y$$

درنتیجه، چهار جفت مقدار برای ϵ_1 و ϵ_2 وجود دارند:

$$\epsilon_1 = -2y_0\,\Delta y - (\Delta y)^2 \quad \text{و} \quad \epsilon_2 = -x_0\,\Delta y$$

یا

$$\epsilon_1 = -2y_0\,\Delta y \quad \text{و} \quad \epsilon_2 = -\Delta x\,\Delta y - x_0\,\Delta y$$

یا

$$\epsilon_1 = -(\Delta y)^2 \quad \text{و} \quad \epsilon_2 = -2y_0\,\Delta x - x_0\,\Delta y$$

یا

$$\epsilon_1 = 0 \quad \text{و} \quad \epsilon_2 = -2y_0\,\Delta x - \Delta x\,\Delta y - x_0\,\Delta y$$

برای هر جفت،

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \epsilon_1 = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \epsilon_2 = 0$$

باید توجه داشت که فقط کافی است یک جفت مقدار برای ϵ_1 و ϵ_2 پیدا کرد.

۳۰۵۰۱۸ قضیه. ***هرگاه تابع دو متغیرهٔ f در نقطه‌ای مشتقپذیر باشد، درآن نقطه پیوسته است.***

برهان. هرگاه f در نقطهٔ (x_0, y_0) مشتقپذیر باشد، از تعریف ۲۰۵۰۱۸ نتیجه می‌شود که

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = D_1f(x_0, y_0)\,\Delta x + D_2f(x_0, y_0)\,\Delta y + \epsilon_1\,\Delta x + \epsilon_2\,\Delta y$$

که درآن وقتی $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$، $\epsilon_1 \to 0$ و $\epsilon_2 \to 0$. بنابراین،

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + D_1f(x_0, y_0)\,\Delta x + D_2f(x_0, y_0)\,\Delta y + \epsilon_1\,\Delta x + \epsilon_2\,\Delta y$$

اگر از طرفین رابطهٔ فوق وقتی $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$ حد بگیریم، بدست می‌آوریم

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) \qquad (۴)$$

اگر قرار دهیم $x_0 + \Delta x = x$ و $y_0 + \Delta y = y$، $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$ معادل است با $(x, y) \to (x_0, y_0)$. لذا، از (۴) داریم

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

که ثابت می‌کند f در (x_0, y_0) پیوسته است.

قضیهٔ ۳۰۵۰۱۸ می‌گوید که در یک تابع دو متغیره ***مشتقپذیری پیوستگی را ایجاب می‌کند***. با اینحال، وجود صرف مشتقات جزئی D_1f و D_2f در یک نقطه مشتقپذیری در آن نقطه را ایجاب نمی‌کنند. مثال زیر این امر را توضیح می‌دهد.

مثال ۱. به فرض آنکه

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{اگر } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{اگر } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

ثابت کنید $D_1f(0,0)$ و $D_2f(0,0)$ وجود دارند ولی f در $(0,0)$ مشتقپذیر نیست.

حل

$$D_1f(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x}=0$$

$$D_2f(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=\lim_{y\to 0}\frac{0-0}{y}=0$$

بنابراین، $D_1f(0,0)$ و $D_2f(0,0)$ هر دو وجود دارند.

در مثال ۴ از بخش ۲.۱۸ نشان دادیم که برای این تابع $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ وجود ندارد؛ از اینرو، f در $(0,0)$ پیوسته نیست. چون f در $(0,0)$ پیوسته نیست، ازقضیهٔ ۳.۵.۱۸ نتیجه می‌شود که f در آنجا مشتقپذیر نمی‌باشد.

پیش از بیان قضیه‌ای که شرایط مشتقپذیری یک تابع در یک نقطه را بدهد، قضیه‌ای را که در اثبات آن لازم است مطرح می‌کنیم. این قضیهٔ مقدار میانگین برای تابع یک‌متغیره است که بر یک تابع دو متغیره اعمال می‌شود.

۴.۵.۱۸ قضیه. *فرض‌کنیم تابع دو متغیرهٔ f به‌ازای هر x در بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ وبه‌ازای هر y دربازهٔ بستهٔ $[c,d]$ تعریف شده باشد.*

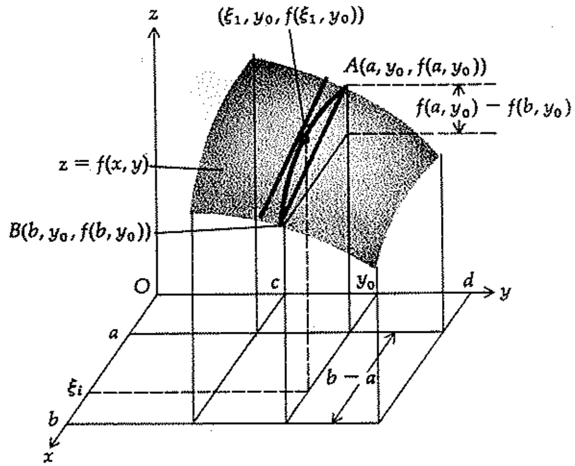
(یک) *هرگاه $D_1f(x,y_0)$ به‌ازای y_0 ی در $[c,d]$ و هر x در $[a,b]$ موجود باشد، آنگاه عددی مانند ξ_1 دربازهٔ باز (a,b) هست بطوری که*

$$f(b,y_0)-f(a,y_0)=(b-a)D_1f(\xi_1,y_0) \tag{۵}$$

(دو) *هرگاه $D_2f(x_0,y)$ به‌ازای x_0 ی در $[a,b]$ و هر y در $[c,d]$ موجود باشد، آنگاه عددی مانند ξ_2 در بازهٔ باز (c,d) هست بطوری که*

$$f(x_0,d)-f(x_0,c)=(d-c)D_2f(x_0,\xi_2) \tag{۶}$$

پیش‌از اثبات این قضیه آن را تعبیر هندسی می‌کنیم. برای قسمت (یک) رجوع کنید به شکل ۲.۵.۱۸، که بخشی از سطح $z=f(x,y)$ را بالای ناحیهٔ مستطیلی شکل در



شکل ۲.۵.۱۸

صفحهٔ xy که محدود به خطوط $x=a$، $x=b$، $y=c$، و $y=d$ است نشان می‌دهد. صفحهٔ $y=y_0$ سطح را در منحنی به معادلات $y=y_0$ و $z=f(x,y)$ قطع می‌کند. شیب خط ماربر نقاط $A(a,y_0,f(a,y_0))$ و $B(b,y_0,f(b,y_0))$ مساوی است با

$$\frac{f(b,y_0)-f(a,y_0)}{b-a}$$

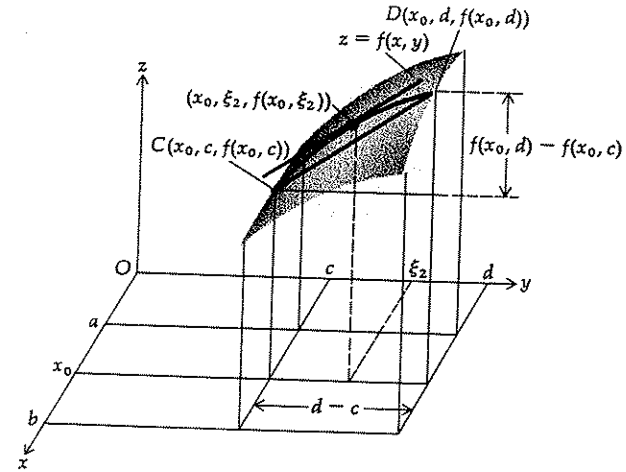
قضیهٔ ۴.۵.۱۸ (یک) می‌گوید که نقطه‌ای مانند $(\xi_1,y_0,f(\xi_1,y_0))$ بر منحنی بین نقاط A و B وجود دارد که در آن خط مماس موازی خط قاطع ماربر A و B است؛ یعنی، عددی مانند ξ_1 در (a,b) هست بطوری که

$$D_1f(\xi_1,y_0)=[f(b,y_0)-f(a,y_0)]/(b-a)$$

و این در شکل، که در آن $D_1f(\xi_1,y_0)<0$، نموده شده است.

شکل ۳.۵.۱۸ قسمت (دو) قضیهٔ ۴.۵.۱۸ را نشان می‌دهد. صفحهٔ $x=x_0$ سطح $z=f(x,y)$ را در منحنی به معادلات $x=x_0$ و $z=f(x,y)$ قطع می‌کند. شیب خط ماربر نقاط $C(x_0,c,f(x_0,c))$ و $D(x_0,d,f(x_0,d))$ مساوی است با $[f(x_0,d)-f(x_0,c)]/(d-c)$، و قضیهٔ ۴.۵.۱۸ (دو) می‌گوید که نقطه‌ای مانند $(x_0,\xi_2,f(x_0,\xi_2))$ بر منحنی بین نقاط C و D هست که در آن خط مماس موازی خط قاطع ماربر C و D است؛ یعنی، عددی مانند ξ_2 در (c,d) هست بطوری که

$$D_2f(x_0,\xi_2)=[f(x_0,d)-f(x_0,c)]/(d-c)$$



شکل ۳۰۵۰۱۸

برهان قضیهٔ ۴۰۵۰۱۸ (یک). فرض کنیم g تابعی از متغیر x باشد که با

$$g(x) = f(x, y_0)$$

تعریف شده است. در این صورت،

$$g'(x) = D_1 f(x, y_0)$$

چون $D_1 f(x, y_0)$ به‌ازای هر x در $[a, b]$ وجود دارد، پس $g'(x)$ به‌ازای هر x در $[a, b]$ موجود است؛ و لذا، g بر $[a, b]$ پیوسته می‌باشد. درنتیجه، طبق قضیهٔ مقدار میانگین (۲۰۴۰۴) برای مشتقات معمولی، عددی مانند ξ_1 در (a, b) هست بطوری که

$$g'(\xi_1) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}$$

یا، معادلاً،

$$D_1 f(\xi_1, y_0) = \frac{f(b, y_0) - f(a, y_0)}{b - a}$$

که از آن بدست می‌آوریم

$$f(b, y_0) - f(a, y_0) = (b - a) D_1 f(\xi_1, y_0)$$

اثبات قسمت (دو) شبیه اثبات قسمت (یک) است و به‌عنوان تمرین گذارده می‌شود (ر.ک. تمرین ۲۱).

معادلهٔ (۵) را می‌توان به‌شکل زیر نوشت:

$$f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0) = h D_1 f(\xi_1, y_0) \tag{۷}$$

که درآن ξ_1 بین x_0 و $x_0 + h$ بوده و h مثبت یا منفی است (ر.ک. تمرین ۲۲).

معادلهٔ (۶) را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = k D_2 f(x_0, \xi_2) \tag{۸}$$

که درآن ξ_2 بین y_0 و $y_0 + k$ بوده و k مثبت یا منفی است (ر.ک. تمرین ۲۳).

مثال ۲. به فرض آنکه

$$f(x, y) = \frac{2xy}{3 + x}$$

ξ_1 مطلوب در قضیهٔ ۴۰۵۰۱۸ را درصورتی بیابید که x در $[2, 5]$ بوده و $y = 4$.

حل. طبق قضیهٔ ۴۰۵۰۱۸، عددی مانند ξ_1 در بازهٔ باز $(2, 5)$ است بطوری که

$$f(5, 4) - f(2, 4) = (5 - 2) D_1 f(\xi_1, 4)$$

درنتیجه،

$$5 - \frac{16}{5} = 3 \cdot \frac{24}{(3 + \xi_1)^2}$$

$$\frac{9}{5} = \frac{72}{(3 + \xi_1)^2}$$

$$(3 + \xi_1)^2 = 40$$

بنابراین،

$$3 + \xi_1 = \pm 2\sqrt{10}$$

اما چون $2 < \xi_1 < 5$، فقط علامت + را گرفته و بدست می‌آوریم

$$\xi_1 = 2\sqrt{10} - 3$$

قضیهٔ زیر می‌گوید که یک تابع با مشتقات جزئی پیوسته در یک نقطه لزوماً درآن نقطه مشتق‌پذیر است.

۵۰۵۰۱۸ قضیه. *فرض کنیم f یک تابع از دو متغیر x و y باشد. همچنین، $D_1 f$ و $D_2 f$ بر قرص باز $B(P_0; r)$ موجود باشند، که درآن P_0 نقطهٔ (x_0, y_0) است. دراین صورت،*

اگر D_1f و D_2f در P_0 پیوسته باشند، f در P_0 مشتقپذیر است.

برهان. نقطهٔ $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ را طوری مـی‌گیریم که در $B(P_0; r)$ باشد. دراین صورت،

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

با جمع و تفریق $f(x_0 + \Delta x, y_0)$ با طرف راست معادلهٔ فوق، بدست می‌آوریم

$$\Delta f(x_0, y_0) = [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0)] + [f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)] \tag{۹}$$

چون D_1f و D_2f بر $B(P_0; r)$ وجـود دارند و $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ در $B(P_0; r)$ است، از (۸) نتیجه می‌شود که

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) = (\Delta y)D_2f(x_0 + \Delta x, \xi_2) \tag{۱۰}$$

که درآن ξ_2 بین y_0 و $y_0 + \Delta y$ است.

از (۷) نتیجه می‌شود که

$$f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) = (\Delta x)D_1f(\xi_1, y_0) \tag{۱۱}$$

که درآن ξ_1 بین x_0 و $x_0 + \Delta x$ است.

با گذاردن (۱۰) و (۱۱) در (۹)، بدست می‌آوریم

$$\Delta f(x_0, y_0) = (\Delta y)D_2f(x_0 + \Delta x, \xi_2) + (\Delta x)D_1f(\xi_1, y_0) \tag{۱۲}$$

چون $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ در $B(P_0; r)$ اسـت، ξ_2 بیـن y_0 و $y_0 + \Delta y$ بوده، و D_2f در P_0 پیوسته می‌باشد. پس نتیجه می‌شود که

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} D_2f(x_0 + \Delta x, \xi_2) = D_2f(x_0, y_0) \tag{۱۳}$$

و چون ξ_1 بین x_0 و $x_0 + \Delta x$ بوده و D_1f در P_0 پیوسته است،

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} D_1f(\xi_1, y_0) = D_1f(x_0, y_0) \tag{۱۴}$$

اگر

$$\epsilon_1 = D_1f(\xi_1, y_0) - D_1f(x_0, y_0) \tag{۱۵}$$

از (۱۴) نتیجه می‌شود که

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \epsilon_1 = 0 \tag{۱۶}$$

و اگر

$$\epsilon_2 = D_2f(x_0 + \Delta x, \xi_2) - D_2f(x_0, y_0) \tag{۱۷}$$

از (۱۳) نتیجه می‌شود که

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \epsilon_2 = 0 \tag{۱۸}$$

با گذاردن (۱۵) و (۱۷) در (۱۲)، بدست می‌آوریم

$$\Delta f(x_0, y_0) = \Delta y[D_2f(x_0, y_0) + \epsilon_2] + \Delta x[D_1f(x_0, y_0) + \epsilon_1]$$

که از آن خواهیم داشت

$$\Delta f(x_0, y_0) = D_1f(x_0, y_0)\,\Delta x + D_2f(x_0, y_0)\,\Delta y + \epsilon_1\,\Delta x + \epsilon_2\,\Delta y \tag{۱۹}$$

از (۱۶)، (۱۸)، و (۱۹) معلوم می‌شود که تعریف ۲۰۵۰۱۸ برقرار است؛ درنتیجه، f در (x_0, y_0) مشتقپذیر است.

هر تابع صادق در مفـروضات قضیهٔ ۵۰۵۰۱۸ را **به‌طور پیوسته مشتقپذیر** در نقطهٔ P_0 می‌نامند.

مثال ۳. به فرض آنکه

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2 + y^2} & \text{اگر } (x, y) \neq (0, 0) \text{ ،} \\ 0 & \text{اگر } (x, y) = (0, 0) \text{ ،} \end{cases}$$

با استفاده از قضیهٔ ۵۰۵۰۱۸، ثابت کنید f در $(0, 0)$ مشتقپذیر است.

حل. برای یافتن D_1f دو حـالت درنظر می‌گیریم: $(x, y) = (0, 0)$ و $(x, y) \neq (0, 0)$.

اگر $(x, y) = (0, 0)$، داریم

$$D_1f(0, 0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{0 - 0}{x} = 0$$

اگر $(x, y) \neq (0, 0)$، $f(x, y) = x^2y^2/(x^2 + y^2)$. برای یافتن $D_1f(x, y)$ از قضیهٔ مشتق معمولی خارج قسمت استفاده کرده و y را ثابت می‌گیریم.

$$D_1f(x, y) = \frac{2xy^2(x^2 + y^2) - 2x(x^2y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2xy^4}{(x^2 + y^2)^2}$$

بنابراین، تابع D_1f به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D_1f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy^4}{(x^2 + y^2)^2} & \text{اگر } (x, y) \neq (0, 0) \text{ ،} \\ 0 & \text{اگر } (x, y) = (0, 0) \text{ ،} \end{cases}$$

بهمین نحو، تابع D_2f بدست می‌آید که به‌صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$D_2f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^4y}{(x^2+y^2)^2} & \text{اگر } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{اگر } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

D_1f و D_2f هر دو بر هر قرص باز به مرکز مبداء وجود دارند. باقی است نشان دهیم که D_1f و D_2f در $(0,0)$ پیوسته‌اند.

چون $D_1f(0,0)=0$، D_1f در صورتی در $(0,0)$ پیوسته است که

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} D_1f(x,y)=0$$

بنابراین، باید نشان دهیم که به‌ازای هر $\epsilon>0$، $\delta>0$ ای هست بطوری که

(۲۰) هر وقت $0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$، $\left|\dfrac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2}\right|<\epsilon$

$$\left|\frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2}\right| = \frac{2|x|y^4}{(x^2+y^2)^2} \le \frac{2\sqrt{x^2+y^2}\,(\sqrt{x^2+y^2})^4}{(x^2+y^2)^2} = 2\sqrt{x^2+y^2}$$

بنابراین،

هر وقت $0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$، $\left|\dfrac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2}\right|<2\delta$

درنتیجه، اگر $\delta=\frac{1}{2}\epsilon$، رابطهٔ (۲۰) را داریم. از اینرو، D_1f در $(0,0)$ پیوسته است. بهمین نحو، می‌توان نشان داد که D_2f در $(0,0)$ پیوسته است. از قضیهٔ ۵.۵.۱۸ نتیجه می‌شود که f در $(0,0)$ مشتقپذیر می‌باشد.

به معادلهٔ (۳) باز می‌گردیم. عبارت شامل دو جملهٔ اول سمت راست، یعنی $D_1f(x_0,y_0)\,\Delta x + D_2f(x_0,y_0)\,\Delta y$، **قسمت اصلی** $\Delta f(x_0,y_0)$ یا **دیفرانسیل کل** تابع f در (x_0,y_0) نام دارد. برای این امر تعریف صوری می‌آوریم.

۶.۵.۱۸ تعریف. هرگاه f تابعی از دو متغیر x و y بوده، و f در (x,y) مشتقپذیر باشد، آنگاه **دیفرانسیل کل** f تابع df است که مقادیر تابعی آن عبارتند از

(۲۱) $$df(x,y,\Delta x,\Delta y) = D_1f(x,y)\,\Delta x + D_2f(x,y)\,\Delta y$$

توجه‌کنیدکه df تابعی‌است‌از چهار متغیر x، y، Δx، و Δy. اگر $z=f(x,y)$، گاهی به‌جای $df(x,y,\Delta x,\Delta y)$ می‌نویسیم dz، و دراین صورت معادلهٔ (۲۱) **به‌صورت** زیر نوشته می‌شود:

(۲۲) $$dz = D_1f(x,y)\,\Delta x + D_2f(x,y)\,\Delta y$$

هرگاه‌درحالت‌خاص $f(x,y)=x$، آنگاه $z=x$، $D_1f(x,y)=1$، و $D_2f(x,y)=0$؛ و درنتیجه، معادلهٔ (۲۲) نتیجه می‌دهد که $dz=\Delta x$. چون $z=x$، برای این تابع $dx=\Delta x$. بهمین نحو، هرگاه $f(x,y)=y$، آنگاه $z=y$، $D_1f(x,y)=0$، و $D_2f(x,y)=1$؛ و درنتیجه، از (۲۲) داریم $dz=\Delta y$. چون $z=y$، برای این تابع داریم $dy=\Delta y$. از اینرو، دیفرانسیلهای متغیرهای مستقل را به‌صورت $dx=\Delta x$ و $dy=\Delta y$ تعریف می‌کنیم. دراین صورت، (۲۲) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

(۲۳) $$dz = D_1f(x,y)\,dx + D_2f(x,y)\,dy$$

و درنقطهٔ (x_0,y_0) داریم

(۲۴) $$dz = D_1f(x_0,y_0)\,dx + D_2f(x_0,y_0)\,dy$$

در معادلهٔ (۳) قرارمی‌دهیم $\Delta z=\Delta f(x_0,y_0)$، $dx=\Delta x$، و $dy=\Delta y$. دراین‌صورت،

(۲۵) $$\Delta z = D_1f(x_0,y_0)\,dx + D_2f(x_0,y_0)\,dy + \epsilon_1\,dx + \epsilon_2\,dy$$

از مقایسهٔ (۲۴) و (۲۵) معلوم می‌شود که وقتی dx (یعنی، Δx) و dy (یعنی، Δy) به‌صفرنزدیکند، چون ϵ_1 و ϵ_2 نیز به‌صفر نزدیکند، dz یک تقریب به Δz می‌باشد. چون اغلب محاسبهٔ dz از Δz آسانتر است، از $dz\approx\Delta z$ در بعضی حالات استفاده خواهد شد.

پیش از نشان دادن این در یک مثال، (۲۳) را با نمادهای $\partial z/\partial x$ و $\partial z/\partial y$ بترتیب به جای $D_1f(x,y)$ و $D_2f(x,y)$ می‌نویسیم:

(۲۶) $$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

مثال ۴. یک بشکهٔ فلزی بسته به شکل استوانهٔ مستدیر قائم باید ارتفاع داخلی 6 in.، شعاع داخلی 2 in.، و ضخامت 0.1 in. داشته باشد. اگر بهای فلز بکار رفته 10 سنت در اینچ مکعب باشد، هزینهٔ تقریبی فلز بکار رفته برای ساختن بشکه را با دیفرانسیل پیدا کنید.

حل. فرمول حجم استوانهٔ مستدیرقائم، که در آن حجم V in.^{3}، شعاع r in.، وارتفاع h in. است، عبارت است از

(۲۷) $$V=\pi r^2 h$$

حجم دقیق فلـز در ظـرف تفاضل بین احجام دو استوانهٔ مستدیر قائم است که در آنها بترتیب $r = 2.1, h = 6.2$ و $r = 2, h = 2$.

ΔV حجم دقیق فلز است، و چون فقط مقدار تقریبی خواسته شده، در عوض dV را پیدا می‌کنیم. از (۲۶) داریم

(۲۸)
$$dV = \frac{\partial V}{\partial r}dr + \frac{\partial V}{\partial h}dh$$

از (۲۷) نتیجه می‌شود که

$$\frac{\partial V}{\partial r} = 2\pi rh \quad \text{و} \quad \frac{\partial V}{\partial h} = \pi r^2$$

با گذاردن این مقادیر در (۲۸)، بدست می‌آوریم

$$dV = 2\pi rh\, dr + \pi r^2\, dh$$

چون $r = 2$ ، $h = 6$ ، $dr = 0.1$ و $dh = 0.2$ ،

$$dV = 2\pi(2)(6)(0.1) + \pi(2)^2(0.2)$$
$$= 3.2\pi$$

از اینرو، $\Delta V \approx 3.2\pi$ ؛ و درنتیجه، تقـریبا " 3.2π in.^{3} فلز در بشکه وجود دارد. چون بهای فلز 10 سنت در اینچ مکعب بوده و $10 \cdot 3.2\pi = 32\pi \approx 100.53$ ، هزینهٔ تقریبی فلز بکار رفته در ساخت بشکه 1 دلار می‌باشد.

حال مفاهیم مشتق‌پذیری و دیفرانسیل کل را به توابع n متغیره تعمیم می‌دهیم.

۷.۵.۱۸ تعریف. هرگاه f یک تـابع از n متغیر $x_1, x_2, \ldots, x_n$ بـوده، و $\overline{P}$ نقطهٔ $(\bar{x}, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ باشد، نمو f در $\overline{P}$ عبارت است از

(۲۹)
$$\Delta f(\overline{P}) = f(\bar{x}_1 + \Delta x_1, \bar{x}_2 + \Delta x_2, \ldots, \bar{x}_n + \Delta x_n) - f(\overline{P})$$

۸.۵.۱۸ تعریف. هرگاه f یک تـابع از n متغیر $x_1, x_2, \ldots, x_n$ بوده، و نمو f در نقطهٔ $\overline{P}$ را بتوان به‌صورت زیر نوشت:

(۳۰)
$$\Delta f(\overline{P}) = D_1f(\overline{P})\,\Delta x_1 + D_2f(\overline{P})\,\Delta x_2 + \cdots + D_nf(\overline{P})\,\Delta x_n$$
$$+ \epsilon_1\,\Delta x_1 + \epsilon_2\,\Delta x_2 + \cdots + \epsilon_n\,\Delta x_n$$

که در آن وقتی

$$(\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n) \to (0, 0, \ldots, 0)$$

$\epsilon_1 \to 0, \epsilon_2 \to 0, \ldots, \epsilon_n \to 0$ ، آنگاه گوییم f در $\overline{P}$ مشتق‌پذیر است.

مشابه قضیهٔ ۵.۵.۱۸ می‌توان ثابت کرد که شرایط کافی برای آنکه تابع n متغیرهٔ f در نقطهٔ $\overline{P}$ مشتق‌پذیر بـاشد اینند کـه $D_1f, D_2f, \ldots, D_nf$ همه بر یک گوی باز مانند $B(\overline{P}; r)$ موجود بـوده و $D_1f, D_2f, \ldots, D_nf$ همه در $\overline{P}$ پیوسته باشند. همانطور که برای توابع دو متغیره دیـدیم، معلـوم می‌شود که در توابع n متغیره مشتق‌پذیری پیوستگی را ایجـاب می‌کـنـد. بـا اینحال، وجـود مشتقات جزئی $D_1f, D_2f, \ldots, D_nf$ در یک نقطه مشتق‌پذیری تابع دراین نقطه را ایجاب نمی‌کند.

۹.۵.۱۸ تعریف. هرگاه f تـابعی از n متغیـر $x_1, x_2, \ldots, x_n$ بـوده، و f در P مشتق‌پذیر باشد، آنگاه ***دیفرانسیل کـل*** f تابع df است که مقادیر تابعی آن عبارتند از

(۳۱)
$$df(P, \Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n) = D_1f(P)\,\Delta x_1 + D_2f(P)\,\Delta x_2 + \cdots + D_nf(P)\,\Delta x_n$$

بافرض $w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ، تعریف $dx_1 = \Delta x_1, dx_2 = \Delta x_2, \ldots, dx_n = \Delta x_n$ ، و استفاده از نماد $\partial w/\partial x_i$ به‌جای $D_if(P)$ ، می‌توان (۳۱) را به‌صورت زیر نوشت:

(۳۲)
$$dw = \frac{\partial w}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial w}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial w}{\partial x_n}dx_n$$

مثال ۵. ابعـاد یک جعبـه عبـارتند از 10 cm ، 12 cm ، و 15 cm ، و اندازه‌ها تـا 0.02 cm دقیق‌اند. اگر حجم جعبه با این اندازه‌ها محاسبه شود، خطای ماکزیمم را به‌طور تقریبی بیابید. همچنین، خطای درصد را به‌طور تقریبی پیدا کنید.

حل. فرض کنیم V cm^3 حجم جعبه‌ای به‌ابعاد x cm ، y cm ، و z cm باشد. دراین صورت،

$$V = xyz$$

مقدار دقیق خطا از ΔV بدست می‌آید؛ با اینحال، از dV به‌عنوان تقریب ΔV استفاده می‌کنیم. از معادلهٔ (۳۲) برای سه متغیر مستقل داریم

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz$$

و درنتیجه ،

$$dV = yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz \qquad (۳۳)$$

از اطلاعات داده‌شده داریم $|\Delta x| \le 0.02$ ، $|\Delta y| \le 0.02$ ، و $|\Delta z| \le 0.02$. برای یافتن خطای ماکزیمم حجم ، خطای ماکزیمم در اندازه‌گیری سه بعد را اختیار می‌کنیم . لذا ، با گرفتن $dx = 0.02, dy = 0.02, dz = 0.02$ ، و $x = 10, y = 12, z = 15$ ، از معادلهٔ (۳۳) داریم

$$dV = (12)(15)(0.02) + (10)(15)(0.02) + (10)(12)(0.02) = 9$$

لذا ، $\Delta V \approx 9$ ؛ و درنتیجه ، خطای ماکزیمم ممکن در محاسبهٔ حجم از اندازه‌های داده شده تقریبا " $9\ cm^3$ است .

خطای نسبی از تقسیم خطا بر مقدار واقعی بدست می‌آید . از اینرو ، خطای نسبی در محاسبهٔ حجم از اندازه‌های داده شده مساوی است با $\Delta V/V \approx dV/V = \frac{9}{1800} = \frac{1}{200} = 0.005$. درنتیجه ، خطای درصد تقریبی 0.5% است .

تمرینات ۵۰۱۸

۱ . هرگاه $f(x, y) = 3x^2 + 2xy - y^2$ ، مقادیر زیر را پیدا کنید : (آ) $\Delta f(1, 4)$ ، یعنی نمو f در $(1, 4)$ ؛ (ب) $\Delta f(1, 4)$ وقتی $\Delta x = 0.03$ و $\Delta y = -0.02$ ؛ (پ) $df(1, 4, \Delta x, \Delta y)$ ، یعنی دیفرانسیل کل f در $(1, 4)$ ؛ (ت) $df(1, 4, 0.03, -0.02)$.

۲ . هرگاه $f(x, y) = 2x^2 + 5xy + 4y^2$ ، مقادیر زیر را پیدا کنید : (آ) $\Delta f(2, -1)$ ، یعنی نمو f در $(2, -1)$ ؛ (ب) $\Delta f(2, -1)$ وقتی $\Delta x = -0.01$ و $\Delta y = 0.02$ ؛ (پ) $df(2, -1, \Delta x, \Delta y)$ ، یعنی دیفرانسیل کل f در $(2, -1)$ ؛ (ت) $df(2, -1, -0.01, 0.02)$.

۳ . هرگاه $g(x, y) = xye^{xy}$ ، مقادیرزیررا بیابید : (آ) $\Delta g(2, -4)$ ، یعنی نمو g در $(2, -4)$ ؛ (ب) $\Delta g(2, -4)$ وقتی $\Delta x = -0.1$ و $\Delta y = 0.2$ ؛ (پ) $dg(2, -4, \Delta x, \Delta y)$ ، یعنی دیفرانسیل کل g در $(2, -4)$ ؛ (ت) $dg(2, -4, -0.1, 0.2)$.

۴ . هرگاه $h(x, y) = (x + y)/(x - y)$ ، مقادیر زیر را بیابید : (آ) $\Delta h(3, 0)$ ، یعنی نمو h در $(3, 0)$ ؛ (ب) $\Delta h(3, 0)$ وقتی $\Delta x = 0.04$ و $\Delta y = 0.03$ ؛ (پ) $dh(3, 0, \Delta x, \Delta y)$ ، یعنی دیفرانسیل کل h در $(3, 0)$ ؛ (ت) $dh(3, 0, 0.04, 0.03)$.

۵ . هرگاه $F(x, y, z) = xy + \ln(yz)$ ، مقادیرزیررا بیابید : (آ) $\Delta F(4, 1, 5)$ ، یعنی نمو F در $(4, 1, 5)$ ؛ (ب) $\Delta F(4, 1, 5)$ وقتی $\Delta x = 0.02$ ، $\Delta y = 0.04$ ، و $\Delta z = -0.03$ ؛ (پ) $dF(4, 1, 5, \Delta x, \Delta y, \Delta z)$ ، یعنی دیفرانسیل کل F در $(4, 1, 5)$ ؛ (ت) $dF(4, 1, 5, 0.02, 0.04, -0.03)$.

۶ . هرگاه $G(x, y, z) = x^2y + 2xyz - z^3$ ، مقادیر زیر را بیابید : (آ) $\Delta G(-3, 0, 2)$ ، یعنی نمو G در $(-3, 0, 2)$ ؛ (ب) $\Delta G(-3, 0, 2)$ وقتی $\Delta x = 0.01$ ، $\Delta y = 0.03$ ، و $\Delta z = -0.01$ ؛ (پ) $dG(-3, 0, 2, \Delta x, \Delta y, \Delta z)$ ، یعنی دیفرانسیل کل G در $(-3, 0, 2)$ ؛ (ت) $dG(-3, 0, 2, 0.01, 0.03, -0.01)$.

در تمرینهای ۷ تا ۱۴ ، دیفرانسیل کل dw را بیابید .

۷ . $w = 4x^3 - xy^2 + 3y - 7$

۸ . $w = y \tan x^2 - 2xy$

۹ . $w = x \cos y - y \sin x$

۱۰ . $w = xe^{2y} + e^{-y}$

۱۱ . $w = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$

۱۲ . $w = \dfrac{xyz}{x + y + z}$

۱۳ . $w = x \tan^{-1} z - \dfrac{y^2}{z}$

۱۴ . $w = e^{yz} - \cos xz$

در تمرینهای ۱۵ تا ۱۸ ، با اعمال زیر ثابت کنید f در تمام نقاط قلمرو خود مشتقپذیر است : (آ) برای تابع داده شده $\Delta f(x_0, y_0)$ را بیابید ؛ (ب) ϵ_1 و ϵ_2 را طوری بیابید که معادلهٔ (۳) برقرار باشد ؛ (پ) نشان دهید که ϵ_1 و ϵ_2 قسمت (ب) هر دو وقتی $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$ به صفر نزدیک می‌شوند .

۱۵ . $f(x, y) = x^2y - 2xy$

۱۶ . $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2$

۱۷ . $f(x, y) = \dfrac{x^2}{y}$

۱۸ . $f(x, y) = \dfrac{y}{x}$

۱۹ . به فرض آنکه $f(x, y) = \begin{cases} x + y - 2 & \text{if } x = 1 \text{ or } y = 1 \\ 2 & \text{if } x \ne 1 \text{ and } y \ne 1 \end{cases}$ (اگر $x = 1$ یا $y = 1$ ؛ اگر $x \ne 1$ و $y \ne 1$) ، ثابت کنید $D_1f(1, 1)$ و $D_2f(1, 1)$ وجود دارند ولی f در $(1, 1)$ مشتقپذیر نیست .

۲۰ . به فرض آنکه $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2y^2}{x^4 + y^4} & \text{if } (x, y) \ne (0, 0) \\ 0 & \text{if } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ (اگر $(x, y) \ne (0, 0)$ ؛ اگر $(x, y) = (0, 0)$) ، ثابت کنید $D_1f(0, 0)$ و $D_2f(0, 0)$ وجود دارند ولی f در $(0, 0)$ مشتقپذیر نیست .

۲۱ . قضیهٔ ۴۰۵۰۱۸ (دو) را ثابت کنید .

۲۲ . نشان دهید که معادلهٔ (۵) را می‌توان به شکل (۷) نوشت ، که در آن ξ_1 بین x_0

و x_0+h است.

۲۳ . نشان دهید که معادلهٔ (۶) را می‌توان به شکل (۸) نوشت، که در آن ξ_2 بین y_0 و y_0+k است.

در تمرینهای ۲۴ تا ۲۷، با استفاده از قضیهٔ ۴.۵.۱۸، ξ_1 یا ξ_2، هرکدام که عمل می‌کند، را بیابید.

۲۴ . $f(x, y) = x^2 + 3xy - y^2$؛ x در $[1, 3]$ است؛ $y = 4$.

۲۵ . $f(x, y) = x^3 - y^2$؛ x در $[2, 6]$ است؛ $y = 3$.

۲۶ . $f(x, y) = \dfrac{4x}{x + y}$؛ y در $[-2, 2]$ است؛ $x = 4$.

۲۷ . $f(x, y) = \dfrac{2x - y}{2y + x}$؛ y در $[0, 4]$ است؛ $x = 2$.

۲۸ . فرض کنید $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2y}{x^2 + y^2} & \text{اگر } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{اگر } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$. این تابع در $(0, 0)$ پیوسته است (ر.ک. مثال ۵، بخش ۲.۱۸، و توضیح ۱، بخش ۳.۱۸). ثابت کنید $D_1f(0, 0)$ و $D_2f(0, 0)$ وجود دارند ولی D_1f و D_2f در $(0, 0)$ پیوسته نیستند.

۲۹ . به فرض آنکه $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{اگر } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{اگر } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$، با استفاده از قضیهٔ ۵.۵.۱۸ ثابت کنید f در $(0, 0)$ مشتق‌پذیر است.

در تمرینهای ۳۰ تا ۳۲، با اعمال زیر ثابت کنید f در جمیع نقاط R^3 مشتق‌پذیر است: (آ) $\Delta f(x_0, y_0, z_0)$ را بیابید؛ (ب) ϵ_1، ϵ_2، و ϵ_3 را طوری بیابید که معادلهٔ (۳۰) برقرار باشد؛ (پ) نشان دهید که ϵ_1، ϵ_2، و ϵ_3 قسمت (ب) همه وقتی $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ به $(0, 0, 0)$ نزدیک می‌شود به صفر نزدیک می‌شوند.

۳۰ . $f(x, y, z) = 3x + 2y - 4z$

۳۱ . $f(x, y, z) = xy - xz + z^2$

۳۲ . $f(x, y, z) = 2x^2z - 3yz^2$

۳۳ . فرض کنید $f(x, y, z) = \begin{cases} \dfrac{xy^2z}{x^4 + y^4 + z^4} & \text{اگر } (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 & \text{اگر } (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$.

(آ) نشان دهید که $D_1f(0, 0, 0)$، $D_2f(0, 0, 0)$، و $D_3f(0, 0, 0)$ وجود دارند؛ (ب) با استفاده از این امر که مشتق‌پذیری پیوستگی را ایجاب می‌کند، ثابت کنید f در $(0, 0, 0)$ مشتق‌پذیر نیست.

۳۴ . به فرض آنکه $f(x, y, z) = \begin{cases} \dfrac{xyz^2}{x^2 + y^2 + z^2} & \text{اگر } (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 & \text{اگر } (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$، ثابت کنید f در $(0, 0, 0)$ مشتق‌پذیر است.

۳۵ . می‌خواهیم یک ظرف بسته به شکل مکعب مستطیل به‌طول داخلی 8 m، عرض داخلی 5 m، و ارتفاع داخلی 4 cm، و ضخامت 4 m باشد. با استفاده از دیفرانسیل، مادهٔ لازم برای ساختن ظرف را تقریب کنید.

۳۶ . با استفاده از دیفرانسیل کامل، ماکزیمم خطا در محاسبهٔ مساحت یک مثلث قائم الزاویه از طریق طول ساقها را درصورتی تقریبا" بیابید که ساقها با خطای ممکن 0.1 cm درهرسنجش بترتیب 6 cm و 8 cm اندازه‌گیری شده باشند. همچنین، خطای درصد تقریبی را پیدا کنید.

۳۷ . با استفاده از دیفرانسیل کامل، خطای ماکزیمم در محاسبهٔ طول وتر مثلث قائم‌الزاویه را از سنجشهای تمرین ۳۶ به‌طور تقریبی پیدا کنید. همچنین، خطای درصد تقریبی را پیدا نمایید.

۳۸ . اگر دریافتن P وقتی T و V معلومند از قانون گازهای کامل (ر.ک. مثال ۵، بخش ۴.۱۸) استفاده شود، و خطا در سنجش T مساوی 0.3% و در سنجش V مساوی 0.8% باشد، خطای درصد ماکزیمم در P را پیدا کنید.

۳۹ . جاذبهٔ ثقلی s یک جسم از فرمول زیر بدست می‌آید:

$$s = \frac{A}{A - W}$$

که در آن A وزن جسم در هوا به پوند و W وزن جسم در آب به پوند است. اگر وزن جسمی در هوا 20 lb با خطای ممکن 0.01 lb و در آب 12 lb با خطای ممکن 0.02 lb اندازه‌گیری شده باشد، خطای ماکزیمم در محاسبهٔ s از این سنجشها را به‌طور تقریبی بیابید. همچنین، خطای نسبی ماکزیمم را پیدا نمایید.

۴۰ . می‌خواهیم از الواری به ضخامت $\frac{2}{3}$ in. جعبه‌ای چوبی بسازیم. طول داخلی 6 ft، عرض داخلی 3 ft، عمق داخلی 4 ft بوده، و جعبه سر نداشته باشد. با استفاده از دیفرانسیل کل، الوار لازم برای ساختن جعبه را به‌طور تقریبی بیابید.

۴۱ . یک شرکت سفارش ساختن 10,000 جعبهٔ بسته به ابعاد 3 m، 4 m، و 5 m را پذیرفته است. چوب لازم متر مربعی 1 دلار است اگر ماشینهای چوب بری با خطای 0.5 cm در هر بعد کار کنند، با استفاده از دیفرانسیل کل، ماکزیمم خطا در تخمین قیمت چوب را به‌طور تقریبی پیدا نمایید.

در تمرینهای ۴۲ تا ۴۵، نشان می‌دهیم که یک تابع ممکن است در یک نقطه مشتقپذیر باشد ولی در این نقطه به‌طور پیوسته مشتقپذیر نباشد. لذا، شرایط قضیهٔ ۵.۵.۱۸ برای مشتقپذیری کافی‌اند ولی لازم نیستند. تابع f در این تمرینات به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{اگر } (x, y) \neq (0, 0)، \\ 0 & \text{اگر } (x, y) = (0, 0)، \end{cases}$$

۴۲. $\Delta f(0, 0)$ را بیابید.

۴۳. $D_1 f(x, y)$ و $D_2 f(x, y)$ را بیابید.

۴۴. با استفاده از تعریف ۲.۵.۱۸ و تمرینهای ۴۲ و ۴۳، ثابت کنید f در $(0, 0)$ مشتقپذیر است.

۴۵. ثابت کنید $D_1 f$ و $D_2 f$ در $(0, 0)$ پیوسته نیستند.

۶.۱۸ قاعدهٔ زنجیره‌ای

در بخش ۷.۳ قاعدهٔ زنجیره‌ای زیر (قضیهٔ ۱.۷.۳) برای توابع یک متغیره را داشتیم: هرگاه y تابعی از u باشد که با $y = f(u)$ تعریف می‌شود، و $D_u y$ موجود باشد؛ و u تابعی از x باشد که با $u = g(x)$ تعریف می‌شود، و $D_x u$ وجود داشته باشد، آنگاه y تابعی از x بوده، و $D_x y$ موجود است و از رابطهٔ

$$D_x y = D_u y \, D_x u$$

یا، معادلاً، با نماد لایب‌نیتز،

(۱)
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

بدست می‌آید.

حال قاعدهٔ زنجیره‌ای برای تابع دو متغیره، که در آن هر متغیر نیز تابعی دومتغیره است، را درنظر می‌گیریم.

۱.۶.۱۸ قضیه (قاعدهٔ زنجیره‌ای). **هرگاه u تابع مشتقپذیری از x و y باشد که با $u = f(x, y)$ تعریف شده است، و $x = F(r, s)$، $y = G(r, s)$، و $\partial x/\partial r$، $\partial x/\partial s$، $\partial y/\partial r$، و $\partial y/\partial s$ همه موجود باشند، آنگاه u تابعی از r و s بوده و**

(۲)
$$\frac{\partial u}{\partial r} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)$$

(۳)
$$\frac{\partial u}{\partial s} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)$$

برهان. رابطهٔ (۲) را ثابت می‌کنیم. اثبات (۳) مشابه است.

هرگاه s را ثابت گرفته و r را به‌قدر Δr تغییر دهیم، x به قدر Δx و y به قدر Δy تغییر می‌کند. لذا،

(۴)
$$\Delta x = F(r + \Delta r, s) - F(r, s)$$

و

(۵)
$$\Delta y = G(r + \Delta r, s) - G(r, s)$$

چون f مشتقپذیر است،

(۶)
$$\Delta f(x, y) = D_1 f(x, y)\,\Delta x + D_2 f(x, y)\,\Delta y + \epsilon_1\,\Delta x + \epsilon_2\,\Delta y$$

که در آن ϵ_1 و ϵ_2 هر دو وقتی $(\Delta x, \Delta y)$ به $(0, 0)$ نزدیک می‌شوند به صفر نزدیک می‌شوند. بعلاوه، لازم است وقتی $\Delta x = \Delta y = 0$، $\epsilon_1 = 0$ و $\epsilon_2 = 0$. این را طوری انجام می‌دهیم که ϵ_1 و ϵ_2، که توابعی از Δx و Δy اند، در $(\Delta x, \Delta y) = (0, 0)$ پیوسته باشند.

در رابطهٔ (۶) $\Delta f(x, y)$ را با Δu، $D_1 f(x, y)$ را با $\partial u/\partial x$، و $D_2 f(x, y)$ را با $\partial u/\partial y$ عوض کرده و طرفین را بر Δr $(\Delta r \neq 0)$ تقسیم می‌کنیم، خواهیم داشت

$$\frac{\Delta u}{\Delta r} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta r} + \epsilon_1\frac{\Delta x}{\Delta r} + \epsilon_2\frac{\Delta y}{\Delta r}$$

با گرفتن حد از طرفین رابطهٔ فوق وقتی Δr به صفر نزدیک می‌شود، بدست می‌آوریم

(۷)
$$\lim_{\Delta r \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta r} = \frac{\partial u}{\partial x}\lim_{\Delta r \to 0}\frac{\Delta x}{\Delta r} + \frac{\partial u}{\partial y}\lim_{\Delta r \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta r} + \left(\lim_{\Delta r \to 0}\epsilon_1\right)\lim_{\Delta r \to 0}\frac{\Delta x}{\Delta r} + \left(\lim_{\Delta r \to 0}\epsilon_2\right)\lim_{\Delta r \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta r}$$

چون u تابعی از x و y بوده و x و y هر دو توابعی از r و s اند، u تابعی از r و s می‌باشد. چون s را ثابت گرفته و r به‌قدر Δr تغییر کرده است،

(۸)
$$\lim_{\Delta r \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta r} = \lim_{\Delta r \to 0}\frac{u(r + \Delta r, s) - u(r, s)}{\Delta r} = \frac{\partial u}{\partial r}$$

همچنین،

(۹)
$$\lim_{\Delta r \to 0}\frac{\Delta x}{\Delta r} = \lim_{\Delta r \to 0}\frac{F(r + \Delta r, s) - F(r, s)}{\Delta r} = \frac{\partial x}{\partial r}$$

و

$$\lim_{\Delta r\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta r} = \lim_{\Delta r\to 0}\frac{G(r+\Delta r, s)-G(r,s)}{\Delta r} = \frac{\partial y}{\partial r} \qquad (۱۰)$$

چون $\partial x/\partial r$ و $\partial y/\partial r$ موجودند، F و G نسبت به متغیر r پیوسته می‌باشند. (**تذکر.** همانطورکه در بخش پیش دیدیم، وجود مشتقات جزئی یک تابع پیوستگی‌نسبت به همهٔ متغیرها با هم را ایجاب نمی‌کند، اما مثل توابع یک متغیره، پیوستگی تابع نسبت به تک‌تک متغیرها را ایجاب می‌کند.) از اینرو، از (۴) داریم

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta r\to 0}\Delta x &= \lim_{\Delta r\to 0}[F(r+\Delta r, s)-F(r,s)]\\ &= F(r,s)-F(r,s)\\ &= 0\end{aligned}$$

و از (۵) داریم

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta r\to 0}\Delta y &= \lim_{\Delta r\to 0}[G(r+\Delta r, s)-G(r,s)]\\ &= G(r,s)-G(r,s)\\ &= 0\end{aligned}$$

بنابراین، وقتی Δr به صفرنزدیک می‌شود، هر دوی Δx و Δy به صفر نزدیک می‌شوند. و چون هردوی ϵ_1 و ϵ_2 وقتی $(\Delta x, \Delta y)$ به $(0, 0)$ نزدیک شوند به صفر نزدیک می‌شوند، می‌توان نتیجه گرفت که

$$\lim_{\Delta r\to 0}\epsilon_1 = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{\Delta r\to 0}\epsilon_2 = 0 \qquad (۱۱)$$

اما ممکن است به‌ازای مقادیری از Δr، $\Delta x = \Delta y = 0$. چون در چنین حالت لازم است $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$، حدود (۱۱) هنوز صفرند. با گذاردن (۸)، (۹)، (۱۰)، و (۱۱) در (۷)، بدست می‌آوریم

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)$$

که (۲) را ثابت می‌کند.

مثال ۱. به فرض آنکه

$$u = \ln\sqrt{x^2+y^2}$$

$x = re^s$، و $y = re^{-s}$، $\partial u/\partial r$ و $\partial u/\partial s$ را بیابید.

حل

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2} \qquad \frac{\partial x}{\partial r} = e^s$$

$$\frac{\partial x}{\partial s} = re^s \qquad \frac{\partial y}{\partial r} = e^{-s} \qquad \frac{\partial y}{\partial s} = -re^{-s}$$

از (۲) بدست می‌آوریم

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{x}{x^2+y^2}(e^s) + \frac{y}{x^2+y^2}(e^{-s}) = \frac{xe^s+ye^{-s}}{x^2+y^2}$$

و از (۳) خواهیم داشت

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{x}{x^2+y^2}(re^s) + \frac{y}{x^2+y^2}(-re^{-s}) = \frac{r(xe^s-ye^{-s})}{x^2+y^2}$$

همانطورکه قبلاً ذکر شد، علامات $\partial u/\partial r$، $\partial u/\partial s$، $\partial u/\partial x$، $\partial u/\partial y$، و ازاین قبیل را نبایدکسر گرفت. علامات ∂u، ∂x، و غیره خودبخود معنی ندارند. درتوابع یک متغیره، اگرمشتق معمولی راخارج قسمت‌دو دیفرانسیل تصور کنیم، قاعدهٔ زنجیره‌ای، که با معادلهٔ (۱) داده شده، به آسانی بخاطر می‌آید، اما تعبیر مشابهی برای مشتقات جزئی وجود ندارد.

مشکل نمادی دیگر وقتی پیش می‌آید که u تابعی از x و y و لذا تابعی از r و s است. هرگاه $u = f(x, y)$، $x = F(r, s)$، و $y = G(r, s)$، آنگاه $u = f(F(r, s), G(r, s))$. [درست نیست بنویسیم $u = f(r, s)$.]

توضیح ۱. در مثال ۱،

$$\begin{aligned}u &= f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}\\ x &= F(r,s) = re^s\\ y &= G(r,s) = re^{-s}\end{aligned}$$

و درنتیجه،

$$u = f(F(r,s), G(r,s)) = \ln\sqrt{r^2e^{2s}+r^2e^{-2s}}$$

$$[f(r,s) = \ln\sqrt{r^2+s^2} \neq u.]$$

هرگاه $f(F(r, s), G(r, s)) = h(r, s)$، آنگاه (۲) و (۳) را می‌توان بترتیب‌نوشت

$$h_1(r,s) = f_1(x,y)F_1(r,s) + f_2(x,y)G_1(r,s)$$

و

$$h_2(r,s) = f_1(x,y)F_2(r,s) + f_2(x,y)G_2(r,s)$$

در صورت قضیهٔ ۱.۶.۱۸ متغیرهای مستقل r و s بوده و u متغیر وابسته می‌باشد. متغیرهای x و y را می‌توان متغیرهای میانی نامید. حال قاعدهٔ زنجیره‌ای را به n متغیر میانی و m متغیر مستقل تعمیم می‌دهیم.

۲.۶.۱۸ قضیه (قاعدهٔ زنجیره‌ای کلی). **فرض کنیم u تابع مشتق‌پذیری از n متغیر $x_1, x_2, \dots, x_n$ بوده، وهریک از این متغیرها به‌نوبهٔ خود تابعی از m متغیر $y_1, y_2, \dots, y_m$ باشد. همچنین، هریک از مشتقات جزئی $\partial x_i/\partial y_j$ $(i = 1, 2, \dots, n;\ j = 1, 2, \dots, m)$ موجود باشد. در این صورت، u تابعی از $y_1, y_2, \dots, y_m$ بوده، و**

$$\frac{\partial u}{\partial y_1} = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial x_1}{\partial y_1}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)\left(\frac{\partial x_2}{\partial y_1}\right) + \cdots + \left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)\left(\frac{\partial x_n}{\partial y_1}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y_2} = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial x_1}{\partial y_2}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)\left(\frac{\partial x_2}{\partial y_2}\right) + \cdots + \left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)\left(\frac{\partial x_n}{\partial y_2}\right)$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial u}{\partial y_m} = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial x_1}{\partial y_m}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)\left(\frac{\partial x_2}{\partial y_m}\right) + \cdots + \left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)\left(\frac{\partial x_n}{\partial y_m}\right)$$

برهان تعمیمی از برهان قضیهٔ ۱.۶.۱۸ است.

توجه کنید که در قاعدهٔ زنجیره‌ای کلی تعداد جملات سمت راست هر معادله به تعداد متغیرهای میانی است.

مثال ۲. به فرض آنکه $u = xy + xz + yz$ ، $x = r$ ، $y = r\cos t$ ، و $z = r\sin t$ ، $\partial u/\partial r$ و $\partial u/\partial t$ را بیابید.

حل. از قاعدهٔ زنجیره‌ای داریم

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial r} &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right) \\
&= (y + z)(1) + (x + z)(\cos t) + (x + y)(\sin t) \\
&= y + z + x\cos t + z\cos t + x\sin t + y\sin t \\
&= r\cos t + r\sin t + r\cos t + (r\sin t)(\cos t) + r\sin t + (r\cos t)(\sin t) \\
&= 2r(\cos t + \sin t) + r(2\sin t\cos t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2r(\cos t + \sin t) + r\sin 2t \\
\frac{\partial u}{\partial t} &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right) \\
&= (y + z)(0) + (x + z)(-r\sin t) + (s + y)(r\cos t) \\
&= (r + r\sin t)(-r\sin t) + (r + r\cos t)(r\cos t) \\
&= -r^2\sin t - r^2\sin^2 t + r^2\cos t + r^2\cos^2 t \\
&= r^2(\cos t - \sin t) + r^2(\cos^2 t - \sin^2 t) \\
&= r^2(\cos t - \sin t) + r^2\cos 2t
\end{aligned}$$

حال فرض کنیم u تابع مشتق‌پذیری از دو متغیر x و y بوده، و هردوی x و y توابع مشتق‌پذیری از متغیر t باشند. دراین صورت، u تابعی از متغیر t است؛ و در نتیجه، به‌جای مشتق جزئی u نسبت به t، مشتق معمولی u نسبت به t داریم، که عبارت است از

$$\frac{du}{dt} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right) \qquad (۱۲)$$

du/dt که با معادلهٔ (۱۲) داده شده **مشتق کل** u نسبت به t نام دارد. هرگاه u تابع مشتق‌پذیری از n متغیر $x_1, x_2, \dots, x_n$ بوده و هر x_i تابع مشتق‌پذیری از متغیر t باشد، آنگاه u تابعی از t بوده و مشتق کل u نسبت به t عبارت است از

$$\frac{du}{dt} = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)\left(\frac{dx_1}{dt}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)\left(\frac{dx_2}{dt}\right) + \cdots + \left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)\left(\frac{dx_n}{dt}\right)$$

مثال ۳. به فرض آنکه $u = x^2 + 2xy + y^2$ ، $x = t\cos t$ ، و $y = t\sin t$ ، du/dt را به دو روش بیابید: (آ) با استفاده از قاعدهٔ زنجیره‌ای؛ (ب) با بیان u برحسب t پیش از مشتقگیری.

حل

(آ) $\partial u/\partial x = 2x + 2y$ ؛ $\partial u/\partial y = 2x + 2y$ ؛ $dx/dt = \cos t - t\sin t$ ؛ $dy/dt = \sin t + t\cos t$. درنتیجه، از (۱۲) داریم

$$\frac{du}{dt} = (2x + 2y)(\cos t - t\sin t) + (2x + 2y)(\sin t + t\cos t)$$
$$= 2(x + y)(\cos t - t\sin t + \sin t + t\cos t)$$
$$= 2(t\cos t + t\sin t)(\cos t - t\sin t + \sin t + t\cos t)$$
$$= 2t(\cos^2 t - t\sin t\cos t + \sin t\cos t + t\cos^2 t + \sin t\cos t - t\sin^2 t + \sin^2 t + t\sin t\cos t)$$
$$= 2t[1 + 2\sin t\cos t + t(\cos^2 t - \sin^2 t)]$$
$$= 2t(1 + \sin 2t + t\cos 2t)$$

(ب)
$$u = (t\cos t)^2 + 2(t\cos t)(t\sin t) + (t\sin t)^2$$
$$= t^2\cos^2 t + t^2(2\sin t\cos t) + t^2\sin^2 t$$
$$= t^2 + t^2\sin 2t$$

لذا،

$$\frac{du}{dt} = 2t + 2t\sin 2t + 2t^2\cos 2t$$

مثال ۴. هرگاه f تابع مشتقپذیری بوده و a و b ثابت باشند، ثابت کنید $z = f(\frac{1}{2}bx^2 - \frac{1}{3}ay^3)$ در معادلهٔ دیفرانسیل جزئی

$$ay^2\frac{\partial z}{\partial x} + bx\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

صدق می‌کند.

حل. فرض کنیم $u = \frac{1}{2}bx^2 - \frac{1}{3}ay^3$. می‌خواهیم نشان دهیم که $z = f(u)$ در معادلهٔ داده شده صدق می‌کند. طبق قاعدهٔ زنجیره‌ای،

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dz}{du}\frac{\partial u}{\partial x} = f'(u)(bx) \quad \text{و} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{dz}{du}\frac{\partial u}{\partial y} = f'(u)(-ay^2)$$

بنابراین،

$$ay^2\frac{\partial z}{\partial x} + bx\frac{\partial z}{\partial y} = ay^2[f'(u)(bx)] + bx[f'(u)(-ay^2)] = 0$$

که همان است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

مثال ۵. با استفاده از قانون گاز کامل (ر.ک. مثال ۵، بخش ۴.۱۸) به‌ازای

$k = 10$، میزان تغییر دما در لحظه‌ای که حجم گاز $120\ \text{cm}^3$ بوده و گاز تحت فشار $8\ \text{nt/cm}^2$ است را درصورتی بیابید که حجم به میزان $2\ \text{cm}^3/\text{min}$ افزایش یافته و فشار به میزان $0.1\ \text{nt/cm}^2$ در دقیقه کاهش یابد.

حل. فرض کنیم t min زمان از شروع افزایش حجم گاز، T درجه دما در t min، P نیوتن برسانتیمتر مربع فشار در t min، و V سانتیمتر مکعب حجم گاز در t min باشد. از قانون گاز کامل داریم

$$T = \frac{PV}{10}$$

در لحظهٔ داده شده، $P = 8$، $V = 120$، $dP/dt = -0.1$، و $dV/dt = 2$. از قاعدهٔ زنجیره‌ای داریم

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial P}\frac{dP}{dt} + \frac{\partial T}{\partial V}\frac{dV}{dt}$$
$$= \frac{V}{10}\frac{dP}{dt} + \frac{P}{10}\frac{dV}{dt}$$
$$= \tfrac{120}{10}(-0.1) + \tfrac{8}{10}(2)$$
$$= -1.2 + 1.6$$
$$= 0.4$$

بنابراین، در لحظهٔ داده شده، دما به میزان 0.4 درجه بر دقیقه افزایش می‌یابد.

تمرینات ۶.۱۸

در تمرینهای ۱ تا ۶، مشتق جزئی ذکر شده را به دو روش بیابید:
(آ) از قاعدهٔ زنجیره‌ای استفاده کنید؛ (ب) پیش از مشتقگیری جانشانیهایی برای و انجام دهید.

۱. $u = x^2 - y^2;\ x = 3r - s;\ y = r + 2s;\ \dfrac{\partial u}{\partial r};\ \dfrac{\partial u}{\partial s}$

۲. $u = 3x - 4y^2;\ x = 5pq;\ y = 3p^2 - 2q;\ \dfrac{\partial u}{\partial p};\ \dfrac{\partial u}{\partial q}$

۳. $u = 3x^2 + xy - 2y^2 + 3x - y;\ x = 2r - 3s;\ y = r + s;\ \dfrac{\partial u}{\partial r};\ \dfrac{\partial u}{\partial s}$

۴ . $u = x^2 + y^2; x = \cosh r \cos t; y = \sinh r \sin t; \dfrac{\partial u}{\partial r}; \dfrac{\partial u}{\partial t}$

۵ . $u = e^{y/x}; x = 2r \cos t; y = 4r \sin t; \dfrac{\partial u}{\partial r}; \dfrac{\partial u}{\partial t}$

۶ . $V = \pi x^2 y; x = \cos z \sin t; y = z^2 e^t; \dfrac{\partial V}{\partial z}; \dfrac{\partial V}{\partial t}$

در تمرینهای ۷ تا ۱۴ ، مشتق جزئی دکر شده را با قاعدهٔ زنجیره‌ای بیابید .

۷ . $u = x^2 + xy; x = r^2 + s^2; y = 3r - 2s; \dfrac{\partial u}{\partial r}; \dfrac{\partial u}{\partial s}$

۸ . $u = xy + xz + yz; x = rs; y = r^2 - s^2; z = (r - s)^2; \dfrac{\partial u}{\partial r}; \dfrac{\partial u}{\partial s}$

۹ . $u = \sin^{-1}(3x + y); x = r^2 e^s; y = \sin rs; \dfrac{\partial u}{\partial r}; \dfrac{\partial u}{\partial s}$

۱۰ . $u = \sin(xy); x = 2ze^t; y = t^2 e^{-z}; \dfrac{\partial u}{\partial t}; \dfrac{\partial u}{\partial z}$

۱۱ . $u = \cosh \dfrac{y}{x}; x = 3r^2 s; y = 6se^r; \dfrac{\partial u}{\partial r}; \dfrac{\partial u}{\partial s}$

۱۲ . $u = xe^{-y}; x = \tan^{-1}(rst); y = \ln(3rs + 5st); \dfrac{\partial u}{\partial r}; \dfrac{\partial u}{\partial s}; \dfrac{\partial u}{\partial t}$

۱۳ . $u = x^2 + y^2 + z^2; x = r \sin \phi \cos \theta; y = r \sin \phi \sin \theta; z = r \cos \phi; \dfrac{\partial u}{\partial r}; \dfrac{\partial u}{\partial \phi}; \dfrac{\partial u}{\partial \theta}$

۱۴ . $u = x^2 yz; x = \dfrac{r}{s}; y = re^s; z = re^{-s}; \dfrac{\partial u}{\partial r}; \dfrac{\partial u}{\partial s}$

در تمرینهای ۱۵ تا ۱۸ ، مشتق کل   را به دو روش بیابید : (آ) از قاعدهٔ زنجیره‌ای استفاده کنید ؛ (ب) پیش از مشتقگیری جانشانیهایی برای   و   یا برای   ،   و   انجام دهید .

۱۵ . $u = ye^x + xe^y; x = \cos t; y = \sin t$ ۱۶ . $u = \ln xy + y^2; x = e^t; y = e^{-t}$

۱۷ . $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; x = \tan t; y = \cos t; z = \sin t; 0 < t < \frac{1}{2}\pi$

۱۸ . $u = \dfrac{t + e^x}{y - e^t}; x = 3 \sin t; y = \ln t$

در تمرینهای ۱۹ تا ۲۲ ، مشتق کل du/dt را با استفاده از قاعدهٔ زنجیره‌ای بیابید ؛ پیش از مشتقگیری u را به‌صورت تابعی از t بیان‌کنید .

۱۹ . $u = \tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right); x = \ln t; y = e^t$

۲۰ . $u = xy + xz + yz; x = t \cos t; y = t \sin t; z = t$

۲۱ . $u = \dfrac{x + t}{y + t}; x = \ln t; y = \ln \dfrac{1}{t}$

۲۲ . $u = \ln(x^2 + y^2 + t^2); x = t \sin t; y = \cos t$

در تمرینهای ۲۳ تا ۲۶ ، فرض‌کنید معادلهٔ داده شده z را به‌عنوان تابعی از x و y تعریف کند . با مشتقگیری ضمنی ، $\partial z/\partial x$ و $\partial z/\partial y$ را بیابید .

۲۳ . $3x^2 + y^2 + z^2 - 3xy + 4xz - 15 = 0$ ۲۴ . $z = (x^2 + y^2) \sin xz$

۲۵ . $ye^{xyz} \cos 3xz = 5$ ۲۶ . $ze^{yz} + 2xe^{xz} - 4e^{xy} = 3$

۲۷ . هرگاه f تابع مشتقپذیری از متغیر u باشد ، قرار دهید $u = bx - ay$ و ثابت کنید $z = f(bx - ay)$ درمعادلهٔ $a(\partial z/\partial x) + b(\partial z/\partial y) = 0$ ، که درآن a و b ثابت‌اند ، صدق می‌کند .

۲۸ . هرگاه f تابع مشتقپذیری از دو متغیر u و v باشد ، قرار دهید $u = x - y$ و $v = y - x$ و ثابت کنید $z = f(x - y, y - x)$ در معادلهٔ $\partial z/\partial x + \partial z/\partial y = 0$ صدق می‌کند .

۲۹ . هرگاه f تابع مشتقپذیری از x و y بوده و $u = f(x, y)$ ، $x = r \cos \theta$ ، و $y = r \sin \theta$ ، نشان دهید که

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{r}$$

۳۰ . هرگاه f و g توابع مشتقپذیری از x و y بوده و $u = f(x, y)$ و $v = g(x, y)$ بطوری که $\partial u/\partial x = \partial v/\partial y$ و $\partial u/\partial y = -\partial v/\partial x$ ، آنگاه اگر $x = r \cos \theta$ و $y = r \sin \theta$ ، نشان دهید که

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \quad و \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

۳۱. فرض کنید f تابع مشتق‌پذیری از x و y بوده و $u = f(x, y)$. دراین صورت، اگر $x = \cosh v \cos w$ و $y = \sinh v \sin w$، مشتقات جزئی $\partial u/\partial v$ و $\partial u/\partial w$ را برحسب $\partial u/\partial x$ و $\partial u/\partial y$ بیان کنید.

۳۲. فرض کنید f تابع مشتق‌پذیری از x، y، و z بوده و $u = f(x, y, z)$. دراین صورت، اگر $x = r \sin \phi \cos \theta$، $y = r \sin \phi \sin \theta$، و $z = r \cos \phi$، مشتقات‌جزئی $\partial u/\partial r$، $\partial u/\partial \phi$، و $\partial u/\partial \theta$ را برحسب $\partial u/\partial x$، $\partial u/\partial y$، و $\partial u/\partial z$ بیان کنید.

۳۳. در لحظه‌ای معلوم، طول یک ضلع مثلث قائم‌الزاویه‌ای 10 cm بوده و به‌میزان 1 cm/min افزایش می‌یابد، و طول ضلع دیگر مثلث 12 cm بوده و به‌میزان 2 cm/min کاهش می‌یابد. میزان تغییر زاویهٔ حادهٔ مقابل به ضلع 12 cm ی را در لحظهٔ داده شده بیابید.

۳۴. ارتفاع یک مخروط مستدیر قائم به‌میزان 40 cm/min افزایش یافته و شعاع به میزان 15 cm/min کاهش می‌یابد. میزان تغییر حجم در لحظه‌ای که ارتفاع 200 cm و شعاع 60 cm است را بیابید.

۳۵. ارتفاع یک استوانهٔ مستدیر قائم به میزان 10 cm/min کاهش یافته و شعاع به میزان 4 cm/min افزایش می‌یابد. میزان‌تغییر حجم در لحظه‌ای که ارتفاع 50 cm و شعاع 16 cm است را بیابید.

۳۶. آب به میزان $\frac{4}{5}\pi$ m³/min وارد بشکه‌ای‌به‌شکل استوانهٔ مستدیر قائم می‌شود. بشکه طوری منبسط‌می‌شود که استوانه مانده و شعاعش به میزان 0.2 cm/min افزایش می‌یابد. سطح اب وقتی شعاع 2 m و حجم آب بشکه 20π m³ است با چه سرعتی بالا می‌آید؟

۳۷. گازی از قانون گاز کامل (ر.ک. مثال ۵، بخش ۴.۱۸) به‌ازای $k = 12$ تبعیت می‌کند، و در ظرفی است که به میزان $3°$ در دقیقه گرم می‌شود. اگر در لحظه‌ای‌که دما $300°$ است، فشار 6 nt/cm² بوده و به میزان 0.1 nt/cm² در دقیقه کاهش یابد، میزان تغییر حجم دراین لحظه را پیدا کنید.

۳۸. یک دیوار قائم با زمین زاویه‌ای برابر $\frac{2}{3}\pi$ رادیان می‌سازد. نردبانی به‌طول 20 ft به دیوارتکیه داردو سرش به‌میزان 3 ft/sec به پایین می‌لغزد. سرعت تغییرمساحت مثلث‌تشکیل‌شده‌ازنردبان، دیوار، و زمین وقتی نردبان با زمین زاویهٔ $\frac{1}{6}\pi$ رادیان می‌سازد چقدر است؟

۷.۱۸ مشتقات جزئی مراتب بالاتر

اگر f یک تابع دو متغیره باشد، عموماً $D_1 f$ و $D_2 f$ نیز توابعی دو متغیره‌اند. و اگر

مشتقات‌جزئی این توابع موجود باشند، آنها را مشتقات جزئی دوم f می‌نامیم. $D_1 f$ و $D_2 f$ مشتقات جزئی اول f نام دارند. برای یک تابع دو متغیره چهار مشتق جزئی دوم وجود دارند. اگر f تابعی از دو متغیر x و y باشد، نمادهای

$$D_2(D_1 f) \qquad D_{12} f \qquad f_{12} \qquad f_{xy} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}$$

همه مشتق جزئی دوم f را نشان می‌دهند، که با مشتق‌گیری از f ابتدا نسبت به x و سپس نسبت به y بدست می‌آید. این مشتق جزئی دوم با رابطهٔ

$$f_{12}(x, y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f_1(x, y + \Delta y) - f_1(x, y)}{\Delta y} \qquad (۱)$$

در صورت وجود این حد، تعریف می‌شود. نمادهای

$$D_1(D_1 f) \qquad D_{11} f \qquad f_{11} \qquad f_{xx} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

همه مشتق جزئی دوم f را نشان می‌دهند، که با دوبار مشتق‌گیری نسبت به x بدست می‌آید. تعریف زیر را، در صورت وجود حد، داریم

$$f_{11}(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_1(x + \Delta x, y) - f_1(x, y)}{\Delta x} \qquad (۲)$$

دو مشتق جزئی دوم دیگر به نحو مشابه تعریف می‌شوند: در صورت وجود حدها،

$$f_{21}(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_2(x + \Delta x, y) - f_2(x, y)}{\Delta x} \qquad (۳)$$

$$f_{22}(x, y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f_2(x, y + \Delta y) - f_2(x, y)}{\Delta y} \qquad (۴)$$

تعاریف مشتقات جزئی مراتب بالاترمشابه‌اند. مجدداً، نمادهای مختلفی برای‌یک مشتق خاص‌وجود دارند. مثلاً،

$$D_{112} f \qquad f_{112} \qquad f_{xxy} \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial y\, \partial x\, \partial x} \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial y\, \partial x^2}$$

همه مشتق جزئی سوم f را نشان می‌دهند، که از دوبار مشتق‌گیری نسبت به x و یکبار نسبت به y بدست می‌آید. در نماد زیرنویس، مرتبهٔ مشتق‌گیری جزئی از چپ به راست است؛ در نماد $\partial^3 f/\partial y\, \partial x\, \partial x$ مرتبه از راست‌به چپ می‌باشد.

مثال ۱. به فرض آنکه $f(x, y) = e^x \sin y + \ln xy$، این مقادیر را بیابید: (آ)

$D_{11}f(x,\ y)$ ؛ (ب) $D_{12}f(x,\ y)$ ؛ (پ) $\partial^3 f/\partial x\,\partial y^2$.

حل

$$D_1f(x,y) = e^x \sin y + \frac{1}{xy}y = e^x \sin y + \frac{1}{x}$$

درنتیجه، (آ) $D_{11}f(x,y) = e^x \sin y - 1/x^2$ ؛ و (ب) $D_{12}f(x,y) = e^x \cos y$.
(پ) برای‌یافتن $\partial^3 f/\partial x\,\partial y^2$ ، دوبارنسبت‌به y وسپس یکبار نسبت به x مشتق‌می‌گیریم. این نتیجه می‌دهد که

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^x \cos y + \frac{1}{y} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -e^x \sin y - \frac{1}{y^2} \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y^2} = -e^x \sin y$$

مشتقات جزئی مراتب بالاتر یک تابع n متغیره شبیه مشتقات جزئی مراتب بالاتر یک تابع دومتغیره تعریف می‌شوند. هرگاه f یک تابع n متغیره باشد، f می‌تواند n^2 مشتق جزئی دوم در یک نقطه داشته باشد. یعنی، در یک تابع سه متغیره، اگر همهٔ مشتقات جزئی مرتبهٔ دوم موجود باشند. نه تا از آنها وجود دارند: f_{11} ، f_{12} ، f_{13} ، f_{21} ، f_{22} ، f_{23} ، f_{31} ، f_{32} ، و f_{33} .

مثال ۲. به فرض آنکه $f(x, y, z) = \sin(xy + 2z)$ ، $D_{132}f(x, y, z)$ را بیابید.

حل

$$\begin{aligned} D_1f(x, y, z) &= y\cos(xy + 2z) \\ D_{13}f(x, y, z) &= -2y\sin(xy + 2z) \\ D_{132}f(x, y, z) &= -2\sin(xy + 2z) - 2xy\cos(xy + 2z) \end{aligned}$$

مثال ۳. به فرض آنکه $f(x,\ y) = x^3y - y\cosh xy$ ، مقادیر زیر را بیابید: (آ) $D_{12}f(x,\ y)$ ؛ (ب) $D_{21}f(x,\ y)$.

y sinh xy

حل

(آ) $D_1f(x, y) = 3x^2y - y^2\sinh xy$

$$D_{12}f(x, y) = 3x^2 - 2y\sinh xy - xy^2\cosh xy$$

(ب) $D_2f(x, y) = x^3 - \cosh xy - xy\sinh xy$

$$\begin{aligned} D_{21}f(x, y) &= 3x^2 - y\sinh xy - y\sinh xy - xy^2\cosh xy \\ &= 3x^2 - 2y\sinh xy - xy^2\cosh xy \end{aligned}$$

از نتایج فوق می‌بینیم که، در تابع مثال ۳، مشتقات جزئی "مخلوط" $D_{12}f(x, y)$ و $D_{21}f(x, y)$ مساوی‌اند. لـذا، دراین تـابع خاص، وقتی مشتق جزئی دوم نسبت به x و سپس y را می‌یابیم، ترتیب مشتقگیری اهمیت ندارد. این شرط برای توابع زیادی برقرار است. با اینحال، مثال زیر نشان می‌دهد که این امر همیشه درست نیست.

مثال ۴. فرض کنیم تابع f به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$f(x, y) = \begin{cases} (xy)\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{اگر } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{اگر } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$f_{12}(0, 0)$ و $f_{21}(0, 0)$ را بیابید.

حل. در مثال ۳، بخش ۴.۱۸، نشان دادیم که برای این تابع داریم

(۵) $f_1(0, y) = -y$ ، بازای هر y

(۶) $f_2(x, 0) = x$ ، بازای هر x

از فرمول (۱) داریم

$$f_{12}(0, 0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f_1(0, 0 + \Delta y) - f_1(0, 0)}{\Delta y}$$

اما از (۵) داریم $f_1(0, \Delta y) = -\Delta y$ و $f_1(0, 0) = 0$ ؛ و درنتیجه،

$$f_{12}(0, 0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{-\Delta y - 0}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0}(-1) = -1$$

از فرمول (۳) داریم

$$f_{21}(0, 0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_2(0 + \Delta x, 0) - f_2(0, 0)}{\Delta x}$$

و از رابطهٔ (۶) خواهیم داشت $f_2(\Delta x, 0) = \Delta x$ و $f_2(0, 0) = 0$. بنابراین،

$$f_{21}(0, 0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 1 = 1$$

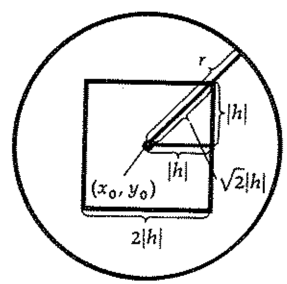
درتابع مثال ۴، مشتقات جزئی مخلوط $f_{12}(x, y)$ و $f_{21}(x, y)$ در $(0, 0)$ مساوی نیستند.

قضیهٔ ۱۰۷۰۱۸ ، که ذیلاً می‌آید ، مجموعه‌ای از شرایط برای $f_{12}(x_0, y_0) = f_{21}(x_0, y_0)$ را بدست می‌دهد. تابع مثال ۴ در مفروضات این قضیه صدق نمی‌کند ، زیرا هردوی f_{12} و f_{21} در $(0, 0)$ ناپیوسته‌اند. اثبات این امر را به‌عنوان تمرین می‌گذاریم (ر.ک. تمرین ۲۴).

۱۰۷۰۱۸ قضیه. ***فرض‌کنیم تابع f از دو متغیر x و y بر قرص باز $B((x_0, y_0); r)$ تعریف شده باشد و f_x ، f_y ، f_{xy} ، و f_{yx} نیز بر B تعریف شده باشند. بعلاوه، f_{xy} و f_{yx} بر B پیوسته باشند. دراین صورت،***

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$$

برهان. مربعی به مرکز (x_0, y_0) و طول ضلع $2|h|$ که $0 < \sqrt{2}|h| < r$ در نظر می‌گیریم. دراین صورت، تمام نقاط درون مربع و روی اضلاع آن در قرص باز B است (ر.ک. شکل ۱۰۷۰۱۸). درنتیجه، نقاط $(x_0 + h, y_0 + h)$ ، $(x_0 + h, y_0)$ ، و $(x_0, y_0 + h)$ در



شکل ۱۰۷۰۱۸

B اند. فرض کنیم Δ به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$\Delta = f(x_0 + h, y_0 + h) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + h) + f(x_0, y_0) \tag{7}$$

تابع G را که به‌صورت

$$G(x) = f(x, y_0 + h) - f(x, y_0) \tag{8}$$

تعریف شده درنظر می‌گیریم. دراین صورت،

$$G(x + h) = f(x + h, y_0 + h) - f(x + h, y_0)$$

درنتیجه، (۷) را می‌توان به‌صورت

$$\Delta = G(x_0 + h) - G(x_0) \tag{9}$$

نوشت. از (۸) داریم

$$G'(x) = f_x(x, y_0 + h) - f_x(x, y_0) \tag{10}$$

حال چون $f_x(x, y_0)$ و $f_x(x, y_0 + h)$ بر B تعریف شده‌اند ، اگر x در بازهٔ بسته با نقاط انتهایی x_0 و $x_0 + h$ باشد، $G'(x)$ وجود دارد. از اینرو، اگر G دراین بازهٔ بسته باشد، x پیوسته است. طبق قضیهٔ مقدار میانگین (۲۰۴۰۴) ، عددی مانند c_1 بین x_0 و $x_0 + h$ هست بطوری که

$$G(x_0 + h) - G(x_0) = hG'(c_1) \tag{11}$$

با گذاردن (۱۱) در (۹) ، بدست می‌آوریم

$$\Delta = hG'(c_1) \tag{12}$$

از (۱۲) و (۱۰) داریم

$$\Delta = h[f_x(c_1, y_0 + h) - f_x(c_1, y_0)] \tag{13}$$

حال اگر تابع g به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$g(y) = f_x(c_1, y) \tag{14}$$

(۱۳) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\Delta = h[g(y_0 + h) - g(y_0)] \tag{15}$$

از رابطهٔ (۱۴) داریم

$$g'(y) = f_{xy}(c_1, y) \tag{16}$$

چون $f_{xy}(c_1, y)$ بر B تعریف شده است ، $g'(y)$ در صورتی که y در بازهٔ بسته با نقاط‌انتهایی y_0 و $y_0 + h$ باشدوجود دارد. از اینرو ، اگر y در این بازهٔ بسته باشد ، g پیوسته است. لذا ، طبق قضیهٔ مقدار میانگین ، عددی مانند d_1 بین y_0 و $y_0 + h$ هست بطوری که

$$g(y_0 + h) - g(y_0) = hg'(d_1) \tag{17}$$

با گذاردن (۱۷) در (۱۵) ، بدست می‌آوریم $\Delta = h^2 g'(d_1)$ ؛ درنتیجه ، از (۱۶) معلوم می‌شود که ، به‌ازای نقطه‌ای مانند (c_1, d_1) در قرص باز B ،

$$\Delta = h^2 f_{xy}(c_1, d_1) \tag{18}$$

تابع ϕ را با

$$\phi(y) = f(x_0 + h, y) - f(x_0, y) \tag{19}$$

تعریف مـی‌کنیم ؛ و درنتیجه ، $\phi(y + h) = f(x_0 + h, y + h) - f(x_0, y + h)$. بنابر این ، (۷) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\Delta = \phi(y_0 + h) - \phi(y_0) \tag{20}$$

از (۱۹) داریم

$$\phi'(y) = f_y(x_0 + h, y) - f_y(x_0, y) \tag{۲۱}$$

ϕ' درصورتی‌که y دربازهٔ بسته با نقاط انتهایی y_0 و $y_0 + h$ باشد وجوددارد، زیراطبق فرض هر جملهٔ سمت راست (۲۱) بر B وجود دارد. لذا، ϕ براین بازهٔ بسته پیوسته است. درنتیجه، طبق قضیهٔ مقدار میانگین، عددی مانند d_2 بین y_0 و $y_0 + h$ هست بطوری که

$$\phi(y_0 + h) - \phi(y_0) = h\phi'(d_2) \tag{۲۲}$$

از روابط (۲۰)، (۲۱)، و (۲۲) معلوم می‌شود که

$$\Delta = h[f_y(x_0 + h, d_2) - f_y(x_0, d_2)] \tag{۲۳}$$

تابع χ را با

$$\chi(x) = f_y(x, d_2) \tag{۲۴}$$

تعریف کرده و (۲۳) را به‌صورت

$$\Delta = h[\chi(x_0 + h) - \chi(x_0)] \tag{۲۵}$$

می‌نویسیم. از (۲۴) داریم

$$\chi'(x) = f_{yx}(x, d_2) \tag{۲۶}$$

و، طبق قضیهٔ مقدار میانگین، عددی مانند c_2 بین x_0 و $x_0 + h$ هست بطوری که

$$\chi(x_0 + h) - \chi(x_0) = h\chi'(c_2) \tag{۲۷}$$

از روابط (۲۵)، (۲۶)، و (۲۷) داریم

$$\Delta = h^2 f_{yx}(c_2, d_2) \tag{۲۸}$$

از متحد گرفتن طرفهای راست (۱۸) و (۲۸) بدست می‌آوریم

$$h^2 f_{xy}(c_1, d_1) = h^2 f_{yx}(c_2, d_2)$$

و چون $h \neq 0$، می‌توان بر h^2 تقسیم کرد، که نتیجه می‌دهد

$$f_{xy}(c_1, d_1) = f_{yx}(c_2, d_2) \tag{۲۹}$$

که در آن (c_1, d_1) و (c_2, d_2) در B اند.

چون c_1 و c_2 بین x_0 و $x_0 + h$ اند، می‌توان نوشت $c_1 = x_0 + \epsilon_1 h$، که $0 < \epsilon_1 < 1$، و $c_2 = x_0 + \epsilon_2 h$، که در آن $0 < \epsilon_2 < 1$. بهمین نحو، چون هردوی d_1 و d_2 بین y_0 و $y_0 + h$ اند، می‌توان‌نوشت $d_1 = y_0 + \epsilon_3 h$، که‌در آن $0 < \epsilon_3 < 1$، و $d_2 = y_0 + \epsilon_4 h$، که در آن $0 < \epsilon_4 < 1$. با گذاردن این مقادیر در (۲۹)، بدست می‌آید

$$f_{xy}(x_0 + \epsilon_1 h, y_0 + \epsilon_3 h) = f_{yx}(x_0 + \epsilon_2 h, y_0 + \epsilon_4 h) \tag{۳۰}$$

چون f_{xy} و f_{yx} بر B پیوسته‌اند، اگر از طرفین (۳۰) وقتی h به صفرنزدیک می‌شود حد بگیریم، بدست می‌آید

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$$

به‌عنوان‌نتیجه‌ای ازقضیهٔ فوق، اگر تابع دو متغیرهٔ f بر قرص بازی مشتقات‌جزئی پیوسته داشته باشد، ترتیب مشتقگیری جزئی را می‌توان بدون تاثیر بر نتیجه عوض کرد؛ یعنی،

$$D_{112}f = D_{121}f = D_{211}f$$
$$D_{1122}f = D_{1212}f = D_{1221}f = D_{2112}f = D_{2121}f = D_{2211}f$$

و از این قبیل، بخصوص، با فرض اینکه همهٔ مشتقات جزئی بر قرص بازی پیوسته‌اند، با اعمال مکرر قضیهٔ ۱۰.۷.۱۸ می‌توان ثابت کرد که $D_{211}f = D_{112}f$. با این کار خواهیم داشت

$$\begin{aligned} D_{211}f &= D_1(D_{21}f) = D_1(D_{12}f) = D_1[D_2(D_1f)] = D_2[D_1(D_1f)] \\ &= D_2(D_{11}f) = D_{112}f \end{aligned}$$

مثال ۵. به‌فرض‌آنکه $u = f(x, y)$، $x = F(r, s)$، و $y = G(r, s)$، واینکه $f_{xy} = f_{yx}$، با استفاده از قاعدهٔ زنجیره‌ای ثابت کنید

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} &= f_{xx}(x, y)[F_r(r, s)]^2 + 2f_{xy}(x, y)F_r(r, s)G_r(r, s) \\ &\quad + f_{yy}(x, y)[G_r(r, s)]^2 + f_x(x, y)F_{rr}(r, s) + f_y(x, y)G_{rr}(r, s) \end{aligned}$$

حل. از قاعدهٔ زنجیره‌ای (قضیهٔ ۱۰.۶.۱۸) داریم

$$\frac{\partial u}{\partial r} = f_x(x, y)F_r(r, s) + f_y(x, y)G_r(r, s)$$

اگر مجدداً نسبت به r مشتق جزئی گرفته و از فرمول مشتق حاصل ضرب و قاعدهٔ زنجیره‌ای استفاده کنیم، بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} &= [f_{xx}(x, y)F_r(r, s) + f_{xy}(x, y)G_r(r, s)]F_r(r, s) + f_x(x, y)F_{rr}(r, s) \\ &\quad + [f_{yx}(x, y)F_r(r, s) + f_{yy}(x, y)G_r(r, s)]G_r(r, s) + f_y(x, y)G_{rr}(r, s) \end{aligned}$$

با ضرب و ترکیب جملات و استفاده از اینکه $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$، بدست می‌آوریم

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = f_{xx}(x, y)[F_r(r, s)]^2 + 2f_{xy}(x, y)F_r(r, s)G_r(r, s) + f_{yy}(x, y)[G_r(r, s)]^2 + f_x(x, y)F_{rr}(r, s) + f_y(x, y)G_{rr}(r, s)$$

که همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم .

تمرینات ۷۰۱۸

در تمرینهای ۱ تا ۱۰، اعمال زیر را انجام دهید : (آ) $D_{11}f(x, y)$ را بیابید ؛ (ب) $D_{22}f(x, y)$ را بیابید ؛ (پ) نشان دهید که $D_{12}f(x, y) = D_{21}f(x, y)$

۱. $f(x, y) = \frac{x^2}{y} - \frac{y}{x^2}$ ۲. $f(x, y) = 2x^3 - 3x^2y + xy^2$

۳. $f(x, y) = e^{2x}\sin y$ ۴. $f(x, y) = e^{-x/y} + \ln\frac{y}{x}$

۵. $f(x, y) = (x^2 + y^2)\tan^{-1}\frac{y}{x}$ ۶. $f(x, y) = \sin^{-1}\frac{3y}{x^2}$

۷. $f(x, y) = 4x\sinh y + 3y\cosh x$ ۸. $f(x, y) = x\cos y - ye^x$

۹. $f(x, y) = e^x\cos y + \tan^{-1}x \cdot \ln y$ ۱۰. $f(x, y) = 3x\cosh y - y\sin^{-1}e^x$

در تمرینهای ۱۱ تا ۱۸، مشتقات جزئی ذکر شده را بیابید .

۱۱. $f(x, y) = 2x^3y + 5x^2y^2 - 3xy^2$ ؛ (آ) $f_{121}(x, y)$ ؛ (ب) $f_{211}(x, y)$.

۱۲. $G(x, y) = 3x^3y^2 + 5x^2y^3 + 2x$ ؛ (آ) $G_{yyx}(x, y)$ ؛ (ب) $G_{yxy}(x, y)$.

۱۳. $f(x, y, z) = ye^x + ze^y + e^z$ ؛ (آ) $f_{xz}(x, y, z)$ ؛ (ب) $f_{yz}(x, y, z)$.

۱۴. $g(x, y, z) = \sin(xyz)$ ؛ (آ) $g_{23}(x, y, z)$ ؛ (ب) $g_{12}(x, y, z)$.

۱۵. $f(w, z) = w^2\cos e^z$ ؛ (آ) $f_{121}(w, z)$ ؛ (ب) $f_{212}(w, z)$.

۱۶. $f(u, v) = \ln\cos(u - v)$ ؛ (آ) $f_{uuv}(u, v)$ ؛ (ب) $f_{vuv}(u, v)$.

۱۷. $g(r, s, t) = \ln(r^2 + 4s^2 - 5t^2)$ ؛ (آ) $g_{132}(r, s, t)$ ؛ (ب) $g_{122}(r, s, t)$.

۱۸. $f(x, y, z) = \tan^{-1}(3xyz)$ ؛ (آ) $f_{113}(x, y, z)$ ؛ (ب) $f_{123}(x, y, z)$.

در تمرینهای ۱۹ تا ۲۲، نشان دهید که $u(x, y)$ در معادلهٔ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

که به معادلهٔ لاپلاس[1] در R^2 معروف است، صدق می‌کند .

۱۹. $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ ۲۰. $u(x, y) = e^x\sin y + e^y\cos x$

۲۱. $u(x, y) = \tan^{-1}\frac{y}{x} + \frac{x}{x^2 + y^2}$ ۲۲. $u(x, y) = \tan^{-1}\frac{2xy}{x^2 - y^2}$

۲۳. معادلهٔ لاپلاس در R^3 عبارت است از

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

نشان دهید که $u(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$ در این معادله صدق می‌کند .

۲۴. در تابع مثال ۴، نشان دهید که f_{12} در $(0, 0)$ ناپیوسته است ؛ و درنتیجه، اگر $(x_0, y_0) = (0, 0)$، مفروضات قضیهٔ ۱۰۷۰۱۸ برقرار نیستند .

در تمرینهای ۲۵ تا ۲۷، $f_{12}(0, 0)$ و $f_{21}(0, 0)$ را درصورت وجود بیابید .

۲۵.
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2} & \text{اگر } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{اگر } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

۲۶.
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^4 + y^4} & \text{اگر } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{اگر } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

۲۷.
$$f(x, y) = \begin{cases} x^2\tan^{-1}\frac{y}{x} - y^2\tan^{-1}\frac{x}{y} & \text{اگر } x \neq 0 \text{ و } y \neq 0 \\ 0 & \text{اگر } x = 0 \text{ یا } y = 0 \end{cases}$$

۲۸. به فرض آنکه $u = f(x, y)$، $x = F(t)$، و $y = G(t)$، و نیز $f_{xy} = f_{yx}$، با استفاده از قاعدهٔ زنجیره‌ای ثابت کنید

$$\frac{d^2u}{dt^2} = f_{xx}(x, y)[F'(t)]^2 + 2f_{xy}(x, y)F'(t)G'(t) + f_{yy}(x, y)[G'(t)]^2 + f_x(x, y)F''(t) + f_y(x, y)G''(t)$$

۲۹. به‌فرض‌آنکه $u = f(x, y)$، $x = F(r, s)$، و $y = G(r, s)$، و نیز $f_{xy} = f_{yx}$، با استفاده از قاعدهٔ زنجیره‌ای ثابت کنید

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r\, \partial s} = f_{xx}(x, y)F_r(r, s)F_s(r, s) + f_{xy}(x, y)[F_s(r, s)G_r(r, s) + F_r(r, s)G_s(r, s)] + f_{yy}(x, y)G_r(r, s)G_s(r, s) + f_x(x, y)F_{sr}(r, s) + f_y(x, y)G_{sr}(r, s)$$

۳۰. فرض کنید $u = e^y\cos x, x = 2t, y = t^2$، و d^2u/dt^2 را به‌سه طریق بیابید : (آ) با

1. Laplace

بیان u برحسب t ؛ (ب) با استفاده از تمرین ۲۸؛ (پ) با استفاده ازقاعدهٔ زنجیره‌ای.

۳۱ . فرض کنید $u = 3xy - 4y^2, x = 2se^r, y = re^{-s}$ ، و$\partial^2u/\partial r^2$ را به سه طریق بیابید: (آ) با بیان ابتدا u برحسب r و s ؛ (ب) با استفاده از فرمول مثال ۵؛ (پ) با استفاده از قاعدهٔ زنجیره‌ای.

۳۲ . به‌ازای u ، x ، و y تمرین ۳۱، $\partial^2u/\partial s\,\partial r$ را به سه طریق بیابید: (آ) با بیان ابتدا u برحسب r و s ؛ (ب) با استفاده‌ازفرمول تمرین ۲۹؛ (پ) با‌استفاده از قاعدهٔ زنجیره‌ای.

۳۳ . فرض کنید $u = 9x^2 + 4y^2, x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ ، و$\partial^2u/\partial r^2$ را به سه‌طریق بیابید: (آ) با بیان ابتدا u برحسب r و θ ؛ (ب) با استفاده از فرمول‌مثال ۵ ؛ (پ) با استفاده از قاعدهٔ زنجیره‌ای.

۳۴ . به‌ازای u ، x ، و y تمرین ۳۳، $\partial^2u/\partial\theta^2$ را به سه طریق بیابید: (آ) با بیان ابتدا u برحسب r و θ ؛ (ب) با استفاده از فرمول مثال ۵؛ (پ) با استفاده از قاعدهٔ زنجیره‌ای.

۳۵ . به‌ازای u ، x ، و y تمرین ۳۳، $\partial^2u/\partial r\,\partial\theta$ را به سه طریق بیابید: (آ) با بیان ابتدا u برحسب r و θ ؛ (ب) با استفاده‌ازفرمول تمرین ۲۹؛ (پ) با استفاده از قاعدهٔ زنجیره‌ای.

۳۶ . هرگاه $u = f(x, y)$ و $v = g(x, y)$ ، آنگاه معادلات

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{و} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

معادلات کشی ـ ریمان نام دارند. هرگاه f و g و مشتقات‌جزئی‌دوم پیوسته‌باشند، ثابت کنید اگر u و v در معادلات کشی ـ ریمان صدق کنند، در معادلهٔ لاپلاس نیز صدق خواهند کرد (ر.ک. تمرینهای ۱۹ تا ۲۲).

۳۷ . معادلهٔ دیفرانسیل جزئی هدایت گرمای یک بعدی عبارت است از

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

نشان دهید که هرگاه f تابعی از x و صادق در معادلهٔ

$$\frac{d^2f}{dx^2} + \lambda^2 f(x) = 0$$

بوده و g تابعی از t و صادق در معادلهٔ $dg/dt + k^2\lambda^2 g(t) = 0$ باشد، آنگاه اگر

$u = f(x)g(t)$ ، معادلهٔ دیفرانسیل جزئی برقرار است. k و λ ثابت‌اند.

۳۸ . معادلهٔ دیفرانسیل جزئی یک سیم مرتعش عبارت است از

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

نشان دهید هرگاه f تابعی از x صادق در معادلهٔ $d^2f/dx^2 + \lambda^2 f(x) = 0$ و g تابعی‌از t صادق‌درمعادلهٔ $d^2g/dt^2 + a^2\lambda^2 g(t) = 0$ باشد، آنگاه‌اگر $u = f(x)g(t)$ ، معادلهٔ دیفرانسیل جزئی برقرار است. a و λ ثابت‌اند.

۳۹ . ثابت‌کنید هرگاه f و g دو تابع دلخواه‌از یک متغیر حقیقی با مشتقات دوم‌پیوسته بوده و $u = f(x + at) + g(x - at)$ ، آنگاه u در معادلهٔ دیفرانسیل جزئی سیم مرتعش داده شده در تمرین ۳۸ صدق می‌کند. (**راهنمایی.** فرض‌کنید $v = x + at$ و $w = x - at$ ؛ دراین صورت، u تابعی از v و w بوده، و v و w به‌نوبهٔ خود توابعی از x و t اند.)

۴۰ . ثابت کنید هرگاه f یک تابع دو متغیره بوده و همهٔ مشتقات جزئی f تا مرتبهٔ چهارم بر قرص بازی پیوسته باشند، آنگاه

$$D_{1122}f = D_{2121}f$$

تمرینات دوره‌ای برای فصل ۱۸

در تمرینهای ۱ تا ۶، مشتقات‌جزئی ذکر شده را بیابید.

۱ . $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y}{3y^2}; D_1f(x, y), D_2f(x, y), D_{12}f(x, y)$

۲ . $F(x, y, z) = 2xy^2 + 3yz^2 - 5xz^3; D_1f(x, y, z), D_3f(x, y, z), D_{13}f(x, y, z)$

۳ . $g(s, t) = \sin(st^2) + te^s; D_1g(s, t), D_2g(s, t), D_{21}g(s, t)$

۴ . $h(x, y) = \tan^{-1}\dfrac{x^3}{y^2}; D_1h(x, y), D_2h(x, y), D_{11}h(x, y)$

۵ . $f(u, v, w) = \dfrac{\ln 4uv}{w^2}; D_1f(u, v, w), D_{13}f(u, v, w), D_{131}f(u, v, w)$

۶ . $f(u, v, w) = w\cos 2v + 3v\sin u - 2uv\tan w; D_2f(u, v, w), D_1f(u, v, w), D_{131}f(u, v, w)$

در تمرینهای ۷ و ۸، $\partial u/\partial t$ و $\partial u/\partial s$ را به دو روش بیابید.

۷. $u = y\ln(x^2+y^2),\ x = 2s+3t,\ y = 3t-2s$

۸. $u = e^{2x+y}\cos(2y-x),\ x = 2s^2-t^2,\ y = s^2+2t^2$

۹. هرگاه $u = 3x^2y+2xy-3yz-2z^2$ ، $x = e^{3rs}$ ، $y = r^3s^2$ ، و $z = \ln 4$ ، $\partial u/\partial r$ را به‌دو روش بیابید: (آ) با استفاده‌از قاعدهٔ زنجیره‌ای؛ (ب) با جانشانیهایی برای x ، y ، و z پیش از مشتقگیری.

۱۰. هرگاه $u = e^{x^2+y^2} - \frac{3x}{y} + 3z$ ، $x = \sin\theta$ ، $y = \cos\theta$ ، و $z = \tan\theta$ ، مشتق کل $du/d\theta$ را به‌دوروش بیابید: (آ) u را پیش‌از مشتقگیری برحسب θ بیان نکنید؛ (ب) u را پیش‌از مشتقگیری برحسب θ بیان کنید.

۱۱. هرگاه $u = xy+x^2$ ، $x = 4\cos t$ ، و $y = 3\sin t$ ، مشتق کل du/dt در $t = \frac{1}{3}\pi$ را به‌دوروش‌بیابید: (آ) u را پیش‌ازمشتقگیری برحسب t بیان نکنید؛ (ب) u را پیش‌از مشتقگیری برحسب t بیان کنید.

۱۲. هرگاه $f(x,y) = x^2+ye^x$ ، مقادیر زیر را بیابید: (آ) $\Delta f(0,2)$ ، یعنی نمو f در $(0,2)$ ؛ (ب) $\Delta f(0,2)$ وقتی $\Delta x = -0.1$ و $\Delta y = 0.2$ ؛ (پ) $df(0,2,\Delta x,\Delta y)$ ، یعنی دیفرانسیل کل f در $(0,2)$ ؛ (ت) $df(0,2,-0.1,0.2)$.

۱۳. هرگاه $f(x,y,z) = 3xy^2-5xz^2-2xyz$ ، مقادیر زیر را بیابید: (آ) $\Delta f(-1,3,2)$ ، یعنی نمو f در $(-1,3,2)$ ؛ (ب) $\Delta f(-1,3,2)$ وقتی $\Delta x = 0.02$ ، $\Delta y = -0.01$ ، و $\Delta z = -0.02$ ؛ (پ) $df(-1,3,2,\Delta x,\Delta y,\Delta z)$ ، یعنی‌دیفرانسیل کل f در $(-1,3,2)$ ؛ (ت) $df(-1,3,2,0.02,-0.01,-0.02)$.

در تمرینهای ۱۴ تا ۱۸، قلمرو و برد تابع f را یافته و قلمرو f را به‌صورت ناحیهٔ سایه‌داری در R^2 رسم نمایید.

۱۴. $f(x,y) = \sqrt{4x^2-y}$

۱۵. $f(x,y) = \tan^{-1}\sqrt{x^2-y^2}$

۱۶. $f(x,y) = \sin^{-1}\sqrt{1-x^2-y^2}$

۱۷. $f(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{36-4x^2-y^2}}$

۱۸. $f(x,y) = [\![x]\!] + [\![\sqrt{1-y^2}]\!]$

در تمرینهای ۱۹ تا ۲۱، قلمرو و برد f را بیابید.

۱۹. $f(x,y,z) = \dfrac{xy}{\sqrt{z}}$

۲۰. $f(x,y,z) = \dfrac{xy+xz+yz}{xyz}$

۲۱. $f(x,y,z) = \dfrac{x}{|y|-|z|}$

۲۲. دمای یک صفحهٔ فلزی تخت در نقطهٔ (x,y) مساوی t درجه بوده و $t = x^2+2y$. همگرماها را به‌ازای $t = 0,2,4,6,8$ رسم کنید.

۲۳. به فرض آنکه $f(x) = x^2+1$ ، $g(x,y) = 2x/3y$ ، و $h(x) = 1/x$ ، مقادیر را بیابید: (آ) $(h\circ g)(-3,4)$ ؛ (ب) $g(f(3),h(\frac{1}{4}))$ ؛ (پ) $g(f(x),h(y))$ ؛ (ت) $f((h\circ g)(x,y))$.

در تمرینهای ۲۴ و ۲۵، حد داده شده را با استفاده از قضایای حدی حساب کنید.

۲۴. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,\pi/2)} \frac{xy^2+e^x}{\cos x+\sin y}$

۲۵. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,3)} \sin^{-1}\left(\frac{3x}{2y}\right)$

در تمرینهای ۲۶ تا ۲۸، حد را با یافتن $\delta > 0$ به‌ازای هر $\epsilon > 0$ که تعریف ۵۰۲۰۱۸ را برقرار کند تایید کنید.

۲۶. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(4,-1)} (4x-5y) = 21$

۲۷. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,-2)} (3x^2-4y^2) = -4$

۲۸. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(3,1)} (x^2-y^2+2x-4y) = 10$

در تمرینهای ۲۹ تا ۳۲، معین کنید حد ذکر شده وجود دارد یا نه.

۲۹. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^3}{x^2+y^2}$

۳۰. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-y^4}{x^4+y^4}$

۳۱. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^9y}{(x^6+y^2)^2}$

۳۲. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^3+4x^2y}{x^2+y^2}$

در تمرینهای ۳۳ تا ۳۷، پیوستگی f را مورد بحث قرار دهید.

۳۳. $f(x,y) = \dfrac{x^2+4y^2}{x^2-4y^2}$

۳۴. $f(x,y) = \dfrac{1}{\cos\frac{1}{2}\pi x} + \dfrac{1}{\cos\frac{1}{2}\pi y}$

۳۵. $f(x,y) = \dfrac{1}{\cos^2\frac{1}{2}\pi x + \cos^2\frac{1}{2}\pi y}$

۳۶. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4-y^4}{x^4+y^4} & \text{اگر } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{اگر } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ **(راهنمایی.** ر.ک. تمرین ۳۰).

۳۷. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^3}{x^2+y^2} & \text{اگر } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{اگر } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ **(راهنمایی.** ر.ک. تمرین ۲۹).

۳۸. اگر $w = x^2y-y^2x+y^2z-z^2y+z^2x-x^2z$ ، نشان دهید که

$$\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

۳۹. (آ) $f_2(x,0)$ را درصورتی بیابید که $x \neq 0$ ؛ و (ب) $f_2(0,0)$ را درصورتی بیابید که

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{12x^2y-3y^2}{x^2+y} & \text{اگر } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{اگر } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

در تمرینهای ۴۰ و ۴۱، با نشان دادن اینکه تعریف ۲۰۵۰۱۸ برقرار است، ثابت کنید تابع **f** در تمام نقاط قلمروش مشتقپذیر است.

۴۰ . $f(x,y)=3xy^2-4x^2+y^2$ ۴۱ . $f(x,y)=\dfrac{2x+y}{y^2}$

۴۲ . فرض کنید یک زاویهٔ حادهٔ مثلث قائم‌الزاویه‌ای α رادیان بوده و $\sin\alpha$ با a/c معین می‌شود، که در آن a cm طول ضلع مقابل به‌این زاویه و c cm طول وتر باشد. اگــر در سنجش a مساوی 3.52 و c مساوی 7.14 بدست آمده باشد، و امکان خطای 0.01 اینچ برود، خطای ممکن در محاسبهٔ $\sin\alpha$ از این سنجش را بیابید.

۴۳ . یک نقاش برای‌رنگ‌زدن‌به‌چهاردیوار و سقف یک اطاق متر مربعی 2 دلار می‌گیرد. اگر ابعــاد سقـف 4 m و 5 m بوده، ارتفــاع اطــاق 3 m باشد، واین سنجشها تا 0.5 cm درست باشند، بــا استفاده از دیفرانسیل کل، خطای ماکزیمم در تخمین دستمزد کار از این سنجشها را به‌طور تقریبی بیابید.

۴۴ . در یــک لحظه، طــول یک ضلع مستطیلی 6 cm بوده و به میزان 1 cm/sec افزایش می‌یابد و طول ضلع دیگر مستطیل 10 cm بوده و به میزان 2 cm/sec کاهش می‌یابد. میزان تغییر مساحت مستطیل را در لحظهٔ داده شده بیابید.

۴۵ . شعاع استوانهٔ مستدیر قائمی به میزان 5 cm/min کاهش یافته و ارتفاع آن به‌میزان 12 cm/min افزایش می‌یابد. میزان تغییر حجم در لحظه‌ای که شعاع 20 cm و ارتفاع 40 cm است را بیابید.

۴۶ . شیب خط مماس‌بر منحنی فصل مشترک سطح $25x^2-16y^2+9z^2-4=0$ با صفحهٔ $x=4$ در نقطهٔ $(4,9,10)$ را بیابید.

۴۷ . با استفاده از قانون گاز کامــل (ر.ک. مثال ۵، بخش ۴۰۱۸) به‌ازای $k=5$، میزان تغییر فشــار در لحظه‌ای کــه حجم گاز 80 cm³ و دما 75° است را درصورتی بیابید کــه حجم به میزان 3 cm³/min افزایش یافته و دما به‌میزان 0.3° در دقیقه افزایش یابد.

۴۸ . تحقیق کنید که $u(x,y)=(\sinh x)(\sin y)$ در معادلهٔ لاپلاس در R^2

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0$$

صدق می‌کند.

۴۹ . هرگاه f یک تابع مشتقپذیراز متغیر u باشد، قرار دهید $u=x^2+y^2$ و ثابت کنید $z=xy+f(x^2+y^2)$ در معادلهٔ

$$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=y^2-x^2$$

صدق می‌کند.

۵۰ . معادلهٔ لاپلاس در مختصات قطبی عبارت است از

$$r^2\frac{\partial^2u}{\partial r^2}+r\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2u}{\partial\theta^2}=0$$

تحقیق کنید $u(r,\theta)=r^n\sin n\theta$، که در آن n ثابت است، درایــن معادله صدق می‌کنــد.

۵۱ . تحقیق کنید که $u(x,y,z)=e^{3x+4y}\sin 5z$ در معادلهٔ لاپلاس در R^3

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}=0$$

صدق می‌کند.

۵۲ . تحقیق کنید $u(x,t)=A\cos(kat)\sin(kx)$، کــه در آن A و k ثابتهای دلخــواه هستند، در معادلهٔ دیفرانسیل جزئی برای سیم مرتعش

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}$$

صدق می‌کند.

۵۳ . تحقیق کنید که

$$u(x,t)=\sin\frac{n\pi x}{L}\,e^{(-n^2\pi^2k^2/L^2)t}$$

در معادلهٔ دیفرانسیل جزئی هدایت گرمای یک بعدی

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}$$

صدق می‌کند.

۵۴ . فرض کنید

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{اگر } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{اگر } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

ثابــت کنیــد $D_1f(0,0)$ و $D_2f(0,0)$ موجودنــد ولــی f در $(0,0)$ مشتقپذیر نیست.

راهنمایی. ر.ک. مثال ۶، بخش ۲۰۱۸، و تمرین ۱۰ در تمرینات ۳۰۱۸).

۵۵. فرض کنید

$$f(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} & \text{اگر } (x,y,z)\neq(0,0,0)\text{،}\\ 0 & \text{اگر } (x,y,z)=(0,0,0)\text{،}\end{cases}$$

ثابت کنید f در $(0,0,0)$ مشتقپذیر است.

۵۶. فرض کنید تابع f به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{e^{-1/x^2}y}{e^{-2/x^2}+y^2} & \text{اگر } x\neq 0\text{،}\\ 0 & \text{اگر } x=0\text{،}\end{cases}$$

ثابت کنید f درمبداء ناپیوسته است.

۵۷. برای تابع تمرین ۵۶، ثابت کنید $D_1f(0,0)$ و $D_2f(0,0)$ هر دو وجود دارند.

۵۸. هرگاه f تابع مشتقپذیری از x و y بوده و $u=f(x,y)$، $x=r\cos\theta$، و $y=r\sin\theta$، نشان دهید که

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$