

## به نام خالق یکتا

# آخرین تکلیف

۱. معادله  $y'' + y' - \left(1 - \frac{x}{5}\right)y = x$ ،  $1 \leq x \leq 3$  و شرایط  $y(1) = 2$  و  $y(3) = -1$  را با انتخاب تقریب های  $\frac{dy}{dx} = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$  و  $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$  و  $h = 0.5$  به یک دستگاه معادلات خطی مرتبه اول که در آن  $y_1, y_2, y_3$  مجهول هستند تبدیل و سپس دستگاه حاصل را حل کنید.

۲. همان مساله تمرین ۱ را با  $h = 0.2$  به یک دستگاه که در آن  $y_1, y_2, \dots, y_9$  مجهول هستند تبدیل کنید. نیازی به حل دستگاه  $Ax = b$  به دست آمده نیست، اما باید ماتریس  $A$  و بردارهای  $x$  و  $b$  به صورت کامل مشخص شوند.

توجه: به دانشجویانی که حل دستگاه را توسط یکی از نرم افزارهای ریاضی به طور کامل انجام دهند، امتیاز مناسب و اضافی داده خواهد شد.

۳. معادله لاپلاس  $u_{xx} + u_{yy} = 0$  در مستطیل  $0 \leq x \leq 10$ ،  $0 \leq y \leq 6$  و تحت شرایط

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, 6) = 0, \quad u(0, y) = 0, \quad u(10, y) = 100$$

را با توجه به تقریب های

$$u_{xx} = \frac{u(x_{i+1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i-1}, y_j))}{h^2}$$

$$u_{yy} = \frac{u(x_i, y_{j+1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j-1}))}{\delta^2}$$

یکبار با  $h = \delta = 2$  و بار دیگر با  $h = \delta = 1$  به دستگاه های معادلات خطی تبدیل کنید و البته در هر مرحله عوامل شرکت کننده در دستگاه های به دست آمده را به طور صریح مشخص کنید. نیازی به حل دستگاه های به دست آمده نیست، ولی اگر به کمک نرم افزارهای ریاضی آن ها را حل کنید امتیازهای افزوده خواهید گرفت.

۴. با استفاده از تبدیل فوریه و خواص آن معادله رسانش گرمای  $u_t + te^{-|x|}u_{xx} = 0$ ، در ناحیه  $-\infty < x < +\infty$

و  $t \geq 0$ ، و تحت شرط  $u(x, 0) = \frac{1}{1+x^2}$  را به یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه اول همراه با یک شرط اولیه تبدیل کنید.

نیازی به حل معادله نیست، اما اگر جواب عمومی معادله را تشخیص دهید، امتیاز افزوده خواهید گرفت.

۵. با استفاده از تبدیل فوریه و خواص آن معادله موج  $u_{xx} = u_{tt}$ ، در ناحیه  $t \geq 0$ ،  $-\infty < x < +\infty$  و تحت شرایط  $u_t(x, 0) = \frac{1}{x^2 + \epsilon x + 13}$ ،  $u(x, 0) = \frac{x}{(1+x^2)^2}$  را به یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم خطی همگن، همراه با شرایط اولیه تبدیل کنید. نیازی به حل معادله نیست، اما اگر جواب عمومی معادله را تشخیص دهید، امتیاز افزوده خواهید گرفت.

۶. اگر بدانیم تبدیل فوریه تابع  $f(x) = e^{-ax^2}$ ،  $a > 0$ ، تابع  $\mathcal{F}_f(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{\lambda^2}{4a}}$  است، در اینصورت تبدیل فوریه توابع زیر را به دست آورید:

$$g(x) = -2axe^{-ax^2}$$

$$h(x) = e^{-a(x^2 - \epsilon x + 9)}$$

$$k(x) = f''(x)$$

$$u(x) = x^2 e^{-ax^2}$$

$$v(x) = x^2 f'(x)$$

$$w(x) = x f''(x) - x^2 f'(x)$$

موفق باشید