مقدمه‌ای بر مدل‌سازی ریاضی

گردآوری و تدوین:

دکتر محمدتقی جهاندیده

استادیار دانشکده‌ی علوم ریاضی

دانشگاه صنعتی اصفهان

تقدیم به همسرم

پیش‌گفتار

هر چند در قرون گذشته و اخیر مدل‌سازی ریاضی تقریباً مورد استفاده‌ی تمام دانشمندان و مهندسین بوده است، اهمیت آن برای یادگیری و تفحص تنها در طول چند دهه‌ی اخیر مورد تأکید قرار گرفته است. شواهدی که در این خصوص می‌توان آورد، مقالاتی است که اخیراً در چندین کنگره و کنفرانس بین‌المللی در خصوص مدل‌سازی ریاضی و آموزش مدل‌سازی ریاضی ارائه شده‌است. به‌علاوه انتشار یافتن دهها مجله‌ی مربوط به مدل‌سازی ریاضی و آموزش مدل‌سازی ریاضی در دو دهه‌ی اخیر نیز دلیلی برای اثبات این ادعا است.

این اهمیت باعث شده‌است که تاکنون کتابهایی بسیار عالی در موضوع مدل‌سازی ریاضی انتشار یابند، که به‌طورکلی می‌توان آنها را به سه دسته تقسیم نمود:

دسته‌ی اول کتابهایی هستند که مدلهای ریاضی مربوط به یک رشته‌ی خاص را مدنظر قرار می‌دهند. به‌عنوان مثال می‌توان از کتابهای فیزیک ریاضی، ریاضی زیست، اقتصاد ریاضی، و روانشناسی ریاضی نام برد. به‌علاوه کتابهای دیگری مثل مدلهای ریاضی دینامیک جمعیت، مکانیک زیست، منابع آب، کنترل جمعیت، نیز در این دسته قرار می‌گیرند.

دسته‌ی دوم کتابهایی هستند که مدل‌سازی ریاضی را با توجه به تکنیک‌های خاص ریاضی مدنظر قرار می‌دهند. این تکنیک‌ها ممکن است متعلق به جبرخطی، معادلات دیفرانسیل معمولی، معادلات با مشتقات جزئی، معادلات تفاضلی، نظریه‌ی گراف، حساب دیفرانسیل تغییرات، برنامه‌سازی‌های خطی و غیرخطی، برنامه‌سازی‌های پویا و غیره باشند. در اینگونه کتابها معمولاً مسائل مربوط به بسیاری از شاخه‌های علوم و مهندسی مطرح می‌شوند، اما مدلهای ریاضی ساخته شده در آنها منحصراً به یکی از تکنیک‌های فوق مربوط می‌شوند.

دسته‌ی سوم کتابهایی هستند که ساختن مدلهای ریاضی را روی موضوعهای خاص متمرکز می‌کنند. یکی از مهمترین اهداف این کتابها این است دانشجویان پس از درک مدلهای ساخته شده در آنها بتوانند در خصوص مدل‌سازی موضوعهای دیگر از تجربه‌ی به‌دست آمده استفاده کنند.

با وجود اینکه در مدل‌سازی ریاضی بسیاری از مسائل جهان واقعی غالباً نیاز به استفاده از چندین تکنیک ریاضی است، در عمل تنها یکی از این تکنیک ها است که بر جریان مدل‌سازی غالب است. بنابراین، تشخیص تکنیک ریاضی مناسب برای استفاده در مدل‌سازی از اهمیت خاصی برخوردار می‌شود. هدف این کتاب ارائه راهکارهایی است که به‌کمک آنها بتوان در جهت تشخیص و انتخاب مدلهای ریاضی مناسب در مدل‌سازی یک پدیده گام برداشت. در جهت رسیدن به این هدف مطالب این کتاب به‌صورت زیر آورده می‌شود:

در فصل اول اصول پایه‌ی مدل‌سازی ریاضی توضیح داده شده‌است. برای شرح بیشتر اصول پایه‌ی مدل‌سازی ریاضی و مشاهده‌ی تنوع تکنیک‌های به‌کاررفته در ساختن مدلهای ریاضی، فصل دوم به ارائه‌ی مثالهایی از مدلهای ساخته شده و توضیح تکنیک‌های به‌کاررفته در ساختن آنها اختصاص یافته است.

در فصل سوم روش‌های تحلیلی کلی در ساختن مدلهای ریاضی آورده شده و با ارائه‌ی مثالهای مختلف نحوه‌ی کاربرد این روش‌ها توضیح داده شده‌است. البته باید در نظر داشت که دادن یک الگوی جامع برای ساختن مدلهای ریاضی بسیار دشوار است.

فصل چهارم به پایه‌گذاری ساختن مدلهای ریاضی به‌کمک تفسیر داده‌های متکی بر تجربه اختصاص یافته و در طول آن برازش مدل به‌کمک این داده‌ها مورد بحث قرار می‌گیرد. چنان‌که خواهیم دید یکی دیگر از مهم‌ترین عوامل برای ساختن مدلهای مناسب ریاضی، داشتن مهارت در تفسیر درست داده‌ها و انجام برازش مدل است.

بالاخره در فصل پنجم تعدادی از تمرین‌های دشوار مدل‌سازی ریاضی مطرح خواهد شد. برای تمرین روی مطالب گفته شده در فصول قبل، بعضی از این تمرینها به‌طور کامل حل و مدلهای ساخته شده در آنها مورد تفسیر قرار می‌گیرند و حل بقیه بر عهده‌ی دانشجویان گذاشته می‌شود.

مطالب این کتاب برگزیده‌ای است از مطالب آمده در کتابهای [۱]، [۲]، [۳]، [۴]، [۵] و [٦]. در ضمن بسیاری از مثالهای ارائه شده از این مراجع یا کتابهای مختلف درسی دوره‌ی کارشناسی ریاضی انتخاب شده است. نحوه‌ی انتخاب موضوعات به‌گونه‌ای است که دانشجویان بتوانند با کار روی آنها، اطمینان لازم را برای مبادرت به مدل‌سازی ریاضی مسائل جدی‌تر و چالش انگیزتر کسب کنند.

قسمت‌های مختلف کتاب بارها تصحیح و بازنویسی شده است. جا دارد از دانشجویان دانشگاه صنعتی اصفهان که، در طول فراگیری درس مدل‌سازی ریاضی، در دوره‌های مختلف، در غلط‌گیری این کتاب کمک زیادی کردند صمیمانه تشکر کنم. همچنین از کارکنان مرکز نشر و چاپخانه‌ی دانشگاه صنعتی اصفهان سپاسگزارم، به‌ویژه از آقای مهندس سید محسن مرندی سرپرست این مرکز و سرکار خانم زحل شیروانی که با دقت و وسواس زیاد در صفحه‌آرایی و چاپ بهتر کتاب کمک کردند تشکر می‌کنم. مسئولیت تمامی کمبودها و غلط‌های احتمالی باقیمانده برعهده‌ی اینجانب است. قضاوت در مورد این مجموعه را به صاحب‌نظران و دانشجویان می‌سپارم. بدیهی است جز پروردگار یکتا هیچ چیزی بی عیب و نقص نیست. نظرات و انتقادات همکاران و دانشجویان گرامی را در بهتر شدن کتاب و کاستن از عیوب آن، به دیده‌ی منت ارج می‌نهم.

محمدتقی جهاندیده

فهرست مطالب

فصل ۳ ساختن مدلهای ریاضی

فصل ۴ برازش مدل

فصل ۵ مثالهای تکمیلی از مدل‌سازی‌های ریاضی

فصل ۱

فرآیند مدل‌سازی

۱ – ۱ مقدمه

امروزه وجود کامپیوترهای پر قدرت و سریع باعث شده است تا مسائل و فعالیت‌های پیچیده‌ی مطرح در صنعت، تجارت، علوم، و بسیاری از شاخه‌های مهندسی، که قبلاً حل آنها امکان پذیر نبوده است، به زبانهای ریاضی و کامپیوتری ترجمه شده و امید به حل پذیری آنها بسیار و بسیار افزایش یابد. هر چند که تاریخ استفاده از ریاضیات برای پاسخگویی به مسائل مطرح در دنیای واقعی به زمانهای بسیار قدیم باز می‌گردد، وجود این کامپیوترها باعث شده است تا کاربرد ریاضی و آمار در دهه‌های اخیر رشد چشمگیری یافته و فرصت‌های فراوان شغلی و تحقیقاتی در بسیاری از زمینه‌ها ایجاد شود. بنابراین، نیاز به افرادی که دارای قابلیت های لازم برای استفاده از این فرصت ها دارند کاملاً محسوس است. اینکه چه مهارت‌هایی باید آموخته شود تا به قابلیت‌های مورد نطر دست یافت، تدریجاً در فصل‌های بعد شرح داده خواهند شد.

نکته‌ای که باید در شروع بحث متذکر شد این است که یادگیری به‌کاربردن مفاهیم ریاضی فعالیتی است که با یادگیری مفاهیم ریاضی متفاوت است. در واقع مهارت‌هایی که باید برای موفق بودن در کاربرد علم ریاضی آموخت با مهارت‌های مورد نیاز برای اثبات قضایا و حل معادلات ریاضی کاملاً متفاوت است. به همین دلیل روش ارائه‌ی مطالب در این کتاب با روش معمول در نوشتن کتابهای ریاضی اختلاف دارد. در اینجا مطالب به نحوی ارائه شده است که به‌صورت آموزش یک تئوری نباشد و تنها در مواردی به ذکر چند اصل راهنمایی کننده بسنده می‌شود. چنانکه خواهیم دید، مشکل بودن مدل‌سازی ریاضی در یادگیری و درک مفاهیم ریاضی شرکت کننده در مدل نیست بلکه مشکل آنجا

است که چگونه و کجا اطلاعات ریاضی مورد نیاز به‌کاربرده شوند.

در مدل‌سازی ریاضی مسائل مختلفی که در دنیای واقعی وجود دارد مورد توجه قرار می‌گیرد و هدف اصلی این است که هر مسأله به‌صورت یک مسأله‌ی ریاضی ترجمه شود. این کار در حقیقت ماهیت اصلی مدل‌سازی ریاضی است که می‌تواند شامل مباحثی برای روشن شدن مسأله، متغیرهای مسأله، حدسیات، تخمین‌ها، و سلسله عملیات لازم باشد و البته همه‌ی این موارد نیاز به صرف وقت و تحمل هزینه است.

در صنعت برق مثالهای زیادی می‌توان یافت که در آنها چگونگی کاربرد مدلهای ریاضی دیده می‌شوند. مسائل مربوط به جریان آب، برق، نفت، و گاز و ضرورت تأمین آنها برای رسیدن به تقاضاهای روزافرون، نیاز به ریاضیات برای رسیدن به جوابهای لازم و مفید را روشن می‌سازد. جنبه‌های مخاطره آمیز تأمین برق توسط انرژی هسته‌ای، که امروزه مورد توجه قرار گرفته است، نیز با به‌کاربردن مدلهای ریاضی و آماری مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌گیرد.

موضوع دیگری که در آن مدل‌سازی ریاضی نقش عمده‌ای ایفا می‌کند برنامه‌ریزی است. بسیاری از ادارات تابعه‌ی دولتهای مرکزی برای پیش‌بینی وضعیت اموری چون حمل و نقل، آموزش، ایجاد امنیت و فراهم کردن مراکز تفریحی به هنگام افزایش جمعیت یا تغییر ساختارهای اجتماعی، نیازمند به مشاوره با ریاضیدانانی هستند که بتوانند آنها را در این امور راهنمایی کنند.

۱ – ۲ مثالهای ساده‌ای از مدل‌سازی ریاضی

مسائل زیر را در نظر بگیرید:

(الف) — ارتفاع یک برج، مثلاً برج مخابرات در شهر تهران را (بدون آنکه از آن بالا بروید) اندازه بگیرید.

(ب) — پهنای یک رودخانه یا یک کانال را (بدون آنکه از آن عبور کنید) پیدا کنید.

(ج) — جرم زمین را (بدون استفاده از یک ترازو) پیدا کنید.

(د) — درجه‌ی حرارت در سطح و مرکز خورشید را (بدون آنکه میزان الحراره‌ای در آنجا قرار دهید) تعیین کنید.

(ه) — در یک سال زراعی میزان محصول گندم در ایران را (بدون آنکه همه‌ی گندمها را درو کرده و وزن کنید) تخمین بزنید.

(و) — حجم خون در بدن یک شخص را (بدون آنکه تمام خون موجود در بدن او را تا سر حد مرگ وی بیرون بکشید) اندازه‌گیری کنید.

(ز) — جمعیت چین در سال ۲۰۲۰ را (بدون آنکه تا آن زمان صبر کنید) تخمین بزنید.

(ح) — مدت زمانی که طول می‌کشد تا یک ماهواره، که در فاصله‌ی ۱۰,۰۰۰ کیلومتری از سطح زمین قرار دارد، مداری را به‌طور کامل بپیماید تعیین کنید (بدون آنکه چنین ماهواره‌ای را در داخل آن مدار قرار دهید).

(ط) — تأثیر کاهش ۳۰٪ مالیات بر در آمد بر روی اقتصاد ایران را (بدون آنکه این کاهش اعمال شود) تعیین کنید.

(ی) — در شرایطی که کارکرد یک نوع تفنگ بستگی به ۱۰ پارامتر، که هر کدام از آنها می‌تواند ۱۰ مقدار را اختیار کند، داشته باشد (بدون آنکه اقدام به ساخت آن کنید) آنرا طوری طراحی کنید که دارای بهترین کارکرد باشد.

(ک) — عمر متوسط یک لامپ روشنایی ساخته شده در یک کارخانه‌ی محلی را (بدون روشن نگه داشتن هر یک از آنها تا سرحد از کار افتادن) تخمین بزنید.

(ل) — میزان کل مطالباتی را که یک شرکت بیمه در سال آینده باید بپردازد (بدون آنکه تا پایان سال آینده صبر کنید) تقریب بزنید.

کلیه‌ی این مسائل و هزاران مسأله‌ی مشابه توسط مدل‌سازی‌های ریاضی یا تاکنون حل شده‌اند و یا اینکه می‌توانند حل شوند. برای حل چنین مسایلی از روشی مشابه با آنچه که در حل یک مسأله‌ی جبری توصیفی به‌کارمی‌رود استفاده می‌شود. در واقع در هر جا که می‌خواهیم مقدار یا اندازه‌ی شیء یا کمیتی را پیدا کنیم که مستقیماً قابل اندازه‌گیری نیست، ابتدا علایمی مثل x ، y ، z ، $\cdots$ را برای نمایش شیء و دیگرانی که همراه آن تغییر می‌کنند معرفی می‌کنیم، سپس به‌کمک قوانین فیزیک، شیمی، بیولوژی یا اقتصاد و به‌کاربردن هر اطلاعاتی که در دسترس ما است روابط بین این متغیرها را تشخیص می‌دهیم. باید توجه داشت که بعضی از این متغیرها قابل اندازه‌گیری با مقادیر معلوم هستند و اندازه‌ی بعضی دیگر بایستی مورد جستجو قرار گیرند. برای این کار از آن روابط ریاضی به‌دست آمده که متغیرهای مجهول را بر حسب متغیرهای قابل اندازه‌گیری و معلوم بیان می‌کنند استفاده می‌کنیم.

در این فرآیند روابط ریاضی به‌دست آمده می‌توانند به‌صورت معادلات جبری، غیرجبری، دیفرانسیل، گسسته، انتگرالی، دیفرانسیل تصادفی و یا حتی به‌صورت نامعادلات بیان شوند. بنابراین،

- برای مورد (الف)، سعی می‌کنیم ارتفاع برج را بر حسب چند فاصله و زاویه بیان

کنیم که بر روی زمین قابل اندازه‌گیری باشند.

• برای مورد (ب)، سعی می‌کنیم پهنای رودخانه را بر حسب چند فاصله و زاویه بیان کنیم که در آن سمتی که ما قرار گرفته‌ایم قابل اندازه‌گیری هستند.

• برای مورد (ج)، سعی می‌کنیم جرم زمین را برحسب چند جرم معلوم و چند فاصله‌ی قابل محاسبه بیان کنیم.

• برای مورد (د)، سعی می‌کنیم درجه‌ی حرارت در مرکز و روی سطح خورشید را بر حسب خواص نوری که از سطح آن دریافت می‌شود بیان کنیم.

• برای مورد (ه)، ابتدا سطح زیر کشت گندم را پیدا کرده و سپس سعی می‌کنیم میانگین محصول در هر هکتار را با درو کردن و تعیین وزن محصول در نواحی مشخصی تخمین بزنیم.

• برای مورد (و)، ابتدا مقداری گلوکز را در رگهای خون تزریق کرده و سپس میزان افزایش غلظت قند خون را پیدا می‌کنیم.

• برای مورد (ز)، به‌کمک اطلاعات به‌دست آمده از سرشماریهای قبلی میزان جمعیت را برونیابی می‌کنیم و یا اینکه مدلی را طرح و ارائه می‌کنیم که میزان جمعیت را به‌عنوان تابعی از زمان بیان می‌کند.

• برای مورد (ح)، سعی می‌کنیم با استفاده از قانون نیوتن رابطه‌ای را بین دوره‌ی تناوب مدار و ارتفاع ماهواره در بالای سطح زمین به‌دست آوریم.

• برای مورد (ط)، تأثیر کاهش‌هایی که در گذشته انجام گرفته است مورد امتحان قرار می‌دهیم و یا اینکه یک مدل ریاضی طراحی می‌کنیم که رابطه‌ی بین کاهش مالیات بر در آمد، قدرت خرید هر فرد، و تأثیرات آن بر سودآوری، تورم و غیره را بیان می‌کند.

• برای مورد (ی)، قدرت پرتاب توسط تفنگ را براساس قوانین مربوط به آتشباری نیروهای محرکه، حرکت گازها و حرکت گلوله در داخل لوله‌ی تفنگ برآورد نموده و براساس آن به طراحی تفنگ مود نظر می‌پردازیم.

• برای مورد (ک)، یک نمونه‌ی تصادفی از لامپها را در اختیار گرفته، عمر مفید آنها را پیدا کرده و مدلهای استنباط آماری را به‌کارگرفته تا عمر مفید مجموعه‌ی بزرگتری از لامپها را تخمین بزنیم.

• برای مورد (ل)، مدلهای احتمال برای امید به زنده ماندن افراد را مورد استفاده قرار می‌دهیم.

اکنون مسأله‌ی (ز) را در نظر بگیرید. برای بیان تعداد جمعیت بر حسب زمان احتیاج به چند فرض داریم. به‌عنوان یک فرض اساسی رشد جمعیت در یک واحد زمان را برابر با میزان افزونی تعداد موالید در مقابل تعداد افراد متوفی در آن واحد زمان قرار می‌دهیم. همچنین فرض می‌کنیم که تعداد موالید و تعداد مرگها متناسب با تعداد جمعیت هستند. این فرضهایک مدل ریاضی را معرفی می‌کنند که حل آن تعداد جمعیت را به‌عنوان تابعی از زمان بیان می‌کند. با مقایسه‌ی پیش‌بینی‌های انجام شده تو سط مدل و تعداد واقعی جمعیت در گذشته به قبول یا اصلاح مدل می‌پردازیم. اگر تفاوت زیادی در این مقایسه دیده نشود و اگر تغییرات چشمگیری در نرخ زاد و ولد و مرگ و میر رخ ندهد، می‌توانیم از پیش‌بینی‌های مدل برای تخمین جمعیت در آینده استفاده کنیم. درغیراین‌صورت مدل را با توجه به مغایرت‌های مشاهده شده اصلاح کرده و تا آنجا به اصلاحات فرضها می‌پردازیم که بین مشاهدات و پیش‌بینی‌ها تنها اختلاف ناچیزی پدیدار باشد.

برای بحث بیشتر مسأله‌ی (ی) را نیز در نظر بگیرید. برای این مسأله باید به فرضهای موجود در قوانین فیزیک، شیمی و دینامیک گازها استناد نمود. قوانین مربوط به بقای انرژی و نیروی حرکت آنی، قوانین مربوط به آتشباری نیروهای محرکه، و قوانین مربوط به حرکت گازهای تولید شده از جمله قوانینی هستند که در حل این مسأله مورد نیاز می‌باشند. به‌علاوه این قوانین باید به زبان ریاضی ترجمه شده و بر حسب معادلات یا معادلات دیفرانسیلی بیان شوند تا یک مدل ریاضی به‌دست آید. پیش‌بینی‌های این مدل ریاضی باید با مشاهدات موجود مقایسه شده تا در صورت لزوم مدل اصلاح شود. به محض اینکه مدل صحیح به‌دست آمد، لزومی به آزمایش‌های بعدی نیست و بهترین تفنگ ممکن می‌تواند به‌طور نظری پیدا شود.

در خصوص موارد (ک) و (ل)، ارائه‌ی تابع چگالی، تابع توزیع، یا تابع مولد گشتاور متغیرهای تصادفی شرکت کننده، هر کدام می‌تواند به‌عنوان مدلی برای پاسخ به سؤالات مطرح شده به حساب آید. در صورتی‌که دسترسی به این توابع به آسانی امکان پذیر نباشد، ارائه‌ی مدل‌هایی برای برآورد آماره‌های مربوط، هنوز می‌تواند برای پاسخگویی به سؤالات مفید واقع شود.

آنچه که در فوق آورده شده است تا حدودی توضیح می‌دهد که منظور از مدل‌سازی ریاضی چیست و چرا این نوع مدل‌سازی مفید است. مثلاً به‌جای مواجه شدن با یک برج یک رودخانه و یا بدن انسان می توان به کار با معادلات ریاضی روی یک کاغذ پرداخت. در این راستا مسلماً هنوز به محاسبات مختلف نیازمند هستیم، اما باید سعی شود تا تعداد

این محاسبات در حداقل ممکن نگه داشته شود و البته هر مدل‌سازی ریاضی خود می‌تواند مناسب‌ترین اندازه‌گیری‌های مورد نیاز را پیشنهاد کند.

۱–۳ روش‌های مدل‌سازی ریاضی

در دنیای امروز دانشمندان، مهندسین، و اقتصاددانانی که روی انواع مسائل مختلف کار می‌کنند بر این باورند که طراحی مدلهای ریاضی برای سیستمهای تحت مطالعه یکی از مفیدترین گامها در تجزیه و تحلیل و درک بهتر آن سیستم ها است. برای انجام این مهم، ابتدا شرح ساده‌ای از مسأله ارائه می‌شود تابتوان معادلات مربوط را طرح کرد و سپس آن معادلات را برای پیش‌بینی تحولات در ارتباط با سیستم مورد حل و بحث قرار می‌دهند. به عبارت دیگر مدل‌سازی ریاضی عبارت است از ترجمه‌ی مسائل موجود در دنیای واقعی به مسائل ریاضی، حل آن مسائل ریاضی، و تفسیر جواب های به‌دست آمده به زبان دنیای واقعی (شکل ۱ —۱).

مساله در دنیای واقعی
↓
مساله در دنیای ریاضی
↓
جواب مساله در دنیای ریاضی
↓
تفسیر جوابهای مدل
↓
بازگشت به مساله در دنیای واقعی

شکل ۱ —۱ فرآیند مدل‌سازی ریاضی در یک نگاه کلی

یک مسأله‌ی مطرح در دنیای واقعی با همه‌ی کلیت آن به ندرت می‌تواند به یک مسأله‌ی ریاضی ترجمه شود و حتی اگر بتوان آن را ترجمه نمود، این امکان وجود دارد که حل مسأله‌ی ریاضی به‌دست آمده بسیار مشکل و یا این که غیرممکن باشد. در چنین شرایطی ضروری به نظر می‌رسد که مسأله را به‌کمک فرضهای مناسب ساده‌تر کرد و یا این که آن‌را با مسأله‌ی دیگری تقریب بزنیم که جوابهای آن با جوابهای مسأله‌ی اولیه بسیار نزدیک است و در عین حال قابل تبدیل به یک مدل ریاضی مناسب و حل پذیراست. در این راستا، ابتدا مشاهدات خاصی را درباره‌ی رفتار پدیده‌ی مورد نظر انجام می‌دهیم و عواملی را که در این مشاهدات درگیر هستند، شناسایی می‌کنیم. معمولاً نمی‌توانیم تمام عوامل درگیر در این رفتار را در نظر بگیریم و یاحتی شناسایی کنیم. بنابراین فرضها را ساده‌تر می‌کنیم تا بعضی از عوامل حذف شوند. به‌عنوان مثال، در زمان مطالعه‌ی تأثیر

تشعشعات منتشر شده‌ی ناخواسته از یک نیروگاه هسته‌ای، ممکن است از در نظر گرفتن برودت هوا صرف‌نظر کنیم. به‌عنوان مثالی دیگر، در موقع مطالعه‌ی حرکات سیارات، خورشید و سیارات را به‌عنوان اجرام نقطه‌ای در نظر گرفته و ساختمانها و اندازه‌های آنها را نادیده می‌گیریم. به‌عنوان سومین مثال، برای مطالعه‌ی حرکت یک مایع، حرکت آن‌را پیوسته فرض نموده و ماهیت گسسته‌ی آن را بر حسب ساختمان مولکولی نادیده می‌گیریم.

بعد از انتخاب متغیرهای مسأله و فرضهای مناسب، روابط بین عوامل انتخاب شده را حدس می‌زنیم و یک مدل اولیه می‌سازیم.

به‌محض ساخته شدن مدل، تجزیه و تحلیل‌های مورد نظر را روی مدل انجام می‌دهیم تا به نتایجی در مورد مدل دست یابیم. توجه کنید که این تجزیه و تحلیل‌ها به مدل ساخته شده بر می‌گردد و نه به مسأله یا سیستم مورد بحث در دنیای واقعی. در واقع به‌دلیل آنکه در جهت ساختن مدل شرایط را ساده‌تر کرده‌ایم و مشاهداتی که مدل روی آن ساخته شده دارای خطاها و محدودیت‌هایی می‌باشد، باید قبل از هر استنباطی روی مسأله‌ی مورد بحث در دنیای واقعی این کاستی‌ها را به‌طور متناسب به حساب بیاوریم. شکل ۱—۲ اصلاح شکل ۱—۱ با توجه به توضیحات بالا است.

پدیده در دنیای واقعی
↓
تقریب زدن بر اساس تجربه و درک موقعیت
↓
مدل در دنیای واقعی
↓
انتخاب نمادها، فرضها، و استفاده از قوانین علمی موجود
↓
مدل در دنیای ریاضی
↓
حل مدل بر اساس تجربیات و روش های موجود یا ابتکاری در ریاضی
↓
نتایج حاصل
↓
مقایسه‌ی نتایج با پدیده در دنیای واقعی

شکل ۱—۱ فرآیند مدل‌سازی ریاضی با جزئیات بیشتر

اگر مقایسه رضایت بخش نباشد، مدل را با اصلاح فرضها یا با تجدید نظر در ساده‌سازی‌های مسأله تغییر می‌دهیم و یا این که به دنبال ساختار دیگری برای مدل‌سازی ریاضی می‌گردیم. این موضوع، هر مدل‌ساز را به رعایت نکات زیر در حل مسائل به‌کمک ساختن مدلهای ریاضی راهنمایی می‌کند:

- پدیده‌ی مورد بحث در دنیای واقعی را تا سر حد امکان شناسایی کنید. کلیه‌ی شاخص‌های مربوط به موقعیت مسأله را پیدا کنید و جنبه‌هایی که خارج از موضوع هستند و یا تأثیرگذاری آنها روی موقعیت کمترین است شناسایی کنید. تشخیص این که چه جنبه‌هایی باید در نظر گرفته شوند و از چه جنبه‌هایی می‌توان صرف‌نظر کرد، حایز اهمیت است.

- در باره‌ی کلیه‌ی قوانین فیزیک، شیمی، زیست شناسی، اقتصاد، و غیره که ممکن است با پدیده‌ی مورد بحث در ارتباط باشند فکر کنید. اگر ضرورت دارد به جمع‌آوری اطلاعات مرتبط با مسأله پرداخته و سپس به‌کمک تجزیه و تحلیل آنها، یک بینش اولیه نسبت به مسأله پیدا کنید.

- مسأله‌ی مورد بحث را به زبان ریاضی بیان کنید.

- کلیه‌ی متغیرهای $x_۱, x_۲, \cdots, x_n$ و پارامترهای $a_۱, a_۲, \cdots, a_m$ موجود در مسأله را شناسایی کنید و آنهارا به دسته‌های معلوم و مجهول تقسیم بندی کنید.

- درباره‌ی این‌که کدام مدل ریاضی مرتبط‌ترین مدل برای مسأله است، تصمیم گیری کنید و مسأله را به‌طور مناسبی به‌صورت

$$f_j\left(x_i, a_k, \frac{\partial}{\partial x_l}, \int, \cdots, dx_i, d\right) \leq ۰$$

  به زبان ریاضی ترجمه کنید، به این معنا که مسأله را بر حسب معادلات یا نامعادلات جبری، غیر جبری، دیفرانسیلی، گسسته، انتگرالی، و غیره بنویسید.

- در خصوص راههای ممکن برای حل معادلات مطرح شده در مسأله فکر کنید. روشهای ممکن می‌توانند به‌صورت تحلیلی، عددی یا شبیه‌سازی باشند. تا آنجا که می‌توانید از تجزیه و تحلیل های ممکن استفاده کنید، هر جا که ضرورت دارد این تجزیه و تحلیل ها را با روش‌های عددی و رایانه‌ای تکمیل کنید و در زمانی که اطمینان خاطر دارید از شبیه‌سازی استفاده کنید.

- اگر تغییر قابل قبولی در فرضها باعث می‌شود که حل تحلیلی مسأله امکان پذیر شود، این امکان را مورد بررسی و جستجو قرار دهید. اگر به روش‌های جدید برای حل معادلات مطرح در مدل نیاز باشد، سعی کنید که این روش‌ها را تعمیم دهید.

- برای اطمینان از صحت نتایج به‌دست آمده، از روش‌های تجزیه و تحلیل خطا استفاده کنید. اگر خطاهای مشاهده شده در محدوده‌ی قابل قبول نیستند، روش حل مسأله را تغییر دهید.

- جواب نهایی را به زبان مربوط به مسائل ترجمه کنید.
- پیش‌بینی‌های مدل را با مشاهدات یا اطلاعات موجود مقایسه کنید. اگر اختلاف ناچیز است و پیش‌بینی‌ها و نتایج با یکدیگر مطابقت قابل قبول دارند، مدل را پذیرفته و مورد استفاده قرار دهید. درغیراین‌صورت، فرضها و تقریب‌سازی‌ها را مورد بررسی و بازبینی مجدد قرار دهید و با توجه به مغایرت‌های مشاهده شده، آنها را تغییر و عملیات را مثل قبل ادامه دهید.
- این فرآیند را ادامه دهید تا این که یک مورد قابل قبول که اطلاعات و شواهد قبل را شرح می‌دهد به‌دست آید.
- به‌کمک مدل ساخته شده نتایج مختلفی را به‌دست آورده و آنها را در مقابل اطلاعات قبلی و جدید، که ممکن است به مجموعه‌ی قبلی اضافه شده باشند، مورد آزمایش قرار دهید و تحقیق کنید که آیا مدل تکامل یافته مناسب است یا نه.

با توجه به آنچه که در فوق گفته شد، گامهای مختلف در ساختن یک مدل ریاضی را می‌توان به‌طور خلاصه در یک جدول به‌صورت زیر خلاصه نمود.

جدول ۱ــ۱ گامهای مختلف در ساختن یک مدل ریاضی.

گام اول: شناسایی مساله
گام دوم: تشخیص متغیرها، فرضها و قوانین علمی موجود حاکم بر وضعیت موجود
گام سوم: ساخت مدل ریاضی
گام چهارم: تجزیه و تحلیل اولیه‌ی مدل
گام پنجم: در صورت تایید مدل حل یا اجرای آن، درغیراین‌صورت بازگشت به گام اول
گام ششم: مقایسه‌ی نتایج با وضعیت موجود مساله
گام هفتم: باز بینی و مرمت مدل

روش فوق مرتباً در این کتاب مورد استفاده قرار می‌گیرد. باوجوداین، به‌دلیل آنکه بیشتر مدلهایی که در این کتاب مورد استفاده قرار می‌گیرند، مدلهایی هستند که از پشتوانه‌ی خوبی برخوردارند، بررسی اعتبار آنها در نظر گرفته نخواهد شد، اما برای مدل‌سازی پدیده‌های جدید، بررسی معتبر بودن نتایج به‌دست آمده از مدل، اساسی است.

۱ــ۴ دسته بندی مدلهای ریاضی

(الف) مدلهای ریاضی می‌توانند بر حسب موضوع مورد بحث دسته بندی شوند. به‌عنوان مثال‌مدل‌سازی ریاضی در فیزیک (ریاضی فیزیک)، مدل‌سازی ریاضی در شیمی (شیمی نظری)، مدل‌سازی ریاضی در زیست شناسی (زیست ریاضی)، مدل‌سازی

ریاضی در پزشکی و داروسازی (ریاضی پزشکی)، مدل‌سازی ریاضی در اقتصاد (اقتصاد ریاضی یا اقتصاد سنجی)، مدل‌سازی ریاضی در مهندسی (ریاضیات مهندسی)، مدل‌سازی ریاضی در جامعه شناسی (ریاضیات اجتماعی)، و غیره.

همچنین مدل‌سازی ریاضی در موضوعاتی مثل حمل و نقل، طراحی منطقه و حومه‌ی آن، آلودگی، محیط زیست، اقیانوس شناسی، جریان انتقال خون، علوم حیاتی، ذخایر آب، مصرف بهینه‌ی ذخایری که تمام شدنی هستند و ذخایری که مجدداً قابل بازیافت هستند، سیاست گذاری، واگذاری زمین، و غیره نیز می‌تواند مطرح شده و بر حسب آن دسته بندی شود.

در واقع هر شاخه از دانش دارای دو جنبه است. یکی براساس نظریه‌ها، علم ریاضی و آمار، و محاسبات کامپیوتری است و دیگری براساس آزمایشات و مشاهدات متکی بر تجربه است. برای اولین جنبه استفاده از مدل‌سازی ریاضی اساسی است.

(ب) مدلهای ریاضی می‌توانند برحسب روشهای ریاضی که در حل آنها به‌کار برده می‌شود دسته‌بندی شوند. به‌عنوان مثال، می‌توان از مدل‌سازی ریاضی به‌کمک جبر سنتی، مدل‌سازی ریاضی به‌کمک جبر خطی و ماتریسها، مدل‌سازی ریاضی به‌کمک معادلات دیفرانسیل معمولی و معادلات با مشتقات جزئی، مدل‌سازی ریاضی به‌کمک هندسه، مدل‌سازی ریاضی به‌کمک برنامه‌ریزی خطی، مدل‌سازی ریاضی به‌کمک حساب تغییرات، مدل‌سازی ریاضی به‌کمک اصل مقدار ماکزیمم، و غیره نام برد.

(ج) همچنین می‌توان مدلهای ریاضی را براساس منظوری که از مدل داریم دسته بندی کنیم. به‌عنوان مثال، می‌توان از مدلهای ریاضی برای تشریح، مدلهای ریاضی برای بصیرت یا بینش، مدلهای ریاضی برای پیش بینی، مدلهای ریاضی برای بهینه‌سازی، مدلهای ریاضی برای کنترل، و مدلهای ریاضی برای طرح‌ریزی انجام یک کار نام برد.

(د) بالاخره مدلهای ریاضی می‌توانند براساس ماهیت خود دسته بندی شوند. بنابراین:

(۱) مدلهای ریاضی می‌توانند خطی یا غیرخطی باشند، بر حسب اینکه معادلات شرح دهنده‌ی آنها خطی یا غیرخطی باشند.

(۲) مدلهای ریاضی می‌توانند ایستا یا پویا باشند، بر حسب اینکه تغییرات زمان در مدل‌سازی به حساب آورده شده یا نشده باشد.

(۳) مدلهای ریاضی می‌توانند تعینی یا تصادفی باشند، بر حسب اینکه عامل احتمال در مدل‌سازی به حساب آورده شده یا نشده باشد.

(۴) مدلهای ریاضی می‌توانند گسسته یا پیوسته باشند، بر حسب اینکه متغیرهای شرکت کننده در مدل گسسته یا پیوسته باشند.

در مقایسه با مدلهای غیرخطی، پویا، و تصادفی مدلهای خطی، ایستا، و تعینی راحت‌تر و آسان‌تر قابل بحث و تجزیه و تحلیل هستند و به‌طورکلی در هر شاخه‌ای از علم این مدلها در زمره‌ی اولین مدلهایی هستند که در نظر گرفته می‌شوند.

با توجه به توسعه‌ی حساب دیفرانسیل، استفاده از مدلهای پیوسته آسان‌تر از استفاده از مدلهای گسسته به‌نظر می‌رسد و درنتیجه در کاربردها مدلهای پیوسته نیز مدنظر قرار می‌گیرند. باوجوداین، مدلهای پیوسته تنها در صورت داشتن جوابهای تحلیلی ساده هستند. درغیراین‌صورت، باید آنها را بامدلهای گسسته تقریب زد تا بتوان برای آنها روشهای عددی در جهت پیدا کردن جواب پیشنهاد نمود. البته مدلهایی نیز وجود دارند که در آنها تغییرات به‌طور هم‌زمان گسسته و پیوسته است.

باید در نظر داشت که اغلب مدلهای موجود در عالم واقعی غیرخطی، پویا و تصادفی هستند. اما به‌دلیل آنکه با مدلهای خطی، ایستا، و معین می‌توان آسان‌تر به جواب رسید، برای پیدا کردن جوابهای تقریبی مسأله‌ی مورد بحث، که در عین حال به جوابهای حقیقی نزدیک هستند، استفاده از این مدلها در اولویت قرار می‌گیرد.

در زمانی که متغیرهای شرکت کننده در مدل اساساً گسسته هستند، ممکن است هنوز بخواهیم برای استفاده از حساب و معادلات دیفرانسیل مدلهای پیوسته را مد نظر قرار دهیم. به‌طور مشابه در زمانی که متغیرهای شرکت کننده در مدل اساساً پیوسته هستند، ممکن است برای استفاده از کامپیوتر مدلهای گسسته را مدنظر قرار دهیم.

۱–۵ چند مشخصه و راهبرد در مدلهای ریاضی

دراین بخش چند مشخصه از مدلهای ریاضی همراه با تمهیدات مختلف که در ساختن یک مدل ریاضی به‌کارمی‌روند را به‌طور صریح بیان کرده و توضیح می‌دهیم.

(۱) واقع پردازی مدلها: انتظار ما از یک مدل ریاضی این است که تا آنجا که امکان دارد منطبق با واقعیات باشد. باوجوداین، اگر یک مدل بیش از حد واقع گرایانه باشد، ممکن است نتوان آن را از طریق ریاضی ردیابی نمود. برای ساختن یک مدل ریاضی باید بتوان بین واقعیت‌ها و قابلیت‌های ردیابی توافقی به وجود آورد.

(۲) سلسله مراتب مدلها: همان‌طور که می‌دانیم معمولاً پیدا کردن یک مدل مناسب ریاضی در اولین اقدام میسر نیست. در واقع مدلها در جهت رسیدن به واقعیات به‌طور پیوسته اصلاح می‌شوند. بنابراین برای هر موقعیتی، یک سلسله مراتب از مدلها را به‌دست

می‌آوریم به این‌صورت که هر کدام نسبت به مدل قبلی واقع گرایانه‌تراست و برای هر کدام مدلی که بعداً به‌دست می‌آید به احتمال زیاد واقع گرایانه‌تر و درنتیجه بهتر است.

(۳) دقت نسبی مدلها: مدلهای مختلف که برای مطالعه‌ی یک پدیده ساخته می‌شوند، از نظر دقت و تطابقشان با مشاهدات مربوط به آن پدیده با یکدیگر اختلاف دارند.

(۴) پایداری مدلها: یک مدل ریاضی را پایدار گویند هرگاه تغییرهای اندک روی پارامترهای شرکت کننده در مدل باعث تغییرات ناچیز در رفتار مدل شود. برای تصمیم گیری در این خصوص از تجزیه و تحلیل حساسیت روی رفتار مدلها استفاده می‌شود.

(۵) خود سازگاری مدلها: همان‌طور که می‌دانید در یک مدل ریاضی معادلات و نامعادلات متعددی شرکت دارند وهمه‌ی آنها باید با یکدیگر سازگار باشند، به‌عنوان مثال، در یک مدل نمی‌توان هر دو نامساوی $x+y<a$ و $x+y>a$ را به‌کار برد. گاهی بروز ناسازگاری در یک مدل ناشی از انتخاب فرضهای اولیه است. با توجه به اینکه پیدا کردن ناسازگاری‌های ریاضی نسبتاً کار ساده‌ای است، پیدا کردن ناسازگاری‌های موجود در مدلهای مطرح در علوم اجتماعی و زیست شناسی به سهولت امکان پذیر می‌شود.

(٦) مدلهای بیش از حد ساده شده و بیش از حد جاه‌طلبانه: در بحث مدل‌سازی ریاضی گفته می‌شود که آن ریاضی که با اطمینان موضوعی را مطرح می‌کند لزوماً به واقعیت اشاره نمی‌کند و آن ریاضی که به واقعیت اشاره می‌کند مورد اطمینان نیست. مدلی که بیش از حد ساده است لزوماً بیانگر واقعیت نیست. همچنین ممکن است که مدل با دقت بیش از حد طرح شده باشد، به این معنا که مدل از پیچیدگی زیادی برخوردار بوده و قدرت تقریب مجهولات تا ده رقم اعشار داشته باشد، حال آن که برای مشاهدات مربوط به پدیده تنها دقت تا دو رقم اعشار نیاز باشد.

(۷) پیچیدگی مدلها: اگر به هنگام ساختن یک مدل ریاضی، متغیرها بیش از حد تقسیم بندی شوند، متغیرهای زیادی در مدل‌سازی شرکت داده شوند و جزییات زیادی از پدیده‌ی مورد بحث مدنظر قرار گیرد، به پیچیدگی مدل افزوده می‌شود. افزودن پیچیدگی به مدل لزوماً باعث درک بیشتر پدیده نخواهد شد، زیرا پس از مقداری بررسی نیاز به کاستن از پیچیدگی‌ها احساس شده و اجتناب ناپذیر می‌نماید. هنر مدل‌سازی ریاضی در این است که قبل از رسیدن به این نیاز، پیچیده کردن مدل متوقف شود.

(۸) مدلها می‌توانند منجر به آزمایش‌های جدید، مفاهیم جدید و ریاضیات جدید شوند: ممکن است که مقایسه‌ی پیش‌بینی‌ها و مشاهدات نیاز به آزمایش‌های جدید برای

دستیابی به اطلاعات مورد نیاز را آشکار نماید. همچنین مدلهای ریاضی می‌توانند باعث عرضه و ایجاد مفاهیم جدید شوند. اگر روش‌های شناخته شده‌ی ریاضی برای استنتاج حقایق از مدل ریاضی کافی نباشد، روش‌های جدید ریاضی باید طرح و ارائه شود.

(۹) یک مدل ممکن است که تنها برای یک مورد و نه برای موردی دیگر مناسب، کافی و منطبق با واقعیت باشد: بنابراین همواره نیاز به مدلهای متفاوت، برای توضیح جنبه‌های مختلف همان پدیده و یا حتی برای بردهای مختلف متغیرها، احساس می‌شود. در عین حال، جستجو برای یافتن یک مدل واحد ادامه پیدا می‌کند.

(۱۰) ممکن است مدلها ما را به پیش‌بینی‌های منتظره یا غیرمنتظره و یا حتی نتایج نامحسوس هدایت کنند: معمولاً مدلهاپیش‌بینی‌هایی ارائه می‌دهند که از نظر درک عمومی در حد انتظار است. باوجوداین، پیش‌بینی‌هایی که توسط مدل ارائه می‌شوند ماهیت کمی دارند. بعضی اوقات، مدلها پیش‌بینی‌های غیرمنتظره ارائه می‌دهند که باعث می‌شود در جهت حذف یا تعمق بیشتر روی فرضها اقدام اساسی صورت گیرد. بعضی اوقات نیز مدلها پیش‌بینی‌هایی ارائه می‌دهند که در مقایسه با مشاهدات دارای تفاوت‌های عمده‌ای هستند. در چنین وضعیتی، باید آن مدلها را مورد بازبینی جدی قرار داد و تغییرات عمده‌ای در آنها بوجود آورد.

(۱۱) به‌طورکلی نمی‌توان گفت که یک مدل خوب یا بد است؛ با مشاهدات متکی بر تجربه همخوانی دارد یا ندارد: مدلها می‌توانند منجر به کسب نتایج ریاضی بسیار عالی شوند، اما تنها آن مدلهایی قابل قبول هستند که بتوانند پدیده یا موقعیت مورد بحث را کنترل، پیش‌بینی، و تشریح کنند. همچنین یک مدل می‌تواند در یک موقعیت با مشاهدات متکی بر تجربه همخوانی داشته باشد اما در خصوص موقعیتی دیگر برای همان پدیده اصلاً همخوانی نداشته باشد.

(۱۲) مدلها این اجبار را برای ما به وجود می آورند که با آگاهی کامل از موقعیت تحقیقات را شروع کنیم: هر کس قبل از آنکه شروع به ساختن یک مدل ریاضی برای پدیده‌ی مورد بحث کند باید در خصوص ساختار و موضوعات اساسی مربوط به پدیده کاملاً آگاه و مطلع باشد.

(۱۳) منحصر و محدود شدن به یک مدل می‌تواند مانع از درک عمیق وضعیت شود: یک مدل به اندیشیدن روی پدیده‌ی مورد بحث کمک می‌کند، اما در عین حال می‌تواند تفکر مدل‌ساز را تنها در یک مسیر باریک و محدود قرار دهد. بعضی اوقات برای درک بیشتر پدیده‌ها و وضعیتها، باید مدلهای سنتی را کنار گذاشت و مدلهایی کاملاً جدید

همراه با مفاهیم جدید طراحی نمود.

(۱۴) مدلهای ناکارآمد نیز مفید هستند: به محض پی‌بردن به این موضوع که مدل ساخته شده ناکارآمد و بی‌فایده است تلاشها جهت یافتن جنبه‌هایی که نادیده گرفته شده‌اند شروع می‌شود. در واقع ناکارآمدی یک مدل مقدمه‌ای برای موفقیت است، مشروط بر آنکه بتوانیم دلایل این عدم کارآیی را پیدا کنیم.

(۱۵) مدلهای بدون بازخور نامناسب هستند: هر مدل باید به این‌صورت طراحی شده باشد که بتواند در طول استفاده‌اش از پیشرفتهای احتمالی خود به شکل اطلاعات آزمایشی و مشاهداتی بهره گیرد.

(۱۶) مدل‌سازی جزئی برای زیر مجموعه‌هایی از سیستم یا پدیده‌ی مورد بحث: قبل از ساختن یک مدل برای تمام سیستم، به نظر مناسب می‌رسد که در ابتدا مدلهای جزئی برای زیرمجموعه‌هایی از سیستم یا پدیده‌ی مورد بحث ساخته شوند، اعتبار آنها مورد آزمایش قرار گیرد و سپس با جمعبندی این مدلهای جزئی آنها را به یک مدل کامل برای سیستم تبدیل کرد. بعضی اوقات نیز با ترکیب مدلهای موجود مدلهایی برای سیستم‌های بزرگتر ساخته می‌شوند. همچنین در بعضی از اوقات بامتحد کردن مدلها مدل نهایی به صورتی ساخته می‌شود که مدل اولیه را به‌عنوان حالت خاص در بر می‌گیرد.

(۱۷) مدل‌سازی بر حسب مقیاسها: در مدل‌سازی ریاضی، مدل‌ساز می‌تواند در ابتدا به مدلهایی برای مقیاسهای کوچک فکر کند و سپس با تلفیق آنها به شیوه‌های مختلف مدلهایی را به‌دست آورد که برای تعداد زیادی از سیستمهای دیگر نیز معتبر هستند.

(۱۸) کامل نبودن مدلها و هزینه‌ی مدل‌سازی : یک مدل کامل وجود ندارد و هر مدلی که ساخته می‌شود قابل اصلاح و ترقی است. اما چنین اصلاحاتی از نظر زمان و منابع مالی نیاز به هزینه دارند. نیاز به اصلاحات باید به‌گونه‌ای باشد که سرمایه‌گذاری مربوط را توجیه نماید.

(۱۹) متغیرهای وضعیت و ارتباط بین آنها: برای ساختن یک مدل ریاضی، در ابتدا باید متغیرهای حالت را شناسایی و سپس روابط بین آنها را مشخص نمود. انتخاب درست متغیرهای حالت بیشترین اهمیت را دارا است.

(۲۰) تقریب پارامترها: در هر مدل ریاضی تعدادی پارامتر شرکت دارند که باید تخمین زده شوند. مدل مورد نظر باید خودش بتواند آزمایشها یا مشاهدات و روش محاسبه‌ی این پارامترها را پیشنهاد کند. بدون تشخیص صریح این پارامترها، مدل ساخته

شده کامل نیست.

(۲۱) تعیین اعتبار مدل توسط اطلاعات مستقل: در مواقعی پارامترهای شرکت کننده در مدل توسط بعضی از اطلاعات موجود تخمین زده می‌شود و همان اطلاعات برای تعیین اعتبار مدل مورد استفاده قرار می‌گیرد. چنین شیوه‌ای نادرست است و باید از اطلاعات مستقل جهت تعیین اعتبار مدل استفاده شود.

(۲۲) استفاده از مدلهای جدید برای ساده‌سازی مدلهای پیچیده‌ی موجود: در مدل‌سازی ریاضی ابتدا با یک مدل ساده شروع می‌کنیم. سپس متغیرهای بیشتر و بیشتر و تابعهای بیشتر و بیشتری را معرفی می‌کنیم تا مدل به آنچه که در واقعیت است نزدیکتر شده و پیچیدگی بیشتری به خود بگیرد. با توجه به اینکه در این فرآیند آگاهی ما نیز از موقعیت بیشتر و بیشتر شده است باید بتوانیم کم‌کم از پیچیدگی‌ها کاسته و ساده‌سازی مدل را شروع کنیم.

(۲۳) استفاده از مفاهیم ریاضی همراه با اطلاعات مربوط به نظم موجود: برای ساختن مدلهای ریاضی یک پدیده، باید مدل‌ساز از دانش ریاضی مربوط و نظمی که برای پدیده‌ی مورد بحث وجود دارد آگاه باشد. هر تلاشی که برای ساختن یک مدل ریاضی انجام می‌پذیرد، اگر بدون درک عمیق نظم موجود در آن پدیده باشد، به ساختن یک مدل بیهوده منتهی می‌شود. در نظر گرفتن نظم موجود در پدیده باید مقدم بر هر اقدامی برای ساختن مدل ریاضی باشد. به‌علاوه، بعد از ساختن مدل نیز باید بررسی کرد که آیا مدل با نظم موجود مطابقت دارد.

(۲۴) قابلیت انتقال مدلهای ریاضی: یک مدل ریاضی که برای حوزه‌ی خاصی ساخته شده است می‌تواند با همان خصوصیاتی که دارد برای حوزه‌ای دیگر نیز معتبر باشد. در واقع، ممکن است که اعتبار مدل به حوزه‌های دیگر نیز قابل انتقال باشد. البته چنین انتقالهایی باید با احتیاط انجام پذیرد. مدلهایی که قابل انتقال از یک دامنه به دامنه‌ای دیگر باشند بسیار مفید هستند، اما باید توجه داشت که بدون اطمینان از قابل استفاده بودن مدل در دامنه‌ی جدید، نباید به آن اعتماد کرد.

(۲۵) گردش تکراری پیش‌بینی و اعتباریابی: معمولاً وقتی پیش‌بینی‌های یک مدل ریاضی با مشاهدات متکی بر تجربه مقایسه می‌شود، عدم تطابق مشاهده می‌شود. برای رفع این اختلاف، ساختار مدل را با تغییراتی بهبود بخشیده، مجدداً توسط مدل پیش‌بینی‌های دیگری انجام داده، و در این خصوص که آیا نتایج معتبر هستند تحقیق کنید. این تکرار را تا آنجا ادامه دهید که مدلی مناسب همراه با نتایج راضی کننده،

به‌دست آید.

(۲۶) مدلهایی که براساس تاکتیک یا تفکرات استراتژیک ساخته می‌شوند: مدلها می‌توانند برای تعیین خط مشی‌های مربوط به یک مو قعیت خاص ساخته شوند. همچنین مدلهای ریاضی می‌توانند برای یک استراتژی فراگیر، که موقعیت‌های مختلف را در بر می‌گیرد، ساخته شوند.

(۲۷) محدودیتهای خطی و نرمال پذیری: مدلهایی که خطی و جمع پذیر هستند و آن مدلهایی که تابع توزیع مربوط به آنها نرمال است به نسبت ساده‌تر از سایر مدلها می‌باشند. اما باید توجه داشت که مدلهایی که نسبتاً به واقعیت نزدیکتر هستند باید به دور از این محدودیت‌ها باشند.

(۲۸) مدل‌سازی ریاضی و ابزارهای ریاضی: در ریاضیات کاربردی غالباً تأکید روی ابزارهای ریاضی بوده است، حال آنکه قلب ریاضیات کاربردی مدل‌سازی ریاضی است.

(۲۹) مدل‌سازی ریاضی نظریات و یکپارچگی‌های جدید را به ریاضیات کاربردی ارائه می‌دهد: به‌عنوان مثال، هرچند که تحقیق در عملیات و دینامیک مایعات از نظر موضوع و همچنین روشهای به‌کاررفته در آنها با یکدیگر متفاوت هستند، مدل‌سازی ریاضی برای هر دو مشترک است.

(۳۰) مدلها منحصر به فرد نیستند: یک وضعیت لزوماً دارای یک مدل ریاضی منحصر به فرد نیست. در ضمن وجود یک مدل ریاضی نباید مانع از جستجو برای یافتن مدلهای بهتر یا متفاوت با مدل به‌دست آمده، شود.

(۳۱) فرهنگ نامه‌ی مدلهای ریاضی : تقریباً غیرممکن است که بتوانیم یک لغتنامه‌ی کامل برای مدلهای ریاضی ارائه دهیم. بنابراین تلاش ما تنها روی این متمرکز خواهد شد که مدل مناسب برای پدیده‌ی داده شده را انتخاب کنیم. آشنایی بامدلهای موجود همواره با اهمیت و مفید است، اما وضعیت‌های جدید همواره ساختن مدلهای جدید را طلب می‌کند.

(۳۲) مدلهای ریاضی پیش ساخته نیستند: بعضی از دانشمندان ریاضی محض بر این باورند که هر ساختار منطقی سازگار روزی برای یک یا چند پدیده‌ی فیزیکی مدل می‌شود. این گفته احتمالاً یک استثنا است تا یک قانون. همواره تعداد بسیار زیادی از ساختارهای ریاضی وجود خواهند داشت که مدلهای فیزیکی مربوط به آنها به‌دست نمی‌آید، از طرف دیگر نیز مدلهای فیزیکی وجود خواهند داشت که ساختن مدلهای

ریاضی مناسب برای آنها میسر نیست.

(۳۳) مدل‌سازی ریاضی یک هنر است: برای ساختن یک مدل ریاضی احتیاج به تجربه، بینش و درک عمیق است. تدریس درس مدل‌سازی نیز خود یک هنر است.

(۳۴) معیارهایی برای مدلهای موفق: این معیارها شامل انطباق قابل قبول بین مشاهدات و پیش‌بینی‌ها، به‌دست آوردن نتایج معتبر بعدی، سادگی مدل و دقت آن در پیش‌بینی‌ها است.

(۳۵) قابل اجرا بودن و عمومیت داشتن مدل: مدل حاصل از معادله‌ی لاپلاس در پتانسیل گرانش، پتانسیل الکترواستاتیک، جریانات غیر چرخشی، و تعداد فراوانی از موقعیت‌های دیگر به‌کارگرفته می‌شود. در واقع مدلهایی وجود دارند که در وضعیت‌های مختلف فراوانی قابل استفاده هستند و در عین حال مدلهایی نیز هستند که تنها در یک مورد خاص قابل استفاده‌اند.

(۳٦) وحدت انواع موضوعات در سرتاسر مدل‌سازی ریاضی: وقتی وضعیت‌های مختلف توسط یک مدل ریاضی واحد نمایش داده می‌شود، ویژگی شاخصی از ساختارهای این وضعیت‌ها آشکار می‌شود. چنین نمایشی می‌تواند به صرفه‌جویی در تلاشها منجر شده و یک اتحاد زیربنایی معین بین موضوع‌های مختلف را آشکار سازد.

۱ – ٦ مزایای مدل‌سازی ریاضی

مدل‌سازی ریاضی به‌طور فزاینده‌ای نقش مهمی در بسیاری از علوم ایفا می‌کند. دلیل این امر شاید مزیت‌هایی است که یک مدل‌سازی ریاضی از آنها برخوردار است. مهمترین این مزیت‌هاعبارتند از:

- ریاضی زبانی بسیار دقیق است. این مطلب کمک می‌کند تا ایده‌ها به‌صورت فرمول درآورده شده و فرضهای مربوط شناسایی شوند.
- ریاضی زبانی است مختصر و مفید.
- ریاضی زبانی است که همواره همراه با قوانین تعریف شده برای به‌کارگیری است.
- کلیه‌ی قوانین ریاضی که در طول سالیان دراز به اثبات رسیده‌است در اختیار می‌باشد.
- رایانه‌ها می‌توانند برای محاسبات عددی مورد نیاز به نحو بسیار مؤثری به‌کارگرفته شوند.

توجه: هرچند که ریاضیات پتانسیل این را دارد که بتواند نتایجی کلی را به اثبات رساند، چنین نتایجی بستگی تام به نوع معادلات به‌کارگرفته شده دارند. یک تغییر اندک در ساختمان این معادلات ممکن است باعث تغییرات عمده در نتایج ریاضی به‌دست آمده‌ی قبلی شود.

۱ – ۷ فرآیند یادگیری مدل‌سازی ریاضی

شرح مدلهای ریاضی ساخته شده توسط متخصصین کار آسانی است، اما چگونه می‌توانید برای بالا بردن مهارت خود در امر مدل‌سازی ریاضی مقدمات لازم را فراهم کنید؟ در آغاز فراگیری به احتمال زیاد از دانش خود در زمینه‌ی حساب دیفرانسیل، جبر، مثلثات، و مسلماً مقداری در زمینه‌ی آمار و مکانیک احساس اطمینان می‌کنید. اما باید توجه داشته باشید که ساختن مدلهای ریاضی موضوعی متفاوت است. برای فراگیری مهارت‌های مدل‌سازی ریاضی نیازی نیست که در ابتدا مسائل پیچیده‌ی مربوط به کاربردهای صنعتی مورد بحث و بررسی قرار گیرند. این امر می‌تواند با در نظر گرفتن مسائل بسیار معمولی، که تنها نیاز به دانش ریاضی در سطح دبیرستان دارد، آغاز شود. سپس به‌کمک مهارت اولیه‌ی به‌دست آمده و دانش ریاضی و آمار متعارف به تدریج مسائل جدی‌تر را برای کسب مهارت بیشتر در نظر گرفت. برای شروع، لازم نیست که مثالهای مصنوعی یا طراحی شده را مد نظر قرار داد، زیرا در دنیای اطراف ما مثالهای واقعی فراوانی وجود دارند که می‌توانند مورد توجه قرار گرفته و بعد از تبدیل به یک مدل ریاضی حل و بحث شوند. بسیاری از این مثالها را تدریجاً پیدا نموده و جهت فراگیری مهارت‌های مدل‌سازی به شیوه‌های مختلف مورد بحث قرار دهید.

نکته‌ی مهم دیگری که در فراگیری مهارت‌های مدل‌سازی ریاضی باید در نظر گرفت، این است که در ابتدای کار روی هر مسأله‌ای سعی کنید که مدل‌سازی را خودتان انجام داده و ایده‌هایتان را مورد آزمایش قرار داده و از خطر اشتباهاتی که ممکن است در این راستا مرتکب شوید نهراسید. یادگیری فن مدل‌سازی ریاضی مانند فراگیری فن شنا یا رانندگی است؛ اکتفا کردن به خواندن کتابی که می‌گوید چگونه مدل‌سازی کنید اصلاً مناسب نیست. اگر روی مسأله‌ای کار می‌کنید که قبلاً شخص دیگری مدل آن را به‌دست آورده و تکمیل کرده است، برای حل آن مسأله خواندن مباحث انجام شده برای به‌دست آمدن مدل به تنهایی کفایت نمی‌کند.

وقتی مدل‌سازی ریاضی یک مسأله برای شما حایز اهمیت است، باید بدون هیچ محدودیتی با به‌کاربردن هر رابطه و ابزار ریاضی که مناسب به نظر می‌رسد مدل را بسازید، و در عین حال در نظر داشته باشید که قبل از حصول اطمینان از مدل ساخته شده ممکن است بارها و بارها احتیاج به تغییر نظریات خود و یا روابط و روش‌هایی که به‌کارمی‌برید

باشید. همچنین تحت هر شرایطی به مدلی که خودتان به تنهایی به‌دست آورده‌اید اکتفا نکنید و همواره کارها و نظریات دیگران را نیز در بهینه‌سازی مدل خود مورد توجه قرار دهید. در صنعت، تجارت و علومی که با مدل‌سازی ریاضی سروکار دارند، همواره یک تیم که ممکن است ترکیبی از متخصصان مختلف مثل مهندسین، اقتصاددانان، ریاضیدانان، جامعه شناسان و غیره باشد روی ساختن یک مدل کار می‌کنند. با توجه به این دلایل دانشجویان علاقه‌مند به درس مدل‌سازی ریاضی بهتر است که به‌صورت تیمی روی مسائل مختلفی که در این درس مطرح خواهند شد کار کنند. همه می‌دانیم که افراد مختلف دارای نظریات متفاوت هستند و در هم ادغام شدن ایده‌های مختلف می‌تواند منجر به نتایج مناسب و کارآراتر شود.

در خاتمه‌ی این بخش اضافه می‌کنیم که برای رسیدن به مرتبه‌ی یک مدل‌ساز ریاضی ماهر تنها داشتن تخصص در روش های ریاضی، آمار و محاسبه کافی نیست. برای رسیدن به این مهم باید مهارت‌های مدل‌سازی را نیز آموخت و همراه با همه‌ی این خصوصیات قابلیت‌های زیر را نیز داشت: اندیشه‌ی روشن، منطق گرایی، دانستن ارزش اطلاعات، توانایی ایجاد ارتباط، و انگیزه و اشتیاق.

۱ — ۸ سؤال‌ها و تمرین‌ها

۱) به‌طور خلاصه مدل‌سازی ریاضی از چه چیزهایی تشکیل شده‌است؟

۲) چند شاخص مهم مدل‌سازی ریاضی را نام ببرید.

۳) بهترین راه برای یادگیری فن مدل‌سازی ریاضی چیست؟

۴) ۱۰ نمونه‌ی متفاوت دیگر از مسائل آمده در بخش ۱ — ۲ را طرح کرده و سعی کنید راه‌حل‌های اولیه‌ای برای آنها پیشنهاد کنید.

۵) عمق یک رودخانه را بدون آنکه وارد آن شوید به‌دست آورید.

٦) توضیح دهید که چطور می‌توانید حجم آب در یک برکه‌ی کوچک را پیدا کنید.

۷) روش‌هایی را پیشنهاد کنید که توسط آنها بتوان ارتفاع قله‌ی کوهها و عمق اقیانوسها را تقریب زد.

۸) در خصوص ریاضیات پایه مربوط به روش‌هایی که مهندسین ساختمان در نقشه برداری مورد استفاده قرار می‌دهند، بحث کنید.

۹) با توجه به مطالب بخش ۱—۴، از هر یک از مدلهای ذکر شده در این بخش مثالهایی ارائه دهید.

۱۰) مدلهای زیر را دسته بندی کنید:

(الف) $S = a + bp + cp^{۲}$، $D = \alpha + \beta p + \gamma p^{۲}$، که در آن S عرضه، D تقاضا، و p قیمت کالا است.

(ب) $\frac{dx}{dt} = ax - bx^{۲}$، که در آن $x(t)$ تعداد جمعیت انسان در زمان t در یک ناحیه است.

(ج)

$$\begin{cases} x(t+۱) = ax(t) - bx(t)y(t) \\ y(t+۱) = -py(t) + qx(t)y(t) \end{cases}$$

که در آن $x(t)$ و $y(t)$ به ترتیب جمعیت شکار و شکارچی است.

(د)

$$\frac{dp_n}{dt} = \lambda p_{n-۱}(t) - \mu p_{n+۱}(t) - (\lambda + \mu)p_n(t); \quad n = ۱, ۲, ۳, \cdots$$

که در آن $p_n(t)$ احتمال وجود n شخص در زمان t است.

(و)

$$x(t) = a\cos\Omega t + \sqrt{(b^{۲} - a^{۲}\sin^{۲}\Omega t)}$$

که در آن a، b، و Ω اعدادی ثابت هستند.

۱۱) با توجه به مطالب بخش ۱—۵، هر یک از مشخصه‌ها یا راهبردهای داده شده دراین بخش را با یک یا چند مدل ریاضی توضیح دهید (برای این کارمی‌توانید از مثالهای آمده در بخش دوم استفاده کنید).

۱۲) با توجه به مطالب بخش ۱—۵، هر یک از مشخصه‌ها یا راهبردهای داده شده در این بخش را با جزئیات بیشتر توضیح دهید.

۱۳) ده مدل مختلف که در فصل دوم آورده شده‌است را انتخاب و برای هر یک به سؤال‌های زیر پاسخ دهید:

آیا خطی یا غیر خطی است؟ آیا ایستا یا پویا است؟ آیا تعینی یا تصادفی است؟ آیا برای درک بهینه سازی، یا کنترل است؟ آیا می‌توان آنرا در تعداد دیگری از شاخه‌ها به‌کاربرد؟ آیا به اندازه‌ی کافی با واقعیات مطابقت دارد؟ چطور می‌توان آن را بیشتر با واقعیات تطبیق داد؟ آیا قابل اتکاست؟ آیا سازگار است؟ آیا بیش از حد ساده یا بیش از حد بلند پروازانه است؟ آیا ایده‌ها یا مفاهیم جدید ارائه می‌دهد؟ چه جنبه‌هایی از پدیده‌ی مورد بحث را تشریح می‌کند و چه جنبه‌هایی از آن را نادیده می‌گیرد؟ آیا به نتایج پیش‌بینی شده و یا دور از انتظار منتهی می‌شود؟ آیا می‌توانید آن را به‌طور تحلیلی یا عددی حل کنید؟ آیا برای موقعیت مورد بحث مدل می‌توانید مدل دبگری ارائه دهید؟ چگونه می‌توانید پارامترهای مطرح در مدل را تخمین بزنید؟ چگونه می‌توانید به مدل اعتبار ببخشید؟ آیا می‌توانید مدل را ساده‌تر کنید؟

۱۴) سعی کنید سؤال‌های متفاوت دیگری را به آنچه که در تمرین ۱۳ آمده است اضافه کنید.

فصل ۲

انواع مدل‌سازی‌های ریاضی

۲–۱ مقدمه

در این فصل مثالهای متنوعی از مدلهای ریاضی مربوط به پدیده‌های مختلف که قبلاً توسط مفاهیم مختلف ریاضی ساخته شده‌اند معرفی می‌شوند. هدف ما از ارائه‌ی این مثالها عبارت است از:

- ایجاد انگیزه برای فراگیری مدلهای ریاضی.
- نشان دادن تنوع موجود در مدلهای ریاضی،
- روشن ساختن مفهوم مدل‌سازی ریاضی در عمل و در نظریه،
- مشاهده‌ی نقاط برجسته‌ی مشترک بین مدلهای ریاضی،
- مشاهده‌ی اینکه یک روش کلی برای حل مدلهای ریاضی وجود ندارد،
- مرور بعضی از مطالب فصل اول به‌کمک مثالها،
- مشاهده‌ی عدم محدودیت در به‌کارگیری معادلات و ابزارهای ریاضی،
- مشاهدی کارآیی مدل‌سازی ریاضی در مورد هر جنبه‌ای از مسائل دنیای واقعی،

برای معرفی هر چه واضح‌تر این مثالها، آنها را در دسته‌های مختلف به‌صورتی که ذیلاً مشاهده می‌نمایید آورده‌ایم. توجه کنید که در حال حاضر هدف ما این نیست که در خصوص جوابهای به‌دست آمده برای مثالها بحث کرده و استدلال‌های مربوط را به‌طور کامل ارائه دهیم. البته، در حد نیاز برای شروع فراگیری مهارت مدل‌سازی ریاضی، در خصوص تکنیک‌های به‌کاررفته در مدل‌سازی هر یک توضیحات لازم ارائه شده‌است.

۲–۲ مدل‌سازی ریاضی به‌کمک هندسه

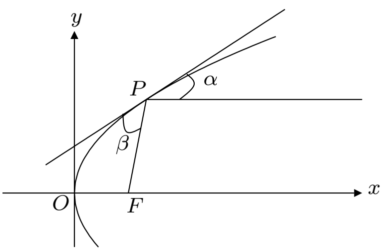
یکی از قدیمی ترین روش‌های ریاضی که در مدل‌سازی ریاضی به‌کارگرفته می‌شده، استفاده از علم هندسه است. در این بخش با ارائه‌ی چند مثال به توضیح این کاربرد می‌پردازیم.

مثال ۲–۲–۱ آینه‌ی ارشمیدس

یکی دیگر از مدلهای هندسی که در قدیم به‌کارگرفته می‌شده است، استفاده از آینه‌های سهمی گون برای آتش زدن کشتی‌های دشمن است. ارشمیدس از خصوصیت سهمی‌ها برای ساختن این آینه‌ها بهره می‌گرفت.

" خط واصل بین یک نقطه‌ی P روی سهمی و کانون آن S و خط گذرنده از P به موازات محور سهمی زوایای مساوی با خط مماس (و قائم)، مرسوم بر سهمی در نقطه‌ی P ، می‌سازند. "

این ویژگی باعث می‌شد تا با قرار دادن محور آینه به موازات تابش نور خورشید و قرار دادن کشتی مورد نظر در کانون آینه، آن کشتی را به آتش بکشند (شکل ۲–۱).



۲–۱ آینه ارشمیدس.

مثال ۲–۲–۲ مسیر حرکت سیارات

در قدیم برای تشریح حرکت سیارات از خم‌های هندسی استفاده می‌شده است. وقتی از سطح زمین به سیارات نگاه می‌کنیم، مسیر حرکت سیارات را به‌صورت یک دایره یا یک بیضی نمی‌بینیم. در ابتدای ساختن مدل برای تشریح این حرکت ممکن است از خم درون چرخزای، که مکان هندسی یک نقطه‌ی ثابت روی دایره‌ای است که در درون یک دایره‌ی بزرگتر می‌چرخد استفاده کنیم. اما این خم را به تنهایی نمی‌توان برای این تشریح به‌کاربرد. در عین حال، ثابت شده است که با در نظر گرفتن زمین به‌عنوان مرکز، می‌توان

مسیر حرکت سیارات را به‌صورت ترکیبی از خمهای درون چرخزای تشریح نمود که البته یک مدل‌سازی بسیار پیچیده است. یکی دیگر از مدلهای مربوط به تشریح حرکت سیارات مدل کپلر است. در واقع براساس مشاهدات کپرنیک، کپلر نشان داد که هر سیاره روی یک بیضی حرکت می‌کند که در یک کانون آن خورشید قرار دارد و درنتیجه نظریه‌ی خورشید مرکزی به‌طور کامل شرح مسیر حرکت سیارات را ساده‌تر کرد. در سالهای بعد نیوتن ثابت کرد که مدار بیضی شکل از قانون عمومی جاذبه نتیجه می‌شود و این باعث شد که مدل خورشید مرکزی از اهمیت زیادی برخوردار شود و به همین دلیل در سال ۱۹۵۷ مدارهای بیضی شکل به‌عنوان مدارهای ماهواره‌ها مورد استفاده قرار گرفتند.

مثال ۲–۲–۳ مدل ریاضی سالنهای صدا

همان‌طور که می‌دانیم هر بیضی دارای خصوصیت زیراست:

" بیضی مکان هندسی نقاطی است که مجموع فاصله‌ی آنها تا دو نقطه‌ی ثابت، که کانونهای بیضی نامیده می‌شوند، برابر یک مقدار ثابت است."

از این خصوصیت می‌توان در طراحی سالنهای صدا بهره گرفت. در این‌گونه سالنها وقتی صوت در یک کانون پخش می‌شود افرادی که در کانون دیگر قرار گرفته‌اند، به‌طور هم‌زمان امواج صدا را پس از برخورد به دیواره‌های سالن می‌شنوند.

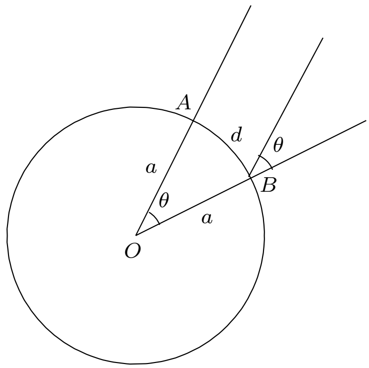
۲–۳ مدل‌سازی ریاضی به‌کمک جبر مقدماتی و مثلثات

مثال ۲–۳–۱ پیدا کردن شعاع کره‌ی زمین

این مدل در حدود دو هزار سال پیش مورد استفاده قرار گرفته شده است. فرض کنید دو نقطه‌ی A و B روی سطح زمین با یک طول جغرافیایی و به فاصله‌ی d کیلومتر از یکدیگر قرار گرفته‌اند (شکل ۲–۲).

در زمانی که خورشید درست در بالای سر A و به‌طور قائم قرار دارد (یعنی خورشید در جهت OA قرار دارد که در آن O مرکز زمین است)، پرتوهای نور خورشید زاویه‌ی θ° را با OB می‌سازند. حال اگر a را شعاع کره‌ی زمین بر حسب کیلومتر در نظر بگیریم به‌کمک فرمول محاسبه‌ی طول کمان داریم:

$$\frac{d}{۲\pi a} = \frac{\theta^\circ}{۳۶۰} \quad \Longrightarrow \quad a = \frac{۳۶۰ d}{۲\pi\theta^\circ}$$



۲—۲ محاسبه‌ی شعاع کره زمین.

مثال ۲–۳–۲ مدل ریاضی دوره‌ی تناوب حرکت سیارات

همان‌طور که گفتیم مدار هر یک از سیارات یک بیضی است که در یک کانون آن خورشید قرار دارد. در عین حال، اختلاف طول اقطار آنها ناچیز است و به‌عنوان اولین تقریب می‌توان فرض کرد که این مدارها دوایری به مرکز خورشید هستند. در ضمن می‌دانیم که سیارات تحت تأثیر نیروی جاذبه‌ی خورشید در حال حرکت هستند و می‌دانیم که برای حرکت روی یک دایره با سرعت یکنواخت v ، شتاب مورد نیاز برابر است با $\frac{v^۲}{r}$ ، که در آن r شعاع دایره‌ی مدار مربوط است (شکل ۲—۳).

بنابر این، اگر جرم خورشید را S و جرم سیاره را P در نظر بگیریم، برطبق فرمول مربوط به جاذبه‌ی بین دو جسم، خواهیم داشت:

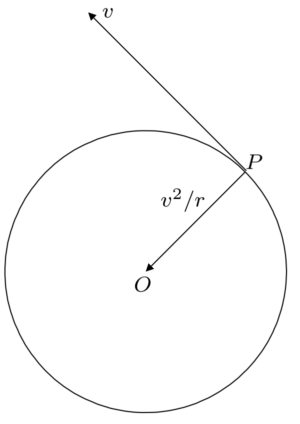
$$\frac{GPS}{r^۲} = \frac{Pv^۲}{r} \quad \Longrightarrow \quad v^۲ = \frac{GS}{r}$$

که در آن G عدد ثابت مربوط به جاذبه است. حال اگر T را دوره‌ی تناوب حرکت سیاره‌ی مورد بحث در نظر بگیریم، آنگاه $vT = ۲\pi r$ و درنتیجه

$$T^۲ = \frac{۴\pi^۲ r^۳}{GS}.$$

اگر $T_۱$ و $T_۲$ دوره‌ی تناوب حرکت دو سیاره‌ی متفاوت و اگر $r_۱$ و $r_۲$ به ترتیب شعاعهای مدارهای مربوط باشند، آنگاه

$$\frac{T_۱^۲}{T_۲^۲} = \frac{r_۱^۳}{r_۲^۳}$$



۲–۳ دوره‌ی تناوب حرکت سیارات.

مثال ۲–۳–۳ مدل ریاضی دوره‌ی تناوب حرکت ماهواره‌ها

ماهواره‌ها به‌همان صورت که سیاره‌ها تحت جاذبه‌ی خورشید حرکت می‌کنند، تحت جاذبه‌ی زمین به حرکت در می‌آیند. بنابراین، برطبق آنچه که در مثال قبل گفتیم

$$T^{۲} = \frac{۴\pi^{۲} r^{۳}}{GE}$$

و

$$\frac{T_{۱}^{۲}}{T_{۲}^{۲}} = \frac{r_{۱}^{۳}}{r_{۲}^{۳}} = \frac{(a+h_{۱})^{۳}}{(a+h_{۲})^{۳}}$$

که در آن E جرم زمین، a شعاع کره‌ی زمین، و $h_{۱}$ و $h_{۲}$ ارتفاع دو ماهواره‌ی مختلف در بالای سطح زمین است. همچنین، اگر g شتاب جاذبه‌ی زمین باشد، آنگاه

$$mg = \frac{GmE}{a^{۲}} \quad \text{یا} \quad Ge = ga^{۲}$$

و درنتیجه از روابط فوق داریم:

$$T^{۲} = \frac{۴\pi^{۲}(a+h)^{۳}}{ga^{۲}}$$

مثال ۲–۳–۴ مدل ریاضی فاصله‌ی زمین تا ماه

فرض کنید A و B دو نقطه با یک طول جغرافیایی باشند که به ترتیب در نیمکره‌ی شمالی و نیمکره‌ی جنوبی زمین قرار گرفته‌اند. همچنین فرض کنید O' مرکز ماه، $\theta_{۱}$

زاویه‌ی بین امتداد OA و $O'A$ ، و $\theta_۲$ زاویه‌ی بین امتداد OB و $O'B$ باشد (شکل ۴.۲).

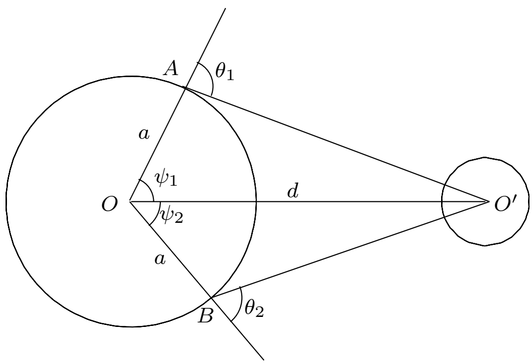
اگر d اندازه‌ی OO' ، یعنی فاصله‌ی بین مرکز ماه و مرکز زمین، باشد آنگاه برطبق روابط مثلثاتی در مثلث داریم:

$$\frac{d}{\sin\theta_۱} = \frac{a}{\sin(\theta_۱ - \psi_۱)} \quad \text{و} \quad \frac{d}{\sin\theta_۲} = \frac{a}{\sin(\theta_۲ - \psi_۲)}$$

همچنین

$$\psi_۱ + \psi_۲ = \alpha = \phi_۱ + \phi_۲$$

که در آن $\phi_۱$ و $\phi_۲$ به ترتیب عرض‌های جغرافیایی معلوم هستند. اکنون با حذف $\psi_۱$ و $\psi_۲$ در روابط فوق می‌توان مقدار d را بر حسب a ، $\theta_۱$ ، و $\theta_۲$ ، که همگی مقادیری معلوم هستند، به‌دست آورد.



۲-۴ فاصله‌ی زمین تا ماه.

۲-۴ مدل‌سازی ریاضی به‌کمک روابط صریح پیوسته

مثال ۲-۴-۱ مثالی از یک مدل خطی

یک هتل در هفته‌ای که دمای هوا $۱۵^\circ C$ است ۶۰۰۰ توریست را پذیرفته است. ابتدا ساده‌ترین مدلی را به‌کاربرید که بتواند تعداد توریستهارا در زمانی که دمای هوا $۲۰^\circ C$ است پیش‌بینی کند. سپس با داشتن این اطلاع که در زمانی که دمای هوا $۲۰^\circ C$ بوده است تعداد توریستها ۷۲۵۰ می باشد، مدل بهتری را پیشنهاد کرده و توسط آن تعداد توریستها را وقتی دمای هوا $۱۸^\circ C$ است تخمین بزنید.

حل اگر تعداد توریستها در هر هفته وقتی دمای هوا T است را با X نمایش دهیم، ساده ترین مدل این است که فرض کنیم X با T نسبت مستقیم دارد، یعنی $X = kT$. پس $۱۵k = ۶۰۰۰$ ودرنتیجه $k = ۴۰۰$ و مدل به‌صورت صریح $X = ۴۰۰T$ نوشته می شود . براساس این مدل این مدل اگر دمای هوا $۲۰°C$ باشد، تعداد توریستها برابر است با $X = ۴۰۰ \times ۲۰ = ۸۰۰۰$.

با این فرض که وقتی دمای هوا $۲۰°C$ بوده است، تعداد توریستها ۷۲۵۰ می‌باشد، می‌توان مدل $X = aT + b$ را جایگزین مدل فوق نمود که خطی است که از دو نقطه‌ی $(۲۰, ۷۲۵۰)$ و $(۱۵, ۶۰۰۰)$ می گذرد. بنابراین مدل مورد نظر توسط معادله‌ی $X = ۲۵۰T + ۲۲۵۰$ معرفی می‌شود. این مدل وقتی دمای هوا $۱۸°C$ است تعداد توریستها را برابر با $X = ۲۵۰ \times ۱۸ + ۲۲۵۰ = ۶۷۵۰$ پیش‌بینی می‌کند.

مثال ۲–۴–۲ مثالی دیگر از یک مدل خطی

غالباً در زمانی که قیمت جنسی افزایش می‌یابد، تقاضا برای خرید آن پایین می آید. همچنین تولید کنندگان آن جنس این آمادگی را دارند تا در زمانی که قیمت بهتری برای آن پرداخت می‌شود تولیدات خود را افزایش دهند. فرض کنید که جدول ۲—۱ در خصوص جنسی معین اطلاعات موضعی زیر را ارائه دهد:

جدول ۲—۱ اطلاعات موضعی در مورد عرضه و تقاضا.

عرضه، S	تقاضا، D	قیمت، P
۱۵۰۰	۲۰۰۰	۱۰
۲۰۰۰	۱۶۰۰	۳۰

در این‌صورت مدلهای خطی مربوط به D و S را بر حسب P نوشته و قیمت تعادل را وقتی $D = S$ پیش‌بینی کنید.

حل معادلاتی که مورد نیاز هستند به‌صورت زیر پیدا می‌شوند:

$$\frac{P - ۱۰}{D - ۲۰۰۰} = \frac{۳۰ - ۱۰}{۱۶۰۰ - ۲۰۰۰} \implies D = ۲۲۰۰ - ۲۰P$$

و

$$\frac{P - ۱۰}{S - ۱۵۰۰} = \frac{۳۰ - ۱۰}{۲۰۰۰ - ۱۵۰۰} \implies S = ۲۵P + ۱۲۵۰$$

که با قرار دادن $۲۲۰۰ - ۲۰P = ۲۵P + ۱۲۵۰$ مقدار $P \approx ۲۱$ به‌عنوان قیمت تعادل پیش‌بینی می شود.

مثال ۲–۴–۳ مثالی از یک مدل خطی چند متغیره

یک شرکت سازنده‌ی میز و صندلی چهار نوع میز را تولید می‌کند. یک خرده فروش با پرداخت ۵۰۰۰۰۰۰ ریال به این شرکت، از آن تضمین گرفته است که هر میز از نوع اول، دوم، سوم، و چهارم رابه ترتیب با قیمت ۲۰۰۰۰۰ ، ۳۰۰۰۰۰ ، ۵۰۰۰۰۰ ، و ۸۰۰۰۰۰ ریال خریداری کند. اگر سود این کمپانی از فروش هر کدام از این میزها ۱۰٪ باشد، مدلی را تعریف کنید که سود کمپانی را در معامله با این خرده فروش تعیین می‌کند.

حل اگر $x_۱$ ، $x_۲$ ، $x_۳$ ، و $x_۴$ را به ترتیب تعداد میزهای نوع اول، دوم، سوم، و چهارم فروخته شده به آن خرده فروش فرض کنیم در این‌صورت با توجه به اینکه مبلغ ۵۰۰۰۰۰۰ به‌عنوان سود اولیه به حساب می‌آید، سود کمپانی، یعنی P توسط مدل زیر می‌تواند محاسبه شود:

$$\begin{aligned} P &= ۵۰۰۰۰۰۰ \\ &\quad + (۱۰/۱۰۰)(۲۰۰۰۰۰x_۱ + ۳۰۰۰۰۰x_۲ + ۵۰۰۰۰۰x_۳ + ۸۰۰۰۰۰x_۴) \\ &= ۱۰^۴[۵۰۰ + (۲x_۱ + ۳x_۲ + ۵x_۳ + ۸x_۴)] \end{aligned}$$

مثال ۲–۴–۴ مثالی از یک مدل خطی هم‌زمان

در مثال قبل فرض کنید که فرآیند تولید میزها به این‌صورت باشد که ابتدا هر میز در بخش نجاری ساخته شده و سپس به بخش تکمیل جهت لُعاب دادن، موم اندود کردن، و صیقل دادن ارسال شود. همچنین فرض کنید که جدول ۲—۲ ساعات مورد نیاز در هر بخش را برای کار روی میزها نشان می‌دهد:

جدول ۲—۲ ساعات مورد نیاز در هر بخش برای کار روی میزها.

بخش	میز نوع اول	میز نوع دوم	میز نوع سوم	میز نوع چهارم
بخش نجاری	۴	۹	۷	۱۰
بخش تکمیل	۱	۱	۳	۴۰

در این‌صورت از هر نوع میز چه تعدادی ساخته شود تا ساعات کار مورد نیاز در بخش نجاری ۳۰۰ و در بخش تکمیل ۴۵۰ باشد؟

حل فرض کنید K زمان مورد نیاز در بخش نجاری و C زمان مورد نیاز در بخش تکمیل باشد. آنگاه،

$$K = ۴x_۱ + ۹x_۲ + ۷x_۳ + ۱۰x_۴ = ۳۰۰,\ C = x_۱ + x_۲ + ۳x_۳ + ۴۰x_۴ = ۴۵۰$$

در اینجا به‌کمک روشهای موجود برای حل دستگاههای خطی داریم:

$$x_۱ = -۴x_۳ - ۷۰x_۴ + ۷۵۰,\ x_۲ = x_۳ + ۳۰x_۴ - ۳۰۰$$

که با توجه به اینکه x_iها متعلق به مجموعه‌ی اعداد طبیعی هستند می‌توان از
$(x_۱, x_۲, x_۳, x_۴) = (۱۰, ۱۰, ۱۰, ۱۰)$
یا $(x_۱, x_۲, x_۳, x_۴) = (۳۰, ۵, ۵, ۱۰)$ به‌عنوان جوابهایی برای دستگاه فوق نام برد.

مثال ۲–۴–۵ مثالی از یک مدل قطعه‌ای خطی

فرض کنید که برای خریدن هر یک از جنس‌های معینی، ۱۰۰ تومان باید پرداخت شود و اگر بیش از ۱۰۰ عدد از آن جنس خریداری شود، قیمت هر یک از جنسهای اضافی به ۹۰ تومان برای هر کدام کاهش یابد. در این‌صورت مدلی که هزینه‌ی خرید x تا از این اجناس را مشخص می‌کند به‌صورت زیر می‌باشد:

$$y = \begin{cases} ۱۰۰x & ۰ \leq x \leq ۱۰۰ \\ ۱۰۰۰۰ + ۹۰(x - ۱۰۰) = ۱۰۰۰ + ۹۰x & x \geq ۱۰۰ \end{cases}$$

توجه کنید که هر دو عبارت خطی موجود در این مدل در $x = ۱۰۰$ با یکدیگر یکی هستند (یعنی در این نقطه پرش ناگهانی ویا انفصال وجود ندارد) و در ضمن x یک متغیر گسسته است.

مثال ۲–۴–۶ مثالی دیگر از یک مدل قطعه‌ای خطی

فرض کنید که بارش باران از ساعت ۲ بامداد به آهستگی شروع شود، اما تدریجاً افزایش یافته و در ساعت ۳ بامداد به یک سانتی‌متر بر ساعت می‌رسد. اگر میزان بارندگی بعد از ساعت ۳ تدریجاً کاهش یافته و در ساعت ۵ بامداد به ۴ میلی‌متر بر ساعت برسد واگر بعد از ساعت ۵ بامداد باز هم بارندگی کاهش یافته تا اینکه کاملاً در ساعت ۹ بامداد بارندگی متوقف شود، آنگاه معادلاتی را بنویسید که توسط آنها یک مدل برای سرعت بارندگی، بر حسب سانتیمتر بر ساعت، در زمان t بعد از نیمه شب مشخص شود.

حل اگر سرعت بارندگی را بر حسب سانتی‌متر بر ساعت، در زمان t با $r(t)$ نمایش دهیم، دراین‌صورت مشابه با روشی که در حل مثالهای ۸ و ۹ به‌کاربردیم خواهیم داشت:

$$r(t) = \begin{cases} ۰ & ۰ \leq t \leq ۲ \\ t - ۲ & ۲ \leq t \leq ۳ \\ ۱/۹ - ۰/۳t & ۳ \leq t \leq ۵ \\ ۰/۹ - ۰/۱t & ۵ \leq t \leq ۹ \end{cases}$$

مثال ۲-۴-۷ مثالی از یک مدل غیرخطی

وقتی که یک جسم با شتابی ثابت حرکت می‌کند سرعت آن یک تابع خطی از زمان است. اگر سرعت آن جسم در لحظه‌ی $t = ۰$ برابر u متر بر ثانیه باشد و اگر a مقدار ثابت شتاب باشد، آنگاه مقدار سرعت در زمان t برابر است با $v = at + u$. حال اگر مکان جسم در لحظه‌ی شروع حرکت $S = ۰$ فرض شود، در این‌صورت مسافت طی شده تا لحظه‌ی t به صورت $S = (۱/۲)at^۲ + ut$، مدل می‌شود.

مثال ۲-۴-۸ مثالی دیگر از یک مدل غیرخطی

فرض کنید که در مرکز یک شهر در هر کیلومتر مربع ۴۰۰۰ نفر زندگی کنند. اگر این تعداد در شعاع ۳ کیلومتری از مرکز شهر به حداکثر ۲۰۰۰۰ نفر در هر کیلومتر مربع برسد، مدل ساده‌ای پیشنهاد کنید که توسط آن بتوان تعداد جمعیت در هر کیلومتر مربع در شعاع r کیلومتری از مرکز شهر را محاسبه نمود. از این مدل استفاده کرده و موارد زیر را پیش‌بینی کنید:

(الف) چگالی جمعیت در ۱ کیلومتری از مرکز،

(ب) فاصله‌ی قسمتی از شهر تا مرکز که ۱۰۰۰۰ نفر در هر کیلومتر مربع جمعیت دارد، و

(ج) حد طبیعی توزیع جمعیت.

حل فرض کنید که $N(r)$ میزان تراکم جمعیت بر هر کیلو متر مربع باشد. باتوجه به اینکه ساده ترین مدل غیرخطی مدل درجه‌ی دوم است، فرض می‌کنیم $N(r) = ar^۲ + br + c$ و با اطلاعات داده شده ضرایب a، b ، و c را به‌صورت زیر پیدا می‌کنیم:
ابتدا مقیاس ۱ را برای ۱۰۰۰ جهت اجتناب از استفاده‌ی اعداد بزرگ انتخاب می‌کنیم.
اگر $r = ۰$ را مرکز شهر در نظر بگیریم در این‌صورت $N(۰) = ۴$ و درنتیجه $c = ۴$.
با توجه به فرض مسأله ماکزیمم مقدار N در $r = ۳$ برابر است با ۲۰. بنابراین، باید $-\frac{b}{۲a} = ۳$ و $۹a + ۳b + c = ۲۰$. اکنون یک دستگاه سه معادله‌ی سه مجهولی داریم که با حل آن مقادیر $a = ۱۶/۹$، $b = ۹۶/۹$، و $c = ۴$ به‌دست می‌آیند. بنابراین،

$$N(r) = \frac{-۱۶}{۹}r^۲ + \frac{۹۶}{۹}r + ۴ = ۴\frac{-۴r^۲ + ۲۴r + ۹}{۹}$$

(الف) چگالی در ۱ کیلومتری از مرکز $N(۱) = ۱۲۸۸۹$ نفر بر کیلو متر مربع.

(ب) باید r به گونه‌ای باشد که $۴(-۴r^۲ + ۲۴r + ۹)/۹ = ۱۰$. از حل این معادله‌ی درجه دوم داریم که $r_۱ = ۰/۶۳\,km$ و $r_۲ = ۵/۳۷\,km$.

(ج) در اینجا باید r به گونه‌ای باشد که $N(r) = ۰$. یعنی $-۴r^۲ + ۲۴r + ۹ = ۰$، و در نتیجه $r = ۶/۳۵\,km$.

توجه: علاوه بر مدل مرتبه‌ی دوم غیرخطی فوق، مدلهای دیگری قابل ارائه هستند که انعطاف بیشتری را درانتخاب مدل غیرخطی مناسب در اختیار ما قرار می‌دهند. مثلاً وقتی $(n + ۱)$ مورد داده درباره‌ی یک پدیده را داریم، می‌توانیم $(n + ۱)$ ضریب مطرح در یک چند جمله‌ای از درجه‌ی n را پیدا کنیم. البته به دلایلی که بعداً در فصل مربوط به 'برازش مدل ' مطرح خواهیم کرد ممکن است که انتخاب چنین چند جمله‌ای به‌عنوان مدل برای آن پدیده مناسب نباشد.

مثال ۲–۴–۹ مثالی از یک مدل متناوب

فرض کنید که میانگین درجه حرارت به $^\circ C$ در نقطه‌ی معینی از کره‌ی زمین به‌صورت زیر داده شده باشد:

جدول ۲—۳ داده‌های مربوط به اندازه‌ی دما در ماههای مختلف سال.

A	B	C	D	E	F
۳/۵	۶/۹	۱۰/۸	۱۲/۴	۱۵/۲	۱۵/۷

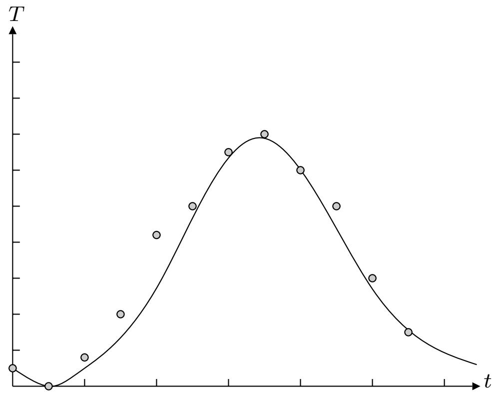
G	H	I	J	K	L
۱۴/۷	۱۲/۸	۸/۵	۵/۵	۲/۱	۲/۸

که در آن A، B، C، ...، به ترتیب عبارتند از فروردین، اردیبهشت، خرداد، .... واضح است که دوره‌ی تناوب می‌تواند ۱۲ ماه در نظر گرفته شود، بنابراین اگر زمان t را ماه در نظر بگیریم مدل مورد نظر به شکل $y = a + b\sin(\pi(t - t_۰)/۶)$ خواهد بود(شکل ۲—۵).

چون ماکزیمم درجه حرارت $y = ۱۵/۷$ در ماه F و می‌نیمم درجه حرارت $y = ۲/۱$ در ماه K است، میانگین سالیانه برابر است با $a = (۱۵/۷ + ۲/۱)/۲ = ۸/۹$. درنتیجه $b + ۸/۹ = ۱۵/۷$ و میدان نوسان یعنی b برابر است با ۶/۸ و مدل به‌صورت

$$y = ۸/۹ + (۶/۸)\sin(\pi(t - t_۰)/۶)$$

نوشته می‌شود. حال چون برای این مثال زمان $t = ۰$ را به‌عنوان ماه فروردین (A) در نظر گرفته‌ایم، و مینیمم مقدار درجه حرارت در ماه $t = ۱۱$ یعنی ماه بهمن (K) اتفاق



شکل ۲–۵ درجه‌ی حرارت در طول یک سال.

می‌افتد، باید داشته باشیم: $-۱ = \sin(\pi(۱۱ - t_۰)/۶)$ و درنتیجه $t_۰ = ۱۴$. بنابراین یک مدل تقریبی متناوب برای داده‌های فوق عبارت است از

$$y = ۸/۹ + (۶/۸)\sin(\pi(t - ۱۴)/۶)$$

۲–۵ مدل‌سازی ریاضی به‌کمک معادلات دیفرانسیل معمولی

مثال ۲–۵–۱ **مدل خطی رشد و زوال جمعیت**

فرض کنید $x(t)$ تعداد جمعیت در زمان t ، α میزان زاد و ولد در واحد زمان، و β میزان مرگ و میر در واحد رمان باشد. دراین‌صورت در فاصله‌ی زمانی $I_t = (t, t + \Delta t)$ تعداد متولدین $\alpha x \Delta t + o(\Delta t)$ و تعداد اموات $\beta x \Delta t + o(\Delta t)$ خواهد بود. در اینجا $o(\Delta t)$ مقداری بسیار کوچک است که به هنگام نزدیک شدن t به صفر آن مقدار هم به سمت صفر میل می‌کند. بنابراین،

$$x(t + \Delta t) - x(t) = [\alpha x(t) - \beta x(t)]\Delta t + o(\Delta t)$$

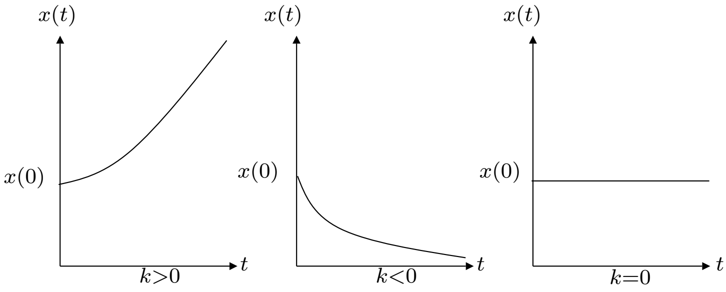
حال با تقسیم طرفین رابطه‌ی فوق بر Δt و حدگیری از طرفین رابطه‌ی حاصل به ازای $\Delta t \to ۰$ داریم:

$$\frac{dx}{dt} = (\alpha - \beta)x = kx$$

که با انتگرال‌گیری از طرفین این رابطه‌ی آخر، مدل ساده‌ی

$$x(t) = x(۰)e^{kt}$$

برای محاسبه‌ی تعداد جمعیت در زمان t به‌دست می‌آید. پس، به استناد این مدل، می‌توان گفت که در حالت $k > ۰$ تعداد جمعیت به‌صورت نمایی رشد می‌کند، در حالت $k < ۰$ تعداد جمعیت به‌صورت نمایی زوال می‌یابد، و در حالت $k = ۰$ تعداد جمعیت ثابت باقی می‌ماند (شکل ۲—۶).



شکل ۲—۶ رشد و زوال خطی.

مثال ۲—۵—۲ مدل غیرخطی رشد و زوال جمعیت

وقتی جمعیت افزایش می‌یابد، به‌دلیل ازدحام جمعیت و محدودیت منابع همراه با تعداد جمعیت یعنی x ، میزان زاد و ولد یعنی α کاهش و میزان مرگ و میر یعنی β افزایش می‌یابد. در چنین حالتی ساده ترین فرضی که می‌توان کرد این است که

$$\alpha = \alpha_{۱} - \alpha_{۲}x, \quad \beta = \beta_{۱} + \beta_{۲}x, \quad \alpha_{۱}, \alpha_{۲}, \beta_{۱}, \beta_{۲} > ۰$$

بنابراین مشابه با عملیاتی که در مثال قبل انجام دادیم خواهیم داشت:

$$\frac{dx}{dt} = [(\alpha_{۱} - \beta_{۱}) - (\alpha_{۲} + \beta_{۲})x]x = x(k - hx) \quad k > ۰, h > ۰$$

که با انتگرال‌گیری از طرفین این رابطه‌ی آخر مدل غیرخطی

$$\frac{x(t)}{k - hx(t)} = \frac{x(۰)}{k - hx(۰)}\, e^{kt}$$

برای محاسبه‌ی تعداد جمعیت در زمان t به‌دست می‌آید. پس،

(۱) اگر $x(۰) < k/h$ آنگاه $x(t) < k/h$ و درنتیجه $dx/dt > ۰$ یعنی $x(t)$ یک تابع یکنوای صعودی از متغیر t است که با افزایش t به مقدار k/h میل می‌کند.

(۲) اگر $x(\circ) > k/h$ آنگاه $x(t) > k/h$ و درنتیجه $dx/dt < \circ$ یعنی $x(t)$ یک تابع یکنوای نزولی از متغیر t است که با افزایش t به مقدار k/h میل می‌کند.

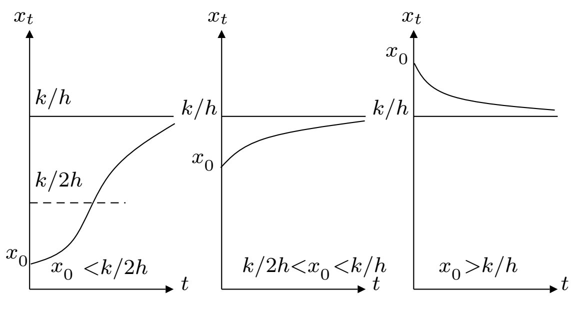
همچنین از معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه‌ی اول فوق داریم $\frac{d^{۲}x}{dt^{۲}} = k - ۲hx$، در نتیجه،

— اگر $x(\circ) < k/۲h$، آنگاه تقعر منحنی رشد در ابتدا رو به بالاست، در $x = \frac{k}{۲h}$ دارای یک نقطه‌ی عطف است، بعد از $k/۲h$ تقعر رو به پایین است، و $\lim_{t\to\infty} x(t) = k/h$

— اگر $k/۲h < x(\circ) < k/h$، آنگاه تقعر منحنی رشد همواره رو به پایین است و $\lim_{t\to\infty} x(t) = k/h$،

— اگر $x(\circ) = k/h$، آنگاه $x(t)$ همواره برابر با k/h است، و

— اگر $x(\circ) > h/k$، آنگاه تقعر منحنی رشد همواره رو به بالاست و $\lim_{t\to\infty} x(t) = k/h$. (شکل ۲—۷).



شکل ۲—۷ رشد و زوال غیرخطی.

۲—۶ مدل‌سازی ریاضی به‌کمک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی

مثال ۲—۶—۱ مدل شکار و شکارچی

گیریم $x(t)$ و $y(t)$ به ترتیب تعداد جمعیت شکار و شکارچی باشد و

(الف) اگر شکارچی موجود نباشد، جمعیت شکار با نرخی متناسب با جمعیت شکار رشد می‌کند،

(ب) اگر شکار موجود نباشد، جمعیت شکارچی با نرخی متناسب با جمعیت شکارچی کاهش می‌یابد،

(ج) وجود شکار و شکارچی با هم به نفع رشد شکارچی و به ضرر رشد شکار است. به عبارت دیگر، متناسب با حاصل‌ضرب جمعیت شکار و شکارچی، جمعیت شکارچی افزایش و جمعیت شکار کاهش می‌یابد.

این فرضها دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر را به‌عنوان مدلی ساده برای پدیده‌ی شکار و شکارچی معرفی می‌سازد.

$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy = x(a - by) \qquad a, b > 0$$

$$\frac{dy}{dt} = -py + qxy = -y(p - qx) \qquad p, q > 0$$

توجه کنید که هر دو مقدار dx/dt و dy/dt به ازای $x = x_e = p/q$ و $y = y_e = a/b$ صفر می‌شوند.

اگر جمعیت اولیه‌ی شکار و شکارچی به ترتیب p/q و a/b باشد، آنگاه جمعیت آنها همراه با زمان تغییر نمی‌کند. در واقع اینها تعداد جمعیت شکار و شکارچی در حالت تعادل است. مسلماً $x = 0$ و $y = 0$ نیز حالتی دیگر از این تعادل است.

حال از دستگاه فوق رابطه‌ی

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y(p - qx)}{x(a - by)}$$

به‌دست می‌آید و از این رابطه می‌توان به رابطه‌ی

$$\frac{a - by}{y}\, dy = -\frac{p - qx}{x}\, dx$$

دست یافت. اکنون با در نظر گرفتن شرایط اولیه‌ی $x_0 = x(0)$ و $y_0 = y(0)$ و انتگرال‌گیری از رابطه‌ی اخیر داریم:

$$a \ln \frac{y}{y_0} + p \ln \frac{x}{x_0} = b(y - y_0) + q(x - x_0)$$

که با ترسیم منحنی‌های نمایش دهنده‌ی این رابطه می‌توان در خصوص مساله‌ی شکار و شکارچی به بحث و بررسی بیشتر پرداخت.

مثال ۲-۶-۲ یک مدل ساده برای بیماری‌های واگیردار

فرض کنید در مورد یک بیماری واگیردار $S(t)$ تعداد افرادی باشد که مستعد بیماری هستند و $I(t)$ تعداد افرادی باشد که مبتلا به بیماری هستند. اگر در آغاز انتشار بیماری تعداد افراد مستعد n و تعداد افراد مبتلا ۱ باشد، آنگاه

$$S(t) + I(t) = n + 1, \qquad S(0) = n, \qquad I(0) = 1$$

با بررسی نمونه‌های مختلف می‌توان حدس زد که تعداد افراد مبتلا با نرخی متناسب با حاصل‌ضرب تعداد افراد مستعد و مبتلا رشد می‌کند و تعداد افراد مستعد با همان نرخ کاهش می‌یابد. از این مشاهدات دستگاه معادلات زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI, \quad \frac{dI}{dt} = \beta SI$$

با توجه به فرضهای

$$\frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} = ۰, \qquad S(t) + I(t) = \text{مقدار ثابت} = n + ۱$$

داریم

$$\frac{dS}{dt} = -\beta S(n + ۱ - S), \quad \frac{dI}{dt} = \beta I(n + ۱ - I)$$

که با انتگرال‌گیری از طرفین این روابط نتیجه می‌گیریم

$$S(t) = \frac{n(n+۱)}{n + e^{(n+۱)\beta t}}, \qquad I(t) = \frac{(n+۱)e^{(n+۱)\beta t}}{n + e^{(n+۱)\beta t}}$$

پس $\lim_{t\to\infty} S(t) = ۰$ و $\lim_{t\to\infty} I(t) = n + ۱$.

مثال ۲–۶–۳ ویروس HIV

در حال حاضر تعداد زیادی مدل ریاضی وجود دارد که پویایی و تحولات ویروس HIV را شرح می‌دهند. با توجه به پیچیدگی رفتار ویروس HIV، باید مدلهای ریاضی آن به اندازه‌ی کافی غنی باشند که جنبه‌های بیولوژیک مربوط به آن نیز در نظر گرفته شده باشد. البته نباید این جنبه‌ها به اندازه‌ای زیاد باشند که مانع شبیه‌سازی و تجزبه و تحلیل ریاضی آن شوند. در واقع هر مدل ریاضی برای رفتار ویروس HIV نه تنها باید رفتارهای آن در دنیای واقعی را تقریب بزند، بلکه باید جوابهای صریحی به سؤالهای مربوط به پدیده ارائه دهد.

در اینجا هدف ما ارائه‌ی یک مدل ریاضی که انتظارات فوق را برآورده سازد نیست، زیرا برای ارائه‌ی چنین مدلی نیاز به دانستن اطلاعات وسیعی از دانش زیست شناسی است که از عهده‌ی این کتاب خارج است. با وجود این، در اینجا مدلی را ارائه می‌دهیم که گسترش آن می‌تواند به شناسایی بهتر رفتار ویروس HIV کمک کند. مدلی که در اینجا ارائه می‌دهیم یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی تعینی است که به‌عنوان مدلی پایه برای ویروس HIV به حساب می‌آید.

فرض کنید x، y، و v به ترتیب تعداد سلولهای سالم، سلولهای آلوده، و ویروس‌های آزاد باشد. این مقادیر می‌توانند به‌عنوان ظرفیت موجود در بدن یک شخص یا در درون

یک نمونه‌ی معلوم از خون یا بافت به حساب آیند. دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی زیر مدلی را برای تغییرات x، y، و v ارائه می دهد.

$$\begin{cases} \dot{x} = \Lambda - x(\mu_x + \alpha v) \\ \dot{y} = \alpha v x - \mu_y y \\ \dot{v} = k y - \mu_v v \end{cases}$$

برطبق این مدل، جمعیت ویروسهای آزاد یعنی v با نرخی متناسب با تولید ظرفیت خود، یعنی $-\alpha x v$، سلولهای سالم x را آلوده می‌کنند. در اینجا α نرخ آلوده شدن (یعنی تبدیل سلول سالم به نوع آلوده) را مشخص می‌سازد. هم‌زمان با این فعل و انفعال، سلولهای آلوده‌ی y با نرخی متناسب با ظرفیت خود، یعنی ky، که در آن k نرخ تولید ویروس توسط سلولهای آلوده است، شروع به تولید ویروسهای آزاد می‌کنند، و با نرخی برابر با $\mu_y y$ از بین می‌روند، در حالی‌که در همان زمان ویروسهای آزاد v با نرخی برابر با $\mu_v v$ از سیستم خارج می‌شوند. در ضمن در این مدل $-\mu_x x$ نرخ از بین رفتن سلولهای سالم و Λ تعداد کل سلولهای سالم است.

۲–۷ مدل‌سازی ریاضی به‌کمک معادلات گسسته

مثال ۲–۷–۱ مدلی به‌صورت یک معادله‌ی گسسته‌ی مرتبه‌ی اول

یک سرمایه گذاری را در نظر بگیرید که بهره‌ی آن با نرخ $r\%$ در سال به مقدار اولیه‌ی سرمایه یعنی $P_۰$ افزوده می‌شود. پس اگر P_n را به‌عنوان مقدار سرمایه پس از n سال در نظر بگیریم می‌توانیم بگوییم که P_n در معادله‌ی گسسته‌ی $P_{n+۱} = (۱ + r/۱۰۰)P_n$، صدق می‌کند و درنتیجه رابطه‌ی $P_n = (۱ + r/۱۰۰)^n P_۰$، که جواب کلی معادله‌ی گسسته‌ی فوق است، برقرار می‌باشد.

حال فرض کنید بخواهیم بدانیم که مثلاً چند سال طول خواهد کشید تا مقدار سرمایه دو برابر مقدار اولیه‌ی خود شود. در واقع می‌خواهیم بدانیم که به ازای کدام n رابطه‌ی $P_n = ۲P_۰$ برقرار است. برای این منظور n باید به گونه‌ای باشد که $(۱ + r/۱۰۰)^n = ۲$ ، که با گرفتن لگاریتم از طرفین این تساوی آخر، مقدار n به‌صورت $n = (\ln ۲)/\ln(۱ + r/۱۰۰)$ به‌دست می آید. به‌عنوان مثال اگر $r = ۱۰$، آنگاه مقدار n تقریباً برابر با ۷٫۳ سال خواهد بود.

مثال ۲–۷–۲ مدلی به‌صورت دستگاه معادلات گسسته‌ی مرتبه‌ی اول

فرض کنید که در یک نبرد بین دو نیروی متخاصم A و B، هر واحد از سپاه A بتواند a واحد از سپاه B و هر واحد از سپاه B بتواند b واحد از سپاه A را نابود سازد. بنابراین، در

اینجا دو متغیر داریم که به‌وضوح سرنوشت آنها با یکدیگر گره خورده است. وقتی که اتفاق مربوط به یک مرحله از نبرد را در نظر بگیریم، به خوبی می‌توانیم مدل زیر که این ارتباط را نشان می‌دهد مورد بررسی و حل قرار دهیم:

تعداد کل واحدهایی از سپاه A که در مرحله‌ی nـاُم نبرد نابود می‌شوند برابر bB_n است، زیرا هر یک از واحدهای B_n از سپاه B تعداد b واحد از سپاه A را نابود می‌کند. درنتیجه تعداد واحدهای بازمانده از سپاه A در مرحله‌ی $(n+۱)$ـاُم برابر است با

$$A_{n+۱} = A_n - bB_n$$

به‌طور مشابه تعداد واحدهای بازمانده از سپاه B در مرحله‌ی $(n+۱)$ـاُم برابر است با

$$B_{n+۱} = B_n - aA_n$$

حال اگر وضعیت نبرد در مرحله‌ی nـاُم را با بردار $x_n = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}_n$ نمایش دهیم، دراین‌صورت دستگاه معادلات گسسته‌ی زیر را به‌عنوان مدل پیشنهادی برای این نبرد خواهیم داشت

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}_{n+۱} = \begin{bmatrix} ۱ & -a \\ -b & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}_n$$

که جواب آن با

$$M = \begin{bmatrix} ۱ & -a \\ -b & ۱ \end{bmatrix}$$

و

$$x_\circ = \begin{bmatrix} A_\circ \\ B_\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}_\circ$$

می تواند به‌صورت $x_n = M^n x_\circ$ نوشته شود.

مثال ۲-۷-۳ مدلی دیگر به‌صورت دستگاه معادلات گسسته‌ی مرتبه‌ی اول

در اینجا تعداد جمعیت از یک نوع حیوان را مورد بررسی قرار می‌دهیم که در سن یک‌سالگی بالغ به‌حساب می آیند و قادر به تولید مثل هستند. فرض کنید که این جمعیت را در مرحله‌ی nـاُم زمانی بر حسب تعداد این نوع حیوان، که در هر یک از گروههای سه گانه‌ی زیر قرار می‌گیرند، مشخص کرده باشیم:

$B_n =$ تعداد نوزادان و حیوانات نوجوان تا سن یک‌سالگی،

$A_n =$ تعداد حیوانات جوان بالغ با کمتر از دو سال سن،

$S_n =$ تعداد حیوانات مسن با سن دو سال یا بالاتر.

همچنین فرض کنید که جدول ۲—۴ اطلاعات مربوط به نرخ تولد و مرگ این نوع حیوان را ارائه دهد:

جدول ۲—۴ اطلاعات مربوط به نرخ تولد و مرگ یک نوع حیوان.

گروه	نرخ تولد	نرخ مرگ
B	۰	۰/۱
A	۰/۳	۰/۲
S	۰/۱	۰/۳

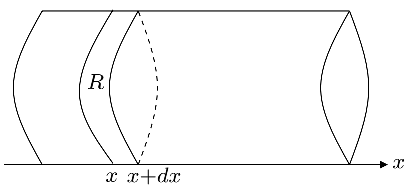
با این اطلاعات مدلی که برای پیش‌بینی جمعیت در سال n—اُم پیشنهاد می‌شود به‌صورت دستگاه معادلات گسسته‌ی زیر می‌باشد:

$$\begin{bmatrix} B \\ A \\ S \end{bmatrix}_{n+1} = \begin{bmatrix} 0 & 0/3 & 0/1 \\ 0/9 & 0 & 0 \\ 0 & 0/8 & 0/7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ A \\ S \end{bmatrix}_n$$

۲—۸ مدل‌سازی ریاضی به‌کمک معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

مثال ۲—۸—۱ رسانش گرما

میله‌ای مستقیم با سطح مقطع یکنواخت و ساخته شده از یک ماده‌ی همگن را در نظر بگیرید که محور میله در راستای محور x قرار دارد و دو سر میله در نقاط $x = 0$ و $x = L$ قرار دارند (شکل ۲—۸).



شکل ۲—۸ رسانش گرما.

فرض کنید که سطح جانبی میله به‌طور کامل طوری عایق بندی شده است که دمای u فقط به موقعیت محوری x و زمان t بستگی دارد و نه به مختصات جانبی y و z.

به بیان دیگر، فرض کنید که دما در هر سطح مقطعی از میله ثابت باقی می‌ماند. این فرض هنگامی لحاظ می‌شود که ابعاد جانبی میله در مقایسه با طول آن کوچک باشند.

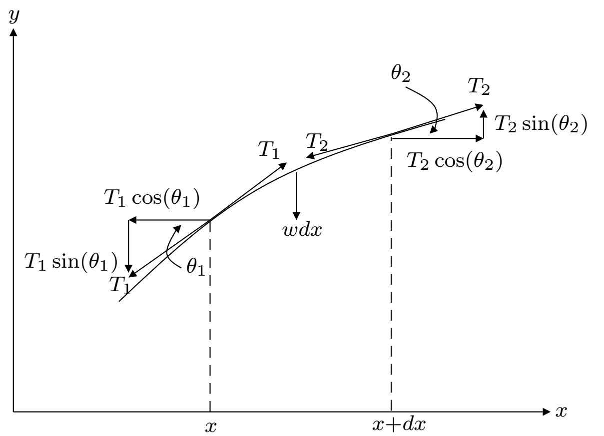
معادله‌ی دیفرانسیل حاکم بر دمای نقاط در میله، بیان یک توازن بنیادی فیزیکی است. آهنگی که با آن گرما به درون هر قسمتی از میله جاری می‌شود با آهنگی که با آن گرما در آن قسمت از میله جذب می‌شود، برابر است. جملاتی که در این تساوی ظاهر می‌شوند به ترتیب، به جمله‌ی شار (سیلان) و جمله‌ی جذب موسومند. حال اگر به‌کمک قوانین فیزیک و فرضیات دیگر، جملات شار و جذب را محاسبه کرده و برقراری توازن آنها را برآورده سازیم به معادله‌ی رسانش گرما دست خواهیم یافت که به‌صورت زیر است:

$$\begin{array}{ll} \alpha^{۲} u_{xx} = u_t & \circ \le x \le L, \;\; t \ge \circ \\ u(\circ, t) = u(L, t) = \circ & t > \circ \\ u(x, \circ) = f(x) & \circ < x < L \end{array}$$

که در آن $\alpha^{۲}$ ضریب پخش گرمایی خوانده می شود و فقط وابسته به مواد سازنده‌ی میله است. معادله‌ی سوم در مدل فوق رسانش گرما در لحظه‌ی $t = \circ$ را مشخص می‌کند.

مثال ۲–۸–۲ معادله‌ی موج

تاری کاملاً انعطاف پذیر، که محکم بین دو تکیه گاه به‌طور افقی کشیده شده است را در نظر بگیرید (شکل ۲–۹). اگر محور x در راستای تار و دو سر تار در نقاط $x = \circ$ و $x = L$ قرار بگیرند و اگر این تار در لحظه‌ی $t = \circ$ به ارتعاش در آید (مثلاً در اثر کشیدن) و از آن پس مختل نشده باقی بماند، در صفحه‌ی قائم به شرطی آزادانه ارتعاش خواهد کرد که اثرهای میرایی، مثل مقاومت هوا، بسیار ناچیز و قابل چشم پوشی باشند.



شکل ۲–۹ به‌دست آوردن معادله‌ی موج.

برای دستیابی به مدل مربوط به این حرکت، نیروهایی بررسی کنید که بر قسمت کوچکی از تار به طول Δx واقع بین نقاط x و $x+\Delta x$ ، وارد می‌شوند (شکل ۲—۹). در ضمن فرض کنید که ارتعاش تار اندک است تا بتوان تنها جابه‌جایی قائم نقطه‌ی x در زمان t ، که با $u(x,t)$ نمایش داده می‌شود، را مورد بحث و بررسی قرار داد.

اعمال قانون نیوتن بر عنصر به طول Δx از تار چنین بیان می‌دارد که نیروی خارجی خالص، ناشی از کشش دو سر این عنصر، باید با حاصلضرب جرم عنصر در شتاب مرکز جرم برابر باشد. به استناد این قانون و در نظر گرفتن چند فرض دیگر و انجام عملیات ریاضی مدل زیر برای تعیین جابجایی قائم به‌دست می‌آید:

$$\begin{array}{ll} a^{\text{۲}} u_{xx} = u_{tt} & \circ \leq x \leq L, \quad t \geq \circ \\ u(\circ,t) = u(L,t) = \circ & \\ u(x,\circ) = f(x), \ u_t(x,\circ) = g(x) & \circ < x < l, \end{array}$$

که در آن $a^{\text{۲}} = T/\rho$ ، T کشش تار، و ρ چگالی ماده‌ی سازنده‌ی تار است.

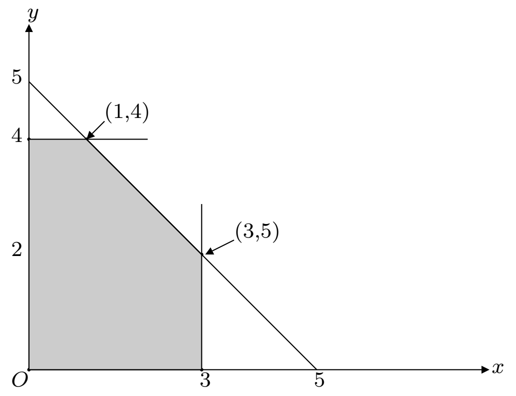
۲—۹ مدل‌سازی ریاضی به‌کمک بهینه‌سازی خطی

مثال ۲—۹—۱ **ساخت دو نوع کتاب**

یک شرکت می‌خواهد کتابی را در دو نوع، یکی با جلد نازک و دیگری با جلد محکم، به چاپ برساند. تولید کتابهای با جلد نازک روزانه ۴۰۰ هزار تومان و تولید کتابهای با جلد محکم روزانه ۷۰۰ هزار تومان برای شرکت سودآوری دارد. در حال حاضر شرکت تنها می‌تواند یک کارگر ماهر چاپخانه استخدام نماید و این کارگر نیز تنها می‌تواند ۵ روز در هفته کار کند. محدودیت موجودی کاغذ باعث شده است که حد اکثر بتوان ۳ روز در هفته را به چاپ کتاب با جلد نازک و حد اکثر بتوان ۴ روز در هفته را به چاپ کتاب با جلد محکم اختصاص داد. مدلی رابرای برنامه‌ی کار هفتگی کارگر خود تنظیم کنید.

ابتدا محدودیت‌های موجود را به زبان ریاضی می‌نویسیم. فرض کنید x و y ، به ترتیب، تعداد روزهایی باشد که به چاپ کتاب با جلد نازک و کتاب با جلد محکم اختصاص می‌یابد. دراین‌صورت محدودیت‌ها عبارتند از:

محدودیت روزهای کار به پنج روز در هفته	$x + y \leq \text{۵}$
محدودیت چاپ کتاب با جلد نازک	$x \leq \text{۳}$
محدودیت چاپ کتاب با جلد محکم	$y \leq \text{۴}$
تعداد روزها باید اعداد مثبت باشند	$x \geq \circ, \quad y \geq \circ$



شکل ۲—۱۰ محدودیت‌های ساخت دو نوع کتاب.

در ضمن سود هفتگی شرکت برابر است با $P = ۴۰۰x + ۷۰۰y$.

با توجه با این محدودیت‌ها، برای تنظیم برنامه‌ی کار هفتگی کارگر خود، مقادیر x و y را طوری تعیین می‌کنیم که این مقدار P ماکزیمم شود. شکل ۲—۱۰ نشان دهنده‌ی نمودار مربوط به محدودیت‌های فوق است. نقاط گوشه‌ای عبارتند از $(۰,۴)$ ، $(۱,۴)$ ، $(۳,۲)$، $(۳,۰)$ ، و $(۰,۰)$.

سود حاصل در هر یک نقاط عبارت است از:

$$P(۰,۴) = ۲۸۰۰,\ P(۱,۴) = ۳۲۰۰, P(۳,۲) = ۲۶۰۰, P(۳,۰) = ۱۲۰۰$$

و $P(۰,۰) = ۰$. بنابراین، برای رسیدن به ماکزیمم سود ممکن باید برای کارگر ۱ روز را به چاپ کتاب با جلد نازک و ۴ روز را به چاپ کتاب با جلد محکم اختصاص داد.

مثال ۲–۹–۲ کارگاه ساخت قطعات یدکی

یک کارگاه ساخت قطعات یدکی، ترمز کاسه‌ای و ترمز دیسک تولید می‌کند. برای تولید هر دو ترمز نیاز به چرخ تراش و چرخ سنباده می‌باشد. برای تولید ترمز کاسه‌ای به ۲ ساعت کار چرخ تراش و ۴ ساعت کار چرخ سنباده و برای تولید ترمز دیسک به ۳ ساعت کار چرخ تراش و ۲ ساعت کار چرخ سنباده نیاز است. این کارگاه روی ترمز کاسه‌ای ۱۴۰ هزار تومان و روی ترمز دیسک ۱۸۰ هزار تومان سود می‌برد. اگر فرض کنیم که این کارگاه تنها دارای یک چرخ تراش و یک چرخ سنباده است و هر کدام در هر روز ۱۶ ساعت مورد استفاده قرار می‌گیرند، چه تعدادی از هر یک از این دو ترمز باید ساخته شود تا بیشترین سود برای کارگاه حاصل شود. ابتدا ساعات مورد نیاز را در جدول ۲—۵ مشخص می‌کنیم:

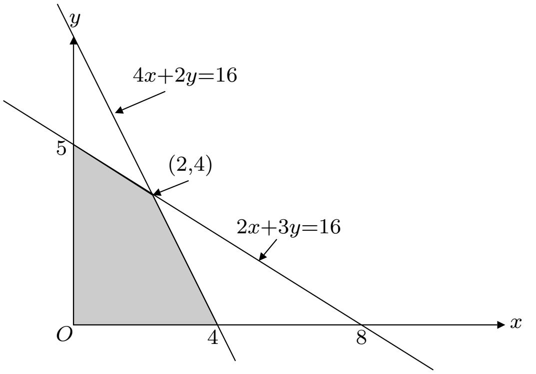
جدول ۲—۵ ساعات مورد نیاز استفاده از چرخهای تراش و سنباده.

ترمز	چرخ تراش	چرخ سنباده
ترمز کاسه‌ای	۲ ساعت	۴ ساعت
ترمز دیسک	۳ ساعت	۲ ساعت

فرض کنید x تعداد ترمزهای کاسه‌ای و y تعداد ترمزهای دیسک تولید شده باشد. با توجه به محدودیت‌های

محدودیت ۱۶ ساعته چرخ تراش	$۲x + ۳y \leq ۱۶$
محدودیت ۱۶ ساعته چرخ سنباده	$۴x + ۲y \leq ۱۶$
تعداد تولیدات باید اعداد مثبت باشند	$x \geq ۰, \quad y \geq ۰$

می خواهیم تابع هدف $P = ۱۴۰x + ۱۸۰y$، که بیان کننده‌ی سود کارگاه است، را ماکزیمم کنیم. با توجه به شکل ۲—۱۱، که نشان دهنده‌ی نمودار مربوط به محدودیت‌های فوق است و چند عملیات ساده‌ی جبری، می‌توان تحقیق کرد که نقطه‌ی گوشه‌ای $(۲,۴)$ این ماکزیمم را نتیجه می‌دهد. به این معنا که کارگاه با تولید ۲ ترمز کاسه‌ای و ۴ ترمز دیسک به ماکزیمم سود خود، یعنی یک میلیون تومان می‌رسد.



شکل ۲—۱۱ محدودیت‌های ساخت قطعات یدکی.

۲—۱۰ مدل‌سازی ریاضی به‌کمک متغیرهای تصادفی

مثال ۲—۱۰—۱ بررسی ترافیک در یک آزاد راه

فرض کنید در یک سمت از آزاد راهی ایستاده اید و نظاره گر ترافیک موجود در آن هستید. با در نظر گرفتن متغیرهای تصادفی زیر آنها را از نظر کیفی، گسسته یا پیوسته دسته بندی کنید و مدلهای ممکن برای توزیع آنهارا پیشنهاد کنید.

(الف) نوع وسیله‌ی نقلیه
(ب) طول وسیله‌ی نقلیه
(ج) رنگ وسیله‌ی نقلیه
(د) تعداد سرنشینان وسیله‌ی نقلیه
(ه) سرعت وسیله‌ی نقلیه
(و) زمان بین وسایط نقلیه‌ای که از نقطه‌ی مقابل شما می‌گذرند
(ز) تعداد وسایط نقلیه‌ای که در مدت یک دقیقه از نقطه‌ی مقابل شما می‌گذرند

(الف) این متغیر یک متغیر کیفی است. احتمالاتی که می‌توان برای این متغیر در نظر گرفت این است که مثلاً خودرو شخصی، وانت، کامیون، اتوبوس، موتورسیکلت، و یا دوچرخه باشد. یک توزیع احتمالی در جدول ۲—۶ خلاصه شده است:

جدول ۲—۶ توزیع مربوط به نوع وسیله‌ی نقلیه.

خودرو شخصی	وانت	کامیون	اتوبوس	موتور سیکلت	دوچرخه
۰/۶	۰/۱	۰/۱۵	۰/۰۵	۰/۰۵	۰/۰۵

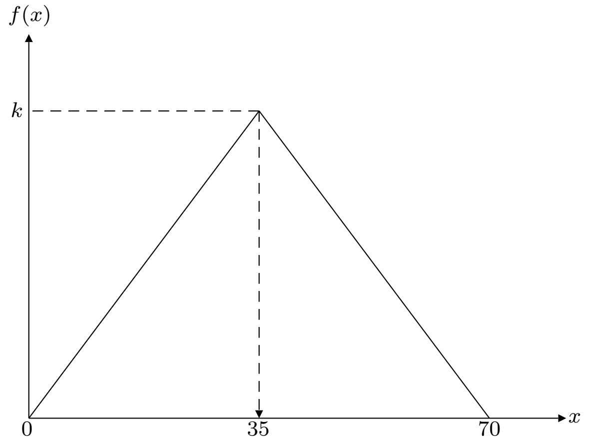
(ب) این متغیر یک متغیر پیوسته است. به‌جای در نظر گرفتن تنها یک تابع توزیع برای طول همه‌ی وسایط نقلیه، در نظر گرفتن مدلهای متفاوت برای هر نوع وسیله‌ی نقلیه منطقی‌تر است. به‌عنوان مثال، طول دوچرخه‌ها تقریباً ثابت است و طول وسایط نقلیه موتوری بین ۳ تا ۵ متر تغییر می‌کند. ساده‌ترین توزیع برای طول ماشینها توزیع یکنواخت $U[۳, ۵]$ است.

(ج) این متغیر یک متغیر کیفی است. مدل ممکن برای توزیع این متغیر بستگی به تعداد نوع رنگهایی دارد که می‌خواهند در نظر گرفته شوند. این مشکل را می‌توان با تقسیم رنگ وسایط نقلیه‌ای به دو دسته‌ی سفید و غیرسفید، نادیده گرفت و مثلاً توزیعی به‌صورت آنچه که در جدول ۲—۷ آمده است برای آن در نظر گرفت:

جدول ۲—۷ توزیع مربوط به نوع رنگ وسیله‌ی نقلیه.

سفید	غیر سفید
۰/۲	۰/۸

(د) این متغیر یک متغیر گسسته است. با حذف اتوبوس‌ها می‌توان در خصوص پیشنهاد تابع توزیع مربوط ساده‌تر اندیشید و مثلاً چیزی شبیه به جدول ۲—۸ را ارائه نمود:



شکل ۲–۱۲ نمودار تابع چگالی ترافیک در یک آزادراه.

جدول ۲–۸ توزیع مربوط به تعداد سرنشینها.

۱	۲	۳	۴ نفر یا بیشتر
۰/۶	۰/۲	۰/۱	۰/۱

(ه) این متغیر یک متغیر پیوسته است. فرض کنید مقدار میانی برای سرعت ۳۵ مایل بر ساعت و سرعت از ۰ تا ۷۰ مایل بر ساعت گسترش یافته باشد. همچنین فرض کنید تنها تعداد کمی از وسایط نقلیه خیلی تند و یا خیلی کند حرکت می‌کنند. با این فرضها ساده‌ترین تابع چگالی برای این توزیع تابعی است که توریع مثلثی را نتیجه می‌دهد (شکل ۱۲.۲).

در واقع این تابع چگالی دارای تعریفی به‌صورت

$$f(x) = \begin{cases} \frac{kx}{۳۵} & ۰ \le x \le ۳۵ \\ \frac{k(۷۰-x)}{۳۵} & ۳۵ \le x \le ۷۰ \end{cases}$$

می‌باشد. یکی دیگر از توابع چگالی ممکن تابع f با تعریف $f(x) = kx(۷۰ - x)$ است، که در آن k عددی است که در رابطه‌ی

$$\int_{۰}^{۷۰} kx(۷۰ - x)dx = ۱$$

صدق می‌کند. همچنین می‌توان توزیع نرمال $N(۳۵, \sigma^۲)$ ، که در آن $\sigma^۲$ واریانسی مناسب است، برای این متغیر پیشنهاد نمود (برد نامتناهی این توزیع اجازه می‌دهد تا سرعت‌های منفی و سرعت‌های بالاتر از ۷۰ نیز به حساب آیند).

(و) این متغیر یک متغیر پیوسته است. زمان وقفه‌ی کوتاه بین وسایط نقلیه در حال حرکت عمومیت دارد حال آنکه زمان وقفه‌ی بلند بسیار نادر است. یک مدل مناسب برای اینگونه توزیع‌ها، توزیع نمایی $f(x) = (1/m)e^{-x/m}$ است، که در آن m میانگین زمانهای وقفه است.

(ز) این متغیر یک متغیر گسسته است و واضح است که با متغیر مطرح در قسمت (و) در ارتباط است. اگر توزیع زمان وقفه بین وسایط نقلیه نمایی باشد، آنگاه عدد N یعنی تعداد وسایط نقلیه‌ی گذرنده از یک نقطه‌ی مشخص در طول زمان ثابت L دارای توزیع پواسون است. تابع احتمال این توزیع عبارت است از

$$p(n) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

که در آن $\lambda = L/m$.

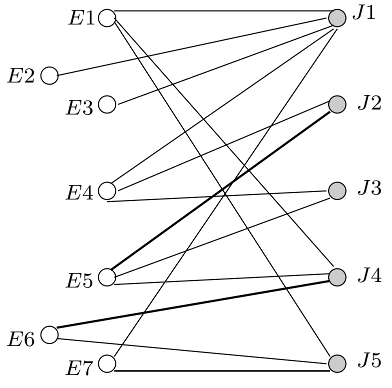
۲–۱۱ مدل‌سازی ریاضی به‌کمک گراف

آغازنظریه‌ی گراف به قرن هجدهم باز می‌گردد. اویلر ریاضیدان بزرگ مفهوم گراف را در سال ۱۷۳۶ برای حل مسأله‌ی پل‌های کونیگسبرگ ابداع کرد. اما رشد و پویائی این نظریه عمدتاً مربوط به نیم قرن اخیر و با رشد علم انفورماتیک بوده است. گراف‌ها امروزه کاربرد زیادی در علوم دارند. از گراف‌ها در شبکه‌ها، طراحی مدارهای الکتریکی، اصلاح هندسی خیابانها برای حل مشکل ترافیک، و غیره استفاده می‌شود. مهمترین کاربرد گراف مدل‌سازی پدیده‌های گوناگون و بررسی روی آنهاست. با گراف می‌توان به راحتی یک نقشه‌ی بسیار بزرگ یا شبکه‌ای عظیم را درون یک ماتریس به نام ماتریس وقوع گراف ذخیره کرد و یا آلگوریتم‌های مناسب مانند آلگوریتم دایسترا یا آلگوریتم کروسکال و غیره را برروی آن اعمال نمود.

در اینجاچند نمونه از کاربردهای گراف آورده شده است. البته تجزیه و تحلیل بیشتر این مسائل نیاز به اطلاعات مربوط به روش‌های نظریه گراف دارد. به همین دلیل از بحث بیشتر روی این مثالها صرف‌نظر شده است.

مثال ۲–۱۱–۱ مساله‌ی تخصیص شغل‌ها

فرض کنید یک شرکت برای انجام تعدادی شغل نیاز به کارمند دارد و هر کارمند برای انجام بعضی از این شغل‌ها مناسب است. علاوه‌براین هر شخص در یک زمان تنها قادر به انجام حداکثر یک شغل است.



شکل ۲—۱۳ گراف تخصیص شغل‌ها.

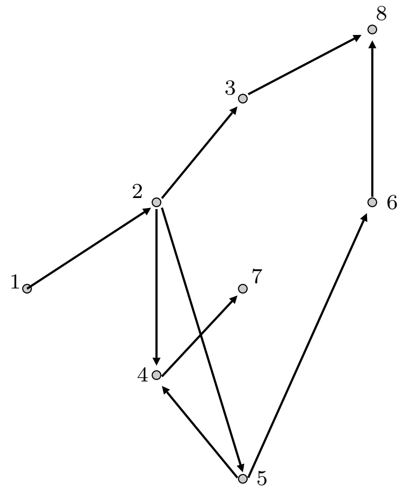
چگونه می‌توان تخصیصی برای شغل‌ها انجام داد به‌طوری که بیشترین تعداد از شغل‌ها به‌طور هم‌زمان انجام شود. در گراف دو بخشی شکل ۲—۱۳ رأس‌های خالی نشان دهنده‌ی کارمندان و رأس‌های توپر نشان دهنده‌ی شغل‌ها و هر یال نشان دهنده‌ی یک تخصیص شغل مناسب است. یال‌های سیاه پر رنگ بزرگترین مجموعه‌ی ممکن از تخصیص‌های مناسب را نشان می‌دهند.

مثال ۲—۱۱—۲ شبکه‌ی برنامه‌ریزی فعالیت‌ها در انجام یک پروژه

در انجام پروژه‌های بزرگ، اغلب بعضی از کارها تا زمانی که کارهای مشخص دیگری انجام نگیرد، نمی‌تواند آغاز شود. در جدول ۲—۹ شماره‌ی ترتیب این فعالیتها برای ساختن یک خانه ارائه شده است.

جدول ۲—۹ شماره‌ی ترتیب فعالیت‌های ساختن یک خانه.

فعالیت‌ها	
شالوده ریزی	۱
دیوارها وسقف‌ها	۲
پشت بام	۳
سیم کشی برق	۴
پنجره‌ها	۵
نماسازی	٦
نقاشی داخل	۷
نقاشی بیرون	۸

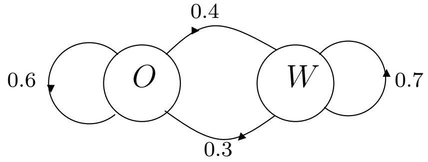


شکل ۲–۱۴ شبکه‌ی برنامه‌ریزی فعالیت‌ها در ساختن یک خانه.

در شکل ۲–۱۴ یک مدل گراف جهت‌دار برای کارهای لازم اجرای ساختن یک خانه نشان داده شده است. در این گراف رأس‌ها نشان دهنده‌ی کارها هستند و یک بردار جهت‌دار از رأس u به رأس v به این معنی است که کار v تا زمانی که کار u تمام نشود، نمی‌تواند آغاز شود. برای سادگی شکل یال‌هایی که از خاصیت ترایابی به‌دست می‌آیند، رسم نشده است. این گراف جهت‌دار دیاگرام پوشش یک مجموعه‌ی جزئاً مرتب از کارها است.

مثال ۲–۱۱–۳ گراف جهت دار مارکوف

فرض کنید انسانهایی در مناطق خیلی دور تنها دو نوع ماده‌ی غذایی را برای صبحانه خریداری می‌کنند.به‌عنوان مثال O و T . الگوی میزان استفاده از این دو نوع غذا با استفاده از ماتریس تبدیل در شکل ۲–۱۵ نشان داده شده است.



	O	W
O	0.6	0.4
W	0.3	0.7

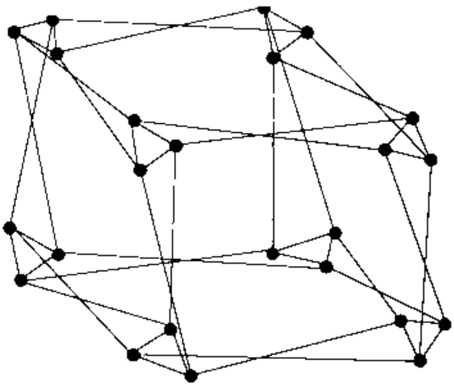
شکل ۲–۱۵ گراف جهت‌دار مارکوف.

برای مثال اگر شخصی تنها غذای O را خریداری کند، آنگاه شانس اینکه شخص بعد O خریداری کند ۰/۶ و شانس خرید T توسط شخص دیگر ۰/۴ است. در فرآیند مارکوف، احتمال تبدیل از یک وضعیت به یک وضعیت دیگر بستگی به وضعیت جاری دارد. در اینجا وضعیت‌ها O و T هستند که نشان دهنده‌ی این است که آیا بیشترین خریدهای اخیر O یا T بوده است.

گراف جهت‌دار که این فرآیند مارکوف را مدل‌سازی می‌کند، نمودار مارکوف نام دارد که در شکل ۲—۱۵ نشان داده شده است. هر بردار جهت‌دار با میزان احتمال تبدیل از وضعیت دم به وضعیت سر بردار برچسب گذاری شده است. به این‌ترتیب مجموع احتمال یال‌های خروجی از هر رأس برابر ۱ است.

مثال ۲–۱۱–۴ شبکه‌ی ارتباط داخلی برای معماری موازی

تعداد زیادی ریزپردازنده می توانند بر روی یک تراشه از یک کامپیوتر چند تراشه‌ای به‌گونه‌ای به هم مربوط شوند که بتوانند آلگوریتم‌های موازی را انجام دهند. هر رأس نماینده‌ی یک ریز پردازنده و هر یال نشان دهنده‌ی ارتباط مستقیم بین دو ریز پردازنده است. شکل ۲—۱٦ گراف زمینه‌ی ساختار چنین شبکه‌ای را به نام پروانه‌ی پیچیده نشان می‌دهد. روش سریع و کامل برای معماری موازی، از جمله پروانه‌ی پیچیده وجود دارد. جزئیات این مسائل ارتباط زیبایی بین نظریه‌ی گراف و جبر مجرد را به‌خوبی نشان می‌دهد.



شکل ۲—۱٦ شبکه‌ی ارتباط داخلی برای معماری موازی.

۲–۱۲ مدل‌سازی به‌کمک ریاضیات فازی

مدل‌سازی فازی، که به‌کمک منطق فازی انجام می‌پذیرد، در جهت تبدیل اطلاعات در باره‌ی یک پدیده به یک مدل ریاضی مورد استفاده قرار می‌گیرد. در واقع مدل‌سازی فازی یک روش ساده‌ی مستقیم و طبیعی برای تبدیل توضیحات لفظی به یک مدل ریاضی است. معمولاً شرح لفظی یک متخصص در یک پدیده شامل عوامل زیر است:

- " بازیگران": به‌عنوان مثال در شرح لفظی پدیده‌ی مربوط به حفظ قلمرو، بازیگران می‌توانند دو حیوان هم نوع باشند.
- " محیط اطراف": عوامل محیطی که روی رفتار و عکس‌العمل‌های بازیگران تأثیر می‌گذارد.
- " رفتار هر بازیگر": عکس العمل یک بازیگر نسبت به بازیگران دیگر و محیط اطراف.
- " نمونه‌ی کلی": نتیجه‌ی رفتار هر بازیگر و فعل و انفعالات بین بازیگران و محیط اطراف.

مراحل زیر تبدیل شرح لفظی یک پدبده به یک مدل ریاضی را نشان می‌دهد:

- تشخیص متغیرها که شامل بازیگران و قسمتی از محیط اطراف می‌شوند.
- تبدیل شرح رفتار بازیگران به قوانین فازی که ارتباط بین این متغیرها را بیان می‌کند.
- تعریف عبارات فازی (عملگرهای منطقی) در قوانین با به‌کاربردن توابع عضویت فازی (عملگرهای ریاضی).
- تبدیل قوانین فازی به مدلهای ریاضی به‌کمک استنباطهای فازی.

مثال زیر در سطحی نسبتاً مقدماتی گفته‌های فوق را توضیح می‌دهد.

مثال ۲–۱۲–۱ رفتارهای مربوط به حفظ قلمرو

در این مثال رفتارهای مربوط به دو ماهی در جهت حفظ قلمرو خود مورد توجه قرار گرفته است و به‌کمک ریاضیات فازی یک مدل ریاضی مربوط به این رفتارها پیشنهاد شده است.

در گام اول متغیرهای حالت تشخیص داده می‌شوند. در اینجا متغیرهای حالت عبارتند از: ماهی i–اُم، $i = ۱, ۲$، که در موقعیت $x^i(t) \in \mathbb{R}^n$ قرار دارد، دارای تمایل جنگی $w_i(t) \in \mathbb{R}$ است، و لانه‌ای در موقعیت $c^i \in \mathbb{R}^n$ دارد.

در گام بعد تبدیل شرح لورنز، درباره‌ی تغییرات تمایلات جنگی، به قوانین فازی انجام می‌شود:

- اگر $near_i(x^i, c^i)$ آنگاه $\dot{w}_i = +۱$،
- اگر $far_i(x^i, c^i)$ آنگاه $\dot{w}_i = -۱$،

یعنی، تمایلات جنگی ماهی با نزدیک (دور) بودن از لانه‌اش افزایش (کاهش) می‌یابد. به‌طور مشابه شرح تحرکات ماهی به قوانین فازی زیر تبدیل می‌شود:

- اگر $near_i(x^i, x^j)$ و $high_i(w_i)$ آنگاه $\dot{x}^i = x^j - x^i$،
- اگر $near_i(x^i, x^j)$ و $low_i(w_i)$ آنگاه $\dot{x}^i = c^i - x^i$،

که در آن x^j موقعیت ماهی دیگر است. یعنی، اگر ماهی دیگر نزدیک من باشد، و تمایل جنگی من بالا (پایین) باشد، من به سمت ماهی دیگر (لانه‌ام) حرکت می‌کنم.

سومین گام تعیین توابع عضویت برای جملات فازی است. برای این کار از تابع عضویت $n_i(x, y) = \exp(-||x - y||^۲/k_i^۲)$(که در آن پارامتر $k_i > ۰$ گسترش تابع گاووس است)، برای تعریف $near_i(x, y)$ استفاده می‌کنیم. همچنین برای تعریف $high_i$ از تابع عضویت $h_i(w) = \frac{۱}{۲}(۱ + \tanh(w/a_i))$ (که در آن پارامتر $a_i > ۰$ بیانگر شیب h_i است) استفاده می‌کنیم. توجه کنید که $\lim_{w \to -\infty} h_i(w) = ۰$ و $\lim_{w \to +\infty} h_i(w) = ۱$. برای تعریف جملات مخالف far_i و low_i به ترتیب توابع $f_i(x, y) = ۱ - n_i(x, y)$ و $l_i(w) = ۱ - h_i(w)$ را مورد استفاده قرار می‌دهیم.

بالاخره، با به‌کاربردن حاصل‌ضرب برای عملگر "و"، و خروج از ساختارهای فازی، به مدلهای ریاضی زیر برای رفتارهای مربوط به حفظ قلمرو می‌رسیم:

$$\dot{w}_i = ۲ \exp\left(-\frac{||x^i - c^i||^۲}{k_i^۲}\right) - ۱, \quad i = ۱, ۲$$

$$\dot{x}^i = c^i - x^i + h_i(w_i)(x^j - c^i), \quad i = ۱, ۲$$

۲–۱۳ تمرین‌ها

۱) (الف) اگر نرخ بهره 11% باشد و بخواهیم ۷۵ میلیون تومان وام را طی مدت ۲۵ سال بازپرداخت کنیم، در این صورت میزان پرداخت ماهیانه را تعیین کنید. (راهنمایی: ابتدا یک مدل را پیشنهاد کنید که به این سؤال در حالت کلی پاسخ دهد.)

(ب) به‌کمک مدل به‌دست آمده در قسمت (الف) مقدار بدهی را پس از گذشت ۱۲ سال تعیین کنید.

۲) قرار است که نبردی بین دو نیروی A با ۱۰۰۰۰ سرباز و B با ۵۰۰۰ سرباز شروع شود. اگر هر نفر از افراد سپاه A قدرت از بین بردن $a = ۰/۱$ نفر از سپاه B و هر نفر از افراد سپاه B قدرت از بین بردن $b = ۰/۱۵$ نفر از سپاه A را داشته باشد، در این‌صورت مدل ساده‌ای را پیشنهاد کنید که نتیجه‌ی نبرد را پیش‌بینی کند.

۳) فرض کنید هر جنس ماده‌ی بالغ از یک نوع حشره هر ماه ۱۰۰ تخم بگذارد. تنهاحشره‌های ماده را در نظر گرفته و فرض کنید به 10% از تخم‌ها آسیبی نمی‌رسد تا به مرحله‌ی کرم حشره برسند، به 20% از کرم‌های حشره آسیبی نمی‌رسد تا به مرحله‌ی نوچه برسند، و به 30% از نوچه‌ها آسیبی نمی‌رسد تا بالغ شوند. همچنین فرض کنید هر کدام از این مراحل یک ماه طول می‌کشد و اینکه 40% حشره‌های بالغ این ماه هنوز ماه بعد نیز زنده هستند. بااین فرضیات یک مدل ریاضی برای جمعیت این نوع حشره نوشته و پیش‌بینی کنید که اگر با ۱۰ حشره‌ی بالغ شروع کنیم جمعیت پس از گذشت ٦ ماه و پس از گذشت یک مدت طولانی چگونه خواهد بود.

۴) تعاریف چرخزای (cycloid)، درون چرخزای (epicycloid)، و برون چرخزای (hypocycloid) را نوشته و معادلات هر یک را به‌دست آورید. سپس برای هر یک پدیده‌ای را مثال بزنید که به‌کمک آن مدل‌سازی شود.

۵) شخصی می‌خواهد در سریع ترین زمان ممکن به ایستگاه اتوبوس برسد. ایستگاه در کنار یک پارک چمن، ۲۰۰۰ متر به طرف غرب و ٦۰۰ متر به طرف شمال از موقعیت فعلی وی قرار گرفته است. او می‌تواند در طول پیاده رو پارک با سرعت ٦ متر بر ثانیه به سمت غرب قدم بزند. همچنین می‌تواند از میان چمن عبور کند، اما به دلایلی سرعت وی تنها ۴ متر بر ثانیه است. معین کنید چه مسیری او را سریع‌تر به ایستگاه می‌رساند.

٦) یک راهرو که عرض آن ۴ متر است تحت زاویه‌ی قائمه به راهرو دیگری منتهی می‌شود که عرض آن ۸ متر است. مطلوب است طول بلندترین نردبانی که می‌تواند به‌طور

افقی در اطراف گوشه‌ی قائمه حمل شود.

۷) هواپیمایی که با سرعت ۴۵۰ کیلومتر بر ساعت و در ارتفاع ۵ کیلومتر از سطح دریا در حرکت است، در حال نزدیک شدن به دوربینی است که در سطح زمین قرار داده شده است. فرض کنید θ زاویه‌ای است که تحت آن دوربین مزبور برای دیدن هوا پیما تنظیم می‌شود. در زمانی که $\theta = \pi/۳$ ، دوربین باید با چه سرعتی بچرخد تا هنوز بتواند هواپیما را در تیر رس خود داشته باشد.

۸) به‌کمک انتگرال‌گیری یک گانه حجم هرم قائمی را به‌دست آورید که مقطع آن یک مربع به ضلع ۳۰۰ متر و ارتفاع آن ۱۷۰ متر است.

۹) فرض کنید S سطح محصور بین خط $y = x$ و سهمی $y = x^۲$ است. به‌کمک انتگرال‌گیری یک گانه حجم جسم حاصل از دوران S حول خط $y = ۳$ را به‌دست آورید.

۱۰) چگالی جمعیت در شهر اصفهان تابعی است از فاصله تا مرکز شهر؛ یعنی در فاصله‌ی r کیلومتری از مرکز شهر، چگالی برابر است با $P = f(r)$ نفر در هر کیلومتر مربع. اگر شهر اصفهان را به‌صورت یک دایره با شعاع ۱۰ کیلومتر در نظر بگیریم، در این‌صورت جمعیت کل اصفهان را به‌صورت یک انتگرال معین بیان کنید.

۱۱) مقدار کار لازم برای دور کردن جسمی به جرم m به فاصله‌ی بسیار زیاد از زمین را پیدا کنید.

۱۲) سرعت لارم برای فرار یک جسم از زمین را پیدا کنید.

۱۳) یک تغار به طول ۱۴ فوت دارای یک سطح جانبی قائم مستطیل شکل ۱۴ فوت در ۳ فوت، یک ضلع سطح جانبی مایل مستطیل شکل ۱۴ فوت در ۵ فوت، و دو سطح جانبی انتهایی به شکل مثلث با اضلاع ۳ فوت، ۴ فوت، و ۵ فوت می‌باشد. اگر تغار پر از آب باشد، نیروی وارد بر هر سطح جانبی انتهایی و بر هر سطح جانبی دیگر را محاسبه نمایید.

۱۴) سازندگان یک نوع میز و صندلی باغ دریافته‌اند که فروش آنها در ماه تیر به ماکزیمم مقدار خود یعنی ٦ میلیون تومان در هر روز و در ماه دی به مینیمم مقدار خود یعنی ۱ میلیون تومان در هر روز می‌رسد. اگر $S(t)$ بیانگر فروش روزانه در ماه t باشد و

اگر $t = ۱$ بیانگر ماه بهمن باشد، آنگاه مدلی را برای $S(t)$ پیشنهاد کنید. با به‌کاربردن این مدل فروش روزانه در ماه آبان را پیش‌بینی کنید.

۱۵) در یک کشور آسیایی، نرخ تورم طی یک دوره‌ی ۲ ساله با یک کاهش تدریجی از ۸% به ۴% می‌رسد و سپس در همان ۴% ثابت می‌ماند. با رسم دو نمودار چگونگی تغییر نرخ تورم و قیمتها را در طول گذشت زمان نشان دهید.

۱۶) در هر یک از حالات زیر معادلات دیفرانسیلی پیدا کنید که شعاع یک کره در آن صدق کند:

(الف) نرخ تغییرات حجم کره نسبت مستقیم با حجم خود دارد.
(ب) نرخ تغییرات حجم کره نسبت مستقیم با سطح جانبی خود دارد.
(الف) نرخ تغییرات حجم کره نسبت مستقیم با شعاع خود دارد.

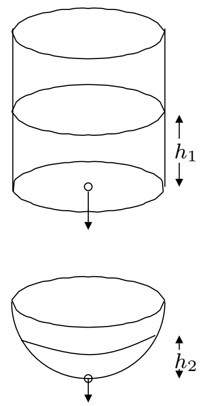
۱۷) یک افسر پلیس جسدی را در ساعت ۱ بامداد کشف می‌کند و با اندازه گیری متوجه می‌شود که درجه‌ی حرارت جسد °۲۹ می‌باشد در حالی‌که درجه‌ی حرارت محیط خارج °۲۱ است. اگر یک ساعت بعد درجه حرارت جسد به °۲۷ برسد ، با این اطلاع که درجه حرارت بدن یک موجود زنده °۳۷ است، زمان مرگ را به‌کمک قانون نیوتن، که مربوط به سرد شدن است، تخمین بزنید.

۱۸) برای پر کردن وان حمامی به شکل مکعب مستطیل شیرهای آب سرد و گرم به‌طور هم‌زمان در لحظه‌ی $t = ۰$ باز می‌شوند. یک دقیقه بعد شیر آب گرم بسته می‌شود و اجازه داده می‌شود تا شیر آب سرد به مدت یک دقیقه‌ی دیگر باز باشد.

(الف) برای طرح یک مدل ساده، که بتواند درجه‌ی حرارت آب وان را در هر لحظه پیش‌بینی کند، یک لیست از متغیرها و پارامترهای مورد نیاز را ارائه دهید.

(ب) برای تنظیم معادلات مورد نیاز مدل یک لیست از فرضهای ممکن را تهیه کرده و مدل نهایی را پیشنهاد کنید.

۱۹) یک محقق بهداشت به این نتیجه رسیده‌است که به احتمال ۰/۴ افرادی که در معرض ویروس سرما خوردگی قرار گرفته‌اند کم کم به سرما خوردگی مبتلا می‌شوند. مدلی را پیشنهاد کنید که توسط آن بتوان احتمال این که از بین ۱۰۰۰ نفر، که در معرض ویروس سرما خوردگی قرار گرفته‌اند، ۳۷۵ تا ۴۰۰ نفر آنها به سرما خوردگی مبتلا شوند، را پیدا نمود.



شکل ۲—۱۷ مخزن استوانه‌ای دوار.

۲۰) دو مخزن یکی به شکل استوانه‌ی دوار و دیگری به شکل نیمکره در نظر بگیرید و فرض کنید قطر هرکدام ۱ متر است. همچنین فرض کنید مخزن استوانه‌ای، با فاصله‌ای مناسب، درست در بالای سطح مقطع مخزن نیمکره‌ای و به‌طور قائم قرار گرفته است (شکل ۲—۱۷). بالاخره، فرض کنید سوراخی به قطر ۲ سانتی‌متر در سطح پایینی مخزن استوانه‌ای قرار دارد که از آن آب به داخل مخزن نیمکره‌ای می‌ریزد، و مخزن نیمکره‌ای نیز سوراخی مشابه در پایین‌ترین نقطه‌اش دارد.
(الف) اگر در لحظه‌ی $t = ۰$ ارتفاع آب در مخزن استوانه ای $h_۱ = ۱/۵$ متر باشد، در چه زمانی این مخزن کاملاً خالی می‌شود.
(ب) اگر در لحظه‌ی $t = ۰$ ارتفاع آب در مخزن نیمکره‌ای $h_۲ = ۰/۲$ باشد، مدلی را پیشنهاد کنید که توسط آن بتوان لحظه‌ی خالی شدن مخزن نیمکره‌ای را پیدا نمود.

۲۱) فرض کنید در شهری ۱۰ ماشین برف روب وجود دارد. چگونه باید برای این ماشین‌های برف روب تعیین مسیر شود تا تمام جاده‌های آسفالته برف روبی شوند و مجموع مسافتی که این ماشین‌ها در جریان برف روبی طی می‌کنند مینیمم شود؟

۲۲) در یک شرکت n کارمند و n وظیفه‌ی شغلی وجود دارد. براساس اجرای کار در گذشته هر زوج (کارمند، وظیفه) دارای رتبه‌ی کفایت است. چگونه باید برای کارمندان وظایف مناسب آنها را مشخص نمود؟

۲۳) یک کمپانی دارای ۳ ماشین زیراکس است. در طول هر روز معین هر ماشینی که در آغاز روز کار می‌کند به احتمال ۰/۱ شانس خراب شدن دارد. اگر ماشینی در طول

روز خراب شود به مرکز تعمیر ارسال می‌شود و برای کار کردن در دومین روز بعد از روزی که خراب شده آماده سازی می‌شود. فرض کنید X_t تعداد ماشین‌هایی است که در روز tاُ م کار می‌کنند. اگر در آغاز یک روز مشخص دقیقاً یک ماشین کار کند، احتمال اینکه سه روز بعد دقیقاً دو ماشین کار کنند چیست؟

۲۴) یک کارگاه شیرینی پزی ۳ نوع بیسکویت تولید می‌کند: خامه‌ای، کشمشی، و شکلاتی. این کارگاه بیسکویت‌ها را به‌صورت عمده فروشی و در جعبه‌های ۱۰۰ دو جینی به ترتیب به قیمتهای ۳۰۰، ۶۰۰، و ۸۰۰ هزار تومان به فروش می‌رساند. در ضمن جدول ۲—۱۰ نشان دهنده‌ی واحدهای آرد، تخم مرغ، و جوش شیرین مورد نیاز برای پختن هر ۱۰۰ دوجین از هر یک از بیسکویت‌هاست. در این جدول ستون سمت راست نشان دهنده‌ی محدودیت در موجودی هر یک از ترکیبات است.

جدول ۲—۱۰ واحدهای مواد مورد نیاز و محدودیت‌های آنها.

ترکیبات	خامه‌ای	کشمشی	شکلاتی	محدودیت در موجودی
آرد	۱	۲	۳	۶
تخم مرغ	۳	۸	۵	۱۴
جوش شیرین	۲	۹	۶	۳۰

با فرض اینکه محدود به جوابهای صحیح نباشیم، توضیح دهید که به چه صورت می‌توان در آمد را به مقدار ماکزیمم رساند.

۲۵) قرار است که قطاری هر روز ساعت ۱۰ صبح به اصفهان برسد، اما این احتمال وجود دارد که تا ۱۰ دقیقه نیز تأخیر داشته باشد. اگر X نمایانگر دقایق رسیدن قطار بعد از ساعت ۱۰ باشد، کدامیک از مدلهای زیر احتمالاً واقع بینانه‌ترین مدل برای تابع چگالی X است؟

(الف) $f(x) = k/10 \qquad 0 \leq x \leq 10$

(ب) $f(x) = k(100 - x^2) \qquad -10 \leq x \leq 10$

(ج) $$f(x) = \begin{cases} kx & 0 \leq x \leq 5 \\ k(10 - x) & 5 \leq x \leq 10 \end{cases}$$

(د) $f(x) = k(100 - x)^2 \qquad -10 \leq x \leq 10$

در هر یک از حالات فوق در خارج از فاصله‌ی داده شده مقدار f صفر است. برای هر یک از حالات فوق، مقدار مناسب k و احتمال اینکه قطار بین ساعت ۱۰٫۰۲ تا ۱۰٫۰۵ برسد را پیدا کنید.

فصل ۳

ساختن مدلهای ریاضی

در این فصل گامهای مختلف در ساختن یک مدل ریاضی را صریح‌تر از آنچه که در فصل اول آورده شده است توضیح می‌دهیم. برای انجام این کار، از تعدادی مثالهای نسبتاً معمولی، که بحث روی آنها تنها نیاز به دانش ریاضی در سطح دبیرستان دارد، بهره گرفته‌ایم.

۳-۱ طراحی مدل

ساختن یک مدل ریاضی موفق بستگی به درست درنظر گرفتن موارد مربوط به پدیده‌ی مورد نظر از همان لحظه‌ی شروع دارد. همچنین باید در نظر داشت که، همانند سایر تلاشهای علمی، با اتخاذ یک روش منظم می‌توان موفقیت در رسیدن به هدف را بسیار محتمل نمود. در بیشتر موارد انجام مراحل زیر گامی مهم در این جهت به شمار می‌آید:

۱) شفاف کردن یا شناسایی مسأله.

۲) تهیه‌ی فهرست عوامل درگیر در مسأله.

۳) تهیه‌ی فهرست فرضها.

۴) طرح دقیق صورت مسأله.

شناسایی صریح مسأله

در ابتدا یک مسأله، که غالباً توسط فردی غیرریاضی یا حتی عامی مطرح شده‌است، پیشنهاد می‌شود و جواب خاصی از نتیجه‌ی مدل، که غالباً به‌صورت جملات غیرریاضی

مدنظر است، در خواست می‌شود. بعد از آن یک هدف مشخص قابل شناسایی است. به‌عنوان مدل‌سازان ریاضی، باید قبل از آنکه موفق به انجام این مرحله شویم، در خصوص تنظیم یک فرمول ریاضی پافشاری کنیم. البته باید توجه داشته باشیم که اگر خطایی در اولین مرحله‌ی تحقیقات مقدماتی رخ دهد و مسأله به‌طور اشتباه مدل شده و حل شود، در آن‌صورت ممکن است که این عدم درک صحیح مسأله موجب مشکلات متعدد و خطاهای جبران‌ناپذیر دیگری بشوند. تشخیص ماهیت اصلی مسأله وابسته به پرسیدن چندین سؤال است. هر چند که ممکن است ظاهر مسأله ساده به‌نظر برسد، پرسیدن این سؤالات از تهیه کننده‌ی مسأله، کمک مؤثری در تشخیص انتظارات مورد نظر از مدل می‌باشد.

- چه کسی می‌خواهد مدل را به‌کاربرد؟ تا چه اندازه مدل می‌تواند توأم با مفاهیم پیچیده باشد؟
- آیا یک رفتار فیزیکی یا علمی بنیادی وجود دارد که باید به‌حساب آورده شود؟
- آیا اطلاعات مربوط به مسأله در دسترس هستند؟ یا اینکه باید جمع‌آوری و یا جستجو شوند؟
- چه مفروضات و مختصرسازی‌های بنیادی و قابل قبولی می‌تواند برای مسأله در نظر گرفته شود؟
- چه موقع به جواب مسأله نیاز است؟ چه میزان محدودیت زمانی تعیین شده است؟
- جواب مسأله را به چه صورت خواسته‌اند ؟ گزارش نوشته شده یا ارائه کوتاه شفاهی؟
- آیا اختلاف نظرهای شدید بین دو نفر که در حل مسأله ذی‌نفع هستند وجود دارد؟

توجه کنید که هدف اصلی به‌کاربردن فرمولهای جبری و ابزارهای ریاضی، برای ساختن مدلی است که بتواند در موقعیت‌های مشابه نیز به‌کاربرده شود. با وجوداین، فراموش نکنید که تهیه کنندگان مسائل معمولاً علاقه‌ای به مدلهای ریاضی تعمیم یافته ندارند و تنها به پاسخهای مشخص برای مسأله‌ی مورد نظرشان اهمیت می‌دهند. در ضمن آنها علاقه مند هستند که مدل ساخته شده قابلیت پاسخگویی به سؤالاتی از قبیل " اگر .... باشد چه طور؟ " را داشته باشد.

تهیه‌ی یک لیست از عوامل در گیر در مسأله

در هر مسأله تعدادی از عوامل مختلف شرکت دارند که می‌توانند روی جواب مسأله تأثیرگذار باشند. در همان مراحل اولیه‌ی ساخت مدل، باید یک فهرست از این متغیرها را

تهیه کنیم. در مدل‌سازی ریاضی تمرکز اصلی ما روی عوامل کمی، یعنی آن عواملی که می‌توان به آنها مقادیر عددی بر حسب واحدهای مناسب نسبت داد، می‌باشد. عوامل کمی را می‌توان به‌طور نرمال به‌عنوان متغیرها، پارامترها، یا مقادیر ثابت دسته بندی نمود که هر کدام از آنها می‌تواند پیوسته، گسسته و یا تصادفی باشد. توضیح مختصری از این نوع دسته‌بندی‌ها را ذیلاً بیان می‌کنیم.

- پیوسته: تمام مقاد یر ممکن در یک فاصله را به خود می‌گیرد، مانند زمان، سرعت، طول، مساحت، و غیره. توجه کنید که این کمیت‌ها اندازه‌هایی هستند که دارای واحدهای خاص می‌باشند.
- گسسته: تنها مقادیر منفرد معینی را به خود می‌گیرد، مانند تعداد مردم، بلیط‌ها، مسابقات انجام یافته، و غیره، که در چنین حالاتی واحد اندازه‌گیری وجود ندارد.
- تصادفی: از قبل غیرقابل پیش‌بینی است، اما تحت نفوذ یک مدل بنیادی آمار است. به‌عنوان مثال شاخص سهام در بازار بورس، زمانهای ورود اتومبیل‌ها به یک پمپ بنزین.
- مقادیر ثابت: کمیت‌هایی که مقدار آنها را نمی‌توان تغییر داد. این مقادیر می‌توانند اعداد ثابت ریاضی، مثل π، یا اعداد ثابت فیزیکی، مثل شتاب جاذبه‌ی زمین یا سرعت نور، باشند.
- پارامترها: کمیت‌هایی که برای کاربرد خاصی از مدل ثابت هستند، اما می‌توانند برای کاربرد دیگری از همان مدل مقادیر مختلف دیگری داشته باشند. به‌عنوان مثال، هزینه‌های ثابت در یک مدل تجارتی ساده، ابعاد یک اتاق، قیمت یک بلیط، چگالی یک محلول، میانگین زمان ورودهای متوالی اتوبوس به ایستگاه.
- متغیرهای ورودی: کمیت‌هایی که محاسبات بعدی درون مدل را تعیین می‌کنند، مانندمیزان باران جمع شده در درون یک ظرف، تعداد افرادی که در یک میهمانی حضور یافته‌اند، تعداد گذشت ماههاقبل از به فروش رفتن ماشین شما، و غیره. توجه داشته باشید که انتظار بر این است که متغیرهای ورودی معلوم شده باشند، داده شده باشند، فرض شده باشند، و یا اینکه بتوانند به این‌صورت در نظر گرفته شوند که مقدار آنها دلخواه است.
- متغیرهای خروجی: کمیت‌هایی که نتایج حاصل از مقادیر داده شده‌ی متغیرهای ورودی و پارامترها هستند و نمی‌توان به آنها مقادیر دلخواه منتسب نمود. این متغیرها بیانگر نتایج حاصل از یک مدل هستند، مثل سود حاصل از یک قرار داد

تجارتی، سطح یک منبع آب در نتیجه‌ی تقاضای کاربران و تبخیر، مدت زمانی که طول می‌کشد تا N نفر یک اطاق را خالی کنند.

برای اینکه عملیات ریاضی ساده‌تر انجام شوند بهتر است که تمام عوامل دارای نشانهای جبری مناسب باشند، و آنهایی که نمایانگر اندازه گیری‌ها هستند، دارای واحدهای مناسب باشند.

تهیه‌ی فهرست فرضها

در حالی‌که عوامل شرکت کننده در یک مدل می‌توانند به‌عنوان آجرهای ساختمانی مدل به‌حساب آیند، این فرضها هستند که چسب لازم را برای به هم پیوستن مناسب عوامل مختلف فراهم می‌آورند و باعث ساختن یک مدل کارآمد می‌شوند. تا چه میزان مدل ساخته شده در عمل ساده یا مشکل پدیدار شود و تا چه اندازه آن مدل نتیجه‌ی موفقی را به همراه داشته باشد، به‌طور فزاینده‌ای بستگی به فرضهایی دارد که گمان زده می‌شوند. مهمترین و مشترک‌ترین نوع فرضهایی که می‌توانیم ارائه دهیم عبارتند از:

- فرضها درباره‌ی اینکه بعضی از عوامل در نظر گرفته شوند یا نه.
- فرضها درباره‌ی اندازه‌ی نسبی تأثیر عوامل مختلف.
- فرضها درباره‌ی نوع روابط بین عوامل در نظر گرفته شده.

از دیدگاه کلی، و به‌ویژه هنگامی که مدل جدیدی را برای اولین بار ارائه و گسترش می‌دهیم، سعی ما بر این است که فرضهایی انتخاب کنیم که مدل را تا آنجا که امکان دارد با ساختاری ساده معرفی ساخته و بسادگی آن را توضیح دهند. فرضها از نوع (الف) و (ب) مانع ازدیاد فهرست عوامل از آنچه که ضرورت دارد می‌شوند. فرضها از نوع (ج) به‌عنوان قلب مدل نامگذاری می‌شوند. در واقع همین فرضها از نوع (ج) هستند که اسباب گسترش مدل در مراحل بعدی را فراهم می‌سازند.

تذکر: از ارائه‌ی فرضهای ضمنی که ممکن است بدون توجه وارد مدل شده باشند، پر هیز کنید و همواره دقت کنید که فهرست فرضها واضح و صریح باشد.

تشخیص صورت مسأله

قبلاً و تحت عنوان "شناسایی مسأله"، شروع به بحث و بررسی مسأله‌ی خود کرده‌ایم. در این بخش، مواردی را مطرح می کنیم که شناسایی آنها در تهیه‌ی یک صورت مساله‌ی مناسب بسیار مؤثر خواهد بود:

- چیزی معلوم است یا داده شده است.
- چیزی باید پیدا شود، تخمین زده شود، و یا اینکه در مورد آن تصمیم‌گیری شود.
- شرایطی وجود دارد که باید تأمین شود و یا اینکه هدفهایی هستند که باید به آنها رسید.

بعد از شناسایی این موارد، باید بتوانیم افکار خود درباره‌ی مسأله را به‌صورت مسأله‌ای دقیق بر حسب عواملی که در نظر گرفته‌ایم، تبدیل نماییم. این صورت مسأله می‌تواند فرم کلی زیر را داشته باشد.

" **با معلوم بودن این عوامل (ورودی‌ها، پارامترها، ثابتها)، عواملی چون (خروجی ها) را چنان پیدا کنید که شرطی بر قرار یا هدفی تأمین شود.**"

گزاره‌ی قبل ممکن است زیاد از حد مختصر بنظر برسد، اما در حقیقت اکثر مسائل می‌توانند به این‌صورت به جمله‌ای مختصر و مفید تبدیل شوند. مشاهده کنید که جمله‌ای به این شکل تا حد زیادی ما را در طرح مدلی مناسب برای مسأله یاری می‌دهد.

توجه: بر حسب اینکه چه عواملی را معلوم در نظر می‌گیریم و چه عواملی را می‌خواهیم مدل معلوم کند، دو مسأله‌ی مشابه می‌توانند صورت مسأله‌های متفاوت داشته باشند.

مثال ۳–۱–۱ مسافت ایستادن اتومبیل

طرح مسأله) قانون کلی زیر را که غالباً در کلاسهای تعلیم رانندگی یاد داده می‌شود در نظر بگیرید:

هنگام وضعیت عادی رانندگی به ازاء هر ۱۶ کیلومتر بر ساعت سرعت به اندازه‌ی طول خودرو خود از خودرویی که جلوتر از شما حرکت می‌کند فاصله بگیرید و در هنگامی که هوا نامساعد است و یا وضعیت جاده نامناسب است فاصله‌ی بیشتری بگیرید.

این قانون تاچه اندازه قابل اتکااست؟

شناسایی مسأله) در اینجا هدف اصلی ما این است که قانون فوق را مورد آزمایش قرار داده و قانون دیگری را در صورت ناکارآمدی آن ارائه دهیم. اما توجه کنید که صورت مسأله " این قانون تا چه اندازه قابل اتکا است؟ "، تا اندازه‌ای مبهم است. در واقع نیاز به‌صورت مسأله‌ای داریم که صریح تر بوده و به گونه‌ای طرح شده باشد که حل یا جواب

آن ما را به هدف خود برساند و در عین حال این فرصت را به ما بدهد تا بتوانیم تجزیه و تحلیلی دقیق تر انجام دهیم. برای این کار صورت مسأله‌ی فوق را به‌صورت زیر تغییر می‌دهیم:

مسافت طی شده برای توقف یک خود رو را به‌عنوان تابعی از سرعت آن پیش‌بینی کنید.

فرضها) برای شروع، مدل صریح زیر را برای کل مسافت ایستادن در نظر می‌گیریم:

کل مسافت پیش از ایستادن $=$ مسافت عکس العمل $+$ مسافت ترمز.

در معادله‌ی فوق منظور ما از مسافت عکس العمل، مسافتی است که در طول آن راننده نیاز به ایستادن را می‌فهمد و عمل ترمز کردن را انجام می‌دهد. همچنین مسافت ترمز کردن مسافتی است که در طول آن ترمزها باعث توقف می‌شوند. اکنون برای ادامه‌ی بحث نیاز به یک زیر مدل برای مسافت عکس العمل و یک زیر مدل برای مسافت ترمز حس می‌شود. چنانکه می‌دانیم مسافت عکس‌العمل تابعی از چند متغیراست که فعلاً می‌توان تنها دو تای آنها را در نظر گرفت.

مسافت عکس‌العمل $=$ f (سرعت ، مدت زمان تصمیم گیری).

زیر مدل فوق را می‌توان با جزئیات بیشتری گسترش داد. به‌عنوان مثال مدت زمان تصمیم‌گیری تحت نفوذ عوامل رانندگی و همچنین مکانیزم عملیاتی اتومبیل است. در خصوص عوامل رانندگی می‌توان از شدت عکس‌العمل، هوشیاری، و قدرت دید راننده نام برد. به محض تشخیص متغیرهای مهم مربوط به این زیر مدل می‌توان شروع به تعیین روابط بین آنها پرداخت. البته به‌کمک نسبت تناسب، می‌توان یک زیر مدل مربوط به مسافت عکس‌العمل را پیشنهاد داد.

قدم بعد برای کامل‌تر کردن مدل مورد نظر طراحی یک زیر مدل برای مسافت ترمز است. مسلماً وزن و سرعت از مهمترین عواملی هستند که باید در تعیین مسافت ترمزگیری به‌حساب آورده شوند. کارآیی لنت‌های ترمز، وضعیت تایرها، سطح جاده، و وضع آب و هوا نیز عوامل دیگری هستند که می‌توان در نظر گرفت. اما با فرض اینکه این عوامل آخری تأثیر ناچیزی روی محاسبه‌ی مسافت ترمز دارند از به‌حساب آوردن آنها صرف‌نظر کرده و زیرمدل مربوط به مسافت را تنها تابعی از وزن و سرعت فرض می‌کنیم، یعنی:

مسافت ترمز $=$ h (وزن ، سرعت).

در اینجا نیز پیدا کردن یک زیر مدل پیشنهادی برای مسافت ترمز می‌تواند به‌کمک بحث نسبت تناسب انجام شود.

تأیید کردن مدل) آیا پیش‌بینی‌هایی که تو سط مدل انجام می‌شود با وضعیت‌های موجود در رانندگی مطابقت دارند؟ اگر نه، طبیعی است که بخواهیم در فرضهای انجام شده

تجدید نظر کرده و یک یا هر دو زیر مدل را مورد بازسازی قرار دهیم. اگر آری ، آیا قانونی که در اوایل بحث این مثال مطرح شد با مدل ساخته شده همخوانی دارد؟ جواب به این سؤال آخر، یک پایه‌ی واقعی را برای جواب دادن به سؤال " این قانون تا چه اندازه قابل اتکا است ؟ " ارائه می‌دهد.

قابل استفاده بودن مدل) هر قانونی که مدل ساخته شده ارائه دهد باید جهت کارآیی آن به اندازه‌ای ساده طرح شده باشد که قابل درک و استفاده باشد.

بازبینی) در خصوص باز بینی و مرمت مدل باید روی آن تغییراتی که ممکن است مدل به آنها نیاز داشته باشد، حساس باشیم. متغیرهایی که ممکن است باعث تغییر در مدل شوند عبارتند از قدرت لنت‌ها یا دیسک ترمزها و تغییر اساسی در طراحی تایرها.

مثال ٣-١-٢ فروشگاه و بلیط‌های قرعه‌کشی

طرح مسأله) یک فروشگاه محلی برنامه‌ای ترتیب داده است تا در یک مراسم خاص بلیط‌هایی فروخته شده و در همان برنامه قرعه‌کشی شوند. نتیجه‌ی قرعه‌کشی تفاوت مشهودی بین سود حاصل برای فروشگاه و جوایز نسبتاً با ارزشی که برای خریداران بلیط در نظر گرفته می شود، را نشان خواهد داد.

سؤال‌ها)

- آیا تمام بلیط‌ها با یک قیمت ثابت فروخته خواهند شد؟
- تعداد جایزه‌ها در آن مراسم چیست؟
- ارزش جایزه‌ها چقدر است؟
- آیا هزینه‌های بالا سری وجود دارند که باید تأمین شوند؟
- اگر در عمده فروشی بلیط‌ها انعطافی وجود دارد، چه طرحی دراین خصوص باید اجرا شود؟

عوامل) چنانکه مشهود است باید قیمت بلیط‌ها، تعداد بلیط‌های فروخته شده، ارزش جوایز، و قسمتی از هزینه‌ی بالاسری برای سفارش دفترچه‌های بلیط به‌حساب آورده شوند. جدول ٣-١، فهرست عوامل شرکت کننده در مسأله را نشان می‌دهد:

جدول ۳-۱ فهرست عوامل شرکت کننده در مسأله‌ی فروشگاه و بلیط‌های قرعه‌کشی.

واحد	نماد	نوع	شرح متغیر
ریال	p	پارامتر	قیمت بلیط
---	n	متغیر ورودی	تعداد بلیطهای فروخته شده
تومان	C_1	متغیر ورودی	ارزش جایزه‌ی اول
تومان	C_2	متغیر ورودی	ارزش جایزه‌ی دوم
تومان	C_3	متغیر ورودی	ارزش سایر جوایز
تومان	O	عدد ثابت	هزینه‌ی بالاسری
تومان	P	متغیر خروجی	سود برگزارکنندگان

فرضها) فرض کنید تمام بلیط‌ها با یک نرخ فروخته می‌شوند.

صورت مساله) چند عدد بلیط باید فروخته شود تا آنکه سودی حاصل شود؟ این جمله بر حسب علایم فوق به این‌صورت نوشته می‌شود: با فرض اینکه p ، $C_1, C_2, \cdots$ ، C و O معلوم باشند، n را چنان تعیین کنید که $P > 0$.

حل مساله) قرار دهید $C = C_1 + C_2 + \dots$ و $P = \frac{np}{10} - (C + O)$. بنابراین برای اینکه سودی حاصل شود باید $P > 0$، ویا به عبارت معادل $n > \frac{10(C+O)}{p}$.

پاسخگویی مدل تحت شرایط دیگر)

- اگر قیمت بلیطها افزایش بیابند چطور؟
- اگر قسمتی از بلیطها به‌طور عمده‌فروشی با نرخی استثنایی و پایین‌تر بفروش بروند چطور؟

مثال ۳-۱-۳ پیش‌بینی‌های لازم مربوط به تخلیه‌ی محل حادثه

طرح مساله) مدت زمان لازم برای تخلیه‌ی یک ساختمان یا یک هواپیما در مواقع ضروری از جمله اطلاعات مهمی است که افسر کشیک محلی باید از آن آگاه باشد. تعداد خروجی‌ها و مسیرهای عبور باید به اندازه‌ی کافی تدارک دیده شده باشند، که البته این ممکن است در تناقض با اهداف سازنده‌ی آن باشد که می‌خواهد تا آنجا که ساختمان ویا هواپیما ظرفیت دارد تعداد بیشتری از مردم در آن محل استقرار یابند.

سؤال‌ها)

- مهمترین آمار مورد نیاز چیست؟
- آیا اطلاعات مفیدی مربوط به تخلیه‌ی یک اطاق (یا یک قسمت از هواپیما) در دسترس است؟

- آیا میانگین تعداد افراد تخلیه شده بعد از ۲ دقیقه، ۵ دقیقه، $\cdots$، و غیره مورد نیاز است؟
- ترکیب نسبی پراکندگی مردم قبل از آنکه زنگ خطر به صدا در آید چگونه است؟
- چه اطلاعاتی در باره‌ی ماکزیمم ظرفیت‌ها در دسترس می باشد؟
- با توجه به طراحی ساختمان یا هواپیما چه محدودیتهایی مثل موانع ساختاری یا ایستادن در صفها وجود دارد؟

عوامل) برای ساختن یک مدل اولیه توجه خود را به یک اتاق منفرد محدود کرده و بررسی کنید که چگونه زنجیره‌ای از مردم تشکیل شده و از اتاق خارج می‌شوند. عواملی که می‌توانند در نظر گرفته شوند عبارتند از: تعداد مردمی که در اتاق هستند، سرعت خروج، ازدحام جمعیت به هنگام ترک محل، و مدت زمان تأخیر قبل از آنکه اولین نفر از اتاق خارج شود. جدول ۳—۲ زیر فهرستی از عوامل درگیر در مسأله را نشان می‌دهد:

جدول ۳—۲ فهرست عوامل شرکت کننده در مساله‌ی تخلیه‌ی محل حادثه.

واحد	نماد	نوع	شرح متغیر
———	N	پارامتر	تعداد افرا دی که باید تخلیه شوند
دقیقه	t	متغیر ورودی	مدت زمانی که بعد از صدای زنگ هدر می رود
———	n	متغیر خروجی	تعداد افرادی که در زمان t تخلیه شده‌اند
دقیقه	T	متغیر خروجی	طول زمان تخلیه
متر	d	پارامتر	فاصله‌ی بین هر دو نفر در زنجیره
متر بر ثانیه	v	پارامتر	سرعت حرکت در زنجیره
دقیقه	t_0	عدد ثابت	تاخیر اولیه قبل از خروج نفر اول

فرضها) فرض کنید زنجیره‌ی انسانی که تشکیل می‌شود از یک نظم خاص، به این‌صورت که در آن عوامل d و v (که در لیست فوق آورده شده‌اند) ثابت هستند، برخوردار است. فرض کنید که در داخل اتاق فشاری که باعث بر هم خوردن این نظم بشود وجود ندارد.

صورت مسأله) در مدت زمان t دقیقه چند نفر خارج خواهند شد و چقدر طول خواهد کشید تا همه‌ی افراد تخلیه شوند (مهمترین آمار مورد نیاز). اگر N، v، d، t_0 و t معلوم باشند، آنگاه n و T را پیدا کنید.

حل مسأله)

$$n = 1 + \frac{60v(t - t_0)}{d}, \quad T = t_0 + \frac{(N-1)d}{(60v)}$$

پاسخگویی مدل تحت شرایط دیگر)

- اگر شرایط ایجاب کند که باید دو یا چند زنجیره‌ی دیگر برای ادامه‌ی عمل تخلیه تشکیل شوند چطور؟
- اگر مانند هواپیما، که دارای چندین درب خروج اضطراری است، چندین راه خروجی برای محل حادثه وجود داشته باشد چطور؟

مثال ۳–۱–۴ برنامه ریزی بازی‌های تنیس در یک مسابقه‌ی دوره‌ای

طرح مسأله) از شما درخواست شده است تا برنامه‌ی مربوط به مسابقه‌ی سالانه‌ی تنیس کشور، که در آن هر زوج باید با تمام زوج‌های دیگر مسابقه دهد، تنظیم کنید.

سؤال‌ها) چند زوج دراین مسابقه‌ی دوره‌ای شرکت دارند؟ چند زمین تنیس وجود دارد؟ طول مدت هر مسابقه چقدر است؟ قرار است که همه‌ی مسابقات طی چه مد ت زمانی به پایان برسند؟ آیا محدودیتی در مدت زمان مربوط به استراحت بین بازی‌ها وجود دارد؟

عوامل) با این قانون که هر مسابقه دارای یک تعداد ثابت از بازی‌های بامدت زمان یکسان است، مدت زمان تمام بازی‌ها را یکسان در نظر بگیرید و این عامل را به همراه تعداد زوجهای شرکت کننده در این مسابقات، طول مدتی که قرار است مسابقات در طی آن پایان یابند، و غیره در لیست عوامل شرکت کننده وارد کنید. جدول ۳—۳ بعضی از این عوامل را نشان می‌دهد.

جدول ۳—۳ فهرست عوامل شرکت کننده در مساله‌ی برنامه‌ریزی بازی‌های تنیس.

واحد	نماد	نوع	شرح متغیر
———	N	متغیر ورودی	تعداد تیمهای دو نفره
ساعت	T	پارامتر	مدت زمان در نظر گرفته شده برای تمام بازیها
دقیقه	t_m	متغیر ورودی	مدت زمان یک مسابقه
———	n	پارامتر	تعداد زمینهای تنیس
دقیقه	t_g	پارامتر	مدت زمان بین مسابقات
———	M	متغیر خروجی	تعداد کل مسابقات

فرضها) زوجهای شرکت کننده می‌توانند در بین بازی‌ها استراحت داشته باشند. مسابقات در مدت زمانهای یکسانی پایان می‌یابند.

صورت مساله) با معلوم بودن اینکه تنها از دو زمین تنیس می‌توان استفاده کرد و اینکه تعداد زوجهای شرکت کننده ۸ می‌باشد، موارد زیر را پیدا کنید:

۱) مدت زمانی که در طول آن تمام مسابقات پایان می‌پذیرد. ۲) ترتیب مسابقات.

طرح مدل به گونه‌ای که پاسخگو ی شرایط زیر نیز باشد)

- اگر قانونی وجود داشته باشد که بگوید زوجها نمی‌توانند به‌طور متوالی مسابقه دهند چطور؟
- اگر یک زوج به‌طور ناگهانی از مسابقات کنار رود چطور؟
- اگر تعداد زمینهای تنیس افزایش یابد چطور؟

مثال ۳–۱–۵ خرید سیب زمینی

طرح مسأله) از نظر مدت زمان مورد نیاز برای تهیه‌ی چیپس سیب زمینی و به هدر رفتن مقداری از سیب زمینی‌ها در هنگام خلال کردن، آیا خریدن سیب زمینی‌های بزرگ بر خریدن سیب زمینی‌های کوچک برتری دارد؟

سؤالات)

- بدون در نظر گرفتن اندازه‌ی سیب زمینی‌ها آیا نوع آنها یکی است؟
- آیا نتایج فعلی درانتخاب اندازه‌ی سیب زمینی‌ها در پخت بعد تأثیر دارد؟
- آیا قیمت سیب زمینی‌ها مستقل از اندازه‌ی آنهااست؟
- آیا عمل خلال کردن برای هر دو نوع سیب زمینی به یک شیوه انجام می‌پذیرد؟
- آیا خلال کردن سیب زمینی‌های کوچک به همان آسانی خلال کردن سیب زمینی‌های بزرگ است؟
- حل این مسأله چه هدف جامعی را در بر دارد؟

عوامل) لیست عوامل شرکت کننده در این مسأله می‌تواند شامل وزن و اندازه‌ی سیب زمینی‌ها، ضخامت تیغه‌ی دستگاه خلال کننده و زمان انجام عمل خلال باشد. چون سیب زمینی‌ها براساس وزن خریداری می‌شوند، تعداد آنها باید از روی اوزان نسبی سیب زمینی‌ها محاسبه شود. اندازه‌ی سیب زمینی‌ها و همچنین تعداد مورد نیاز برای تهیه‌ی شام و مدت زمان لازم برای پر کردن دیگ خوراک پزی، از عواملی هستند که در حل این مسأله حایز اهمیت است. تمام عواملی که در جدول ۳–۴ آورده شده‌اند مستقل از یکدیگر نیستند.

جدول ۳–۴ فهرست عوامل شرکت کننده در مسأله‌ی خرید سیب زمینی.

واحد	نماد	نوع	شرح متغیر
کیلوگرم	W	پارامتر ورودی	وزن کیسه‌ی سیب زمینی خریداری شده
گرم	w_s	پارامتر ورودی	وزن سیب زمینی کوچک
گرم	w_l	پارامتر ورودی	وزن سیب زمینی بزرگ
———	n_s	متغیر خروجی	تعداد سیب زمینی‌های کوچک
———	n_l	متغیر خروجی	تعداد سیب زمینی‌های بزرگ
سانتیمتر	d_s	پارامتر ورودی	قطر یک سیب زمینی کوچک
سانتیمتر	d_l	پارامتر ورودی	قطر یک سیب زمینی بزرگ
ثانیه	T_s	پارامتر ورودی	زمان خلال کردن یک سیب زمینی کوچک
ثانیه	T_l	پارامتر ورودی	زمان خلال کردن یک سیب زمینی بزرگ
کیلو گرم	A_s	متغیر خروجی	مقدار سیب زمینی کوچک مصرف شده برای شام
کیلو گرم	A_l	متغیر خروجی	مقدار سیب زمینی بزرگ مصرف شده برای شام
———	N	متغیر ورودی	تعداد افراد حاضر در سر میز شام
دقیقه	t_s	متغیر خروجی	زمان پر کردن دیگ با سیب زمینی‌های کوچک
دقیقه	t_l	متغیر خروجی	زمان پر کردن دیگ با سیب زمینی‌های بزرگ

فرضها) فرض کنید که اندازه‌ای به‌عنوان نمونه وجود دارد که براساس آن بزرگی و کوچکی سیب زمینی تعریف می‌شود. همچنین فرض کنید که وزن معلومی از هر نوع سیب زمینی برای انجام آزمایش در نظر گرفته شده‌است. فرض کنید که برای خلال کردن هر دو نوع سیب زمینی از یک نوع دستگاه خلال کننده‌ی استفاده می شود تا ضخامت خلالهای سیب زمینی ثابت بماند . فرض کنید که شکل کلیه‌ی سیب زمینی‌ها می‌تواند کروی در نظر گرفته شود و در ضمن چگالی سیب زمینی‌ها با یکدیگر معادلند.

صورت مسأله) به فرض معلوم بودن تعداد میهمانان و اینکه میهمانان در خصوص اندازه‌ی سیب زمینی‌ها ارجحیتی قایل نیستند، موارد زیر را پیدا کنید:

۱) مدت زمان لازم برای پر شدن دیگ و آماده شدن برای پخت.

۲) تعداد کیسه‌های سیب زمینی موجود که برای مصرف فعلی خریداری شده‌اند.

طرح مدل به گونه‌ای که پاسخگو ی شرایط زیر نیز باشد)

- اگر ملزم به به‌حساب آوردن مدت زمان پخت باشیم چطور؟
- اگر ضخامت خلالها برای سیب زمینی‌های کوچک و بزرگ متفاوت باشد چطور؟

۳–۲ ارائه‌ی مدل

در بخش ۱ بعد از آنکه برای عوامل نمایشهای مناسبی اختیار کردیم، شروع به ساختن فرضهایی کردیم که چگونگی رفتار این متغیرها و ارتباط آنها با یکدیگر را توضیح می‌دادند.

یکی از اساسی‌ترین مراحل فرآیند مدل‌سازی ترجمه‌ی آن عبارات لفظی به روابط صریح و درست ریاضی بین عوامل شرکت کننده در مدل است. این جملات ریاضی بعداً برای کاربری و تجزیه و تحلیل، توسط تکنیک‌های ریاضی، مورد استفاده قرار می‌گیرند.

بعضی اوقات جملات لفظی بسیار مبهم هستند و ممکن است تعدادی از آنها نیز هم‌ارز باشند. به‌عنوان مثال جمله‌ی لفظی 'اگر x افزایش یابد، y افزایش خواهد یافت' به‌طور ریاضی می‌تواند به‌صورت‌های مختلفی مدل شود. یکی از ساده‌ترین مدلها با فرض تناسب مستقیم y با x به‌دست می‌آید. بنابراین، جمله‌ی ریاضی معادل آن به‌صورت $y \propto x$ و معادله‌ی هم ارز آن به‌صورت $y = kx$، که در آن k عدد ثابت مربوط به تناسب است، خواهد بود. با انتخاب چنین جملات ریاضی خاص در حال ساختن فرضهای صریح و روشنی قرار خواهیم گرفت، که براحتی قابل انتقاد یا مورد قبول می‌باشند.

به‌طور کلی ترجمه‌ی ریاضی جملات لفظی غالباً به‌صورت معادلات یا نامعادلات ودر بعضی اوقات به‌صورت دستگاهی از معادلات و یا نامعادلات در می‌آید. بعد از آنکه عمل ترجمه‌ی ریاضی جملات لفظی انجام پذیرفت، ممکن است نیاز به دستکاری‌های جبری برای تبدیل این معادلات یا نامعادلات به شکل‌های ساده و قابل استفاده‌تری باشیم. در حالاتی که ترجمه‌ی ریاضی مشکل به‌نظر می‌رسد، بهتر است که ابتدا مثالهای عددی را مورد امتحان قرار دهیم و بعداً به‌کمک مثالهای مشابه شروع به تشخیص تقریبی مدلهای ریاضی مناسب، برای ترجمه‌ی آن جملات لفظی، نماییم.

مثال ۳-۲-۱

قیمت جنسی P تومان است و فروشگاهی هر هفته Q تا از این جنس را به‌فروش می‌رساند. مدیر فروشگاه تخمین می‌زند که با تخفیف هر ۱ تومان از قیمت این جنس ، در هر هفته می‌تواند N تا بیشتر به‌فروش برساند. بر طبق این فرضیه در زمانی که قیمت جنس X است معین کنید:

۱) M = تعدادی از این جنس که در هر هفته فروخته می‌شود، و

۲) R = در آمد هفتگی فروشگاه حاصل از فروش این جنس.

حل برای هر ۱ تومان تخفیف N تا بیشتر فروخته می‌شود. بنابراین، برای تخفیف $P - X$ تعداد $N(P-X)$ تا بیشتر بفروش می‌رسد. درنتیجه $M = Q + N(P-X)$، و $R = [Q + N(P-X)](X)$.

مثال ۳-۲-۲

برای پر کردن وان حمامی ۳ دقیقه و برای خالی کردن آن ۴ دقیقه وقت لازم است. برای

پر کردن این وان در زمانیکه خروجی آن باز است چند دقیقه وقت لازم است ؟ جواب این سؤال در زمانیکه F دقیقه طول می‌کشد تا وان پر شود و E دقیقه طول می‌کشد تا وان خالی شود چیست؟

حل با توجه به فرض مساله، در هر دقیقه یک سو م وان پر می‌شود و یک چهارم آن از راه خروجی خالی می‌شود. نتیجه می‌شود که به‌طور خالص در هر دقیقه $۱/۳ - ۱/۴ = ۱/۱۲$ وان پر می‌شود. درنتیجه ۱۲ دقیقه وقت لازم است تا وان کاملاً پر شود.

در حالت کلی، عبارت ریاضی معادل این است که در هر دقیقه $۱/F - ۱/E = (E-F)/EF$ وان پر می‌شود. در نتیجه، اگر مد ت زمان لازم برای پر شدن وان را T بنامیم، خواهیم داشت

$$T = ۱/[(E-F)/EF] = EF/(E-F).$$

مشروط بر آنکه $E > F$.

مثال ۳-۲-۳

یک بستنی فروش در یک مراسم تابستانی برآورد کرده است که تعداد بستنی‌هایی که در یک روز فروخته خواهند شد از قوانین زیر تبعیت خواهد کرد:

- این تعداد متناسب با تعداد افرادی است که در مراسم شرکت می‌کنند.
- این تعداد متناسب با درجه‌ی حرارت بالاتر از ۱۰ درجه‌ی سانتی‌گراد است.
- این تعداد با قیمت فروش بستنی نسبت عکس دارد.

با ترکیب این فرضها یک مدل را برای پیش‌بینی تعداد بستنی‌هایی که بفروش خواهند رسید طراحی کنید.

حل قراردهید N = تعداد بستنی‌های فروش رفته،

n = تعداد افرادی که در مراسم شرکت می‌کنند،

T = درجه‌ی حرارت (C°)،

p = قیمت یک عدد بستنی.

پس بر طبق فرضهای مسأله داریم که

$$N \propto n\,,\;\; N \propto (T - ۱۰)\,,\;\; N \propto ۱/p$$

برای تبدیل این روابط به یک مدل، تناسب‌ها را در یکدیگر ضرب می‌کنیم تا معادله‌ی $N = kn(T - ۱۰)/p$، یا $N = INT[kn(T - ۱۰)/p]$، به‌دلیل آنکه باید N عددی صحیح باشد، به‌دست آید. توجه کنید که بر طبق این مدل به ازای $n = ۰$ داریم $N = ۰$، که در عمل باید چنین باشد، و به ازای $T = ۱۰$ داریم $N = ۰$. این یکی نیز باید بر طبق فرض دوم مسأله چنین باشد. همچنین توجه کنید که مدل تنها برای $T \geq ۰$ معتبر است.

مثال ۳-۲-۴

یک خرده فروش D مقدار از یک کالای بخصوص را در هر سال بفروش می‌رساند و حد اکثر مقدار از این کالا را که می‌تواند در اختیار داشته باشد Q_M است. در زمانهای معینی او سفارش Q_M مقدار دیگر از این کالا را به شرکت سازنده می‌دهد. این سفارشات درست زمانی تحویل داده می‌شوند که فروشنده بدون این کالا نماند و مقدار کالایی که می‌تواند در اختیار داشته باشد دوباره به سطح Q_M برسد. هزینه‌ی تحویل هر یک از این سفارشات $C_\circ$ است، که شامل هزینه‌های انبارداری، باربری و سایر مخارج مربوطه است، و L روز طول می‌کشد تا به‌دست فروشنده برسد. هزینه‌ی نگه داشتن این کالا برای هر یک از آن در هر سال C_H است. با این معلومات، برای هر یک از موارد زیر یک عبارت مناسب ریاضی بنویسید:

۱) تعداد تحویل کالا در هر سال.

۲) مد ت زمان (تعداد روزهای) بین هر دو تحویل متوالی.

۳) سطح موجودی کالا $Q(t)$ در زمان t (روز) بعد از آخرین دریافت کالا.

۴) زمان سفارش بعدی.

۵) سطح موجودی کالا در زمانیکه سفارش بعدی داده می‌شود.

٦) کل هزینه‌ی سالانه C_{TOT} (هزینه‌ی نگه داری و هزینه‌ی سفارش مجدد).

حل ۱) اگر تعداد تحویل کالاها را در هر سال n در نظر بگیریم، آنگاه $nQ_M = D$ و درنتیجه $n = D/Q_M$.

۲) اگر تعداد تحویل کالا ها در هر سال n باشد، در آن‌صورت مدت زمان T بین هر دو تحویل متوالی برابر است با

$$T = ۱/n = Q_M/D \text{ سال } = ۳٦۵(Q_M/D) \text{ روز}$$

۳) توجه کنید که در هر زمان t به اندازهٔ $(t/T)Q_M$ از مقدار موجود کالا یعنی Q_M کم

می‌شود. بنابراین،

$$Q(t) = Q_M - (t/T)Q_M \implies Q(t) = Q_M - (tD)/۳۶۵$$

مشاهده کنید که $Q(۰) = Q_M$ و $Q(T) = ۰$، چنانکه انتظار داریم.

۴) سفارش بعدی باید در زمان t، یعنی $t = T - L = ۳۶۵(Q_M/D) - L$ روز انجام پذیرد.

۵) سطح موجودی کالا در زمان سفارش بعدی برابر است با

$$\begin{aligned} Q(T-L) &= Q_M - [(T-L)D]/۳۶۵ \\ &= Q_M - [۳۶۵(Q_M/D)D - LD]/۳۶۵ = LD/۳۶۵ \end{aligned}$$

۶)

$$\begin{aligned} C_{TOT} &= \text{هزینه‌ی نگه داری + هزینه‌ی سفارش مجدد} \\ &= C_H(\text{میانگین موجودی کالا}) + C_\circ(\text{تعداد سفارشها در سال}) \\ &= C_H Q_M)/۲ + (C_\circ D)/Q_M \end{aligned}$$

۳–۳ بررسی مدل

مهمترین آزمایشی که در خصوص یک مدل باید انجام پذیرد این است که تحققیق کنیم تا چه اندازه مدل با پدیده‌ی واقعی مطابقت دارد. آیا به اندازه‌ی کافی برای هدف مورد نظر مناسب است؟ بررسی مدل در مقابل اطلاعات متکی بر تجربه را در فصول بعد خواهیم آورد. در این بخش بررسی های ساده‌ای را پیشنهاد می‌کنیم که می‌توانند در طول مراحل ساختن مدل انجام شوند و می‌توانند به ما کمک کنند تا تشخیص دهیم که آیا مدل معقولانه طرح شده است، برای پدیده‌ی مورد بحث مناسب است، به اندازه‌ی کافی به سؤال مورد نظر پاسخ میدهد، ویا اینکه فارغ از هر گونه پیچیدگی های غیرضروری است.

به‌طور کلی پرسیدن سؤالات زیر در باره‌ی مدل مفید شناخته می‌شود:

- آیا مدل یک مدل سازگاراست؟
- آیا رفتار مدل از آن نوعی است که انتظار داریم؟
- آیا مدل به‌طور تقریبی جوابهای درستی ارائه می‌دهد؟
- آیا مدل به آن اندازه که باید ساده باشد ساده است؟

سازگاری

مهمترین بررسی‌هایی که در خصوص سازگاری یک مدل می‌توان انجام داد عبارتند از بررسی سازگاری مدل با فرضها، بررسی سازگاری ابعادی مدل، و بررسی سازگاری منطقی مدل (به این معنا که آیا مدل به تناقض نمی‌انجامد). بررسی سازگاری مدل با فرضها به‌طور کلی سؤالی است درباره‌ی چگونگی رفتار سایر متغیرها بر اثر تغییراتی که برای یکی از آنها پیش می‌آید. تحقیق در باره‌ی اینکه مدل منطقاً سازگار است، نسبتاً ساده و بعضی اوقات این نوع سازگاری یا عدم آن واضح و آشکار است. بررسی اینکه آیا مدل به‌طورابعادی سازگاراست، در برگیرنده‌ی این سؤال است که آیا ابعاد کمیت‌های فیزیکی شرکت کننده در طرفین معادلات مربوط به مدل یکسان هستند. ذکر تعریف زیر برای درک بیشتر این سؤال ضروری است.

بُعد

در قوانین اولیه مکانیک تمام کمیت‌ها قابل بیان بر حسب سه کمیت اصلی جرم (M)، طول (L)، و زمان (T) هستند. این ارتباط را می‌توان برای یک کمیت کلی Q به‌صورت $[Q] = M^a L^b T^c$ نوشت، که در آن کروشه [ ] به معنای "بُعدِ" و اعداد a ، b ، و c اعداد گویا هستند. به‌عنوان مثال، سرعت v عبارت است از مسافت تقسیم بر زمان پس می‌توان نوشت $[v] = L/T = LT^{-۱}$ که در این حالت $a = ۰$، $b = ۱$، و $c = -۱$.

هر معادله‌ای که به‌طور منطقی به‌دست آمده باشد، باید به‌طور ابعادی سازگار باشد، به این معنا که: [سمت چپ] = [سمت راست].

به‌عنوان مثال، فرض کنید که یک مدل سرعت خروج آب از یک سوراخ مخزن آبی را به‌صورت $Q = A\sqrt{(hg)}$، که در آن A سطح سوراخ، h عمق آب درون مخزن، و g شتاب مربوط به جاذبه‌ی زمین است، پیش‌بینی کند. چون Q حجم آبی را که در هر ثانیه از مخزن خارج می‌شود تعیین می‌کند، داریم که $[Q] = L^۳ T^{-۱}$. از طرف دیگر $[A] = L^۲$، $[h] = L$ ، و $[g] = LT^{-۲}$. درنتیجه $[A\sqrt{(hg)}] = L^۲\sqrt{L(LT^{-۲})} = L^۳ T^{-۱}$، یعنی اینکه معادله حداقل از نظر ابعادی سازگار است. توجه داشته باشید که این سازگاری ثابت نمی‌کند که مدل یک مدل صحیح است؛ در واقع مدل $Q = A\sqrt{(۲hg)}$ بهتر از مدل فوق است.(چون ۲ یک عدد محض است، حضورش در معادله باعث تغییر در ابعاد نمی‌شود.) باوجوداین، در بعضی اوقات اشتباهات موجود در مدل‌سازی را می‌توان با بررسی ابعاد معادلات آشکار کرد.

جدول ۳—۵ چند کمیت معمول فیزیکی را ارائه می‌دهد. برای درک بیشتر این مبحث خواننده را به کتابهای مختلف فیزیک یا مکانیک ارجاع می‌دهیم.

جدول ۳–۵ فهرست ابعاد چند کمیت معمول فیزیکی.

کمیت	ابعاد	واحد
سرعت	LT^{-1}	$m\ s^{-1}$
شتاب	LT^{-2}	$m\ s^{-2}$
نیرو	MLT^{-2}	$kg\ ms^{-2}$
فشار	$ML^{-1}T^{-2}$	$kg\ m^{-1}s^{-2}$
انرژی	$ML^{2}T^{-2}$	$kg\ m^{2}s^{-2}$
توان	$ML^{2}T^{-3}$	$kg\ m^{2}s^{-3}$
دبی حجمی	$L^{3}T^{-1}$	$m^{3}s^{-1}$
شدت جریان جرم	MT^{-1}	$kg\ s^{-1}$
چگالی	ML^{-3}	$kg\ s^{-3}$

رفتار

پیش‌بینی‌هایی را که مدل نتیجه می‌دهد باید به دو صورت کمی و کیفی مورد آزمایش قرار داد. آزمایش کیفی معمولاً جستجوهایی را دربر می‌گیرد که در آنها چگونگی پیش‌بینی‌های مدل در خصوص اثر تغییر یک متغیر روی متغیرهای دیگر مورد بحث قرار دارد. بسیاری از این تحقیقات می‌توانند با بخاطر سپردن چند حقیقت ساده مانند 'با افزایش x، مقدار $1/x$ کاهش می یابد' یا 'توابع نمایی سریع‌تر از چند جمله‌ای‌ها افزایش یا کاهش می‌یابند'، انجام شوند.

سؤال‌های دیگری که در باره‌ی مدل می‌توان پرسید عبارتند از:

۱) وقتی متغیرها مقادیر مرزی خود را می‌گیرند چه اتفاقی می‌افتد؟

۲) وقتی اتفاق مهمی می‌افتد آیا مقادیر خاصی در گیر این پیشامد هستند، مثلاً وقتی یک متغیر به مقادیر ماکزیمم یا می‌نیمم موضعی می‌رسد و یا اینکه صفر یا بی‌نهایت می‌شود، آیا این مقادیر در نقاط خاصی اتفاق می‌افتند؟

۳) آیا جمله‌ای به‌صورت جذر یک عبارت منفی در محاسبات دیده می‌شود؟

۴) آیا دامنه‌ی بعضی از متغیرها به‌دلیل معانی قرینه‌ای محدود شده‌اند؟

رفتار کمی یک مدل می تواند تا اندازه‌ای توسط برآوردهای اجمالی مورد جستجو قرار گیرد، در عین حال همواره انجام یک آزمایش دقیق‌تر، که در آن مقایسه با اطلاعات متکی بر تجربه صورت می‌گیرد، لازم می‌باشد.

جوابهای تقریبی

در مرحله‌ی ساخت مدل، پیدا کردن چند برآورد اجمالی برای

۱) مقدار عددی پارامترها، متغیرها و غیره که قسمتی از مدل را تشکیل می‌دهند و

۲) آن مقادیر عددی که به‌عنوان خروجی از مدل به‌دست می آیند،

می‌تواند بسیار ارزشمند باشد. بعضی اوقات اطلاعات کافی برای پیدا کردن این برآوردها در دسترس است، اما در سایر اوقات چاره‌ای جز این نداریم که قضاوت‌های خود را به‌کاربرده و از روی آنها برآوردهای مورد نظر را پیدا کنیم. منظور از این کار اجتناب از عملیات مفصل و وقت گیر و جایگزین کردن آنها با روشهای عملی برای پیدا کردن برآوردهایی است که تقریباً درست هستند.

به هنگام انجام محاسبات تقریبی، موارد ساده‌ی زیر می‌تواند مفید واقع شود:

- اگر x کوچک باشد، $x^۲$ بسیار کوچک تر خواهد بود.
- اگر x بزرگ باشد، $x^۲$ بسیار بزرگ تر خواهد بود.
- اگر x کوچک باشد، $۱/x$ بسیار بزرگ خواهد بود، و $۱/x^۲$ حتی بزرگتر خواهد بود.
- اگر x بزرگ باشد، $۱/x$ بسیار کوچک خواهد بود، و $۱/x^۲$ خیلی کوچکتر خواهد بود.
- تقسیم بر مقادیر کوچک جوابهای بزرگتری را نتیجه می‌دهد.
- تقسیم بر مقادیر بزرگ جوابهای کوچکتری را نتیجه می‌دهد.
- ضرب یک عدد در مقادیر کوچک جوابهای کوچکتری را نتیجه می‌دهد.

استفاده از راهبرهای زیر نیز ممکن است در انجام محاسبات تقریبی مفید واقع شود:

- از مقادیر کوچکی که به مقادیر بسیار بزرگ افزوده می‌شوند (یا از آنها کم می شوند) صرف‌نظر کنید.
- قبل از آنکه از عدد مثبتی جذر بگیرید آنرا به نزدیکترین مربع خود گرد کنید.
- وقتی که x کوچک است از توانهای بزرگ آن صرف‌نظر کنید.
- آن مقادیری که نقش بسیار کوچکی در پیدا کردن جواب دارند را نادیده فرض کنید.

البته راهبردهای دیگری نیز برای انجام اینگونه محاسبات وجود دارد که بتدریج و با انجام تمرینهای مختلف مدل‌سازی فراگرفته می‌شود.

سادگی

بهترین مدلهای ریاضی آنهایی هستند که پدیده‌ی مورد بحث را به اندازه‌ی کافی مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌دهند اما در عین حال تا حد امکان بسیار ساده طرح‌ریزی شده‌اند.

برای رسیدن به چنین هدفی مقایسه‌ی نسبی اهمیت مؤلفه‌های سازنده‌ی مدل می‌تواند مفید واقع شود. آیا واقعاً در نظر گرفتن تمام متغیرهاضروری است؟ به‌عنوان مثال، در مکانیک غالباً این بحث پیش می آید که آیا شرکت دادن نیروهای اصطکاک یا مقاومت هوا در مدل ارزش خود را دارد. در هر معادله‌ای می‌توانیم تحقیق کنیم که آیا اهمیت جملات شرکت کننده در مدل مساوی است.

دو روش عملی برای انجام این کار عبارتند از:

- ترتیب اهمیت جملات مختلف شرکت کننده در مدل را با یکدیگر مقایسه کنید و تصمیم بگیرید که آیا می‌توانید جملاتی که کمترین اهمیت را دارند حذف کنید.
- تأثیر جملات مختلف شرکت کننده در مدل را روی جوابی که انتظار دارید مدل پیش‌بینی کند جستجو کنید. اگر می‌خواهید آن جواب تا ۱% دقیق باشد، در آن‌صورت می‌توانید در مورد حذف جملاتی که روی جواب تنها تا ۰.۱% تأثیر دارند، تصمیم بگیرید.

بعضی اوقات به دومین روش آورده شده در فوق تجزیه و تحلیل حساسیتها گفته می‌شود. روش ریاضی انجام این کار از طریق آزمون‌های عددی و به کارگیری معادلات مشتقات جزئی است.

مثال ۳-۳-۱

فرض کنید متغیر w به‌طور مستقیم متناسب با دو متغیر دیگر x و y است. در این‌صورت کدامیک از موارد زیر این ارتباط را درست نشان می‌دهد؟

۱) $w = a(x+y)$، ۲) $w = ax + by$، ۳) $w = axy$.

حل جواب صحیح (۳) است، زیرا به‌عنوان مثال، زمانی‌که x یا y هرکدام مقدارشان n برابر می‌شود مقدار w نیز n برابر می‌شود. این ویژگی همان ویژگی مورد نظر فرض است که البته توسط (۱) و (۲) تأمین نمی‌شود.

مثال ۳-۳-۲

متغیر y به دو متغیر دیگر w و z بستگی دارد و شرایط زیر نیز برقرار است:

اول) وقتی w افزایش می یابد، y کاهش می‌یابد.
دوم) وقتی z افزایش می یابد، y افزایش می‌یابد.
سوم) وقتی w و z هر دو صفر هستند، y نیز صفر است.

کدامیک از مدلهای زیر با شرایط (اول)، (دوم)، و (سوم) سازگار است؟

$$۱)\ y = aw + bz, \quad ۲)\ y = bz - aw + c, \quad ۳)\ y = \frac{cz}{w},$$
$$۴)\ y = cwz, \qquad ۵)\ y = az - bw$$

حل تنها جواب (۵) با کلیه‌ی حقایق سازگار است، زیرا (۱) و (۴) توأماً مورد (اول) را نقض می‌کنند و (۲) و (۳) ناقض مورد (سوم) هستند.

مثال ۳-۳-۳

اگر V حجم، M جرم، ρ چگالی، x طول، A سطح، و k ثابت بدون بعد فرض شوند، در این‌صورت کدامیک از معادلات زیر به‌طور ابعادی سازگار هستند؟

$$۱)\ M = \rho Ax, \quad ۲)\ V = \frac{A}{x} + \frac{M}{\rho}, \quad ۳)\ , A = \frac{V}{x} + \frac{M}{\rho}$$
$$۴)\ x = \frac{kV}{A}, \qquad ۵)\ \frac{A}{V} = \frac{k}{x} + \frac{\rho A}{M}, \quad ٦)\ \frac{A}{x} = \frac{k}{V} + \frac{M}{\rho}$$

حل ۱) چون $[\rho Ax] = (ML^{-۳})(L^{۲})(L) = M$ و چون این بعد با بعد سمت چپ تساوی یکی است، معادله از نظر ابعادی سازگار است.
۲) چون $[V] = L^{۳}$ و چون $[A/x] = (L^{۲})/(L) = L$، برای این معادله یک ناسازگاری وجود دارد.
۳) چون $[A] = L^{۲}$، $[V/x] = (L^{۳})/(L) = L^{۲}$ اما $[M/\rho] = M/(ML^{-۳}) = L^{۳}$، می‌توانیم بگوییم که برای معادله یک ناسازگاری وجود دارد.
۴) چون $[x] = L$ و چون $[kV/A] = (L^{۳})/(L^{۲}) = L$، معادله از نظر ابعادی سازگار است.
۵) چون $[A/V] = (L^{۲})/(L^{۳}) = L^{-۱}$ و چون $[k/x] = L^{-۱}$ و $[\rho A/M] = (ML^{-۳})(L^{۲})/M = L^{-۱}$، معادله از نظر ابعادی سازگار است.
٦) چون $[A/x] = L^{۲}/L = L$ ولی $[k/V] = (L^{-۳})$، برای این معادله یک ناسازگاری وجود دارد.

مثال ۳-۳-۴

بدون استفاده از ماشین حساب، مقدار $\sqrt{(۳۷/۱۵)}/[۱۰۰ + (۰/۰۱۵)^{۲}]$ را به‌طور تقریبی برآورد کنید.

حل با رند کردن عدد ۳۷/۱۵ به عدد ۳٦ می‌توانیم جذر $\sqrt{(۳۷/۱۵)}$ را به ٦ تقریب بزنیم در ضمن در مقایسه با عدد ۱۰۰، عدد $(۰/۰۱۵)^{۲}$ قابل صرف‌نظراست. بنابراین،

جواب تقریبی $۶/۱۰۰ = ۰/۰۶$ یک برآورد مقدار فوق است که حاصل از این محاسبات تقریبی است.

مثال ۳–۳–۵

فرض کنید که Q سرعت جریان حجم از میان یک لوله‌ی استوانه‌ای باشد و فرض کنید که Q:

– متناسب است با اختلاف فشار P،
– با طول لوله یعنی l نسبت عکس دارد،
– باغلظت مایع یعنی μ نسبت عکس دارد، و
– متناسب است باتوانی مثل a از شعاع لوله یعنی r.

همچنین فرض کنید بدانیم که F یعنی نیروی بین دو سطح واقع بر هر یک از لایه‌های مایع دارای ویژگی های زیر است:

– متناسب است با مساحت سطوح یعنی A،
– با ضخامت لایه‌های مایع یعنی x نسبت عکس دارد،
– باغلظت مایع یعنی μ نسبت مستقیم دارد، و
– متناسب است باسرعت نسبی بین دو سطح یعنی v.

با فرضهافوق یک مقدار مناسب برای عدد ثابت a پیدا کنید.

حل ابتدا توجه کنید که فرضهای مربوط به F باعث می‌شوند که‌معادله‌ی $F = \mu Av/x$ برقرار باشد. و بنابراین از نظر ابعاد داریم : $[F] = [\mu]L^۲(LT^{-۱})/L$ یا $MLT^{-۲} = [\mu]L^۲(LT^{-۱})/L$. درنتیجه $[\mu] = ML^{-۱}T^{-۱}$.

از طرف دیگر توجه کنید که فرضهای مربوط به Q باعث می‌شوند که‌معادله‌ی $Q = kPr^a/Pl$ برقرارباشد. اکنون با در نظر گرفتن ابعاد $[Q] = L^۳T^{-۱}$ و $[P] = (MLT^{-۲})/L^۲ = ML^{-۱}T^{-۲}$ و جایگذاری آنها در معادله‌ی مربوط به Q داریم: $L^۳T^{-۱} = [k](ML^{-۱}T^{-۲})L^a/(ML^{-۱}T^{-۱}L)$، که بعد از ساده کردن رابطه‌ی $L^۳ = [k]L^{a-۱}$ به‌دست می‌آید. پس اگر k را یک ثابت بدون بعد در نظر بگیریم، این رابطه‌ی آخر را می‌توان باانتخاب $a = ۴$ برقرار ساخت. بنابراین، مدل نهایی برای Q می‌تواند به‌صورت $Q = \dfrac{kPa^۴}{\mu l}$ باشد.

۳–۴ تمرین‌ها

برای هر یک از تمرینهای ۱ الی ۸ موارد زیر را انجام دهید:

(الف) مسأله را توضیح دهید. (ب) لیست عوامل شرکت کننده در مسأله را تهیه

کنید. (ج) لیست فرضهای مربوط را تهیه کنید. (د) صورت مسأله را تشخیص دهید. (ه) روش‌هایی برای حل مسأله ارائه داده و در صورت امکان آنرا حل کنید. (و) در خصوص جوابهای مسأله و بخشیدن اعتبار بیشتر به مدل طرح شده بحث کنید.

۱) **موضوع :** بهترین زمان برای معامله‌ی یک ماشین دست دوم و جایگزینی آن با یک ماشین نو چه موقع است؟

۲) **موضوع :** علت اینکه قوطی‌های کوچک نوشابه‌ی زمزم در همه جا موجود است این است که حجم آن ۳۳۰ میلی‌لیتر است و این مقدار مناسبی است که می‌تواند همراه با یک وعده غذا صرف شود. چرا به‌طور نرمال شکل قوطی این نوشابه به این‌صورت طراحی شده است؟ در صورتی که مینیمم مقدار فلز در ساختن قوطی استوانه‌ای به کار رود، پیامد آن چه می‌تواند باشد؟

۳) **موضوع :** قرار است که یک ایستگاه اتوبوس در طول جاده‌ای درمحلی جدید نصب شود. برای این ایستگاه یک سرپناه در نظر گرفته شده است. محل قرار گرفتن این ایستگاه کجا باشد تا ماکزیمم تعداد افراد ترغیب به استفاده از سرویس شوند؟ شرکت اتوبوس رانی می‌خواهد که مردم از سرویس ارائه شده استفاده کنند، اما نمی‌تواند به سرویسهایی که از سوی مردم در مواقع مختلف درخواست می‌شود، جامع عمل بپوشاند.

۴) **موضوع :** کابلهای صنعتی، مثل کابلی که برای مخابرات به‌کارمی‌رود، در ابتدا به دور یک قرقره‌ی بزرگ پیچیده می‌شوند. این کابل در زیر زمین و در کنار سایر لوله‌های خدمات شهری مثل آب و گاز به‌طور خطی قرار داده می‌شود. چه مقدار کابل می‌تواند حول قرقره‌ای با اندازه‌ی معلوم پیچیده شود؟ در اینجا بحث خاصی برای افزودن وزن وجود ندارد و هدف این است که قادر به تجزیه و تحلیلی باشیم که بتواند راه حلی را برای بهترین روش پیچاندن کابل به دور قرقره ارائه دهد. چنین وضعیتی در مورد هر مسأله‌ی "چرخاندن" مثل تهیه‌ی توپ‌های کاغذ، پارچه، موکت، وغیره وجود دارد، هر چند که در اینجا عمل پیچاندن در ارتباط باعمل چرخاندن است.

۵) **موضوع :** به‌نظر می‌رسد که هرگز نتوان به محض ورود به ساختمان بلند یک دانشگاه و برای بالا رفتن در آن به آسانسوری منتظر دست یافت. وقتی بالاخره یکی در دسترس قرار می گیرد، در آن افرادی وجود دارند که تنها می‌خواهند به طبقه‌ی دوم یا سوم بروند، در حالی‌که شما می‌خواهید به بالاترین طبقه، برای حضور در یک کلاس مهم ریاضی بروید. در حال حاضر تمام آسانسورها براساس ایستادن در هر زمان و در هر طبقه

تنظیم شده‌اند. در مورد تخصیص آسانسورهایی برای رسیدن بدون توقف به بالاترین طبقه تحقیق کنید.

۶) **موضوع :** بسیاری از دانشجویان برای ادامه‌ی تحصیل و ماندن در دانشگاه چاره‌ای جز اخذ وام ندارند. در محیط دانشگاه اعلامیه‌هایی نصب شده‌است که خبر از شرایط و میزان وام به دانشجویان می‌دهد. مقدار وامی که می‌توان اعطا نمود پایین نگاه داشته شده است. در ضمن نرخ بهره‌ی باز پرداخت نیز پایین است زیرا هدف طرح این است که تسهیلات ارزان‌تری نسبت به آنچه که بانکهای دیگر پیشنهاد می‌کنند عرضه گردد.

۷) **موضوع :** با توجه به پیش‌بینی اداره‌ی هوا شناسی بارش باران در حال شروع است و شما می‌خواهید مسافت کوتاه ۱ کیلومتری بین خوابگاه و دانشکده را قدم بزنید. چون عجله دارید اهمیتی به برداشتن چتر یا پوشیدن بارانی نمی‌دهید و احتمال خیس شدن را می‌پذیرید. ا گر باران به شدت شروع به باریدن کند و اگر شما به عقب برنگردید، در طول این مسافت تا چه اندازه خیس می‌شوید؟

۸) **موضوع :** همان‌طور که می‌دانیم دورتادور دریاچه‌ی مازندران پنج کشور وجود دارد که مشغول فعالیت‌های شدید صنعتی بوده و زباله‌های صنعتی را به داخل این دریاچه می‌ریزند. درنتیجه این دریاچه به‌طور جدی آلوده شده است. اخیراً دولت‌های مرکزی این کشورها تصمیم بگیرند که دیگر زباله‌ای به داخل این دریاچه ریخته نشود، چه مدت زمان طول خواهد کشید تا میزان چگالی آلودگی دریاچه به $\alpha\%$ میزان اولیه‌ی خود تنزل پیدا کند؟

۹) جملات زیر را به‌صورت نمادهای ریاضی بیان کنید.
(الف) شدت روشنایی همراه با مربع فاصله از لامپ کم می‌شود.
(ب) فرکانس ارتعاش جرمی که توسط فنر متصل به یک نقطه‌ی ثابت، آویزان شده است نسبت عکس به جذر جرم جسم دارد.
(ج) جرم یک سیاره نسبت مستقیم به چگالی و مکعب شعاع خود دارد.
(د) نیروی جاذبه بین دو جرم M_1 و M_2 به‌طور مستقیم متناسب است با جرم آنها و با مربع فاصله‌ی بین آنها نسبت عکس دارد.

۱۰) به‌کمک معادلات ریاضی جملات زیر را تا سرحد امکان به‌صورتی ساده بیان کنید:
(الف) هر چه بیشتر پول داشته باشید بیشتر مصرف می‌کنید.
(ب) اگر سرعت خود را افزایش دهید، زمان مسافرت کاهش می‌یابد.

(ج) اگر پول جایزه یعنی x ، که مقداری ثابت است، بین اعضای یک تیم به‌طور مساوی تقسیم شود چگونه سهم هر فرد همراه با x تغییر می‌کند؟
(د) وقتی قیمت کالایی افزایش می‌یابد تقاضا برای آن کاهش می‌یابد.
(ه) مدت زمانی که برای حفر یک چاه، با اندازه‌ای معین، لازم است باافزایش کارگران حفار کاهش می‌یابد.
(و) هر چه بیشتر تمرین کنید به زمان کمتری برای شنا در یک طول استخر نیاز دارید.
(ز) تعداد مراجعات به یک مرکز فروش توسط مردمی که به فاصله‌ی x از آن قرار دارند با افزایش x کاهش می‌یابد و با افزایش اندازه‌ی فروشگاه افزایش می‌یابد.

۱۱) فرض کنید τ زمان تناوب یک پاندول در حال نوسان باشد. اگر l طول پاندول، m جرم پاندول، g شتاب جاذبه‌ی زمین، و θ دامنه‌ی نوسان باشد، در این‌صورت می‌دانیم

$$\tau = kl^a m^b g^c \theta^d \ ,$$

که در آن k ، a ، b ، c ، و d اعدادی حقیقی هستند. برای اینکه مدل فوق از نظر ابعادی سازگار باشد، باید چه ارتباطی بین مقادیر a ، b ، c ، و d برقرار باشد؟ آیا می‌توانید آن‌را تعیین کنید؟

۱۲) زمانی‌که ذره‌ای تحت تأثیر جاذبه‌ی زمین به درون یک مایع لزج سقوط می‌کند، سرعت آن کاهش یافته و تدریجاً از حرکت باز می‌ایستد. سرعتی که ذره در چنین مایعی پیدا می‌کند به سرعت انتهایی مشهور است و با نماد υ نمایش داده می‌شود. به تجربه ثابت شده است که برای ذرات کروی، مقدار υ از مدل زیر قابل محاسبه است:

$$\upsilon = kD^a(\rho_۱ - \rho_۲)\mu^b g^c,$$

که در آن D قطر ذره، μ ضریب چسبندگی مایع، g شتاب جاذبه، $\rho_۱$ چگالی ذره، $\rho_۲$ چگالی مایع، و k یک عدد ثابت حقیقی است. اگر معادله‌ی ابعادی μ به‌صورت $[\mu] = ML^{-۱}T^{-۱}$ باشد، در این‌صورت مقادیر a ، b ، و c را تعیین و مدل فوق را به‌صورت صریح‌تر بنویسید.

۱۳) دو سوپر مارکت روی یک نوع خوراکی وارد جنگ قیمت شده اند. سوپر مارکت A قیمت را پایین آورده و درنتیجه حجم فروش روزانه‌ی سوپر مارکت B با مقداری متناسب با
(i) اختلاف بین قیمت B و قیمت A ،
(ii) اختلاف بین قیمت B و قیمت تک فروشی توصیه‌ای،

(iii) اختلاف بین قیمت A و قیمت تک فروشی توصیه‌ای،
تغییر کرده است. با این فرضیات مدلی را برای تعیین حجم فروش روزانه‌ی سوپر مارکت B طراحی کنید.

۱۴) در کشاورزی گفته می‌شود که اگر چگالی کاشت گیاه یعنی N (= تعداد گیاهان کاشته شده در یک متر مربع) از حد معینی افزایش یابد، گیاهان از رقابت در رشد باز مانده و نتیجه‌ی مشترک این است که اندازه‌ی این گیاهان کوچکتر از حد انتظار می‌شود. در عمل ثابت شده است که اگر وزن هر یک از این گیاهان را W در نظر بگیریم، $\log W$ تابعی خطی نسبت به متغیر $\log N$ با شیب $-۳/۲$ است. یک مدل ساده را برای شرح این وضعیت پیشنهاد کنید. به‌علاوه، برای تعیین وزن تمام محصول، که انتظار می‌رود از بخش معینی از زمین مورد نظر برداشت شود، مدلی را بر حسب چگالی کاشت طراحی کنید.

۱۵) مدلی برای پیش‌بینی عمق d که تا آنجا توپی با قطر D در آب فرو می‌رود مورد نیاز است. فرض کنید جاذبه‌ی مواد به‌کاررفته در ساخت توپ s باشد. با معلوم بودن D و s پیشنهاد شده است که مقدار d از حل معادله‌ی

$$sD^{۳} = d^{۲}(۳D - ۲d)$$

به‌دست می‌آید. صحت مدل را مورد بررسی قرار دهید.

۱۶) در زمان $t = ۰$ گلوله‌ای به جرم m با سرعت U به‌طور قائم در هوا شلیک شده است. در اینجا مدلی برای پیش بینی
(الف) بالاترین نقطه‌ای که گلوله می‌رسد یعنی H ، و
(ب) لحظه‌ای که گلوله به بالاترین نقطه می‌رسد یعنی T ،
مورد نیاز است. با توجه به اینکه شتاب قائم یکنواخت مربوط به جاذبه $-g$ در نظر گرفته می‌شود سه مدل ساده براساس هر یک از فرضهای زیر قابل نتیجه‌گیری هستند:
(i) صرف‌نظر کردن از مقاومت هوا
(ii) نیروی حاصل از مقاومت هوا = (سرعت) $\times k_۱$
(iii) نیروی حاصل از مقاومت هوا = ^{۲}(سرعت) $\times k_۲$
که در آنها $k_۱$ و $k_۲$ پارامترهای مناسب هستند.

مدل (i) پیش‌بینی می‌کند که

$$\begin{cases} (\text{الف}) & H = U^{۲}/(۲g) \\ (\text{ب}) & T = U/g \end{cases}$$

مدل (ii) پیش‌بینی می‌کند که

$$\begin{cases} \text{(الف)} & H = mU/k_{۱} - (m^{۲}g/k_{۱}^{۲})\ln[۱ + k_{۱}U/(mg)] \\ \text{(ب)} & T = (m/k_{۱})\ln[۱ + k_{۱}U/(mg)] \end{cases}$$

مدل (iii) پیش‌بینی می‌کند که

$$\begin{cases} \text{(الف)} & H = (۰/۵\ m/k_{۲})\ln[۱ + k_{۲}U^{۲}/(mg)] \\ \text{(ب)} & T = \sqrt{[m/(k_{۲}g)]}\ tan^{-۱}\{U\sqrt{[k_{۲}/(mg)]}\} \end{cases}$$

با توجه به این نتایج

(A) تحقیق کنید که آیا هر یک از این مدلها سازگارند.

(B) اختلاف بین پیش‌بینی این مدلها تا چه اندازه بزرگ است؟

(C) جوابهای به‌دست آمده تا چه اندازه نسبت به پارامترهای فرض شده حساس هستند؟

فصل ۴

برازش مدل

۴–۱ مقدمه

همان‌طور که می‌دانیم ساختن مدلهای ریاضی به‌کمک مفاهیم مجرد ریاضی و تنها به‌کمک کاغذ و قلم یا گچ و تخته سیاه امری امکان‌پذیر است. در جریان این نوع مدل‌سازی در دنیایی رویایی از آرمان‌گرایی و خیال‌پردازی قرار می‌گیریم و به همین دلیل باید بدانیم که این نوع مدل‌سازی ممکن است ما را از واقعیت دور ساخته و عملاً بدون استفاده باشد. بنابراین، برای ساختن مدلهای ریاضی که منطبق بر واقعیت باشد باید علاوه بر استفاده از دانش ریاضی، از داده‌ها و یافته‌های مربوط نیز بهره گرفت. در اینجا منظور ما از داده‌ها حقایق، اندازه‌ها یا مشاهداتی است که در دنیای واقعی جمع‌آوری شده‌است و در ارتباط با پدیده‌ی مورد بحث است. هر چند که این داده‌ها ممکن است نادرست و ناقص باشند، می‌توانند جهت مقایسه با نتایج به‌دست آمده از روی مدل مورد استفاده قرار گرفته و انطباق مدل با واقعیات را محک بزنند.

فعل و انفعال بین مدلها و داده‌ها به چند طریق صورت می‌گیرد که از بین آنها می‌توان به موارد زیر اشاره نمود:

۱) در زمانی‌که برای ساختن مدل ریاضی تلاش می‌شود، داده‌ها می‌توانند در پیشنهاد نوع مدل یا حد اقل قسمتی از آن مفید واقع شوند. در مواردی این داده‌ها می‌توانند تا حد ارائه کامل یک مدل مفید پیش روند، در این‌صورت مدل حاصل را یک مدل متکی بر تجربه می‌نامند.

۲) برای تقریب زدن پارامترهای مطرح در یک مدل ریاضی نیاز به دانستن داده‌های مربوط داریم.

۳) داده‌ها برای آزمودن مدل مورد استفاده قرار می‌گیرند: به این‌صورت که توسط آنها می‌توان پی برد که تا چه حد نتایج و پیش‌بینی‌های به‌دست آمده توسط مدل منطبق بر واقعیت است. در این فصل فرآیندهای فوق را در ساختن مدلهای ریاضی مورد بحث و بررسی قرار خواهیم داد.

۴ـ۲ جمع‌آوری داده‌ها

هر وقت که با مدل‌سازی پدیده‌ای روبرو هستیم، ممکن است همراه با موضوع پدیده داده‌هایی ارائه شده یا معلوم باشند. در مواردی این داده‌ها تنها اطلاعاتی درباره‌ی موضوع هستند که باید برای مدل‌سازی به‌کاربرده شوند. در عین حال، برای اکثر اوقات این امکان وجود دارد که بتوان اطلاعات بیشتری درباره‌ی موضوع به‌دست آورد. اما باید توجه داشت که جمع‌آوری این اطلاعات بیش از آنچه که انتظار می‌رود دشوار است، زیرا در تلاش برای جمع‌آوری آنها باید سؤالهای زیر را مد نظر قرار داد:

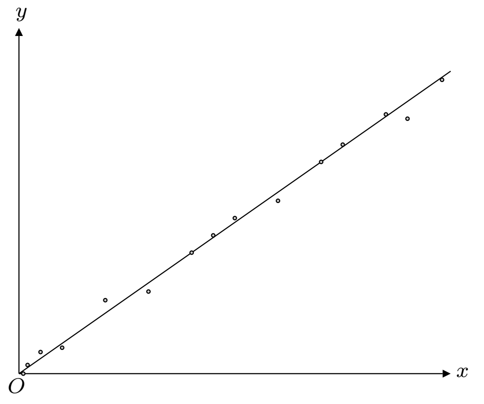
۱) دقیقاً چه داده‌هایی مورد نیاز است؟ برای پاسخ به این سؤال باید وارد فرآیند مدل‌سازی شد تا بتوان در خصوص نوع داده‌هایی که به مدل مربوط می شوند تصمیم‌گیری نمود.

۲) چگونه می‌توان به اطلاعات مربوط به موضوع دست یافت؟ یکی از راههای ممکن مراجعه به افرادی است که سناریوی مربوط به موضوع را ارائه داده‌اند. در بیشتر موارد این افراد می‌توانند اطلاعات اولیه‌ای را در خصوص موضوع فراهم کنند. راه دیگر مراجعه به کتابخانه‌ها و درخواست دسترسی به منابع منتشر شده‌ی مربوط است. بعضی اوقات مدل‌ساز باید شخصاً وارد عمل شود و بر حسب نوع داده‌های مورد نیاز اقدام به طرح پرسشنامه‌هایی برای بررسی های آماری یا اندازه‌گیری‌های علمی نماید.

۳) داده‌های مورد نظر باید به چه صورت باشند؟ اگر حجم زیادی از داده‌ها قابل دسترس باشد، ممکن است که تنها با خلاصه‌ای از اطلاعات آماری آنها که در برگیرنده‌ی میانگین، انحراف معیار، درصد، هیستوگرام و غیره است احتیاج باشد.

۴ـ۳ پیدا کردن فرم صحیح مدل

تصمیم گیری روی فرم صحیح مدل به‌کمک ترکیبی از تجربه، عقل و درایت، درون‌یابی، و آزمودن داده‌ها انجام می‌پذیرد. مهمترین شیوه آزمودن داده‌ها رسم نمودار حاصل از این داده‌ها توسط ابزارهای موجود، بویژه کامپیوتر است. اگر این ترسیم رابطه‌ای قطعی را بین داده‌ها پیشنهاد نمود، سعی ما روی به‌دست آوردن این رابطه متمرکز خواهد شد. ساده‌ترین حالت این است که در جدول داده‌ها دو متغیر x و y حضور داشته باشد.



شکل ۴—۱ برازش توسط خط راست.

در این‌صورت نمودار رسم شده می تواند پیشنهاد یکی از حالات زیر را بین x و Y ، که در آن Y حدس ما از مقادیر مختلف y در هر x است، موجه سازد:

۱) یک رابطه‌ی خطی به‌صورت $Y = ax + b$ (شکل ۴—۱)،

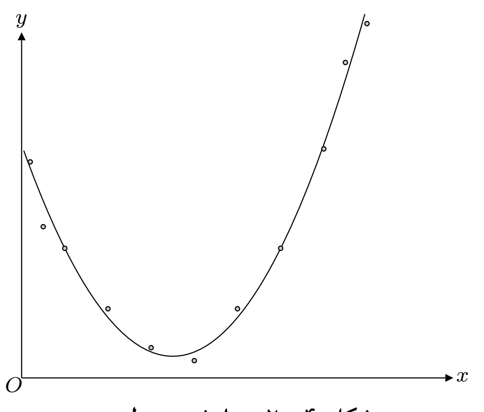
۲) یک رابطه‌ی غیر خطی درجه دوم به‌صورت $Y = ax^۲ + bx + c$ (شکل ۴—۲)،

۳) یک رابطه‌ی متناوب به‌صورت $Y = a + b\cos\Omega x + c\sin\Omega x$ (شکل ۴—۳)،

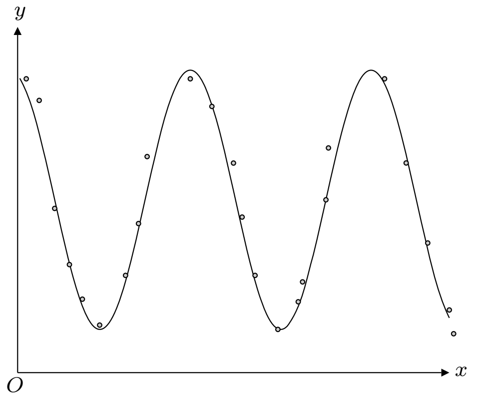
۴) یک رابطه‌ی صعودی نمایی مثل $Y = L + (y_{\circ} - L)e^{-kx}$ ، که بعد از مدتی با افزایش x ثابت می‌ماند (شکل ۴—۴)

۵) یک رابطه‌ی لجستیک مثل $Y = \dfrac{L}{۱ + \left(\frac{y_{\circ}}{L} - ۱\right)e^{-kx}}$ (شکل ۴—۵)،

در کلیه روابط فوق باید بتوان به‌کمک داده‌ها پارامترهای مطرح در آنها مثل a ، b ،



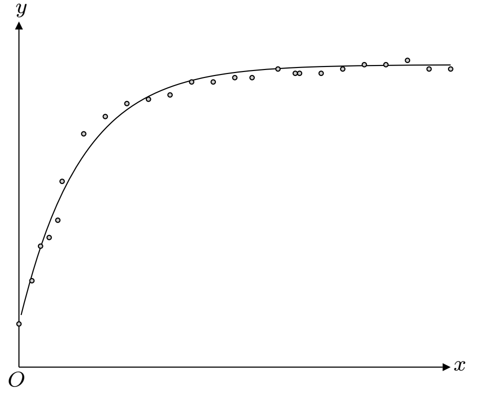
شکل ۴—۲ برازش توسط سهمی.



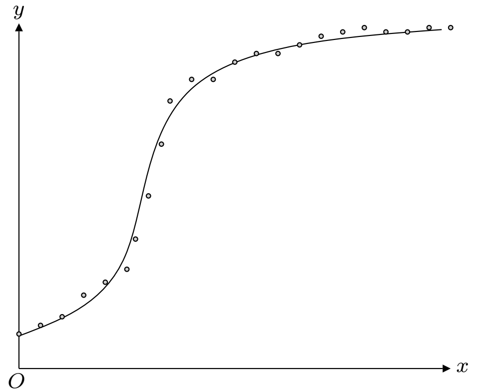
شکل ۴–۳ برازش توسط توابع متناوب.

c ، L ، و k را به نحوی تعیین نمود که مدل پیشنهاد شده، برازش مناسبی برای موضوع موضوع مورد بحث به حساب آید.

اگر از روی ترسیم داده‌ها نتوان رابطه‌ای صریح را بین دو متغیر x و Y تشخیص داد، با فرض $Y = f(x)$ و به‌کمک روش‌های مطمئن درونیابی ممکن است بتوان تابع مناسبی مثل f را پیشنهاد نمود که به‌عنوان برازش مناسبی برای موضوع مورد بحث به حساب آید. در مورد مدلهایی که در آنها چند متغیر حضور دارند نیز می‌توان با تجزیه و تحلیل های پیشرفته‌تر به‌طور مشابه عمل نمود، اما در این کتاب تنها مدلهای دو متغیره را مورد توجه قرار داده و بحث های درونیابی را نیز به درس مدل‌سازی پیشرفته موکول می‌کنیم.



شکل ۴–۴ برازش توسط توابع صعودی نمایی.



شکل ۴–۵ برازش توسط توابع لجستیک.

۴–۴ تقریب زدن پارامترها

همان‌طور که در بخش قبل اشاره کردیم، هدف ما در برازش مدل پیدا کردن پارامترهای موجود در رابطه‌ای است که بین متغیرهای شرکت کننده در مدل پیشنهاد شده است. در این راستا سعی می‌شود تا پارامترها به گونه‌ای تقریب زده شوند که مدل حاصل برازش مناسبی برای موضوع مورد بحث به حساب آید. یکی از روش‌هایی که غالباً مورد استفاده قرار می‌گیرد روش کمترین مربعات است که ذیلاً به توضیح آن می‌پردازیم.

فرض کنید نمودار ترسیم شده مدلی صریح را به‌صورت $Y = f(x, a_۱, a_۲, \cdots, a_m)$ پیشنهاد کند، که در آن a_j ها پارامترهایی هستند که باید به‌طور صریح یا تقریبی مشخص شوند. اگر $(x_۰, y_۰)$ ، $(x_۱, y_۱)$ ، $\cdots$ ، (x_n, y_n) داده‌های واقعی باشند، در این‌صورت خطای وارد شده در قرار دادن هر Y_i به‌جای y_i عبارت است از

$$E_i = Y_i - y_i, \qquad ۰ \le i \le n$$

حال اگر قرار دهیم

$$S(a_۱, a_۲, \cdots, s_m) = \sum_{i=۰}^{n} (Y_i - y_i)^۲$$

مقدار S می‌تواند به‌عنوان تابعی از پارامترهای $a_۱, a_۲, \cdots, a_m$ در نظر گرفته شده و a_j ها به گونه‌ای در انتخاب شوند که S مینیمم شود. برای اینکار ابتدا باید دستگاه m معادله‌ی m مجهولی

$$\frac{\partial S}{\partial a_j} = ۰, \qquad ۱ \le j \le m$$

را، برای پیدا کردن کاندیدهایی برای این پارامترها حل نمود و سپس به‌کمک آزمونهای مشتق اول یا دوم، پارامترهای مینیمم کننده‌ی S را تشخیص داد.

توجه: در حالتی که دستگاه فوق خطی است، محاسبه‌ی a_j ها به‌کمک نرم افزارهای موجود به‌راحتی امکان‌پذیر است. در غیراین‌صورت باید از روشهای دیگری مثل روشهای زیر برای تقریب زدن a_j ها کمک گرفت.

۱. با بکارگیری یک عملگر مناسب مدل غیر خطی پیشنهادی را به یک مدل که نسبت به همه‌ی پارامترهای جدید خطی است تبدیل می‌کنیم. به‌عنوان مثال، با گرفتن لگاریتم از طرفین رابطه‌ی غیر خطی $y = ae^{bx}$ رابطه‌ی خطی $\ln y = b(\ln x) + \ln a$ حاصل می‌شود. اکنون روش کمترین مربعات می‌تواند تقریب‌های مناسب را برای پارامترهای $\ln a$ و b تعیین کند. توجه کنید که این راهبرد دارای دو عیب است. اول اینکه برای به‌دست آوردن پارامترها ناچار هستیم از تبدیل لگاریتم و نمایی استفاده کنیم که نتیجه‌ی آن وجود خطای بیشتر در تقریب پارامترهای a و b است. دوم اینکه به‌کارگرفتن تبدیل لگاریتم ممکن است باعث نامرتب شدن توزیع داده‌ها شود. در بعضی موارد (مثل $y = a(۱ - e^{-bx})$) ممکن است نتوان تبدیل مناسبی را برای مدل پیدا نمود. در مواردی نیز (مثل $y = \frac{a}{x+b}$) ممکن است تبدیل‌های متفاوتی (مثل $\frac{۱}{y} = \frac{۱}{a}(x) + \frac{b}{a}$ ، یا $y = -\frac{۱}{b}(xy) + \frac{a}{b}$) برای تبدیل مدل به یک مدل خطی وجود داشته باشد.

۲. دستگاه غیرخطی به‌دست آمده را با به‌کاربردن روشهایی مثل روش تکرار نیوتن به‌صورت عددی حل می‌کنیم.

۳. به‌کمک روشهای جستجوی عددی پارامترهایی پیدا می‌کنیم که مقدار S را مینیمم می‌کنند.

۴. به‌کمک نرم افزارهایی مثل MINITAB می‌توان تقریب‌های کمترین مربعات را برای پارامترها پیدا نمود. این نرم افزارها همچنین می‌توانند برد عدم اطمینان پارامترهای تقریب‌زده شده را مشخص نمایند.

مثال ۴–۴–۱

فرض کنید نمودار حاصل از به‌کاربردن داده‌ها مدل $Y = a + b\sin x$ را پیشنهاد کند. دراین‌صورت

$$S(a,b) = \sum[a + b\sin x - y]^۲$$

برای مینیمم شدن S ، پارامترهای a و b باید چنان باشند که:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = \sum ۲[a + b\sin x - y] = ۰ \qquad \text{و} \qquad \frac{\partial S}{\partial b} = \sum ۲\sin x[a + b\sin x - y] = ۰$$

در اینجا پارامترهای a و b از حل دستگاه زیر، که در آن مقادیر $\sum y$ ، $\sum \sin x$ ،

$\sum \sin^{۲} x$، و $\sum y \sin x$ از جدول داده‌ها به‌دست می‌آیند، قابل محاسبه می‌شوند.

$$\begin{cases} na + b\sum \sin x = \sum y \\ a\sum \sin x + b\sum \sin^{۲} x = \sum y \sin x \end{cases}$$

مثال ۴-۴-۲

یکی از مدلهایی که در علوم زیست مورد استفاده قرار می‌گیرد مدل نمایی با مرتبه‌ی خطی است. دلیل استفاده از این مدل آن است که در ابتدا سرعت رشد به شدت صعودی است و بعد از مدتی میزان رشد ثابت می‌ماند. چنین مدلی به‌صورت

$$Y = L + (y_{\circ} - L)e^{-kt}$$

تعریف می‌شود. همان‌طور که مشاهده می‌شود به‌کاربردن روش کمترین مربعات به حل دستگاه معادلات غیرخطی منتهی می‌شود که حل آن بسیار دشوار است. برای غلبه بر این مشکل دو راه پیشنهاد می‌شود.

الف) اگر از روی داده‌ها بتوان مقدار L ، یعنی سطح ثابت ماندن رشد، را تقریب زد، آنگاه به‌کمک تبدیل $\ln(L-y) = (L-y_{\circ}) + (-k)t$ و روش کمترین مربعات می‌توان، k را تقریب زد. البته باید توجه داشت که این روش ممکن است توأم با خطای زیاد باشد.

ب) اگر فاصله‌ی زمانی در جدول داده‌ها مساوی باشد، می‌توان به‌صورت زیر مقادیر L و k را تقریب زد. فرض کنید این فاصله‌ی زمانی برابر d و y_n مقدار y بعد از n مرحله باشد (یعنی $y_n = y(nd)$). با توجه به تعریف مدل داریم

$$\frac{L - y_n}{L - y_{\circ}} = e^{-knd} \quad \text{و} \quad \frac{L - y_{n+۱}}{L - y_{\circ}} = e^{-k(n+۱)d}$$

با تقسیم این دو رابطه بر یکدیگر رابطه‌ی $\dfrac{L - y_{n+۱}}{L - y_n} = e^{-kd}$ و در نهایت

$$y_{n+۱} = e^{-kd} y_n + L(۱ - e^{-kd})$$

به‌دست می‌آید، که $y_{n+۱}$ را به‌عنوان تابعی خطی از y_n با ضریب زاویه‌ی $\alpha = e^{-kd}$ و عرض از مبدأ ($\beta = L(۱ - e^{-kd}$) معرفی می‌سازد. حال با تقریب زدن α و β به‌کمک روش کمترین مربعات، می‌توان به تقریب‌های L و k دست یافت.

مثال ۴-۴-۳

یکی دیگر از مدلهایی که در علوم زیست مورد استفاده قرار می‌گیرد مدل لجستیک است. دلیل استفاده از این مدل آن است که در ابتدا سرعت رشد به شدت صعودی و سپس

نزولی است تا اینکه بعد از مدتی میزان رشد ثابت می‌ماند. چنین مدلی به‌صورت

$$Y = \frac{L}{۱ + \left(\frac{L}{y_۰} - ۱\right) e^{-kt}}$$

تعریف می‌شود. در اینجا نیز استفاده از روش کمترین مربعات به یک دستگاه معادلات غیرخطی مشکل منجر می‌شود و درنتیجه باز هم دو روش برای غلبه بر این مشکل پیشنهاد می‌شود.

الف) اگر از روی داده‌ها بتوان مقدار L را تقریب زد، آنگاه به‌کمک تبدیل

$$\ln\left(\frac{L}{y} - ۱\right) = \ln\left(\frac{L}{y_۰} - ۱\right) + (-k)t$$

و روش کمترین مربعات می‌توان، k را تقریب زد. البته باید توجه داشت که در این روش به‌دلیل تقریب زدن L از روی داده‌ها و به‌کاربردن تبدیل لگاریتم، ممکن است مدل حاصل توأم با خطای زیاد باشد.

ب) اگر فاصله‌ی زمانی در جدول داده‌ها مساوی باشد، می‌توان به‌صورت زیر مقادیر L و k را تقریب زد. فرض کنید این فاصله‌ی زمانی برابر d و y_n مقدار y بعد از n مرحله باشد (یعنی $y_n = y(nd)$). با توجه به تعریف مدل داریم

$$\frac{L}{y_n} - ۱ = \left(\frac{L}{y_۰} - ۱\right) e^{-knd} \quad \text{و} \quad \frac{L}{y_{n+۱}} - ۱ = \left(\frac{L}{y_۰} - ۱\right) e^{-k(n+۱)d}.$$

با تقسیم این دو رابطه بر یکدیگر رابطه‌ی

$$\frac{\frac{L}{y_{n+۱}} - ۱}{\frac{L}{y_n} - ۱} = e^{-kd}$$

و در نهایت

$$\frac{۱}{y_{n+۱}} = e^{-kd}\left(\frac{۱}{y_n}\right) + \frac{(۱ - e^{-kd})}{L}$$

به‌دست می آید، که $\frac{۱}{y_{n+۱}}$ را به‌عنوان تابعی خطی از $\frac{۱}{y_n}$ با ضریب زاویه‌ی $\alpha = e^{-kd}$ و عرض از مبدأ $\beta = \frac{(۱-e^{-kd})}{L}$ معرفی می‌سازد. حال با تقریب زدن α و β به‌کمک روش کمترین مربعات، می‌توان به تقریب‌های L و k دست یافت.

مثال ۴–۴–۴

اگر نمودار حاصل از به‌کاربردن داده‌ها یک مدل متناوب را پیشنهاد کند و اگر دوره‌ی تناوب L معلوم باشد، در آن‌صورت با محاسبه‌ی $\Omega = \pi/L$ و استفاده از روش کمترین مربعات

می‌توان مدل $Y = a + b\sin\Omega t + c\cos\Omega t$ را برای داده‌ها برازش نمود. در صورتی که بخواهیم مدل متناوبی را برازش کنیم که دقیقاً تمام نقاط موجود در جدول داده‌ها را برازش نماید، می‌توانیم تحت شرایطی از سری فوریه گسسته به‌صورتی که ذیلاً توضیح داده می‌شود استفاده نماییم.

فرض کنید مقادیر t عبارتند از $\circ$ ، h ، $\text{۲}h$ ، $\cdots$ ، Nh ، که در آن N عددی فرد است و فرض کنید مقادیر y در این t ها به ترتیب عبارتند از $y_\circ$ ، $y_\text{۱}$ ، $\cdots$ ، y_N با $y_{N+\text{۱}} = y_\circ$. پس در اینجا

$$(N+\text{۱})h = \text{دوره تناوب} = \text{۲}L$$

و مدل مورد نیاز عبارت است از

$$y(t) = \frac{a_\circ}{\text{۲}} + \sum_{k=\text{۱}}^{M}\left[a_k\cos\left(\frac{\pi kt}{L}\right) + b_k\sin\left(\frac{\pi kt}{L}\right)\right] + \frac{a_{M+\text{۱}}}{\text{۲}}\cos\left(\frac{(M+\text{۱})\pi t}{L}\right)$$

که در آن $N = \text{۲}M+\text{۱}$ و ضرائب a_k ها و b_k ها می‌توانند از روابط زیر به‌دست آیند:

$$a_k = \frac{h}{L}\sum_{i=\circ}^{\text{۲}M+\text{۱}} y_i\cos\left(\frac{\pi kt_i}{L}\right), \qquad k = \circ, \text{۱}, \text{۲}, \cdots, M+\text{۱}$$

و

$$b_k = \frac{h}{L}\sum_{i=\circ}^{\text{۲}M+\text{۱}} y_i\sin\left(\frac{\pi kt_i}{L}\right), \qquad k = \circ, \text{۱}, \text{۲}, \cdots, M$$

اگر در مدل فوق تنها جملات با بزرگترین ضرایب را مد نظر قرار دهیم، آنگاه مدل ساده‌تری را نتیجه‌گیری می‌کنیم که از تمامی نقاط موجود در جدول داده‌ها عبور نمی‌کند.

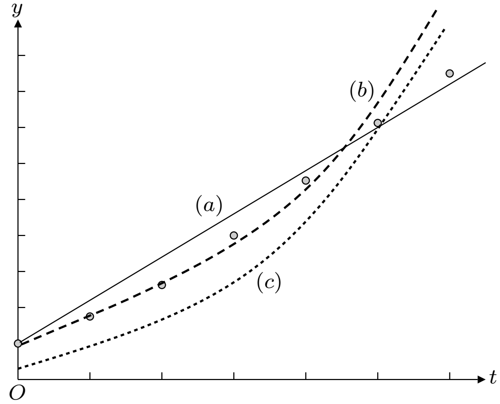
مثال ۴-۴-۵

جدول ۴-۱ زیر تعداد y از باکتریها را در یک بشقاب آزمایشگاهی در زمانهای مختلف t نشان می‌دهد.

جدول ۴-۱ تعداد باکتریها در یک بشقاب آزمایشگاهی در زمانهای مختلف.

t (ساعت)	۱	۲	۳	۴	۵	٦	۷
y	۸۰	۱۴۰	۲۱۰	۳۲۰	۴۵۰	۵۷۰	٦۷۹

برای این داده‌ها مدلهایی به فرم (الف) $Y = at$، (ب) $Y = at^\text{۲}$، و (ج) $Y = y_\circ e^{at}$ برازش کنید. به‌نظر شما کدام مدل بهترین برازش را معرفی می‌کند؟



شکل ۴–۶ برازش مربوط به مثال ۴–۴–۵.

حل (الف) سریع‌ترین روش برای تشخیص برازش توسط $Y = at$ این است که مقادیر $\frac{y}{t}$ را محاسبه کرده و تحقیق کنیم که آیا تقریباً ثابت هستند. با انجام این کار خواهیم دید که برای $\frac{y}{t}$ مقادیر ۸۰ ، ۷۰ ، ۷۰ ، ۸۰ ، ۹۰ ، ۹۵ ، ۹۷ به‌دست می‌آید که ما را برای قبول این برازش تشویق می‌کند. به این ترتیب با انتخاب میانگین این اعداد به‌عنوان a، یعنی $a \approx ۸۳$ ، می‌توان مدل $Y = ۸۳\ t$ را به‌عنوان یک برازش پیشنهاد نمود.

در ضمن با به‌کاربردن روش کمترین مربعات بهترین تقریب برای a عدد $\frac{\sum yt}{\sum t^۲}$ است، که با به‌کاربردن داده‌ها مقدار $a \approx ۹۰/۶۶$ به‌دست می‌آید.

(ب) مانند قسمت (الف) برای تشخیص برازش توسط $Y = at^۲$ ، مقادیر $\frac{y}{t^۲}$ را محاسبه کرده و تحقیق کنیم که آیا تقریباً ثابت هستند. با انجام این کار خواهیم دید که برای $\frac{y}{t^۲}$ مقادیر ۸۰ ، ۳۵ ، ۲۳/۳ ، ۲۰ ، ۱۸ ، ۱۵/۸۳ ، ۱۳/۸۶ به‌دست می‌آیند که ثابت نبوده و درنتیجه تشویق کننده نیستند. روش کمترین مربعات بهترین تقریب برای a را عدد $\frac{\sum yt^۲}{\sum t^۴}$ ، یعنی ۱۵/۵۴ ارائه می‌دهد.

(ج) برای آنکه این مدل یک برازش برای داده‌ها باشد باید نمودار $\ln Y$ بر حسب متغیر t یک خط راست باشد. کاربرد روش کمترین مربعات برای $\ln Y = \ln y_۰ + at$ تقریب $a \approx ۰/۳۵۷$ را تعیین می‌کند. درنتیجه با $\ln y_۰ \approx ۴/۲۰$ مدل $Y = ۶۶/۶۹\ e^{(۰/۳۷۵)t}$ حاصل می‌شود.

مقدار S ، یعنی مجموع مربعات خطاها، برای هر یک از حالات فوق به ترتیب ۱۰۱۳۹، ۳۰۹۱۹ ، و ۲۲۵۹۸ می‌باشد. نتیجه آنکه مدل پیشنهاد شده در قسمت (الف) بهترین برازش می‌باشد.

شکل ۴–۶ هر سه مدل فوق را در مقایسه با داده‌ها نشان می‌دهد. نتیجه می‌گیریم که

مدل ساده‌ی خطی $Y = at$ در دامنه‌ی داده شده برای داده‌ها بهترین برازش است.

مثال ۴-۴-۶

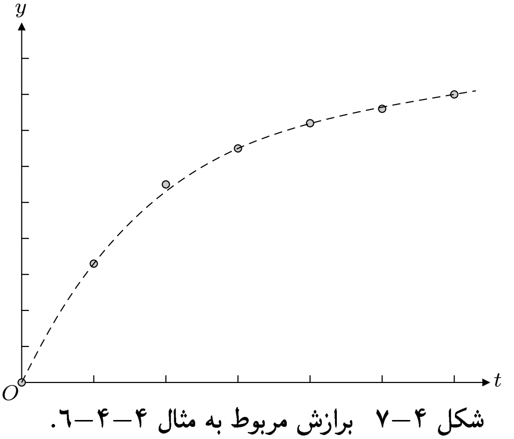
جدول ۴—۲ مقدار y (بر حسب میلیگرم بر لیتر) از یک ماده‌ی شیمیایی را که در زمانهای مختلف t در یک حلال حل می‌شود، نشان می‌دهد. برای این داده‌ها یک مدل مناسب برازش کنید.

حل شکل ۴—۷ نمودار y را به‌عنوان تابعی از t نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که میزان حل شدن ماده در ابتدا به سرعت افزایش یافته و سپس به سطح ثابتی می‌رسد. بنابراین مدل نمایی با مرتبه‌ی خطی برای برازش پیشنهاد می‌شود. چون $y_\circ = \circ$ ، مدل پیشنهادی به صورت $Y = L(۱ - e^{-kt})$ خواهد بود. در اینجا هر دو روش شرح داده شده در فوق را برای پیدا کردن تقریبی برای پارامترهای k و L به‌کارمی‌بریم.

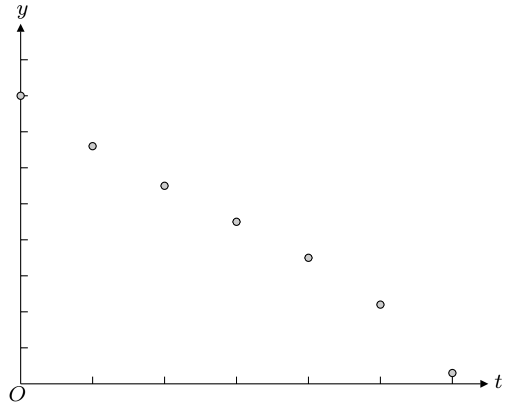
روش (الف). شکل ۷.۴ نشان می‌دهد که یک حدس اولیه برای L تقریباً ۸٫۳ است. بر طبق این روش نمودار $\ln\left(\frac{L-y}{L}\right)$ به عنوان تابعی از t خطی است. به‌کمک جدول داده شده و رسم $\ln\left(۱ - \frac{y}{۸٫۳}\right)$ به‌عنوان تابعی از t ، مشاهده می‌کنیم که نمودار رسم شده در شکل ۴—۸ تقریباً یک خط راست است.

جدول ۴—۲ مقدار (بر حسب میلی‌گرم بر لیتر) از یک ماده‌ی شیمیایی در زمانهای مختلف.

۳۰	۲۵	۲۰	۱۵	۱۰	۵	۰	t (ثانیه)
۸٫۱	۷٫۸	۷٫۴	۶٫۶	۵٫۴	۳٫۳	۰	y (میلی‌گرم بر لیتر)



شکل ۴—۷ برازش مربوط به مثال ۴—۴—۶.



شکل ۴—۸ ادامه‌ی برازش مربوط به مثال ۴—۴—۶.

جدول ۴—۳ مقادیر برازش شده توسط روش (الف).

(ثانیه) t	۰	۵	۱۰	۱۵	۲۰	۲۵	۳۰
(میلیگرم بر لیتر) Y	۰	۳/۷	۵/۸	۶/۹	۷/۶	۷/۹	۸/۱

روش کمترین مربعات ضریب زاویه‌ی این خط را $k \approx ۰/۱۲$ تعیین می‌کند و مدل

$$Y = ۸/۳(۱ - e^{-۰/۱۲\, t})$$

را برای این داده‌ها برازش می‌کند. مقادیر برازش شده توسط این مدل که تا یک رقم اعشار گرد شده در جدول ۴—۳ آورده شده است.

روش (ب). چون داده‌های مسأله در فواصل زمانی مساوی مشخص شده‌است می‌توان از روش (ب) برای تخمین پارامترهای مدل نمایی با مرتبه‌ی خطی استفاده نمود و از روی جدول ابتدا پارامترهای خط $y_{n+۱} = e^{-kd}y_n + L(۱ - e^{-kd})$ را پیدا کرد. به‌کمک روش کمترین مربعات معادلات $e^{-kd} = ۰/۵۹۸$ و $L(۱ - e^{-kd}) = ۳/۴۱$ به‌دست می‌آیند که از حل آنها پارامترهای $L = ۸/۵$ و $k = ۰/۱۰۳$ برای مدل نمایی با مرتبه‌ی خطی محاسبه می‌شوند. بنابراین مدل برازش شده به‌صورت

$$Y = ۸/۵(۱ - e^{-۰/۱۰۳\, t})$$

خواهد بود و مقادیر برازش شده توسط این مدل که تا یک رقم اعشار گرد شده در جدول ۴—۴ ارائه شده است.

جدول ۴—۴ مقادیر برازش شده توسط روش (ب).

(ثانیه) t	۰	۵	۱۰	۱۵	۲۰	۲۵	۳۰
(میلیگرم بر لیتر) Y	۰	۳/۴	۵/۵	۶/۷	۷/۴	۷/۹	۸/۱

مشاهده کنید که تا چه اندازه مقادیر برازش شده توسط روش (ب) نزدیک به داده‌های اولیه هستند.

مثال ۴-۴-۷

جدول ۴—۵ تعداد تقریبی y از ماهی‌های یک دریاچه را در سالهای متوالی نشان می‌دهد.

جدول ۴—۵ تعداد تقریبی از ماهی‌های یک دریاچه در سالهای متوالی.

(سال)	۰	۱	۲	۳	۴	۵	٦
y $(\times ۱۰^{۳})$	۵۰۰	۷۰۰	۸۲۰	۸۹۰	۹۳۰	۹٦۰	۹۸۰

(الف) نشان دهید که y می‌تواند به‌طور قابل قبول توسط مدل لجستیک برازش شود و سپس پارامترهای L و k از این مدل را تقریب بزنید.

(ب) مقادیر پیش‌بینی شده توسط مدل را با داده‌های واقعی مقایسه کنید.

حل (الف) از جدول داده‌ها می‌توان حدس زد که بعد از سال چهارم تعداد ماهیها به سمت ۱۰۰۰×۱۰^{۳} میل می‌کند. بنابراین، حدس اولیه‌ی ما برای L عدد ۱۰۰۰ است. با رسم $\ln\left(\frac{۱۰۰۰}{y} - ۱\right)$ به‌عنوان تابعی از t مشاهده می‌شود که یک خط راست برازش مناسبی است. با روش کمترین مربعات شیب این خط برابر با $-۰/٦۲$ تقریب زده می‌شود و درنتیجه مدل اولیه‌ای به‌صورت

$$Y = \frac{۱۰۰۰}{۱ + e^{(-۰/٦۲)t}}$$

برای این داده‌ها پیشنهاد می‌شود.

چون داده‌های این جدول در فواصل زمانی مساوی $d = ۱$ ارائه شده‌است، می‌توان روش دوم تقریب پارامترهای مدل لجستیک را نیز به‌کاربرد و به‌کمک روش کمترین مربعات ابتدا پارامترهای $\alpha = e^{-kd}$ و $\beta = \frac{(۱-e^{-kd})}{L}$ در مدل

$$\frac{۱}{y_{n+۱}} = \alpha\left(\frac{۱}{y_n}\right) + \beta$$

که در آن $y_n = y(nd)$ ، را تقریب زد. محاسبات مربوط نشان می‌دهند که $k \approx ۰/۸۷$ و $L \approx ۹٦۷$. توجه کنید که آخرین مقدار y در این جدول دارای مقداری بیش از این مقدار L است، که می‌تواند خطای موجود در داده به حساب آید. بنابراین مدل پیشنهاد شده در این روش به‌صورت

$$Y = \frac{۹٦۷}{۱ + (۰/۹۳۴)e^{(-۰/۸۷)t}}$$

ارائه می‌شود.

(ب). اولین مدل پیشنهادی فوق مقادیر آمده در جدول ۴—۶ را پیش‌بینی می‌کند که مجموع مربعات خطا در آن ۵۲۴۶ است.

جدول ۴—۶ پیش‌بینی مقادیر توسط اولین روش.

t (سال)	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶
y (۱۰$^{۳}\times$)	۵۰۰	٦۵۰	۷۷۲	۸٦۵	۹۱۲	۹۵٦	۹۷٦

دومین مدل پیشنهادی فوق مقادیر آمده در جدول ۴—۷ را پیش‌بینی می‌کند که مجموع مربعات خطا در آن ۸۲۰ است.

جدول ۴—۷ پیش‌بینی مقادیر توسط دومین روش.

t (سال)	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶
$y\ (10^3\times)$	۵۰۰	٦۹۵	۸۳۱	۹۰۵	۹۴۰	۹۵۵	۹٦۲

درنتیجه دومین مدل پیشنهادی برازش بهتری را ارائه می‌دهد.

۴—۵ دقت و خطا در برازش مدل

غالباً داده‌ها و یافته‌هایی که در خصوص یک پدیده به‌کاربرده می‌شوند از مشاهدات و اندازه‌گیری‌هایی به‌دست آمده‌اند که توسط ابزارهای غیردقیق نتیجه شده‌اند. بنابراین، در هر مدل‌سازی ریاضی مواجه شدن با خطا اجتناب ناپذیر است. مسلماً علاوه بر خطاهای موجود در داده‌ها، باید خطاهای دیگری که در طول مدل‌سازی وارد محاسیات می‌شود نیز مد نظر قرار گیرد. به‌طور کلی موارد زیر را می‌توان به‌عنوان منابع خطا برشمرد:

۱. خطاهای حاصل از فرضهای مدل،

۲. خطاهای حاصل از کاربرد روش‌های تخمین در به‌دست آوردن جواب عددی مسأله،

۳. خطاهای حاصل از انجام محاسبات بدون دقت مثل گرد کردن اعداد،

۴. خطاهای موجود در داده‌ها.

با توجه به انواع خطاهای فوق، واضح است که پیش‌بینی‌های حاصل از مدل ساخته شده نمی‌تواند به‌طور ۱۰۰٪ مورد قبول قرار گیرد. با وجوداین، یکی از وظایف ما تخمین ماکزیمم مقدار خطایی است که ممکن است در این پیش‌بینی‌ها موجود باشد. به این معنا که باید سعی کنیم تا در جریان مدل‌سازی جمله‌ای به فرم "این مدل مقدار X را با خطای Z٪ پیش‌بینی می‌کند." ارائه شود.

در مورد خطاهای فوق ذکر توضیحات زیر ضروری به‌نظر می‌رسد.

۱. تقریباً غیرممکن است که بتوان در خصوص تأثیر خطاهای حاصل از فرضهای مدل‌سازی اطمینان حاصل نمود. زیرا معمولاً مقدار دقیق جوابی را که می‌خواهیم تقریب بزنیم نمی‌دانیم. کاری که در این مورد می‌توان انجام داد این است که تحقیقات خود را چندین بار با تغییر فرضها انجام دهیم و تأثیر این تغییرات را روی جواب به‌دست آمده به دقت مورد توجه قرار دهیم.

۲. در محاسبات غالباً ناچار هستیم از روشهای تخمین (عددی) برای به‌دست آوردن جواب استفاده کنیم. زیرا پیدا کردن جواب تحلیلی یا غیرممکن است و یا اینکه برای دسترسی سریع به جواب ترجیح داده می‌شود از کامپیوترها کمک گرفته شود. این روش‌های عددی همراه با خطاهایی، مثل خطای برش، هستند که بخشی از آنها بستگی به داده‌ها و بخشی دیگر بستگی به روش عددی به‌کارگرفته شده دارند. بعضی اوقات نیز برای تسریع در محاسبات ناچار می‌شویم از عبارات کوتاه‌تر استفاده کنیم. به‌عنوان مثال، در زمانی‌که x بسیار کوچک است از x به‌جای $\sin x$ و از ۱ به‌جای $\cos x$ استفاده می‌شود. استفاده از این عبارات کوتاه نیز ورود خطای برش در محاسبات را به همراه خواهد داشت.

۳. در هر روش عددی که از کامپیوتر یا ماشین حساب استفاده می‌شود، ورود خطای گرد کردن به محاسبات اجتناب ناپذیر است و علت بروز این نوع خطاآن است که در این ماشین‌ها میزان حافظه برای ذخیره‌ی هر عدد محدود است. واضح است که انباشته شدن این نوع خطا به علت طولانی شدن محاسبات می‌تواند در ارائه‌ی جوابهای با خطای زیاد کاملاً مؤثر باشد.

۴. در خصوص خطاهای موجود در داده‌ها انتظار این است که بتوان ماکزیمم مقدار خطا را به‌طور مطلوب به‌دست آورد.

باید توجه داشت که نوع ارتباط این خطاها کاملاً پیچیده است، در عین حال از یک مدل ساز ریاضی انتظار می‌رود که منابع خطاهای مؤثر را تشخیص داده و ماکزیمم خطای ممکن در پیش‌بینی نهایی را تخمین بزند.

مثال ۴-۵-۱

همان‌طور که می‌دانیم درجه‌ی حرارت بر حسب سانتی‌گراد و فارنهایت توسط فرمول

$$F = \frac{۹}{۵} \times C + ۳۲$$

قابل تبدیل به یکدیگر هستند. در مواردی نیز از فرمول ساده‌تر

$$F = ۲ \times C + ۳۰$$

کمک گرفته می‌شود. خطای مطلق حاصل از کاربرد فرمول دوم برابر است با

$$E = \left(\frac{۹}{۵} \times C + ۳۲\right) - (۲ \times C + ۳۰) = -۰/۲C + ۲$$

در دامنه‌ی $-۵° < C < ۲۵°$ این خطا بین -۳ تا ۳ تغییر می‌کند. مقدار در صد خطا در $C = -۵°$ برابر است با $\frac{۳}{۲۳} \times ۱۰۰ \approx ۱۳\%$ و در $C = ۲۵°$ برابر است با $\frac{۳}{۷۷} \times ۱۰۰ \approx ۳/۹\%$. در اینجا باید به این نکته توجه داشت که در بعضی موارد ممکن است داشتن یک مدل دقیق هیچ برتری به داشتن مدلی ساده و سریع، که جوابهایی به اندازه‌ی کافی نزدیک به مقدار واقعی می‌دهد، نداشته باشد.

۴–۶ آزمودن مدلها

اعتبار یک مدل می‌تواند بر حسب اینکه تا چه اندازه پیش‌بینی‌های آن با آنچه که در دنیای واقعی اتفاق می‌افتد نزدیک باشد سنجیده شود. در بخش‌های قبل راهبردهایی برای برازش مدل با داده‌های موجود ارائه شده است. اما باید در نظر داشت که آزمایش واقعی مدل زمانی انجام می‌شود که مدل بتواند اطلاعاتی را پیش‌بینی کند که در حال حاضر در اختیار نیستند.

منظور از آزمایش مدل این نیست که صحت آن تحقیق شود. همه می‌دانیم که مدلها براساس فرضهای ساده شده ساخته می‌شوند و درنتیجه از همان ابتدا می‌توان روی صحت آنها تردید داشت. آنچه که در آزمایش یک مدل مد نظر است این است که آیا پیش‌بینی‌های مدل به اندازه‌ی کافی دقیق و مفید است. به‌ویژه، آیا مدل ساخته شده به اندازه‌ی کافی انتظارها را برای آنچه که طراحی شده است بر آورده می‌سازد؟ همواره به‌خاطر داشته باشیم که پیش‌بینی که مدل ارائه می‌دهد باید به اندازه‌ای مفید باشد که بتوان آن‌را به‌طور مستقیم در دنیای واقعی به‌کاربرد. به‌علاوه، انتظار این است که یک مدل ریاضی بتواند بیشتر از یک یا چند پیش‌بینی قابل قبول ارائه دهد.

اگر اعتبار مدل ساخته شده مورد تردید قرار گیرد و یا اینکه نتایج آزمایش مدل ناامید کننده باشد، وظیفه‌ی مدل ساز این است که تصمیم بگیرد که آیا مدل را اصلاح و ترمیم کند یا اینکه همه‌ی کارهای انجام شده را کنار گذاشته و مدل‌سازی را از ابتدا شروع کند. در چنین شرایطی امید این است که تصمیم به اصلاح و ترمیم مدل گرفته شود و درنتیجه این سؤال پیش می آید که

" چگونه مدل را ترمیم و اصلاح کنیم؟ "

برای پاسخ به این سؤال چند پیشنهاد به‌صورت زیر ارائه می‌شود:

به لیست عوامل شرکت کننده در مدل نگاه کنید. آیا همه‌ی عوامل مهم در نظر گرفته شده است؟ آیا بعضی از عوامل به‌طور یک‌جا مورد بحث قرار نگرفته‌اند در حالی‌که باید به‌طور جداگانه و مستقل از هم مورد مطالعه قرار گیرند؟ به لیست فرضها نگاه کنید. آیا باید به این فرضها انعطاف بیشتری داد یا اینکه باید با کلیت بیشتری مورد توجه قرار گیرند. به‌عنوان مثال، در کجا فرض کرده‌اید که ارتباط خطی است در حالی‌که فرض غیرخطی بودن با واقعیت انطباق بیشتری دارد؟

اگر در مرحله‌ی آزمایش مدل پی بردید که پیش‌بینی‌های مدل به اندازه‌ی کافی دارای دقت است اما هنوز دارای نقص است، باید سعی کنید که نواقص را بر طرف کنید. اگر تعداد داده‌هایی که در اختیاراست کافی به‌نظر می‌رسد، انحراف معیار خطاهای پیش‌بینی شده توسط مدل را محاسبه کرده و یک فاصله‌ی اطمینان تقریبی را برای پیش‌بینی‌های بعد تعیین کنید. همچنین در ساختن مدل اجازه دهید تا حساسیت پیش‌بینی‌های آن با تغییر پارامترها و فرضها سنجیده شوند. به این معنا که بتوان میزان تغییرات در پیش‌بینی‌های مدل را با تغییر اندک پارامترها و فرضها مورد سنجش قرار داد.

مثال ۴-۶-۱

برای تخمین عمق یک چاه سنگی را به‌طور عمودی در درون آن رها کرده و زمان بین لحظه‌ی شروع پرتاب سنگ و لحظه‌ی شنیدن صدای سنگ در برخورد به ته چاه را اندازه‌گیری می‌کنیم. مدلی که ارتفاع چاه و زمان اندازه‌گیری شده را به یکدیگر مربوط می‌سازد توسط معادله‌ی

$$h = \frac{g}{k}\left(t + \frac{۱}{k}\exp(-kt)\right) - \frac{g}{k^۲}$$

پیشنهاد می‌شود. در اینجا فرض بر این است که نیروی مقاومت هوا که به سنگ وارد می‌شود نسبت مستقیم با سرعت سنگ دارد و k عدد ثابت مربوط به این نسبت است. اگر در مدل فوق از بسط تایلور $\exp(-x)$ استفاده کنیم خواهیم داشت:

$$\exp(-kt) = ۱ - kt + \frac{k^۲t^۲}{۲} + O(t^۳)$$

و درنتیجه

$$h \approx \frac{g}{k}\left[t + \frac{۱}{k}\left(۱ - kt + \frac{k^۲t^۲}{۲}\right)\right] - \frac{g}{k^۲}$$

و یا

$$h \approx \frac{g}{k}\left[t+\frac{۱}{k}-t+\frac{kt^{۲}}{۲}\right]-\frac{g}{k^{۲}}=\frac{۱}{۲}gt^{۲}$$

که با مدل $h=\frac{۱}{۲}gt^{۲}$ ، در حالتی که از مقاومت هوا صرف‌نظر می‌شود انطباق دارد.

فرض کنید $k=۰/۰۵s^{-۱}$ و زمان اندازه گیری شده در فوق $t=۴$ ثانیه باشد. دراین‌صورت

$$h=\frac{۹/۸۱}{۰/۰۵}\left(۴+\frac{۱}{۰/۰۵}\exp(-۰/۲)\right)-\frac{۹/۸۱}{(۰/۰۵)^{۲}}\approx ۷۳/۵\ m$$

اگر در محاسبات فوق مقدار k را با ۱۰٪ کاهش، یعنی با $k=۰/۰۴۵$ عوض کنیم، مقدار $h\approx ۷۳/۹۸$ متر به‌دست می‌آید که نشان دهنده‌ی یک تغییر زیاد بر اثر یک تغییر اندک در k نیست.

حال اگر از مقاومت هوا صرف‌نظر کنیم، ارتفاع چاه به‌کمک مدل ساده‌ی $h=\frac{۱}{۲}gt^{۲}$ محاسبه شده و تقریباً برابر است با

$$h=\frac{۱}{۲}\times ۹/۸۱\times(۴)^{۲}\approx\ ۷۸/۴۸\ m$$

این مقدار به‌دست آمده برای h دارای خطای مطلق ۵ متر و خطای نسبی ۷٪ در محاسبات است. پس می‌توان نتیجه گرفت که در نظر نگرفتن مقاومت هوا دارای تأثیر قابل ملاحظه‌ای است.

فرض دیگری که در این محاسبات لحاظ شده، این است که لحظه‌ی برخورد سنگ به ته چاه و لحظه‌ی شنیدن آن یکسان است. اما می‌دانیم که سرعت صوت متناهی و تقریباً برابر با ۳۳۰ متر بر ثانیه است. محاسبات دقیق نشان می‌دهد که مدت زمان بین این دو لحظه تقریباً برابر با ۰/۲۲۳ ثانیه است. حال اگر زمان $t=۴$ ثانیه را اصلاح کرده و در محاسبات از $t=۴-۰/۲۳۳=۳/۷۷۷$ ثانیه استفاده کنیم، ارتفاع چاه برابر با $h\approx ۶۵/۷۷$ متر به‌دست می‌آید که نشان می‌دهد اهمیت در نظر گرفتن سرعت صوت بیش از اهمیت در نظر گرفتن مقاومت هوا است.

۴ـ۷ تمرین‌ها

۱) جمعیت ایران (بر حسب میلیون) در بین سالهای ۱۲۰۰ تا ۱۳۶۵ به‌صورتی که در جدول ۴ـ۸ آمده است گزارش شده است:

جدول ۴—۸ جمعیت ایران (بر حسب میلیون) در بین سالهای ۱۲۰۰ تا ۱۳۶۵.

سال	۱۲۰۰	۱۲۱۵	۱۲۳۰	۱۲۴۵	۱۲۶۰	۱۲۷۵
جمعیت	۱۰/۹	۱۳/۲	۱۴/۹	۱۷/۹	۱۸/۰	۲۱/۱

سال	۱۲۹۰	۱۳۰۵	۱۳۲۰	۱۳۳۵	۱۳۵۰	۱۳۶۵
جمعیت	۲۴/۱	۲۶/۰	۲۹/۰	۳۲/۵	۳۶/۱	۴۰/۰

برای این داده‌ها مدل مناسبی را ارائه داده و در خصوص رفتار متغیرها اظهار نظر کنید.

۲) جدول ۴—۹ آمار مربوط به کشته و زخمی های مربوط به تصادفات در جاده‌های ایران را نشان می‌دهد:

جدول ۴—۹ آمار کشته و زخمی های مربوط به تصادفات در جاده‌های ایران.

سال	کشته	به‌دشت زخمی	کمی زخمی	مجموع
۱۳۷۸	۴۲۲۹	۴۹۲۴۵	۲۵۷۱۹۹	۳۱۰۶۷۳
۱۳۷۹	۴۵۶۸	۵۱۶۰۵	۲۵۵۰۹۶	۳۱۱۲۶۹
۱۳۸۰	۵۲۱۷	۶۰۴۴۱	۲۷۵۴۸۳	۳۴۱۱۴۱
۱۳۸۱	۵۳۷۳	۶۳۱۵۸	۲۷۳۰۶۱	۳۴۱۵۹۲
۱۳۸۲	۵۴۵۲	۶۳۴۹۱	۲۸۳۷۶۲	۳۵۲۷۰۵
۱۳۸۳	۵۷۲۵	۶۴۲۹۳	۲۹۲۰۵۵	۳۶۲۰۷۳
۱۳۸۴	۵۹۸۲	۶۸۷۵۲	۳۰۷۳۱۷	۳۸۲۰۵۱

رفتار این داده‌ها را به‌طور مناسبی نمایش داده و درخصوص آنها نظرات خود را ارائه دهید.

۳) وضعیت شغلی فارغ التحصیلان دوره‌ی آخر دبیرستان برای شهرهای مختلف ایران، به‌صورت میانگین و بر حسب در صد در سالهای اخیر، در جدول ۴—۱۰ ارائه شده است.

جدول ۴—۱۰ وضعیت فارغ التحصیلان دوره‌ی آخر دبیرستان برای شهرهای مختلف ایران.

شهر	دانشجوی تمام وقت دانشگاه	دانشجوی تمام وقت فنی حرفه‌ای	دستیار یا شاگرد	کارگر یا بیکار
اصفهان	۵۶	۳۶	۴	۴
مشهد	۲۱	۱۹	۵۱	۹
شیراز	۲۶	۲۹	۱۹	۲۶
تهران	۵۶	۱۰	۵	۲۹
تبریز	۳۲	۱۰	۴۴	۱۰
کرمان	۲۱	۵۱	۲۴	۴
اهواز	۲۴	۱۳	۳۱	۳۲

با هر روشی که مناسب می‌دانید در خصوص این داده‌ها اظهار نظر نمایید.

۴) افزایش مداوم تعداد اتومبیلهای شخصی و تجاری که قصد استفاده از جاده‌های محدود ایران دارند نشان دهنده‌ی یک مشکل عمده است که تقریباً لاینحل به‌نظر می‌رسد. اعتراض و دادو فریاد برای احداث راههای بیشتر و بهتر، تراکم ترافیک را برطرف نمی‌سازد. زیرا تعداد اتومبیلها دائماً در حال افزایش است. نمودار تعداد اتومبیلها به چه صورت است و تغییرات آن نسبت به زمان چگونه است؟ اطلاعاتی که در جدول ۴—۱۱ داده شده است تعداد اتومبیلها را بر حسب هزار از سال ۱۳۳۰ نشان می‌دهد. با توجه به مشکل فوق در خصوص این اطلاعات اظهار نظر نمایید.

جدول ۴—۱۱ تعداد اتومبیلها بر حسب هزار از سال ۱۳۱۰.

	۱۳۱۰	۱۳۱۵	۱۳۲۰	۱۳۲۵	۱۳۳۰	۱۳۳۵
اتوموبیلهای شخصی	۱۶	۵۳	۱۳۹	۱۸۷	۵۸۰	۱۰۵۶
اتوموبیلهای تجاری	۱۶	۵۴	۱۲۹	۱۷۶	۳۲۳	۴۴۹

	۱۳۴۰	۱۳۴۵	۱۳۵۰	۱۳۵۵	۱۳۶۰	۱۳۶۵
اتوموبیلهای شخصی	۱۴۷۷	۱۴۲۳	۱۴۸۷	۲۲۵۸	۳۵۲۶	۵۵۲۶
اتوموبیلهای تجاری	۵۲۰	۵۲۵	۵۷۲	۱۰۳۲	۱۲۱۱	۱۴۹۱

	۱۳۷۰	۱۳۷۵	۱۳۸۰	۱۳۸۵	۱۳۹۰
اتوموبیلهای شخصی	۸۹۱۷	۱۱۵۱۵	۱۳۷۴۷	۱۴۷۷۲	۱۷۵۷۶
اتوموبیلهای تجاری	۱۶۹۹	۱۶۹۴	۱۸۸۷	۲۱۴۶	۲۳۸۷

۵) با گسترش مراکز ورزشی در سرتاسر ایران، فرصت شرکت تعداد بیشتری از مردم در بازیها و ورزشهای مختلف برای رسیدن به هدف سلامت بیشتر، رقابت‌های سالم ورزشی و تعلیم ورزشکاران در رشته‌های مختلف پیش آمده است. اطلاعاتی که در جدول ۴—۱۲ ارائه شده است مربوط به بعضی از فعالیت‌های ورزشی طی سالهای ۱۳۸۳ و ۱۳۸۴ است. این جدول، که بر حسب درصد است، براساس گفته‌های افرادی است که ادعا می‌کرده‌اند در هر چهار هفته حداقل یک بار در این فعالیت‌ها شرکت داشته‌اند. براساس این داده‌ها، بعضی از شاخص‌های برجسته‌ی این وضعیت را مشخص کنید.

جدول ۴–۱۲ آمار بعضی از فعالیت‌های ورزشی طی سالهای ۱۳۸۳ و ۱۳۸۴.

فعالیت ورزشی	سال	سن						
		۱۶–۱۹	۲۰–۲۴	۲۵–۲۹	۳۰–۴۴	۴۵–۵۹	۶۰–۶۹	بالای ۷۰
پیاده روی	۱۳۸۳	۴۲	۴۰	۴۱	۴۳	۴۰	۳۷	۲۰
	۱۳۸۴	۴۵	۴۲	۴۵	۴۳	۴۴	۴۲	۲۵
شنا	۱۳۸۳	۲۰	۱۸	۱۸	۱۶	۶	۴	۱
	۱۳۸۴	۲۲	۱۹	۱۹	۱۷	۹	۵	۱
یوگا	۱۳۸۳	۱۴	۱۳	۱۴	۱۰	۷	۵	۳
	۱۳۸۴	۱۹	۲۰	۱۷	۱۴	۹	۶	۴
والیبال	۱۳۸۳	۲۱	۱۰	۱۰	۱۱	۷	۵	۲
	۱۳۸۴	۲۴	۱۱	۱۱	۱۱	۸	۶	۳
تمرین وزنه	۱۳۸۳	۱۶	۱۲	۹	۵	۱	۰	۰
	۱۳۸۴	۱۶	۱۲	۹	۵	۲	۰	۰
بدمینتون	۱۳۸۳	۱۲	۶	۴	۵	۲	۰	۰
	۱۳۸۴	۱۲	۶	۴	۴	۲	۰	۰
فوتبال	۱۳۸۳	۲۱	۱۳	۹	۴	۱	۰	۰
	۱۳۸۴	۲۰	۱۳	۱۰	۴	۱	۰	۰
بدون فعالیت	۱۳۸۳	۱۴	۲۳	۲۶	۲۹	۴۴	۵۳	۷۴
	۱۳۸۴	۱۳	۱۹	۲۲	۲۷	۳۷	۴۶	۶۹

۶) جدول ۴–۱۳ تعداد تقریبی Y از پرندگان درون یک جزیره را در ۶ سال گذشته نشان می دهد.

۴–۱۳ تعداد تقریبی پرندگان درون یک جزیره در ۶ سال گذشته.

t (سال)	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶
Y	۳۵۰	۴۸۰	۶۷۰	۹۴۰	۱۳۰۰	۱۸۲۰	۲۵۴۰

برای این داده‌ها مدلی به‌صورت $Y = Y_\circ e^{at}$ برازش کنید. آیا به‌نظر شما این مدل بهترین برازش را معرفی می‌کند؟ چرا؟

۷) یک آزمایش‌گر به هنگام آزمایش‌های خود دریافته‌است که وقتی از کسی می‌خواهد تا مجموعه‌ای از موضوعها را حفظ کند، آن فرد پس از مدت x ساعت در حدود $y\%$ از آن موضوعها را به‌یاد می‌آورد. نتیجه‌ی آزمایشهای این آزمایش‌گر در جدول ۴–۱۴ آورده شده است.

۴–۱۴ نتیجه‌ی آزمایشهای مربوط به تمرین ۷.

x (ساعت)	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
y	۸۹	۷۵	۶۷	۶۱	۵۷	۵۳	۵۰	۴۷	۴۵	۴۳

ساده‌ترین مدلی که ارتباط x با y را مشخص می‌سازد پیشنهاد کنید.

۸) میزان فروش یک مجله‌ی هفتگی در چند هفته‌ی اول که از شروع انتشارآن می‌گذرد در جدول ۴—۱۵ گزارش شده است.

۴—۱۵ میزان فروش یک مجله‌ی هفتگی در چند هفته‌ی اول.

t (هفته)	۰	۱	۲	۳	۴	۵	٦
y $(\times ۱۰^{۳})$	۱۸٫۰	۲۰٫۳	۲۱٫۹	۲۲٫۹	۲۳٫٦	۲۴٫۱	۲۴٫۲

به دو روش مختلف مدلی به فرم $y = L + (y_\circ - L)\, e^{-kt}$ را برای آن برازش کنید و به‌کمک مدل به‌دست آمده میزان فروش در هفته‌ی هشتم را پیش‌بینی کنید.

۹) اطلاعات در طول مدت یک سال مربوط به قطر خورشید (بر حسب دقایق کمانی)، که از روی زمین دیده می‌شود، در جدول ۴—۱٦ آورده شده است. علت این تغییرات بیضی‌گونه بودن مسیر حرکت زمین به دور خورشید است. یک مدل ریاضی مناسب را برای این داده‌ها برازش نموده و از روی آن قطر خورشید را در روز ۳۰ مهر پیش‌بینی کنید.

۴—۱٦ اطلاعات طول مدت یک سال مربوط به قطر خورشید(بر حسب دقایق کمانی).

تاریخ	۱۰ دی	۱۰ بهمن	۱۰ اسفند	۱۰ فروردین	۱۰ اردیبهشت	۱۰ خرداد
y	۳۲٫٦	۳۲٫۵	۳۲٫۳	۳۲٫۰	۳۱٫۸	۳۱٫٦

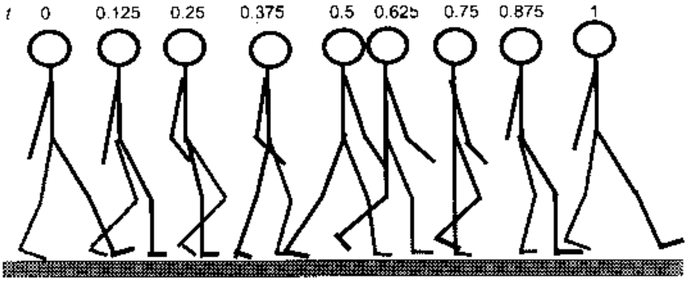
تاریخ	۱۰ تیر	۱۰ مرداد	۱۰ شهریور	۱۰ مهر	۱۰ آبان	۱۰ آذر
y	۳۱٫۵	۳۱٫٦	۳۱٫۷	۳۲٫۰	۳۲٫۳	۳۲٫۵

۱۰) برای شبیه سازی حرکت یک انسان توسط کامپیوتر طراحی مدلی را با در نظر گرفتن جدول ۴—۱۷ وشکل ۴—۹ شروع کرده‌ایم.

جدول ۴—۱۷ زاویه‌ی زانو در مدت زمانهای متفاوت در موقع راه رفتن یک انسان.

t (ثانیه)	۰	۰٫۱۲۵	۰٫۲۵	۰٫۳۷۵	۰٫۵
ϕ (درجه)	۱۸۰	۱٦۰	۱٦۵	۱۷۵	۱۷۰

t (ثانیه)	۰٫٦۲۵	۰٫۷۵	۰٫۸۷۵	۱
ϕ (درجه)	۱۳۰	۱۱۰	۱۵۰	۱۸۰



شکل ۴ــ۹ تصاویر فرضی از حرکت یک انسان.

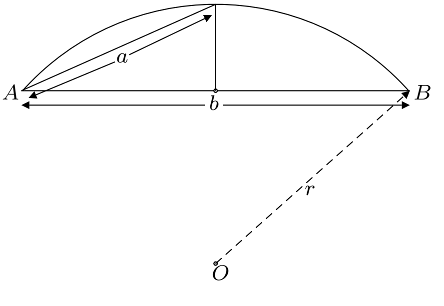
همان‌طور که مشاهده می‌کنید در طول راه رفتن زاویه‌ی زانو، یعنی ϕ ، تغییر می‌کند. این زاویه را در مدت زمانهای متفاوت توسط تصویر برداری اندازه گرفته و اطلاعات به‌دست آمده را در جدول ۴ــ۱۷ نشان داده‌ایم. یک مدل پیوسته‌ی متناوب را به‌کمک سری فوریه برش داده شده، برای شبیه سازی این حرکت، پیشنهاد کنید.

۱۱) می‌دانیم که برای x های به اندازه‌ی کافی بزرگ رابطه‌ی

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{۲} \approx \frac{e^x}{۲}$$

برقرار است. x باید تا چه اندازه بزرگ باشد تا مقدار این خطا کمتر از ۵% باشد.

۱۲) در شکل ۴ــ۱۰، نقطه‌ی C در وسط کمان AB از یک دایره قرار دارد و تخمین زده شده است که طول این کمان تقریباً برابر است با $\frac{۸b - a}{۳}$ ، که در آن a و b به ترتیب طولهای وترهای AC و AB هستند. این تقریب تا چه اندازه درست است؟ برای تحقیق این موضوع می‌توان نشان داد که اگر l طول واقعی این کمان باشد، آنگاه



شکل ۴ــ۱۰ محاسبه‌ی طول کمانی از یک دایره.

$$\frac{۸b-a}{۳}=\frac{۱}{۳}\left[۱۶r\sin\left(\frac{l}{۴r}\right)-۲r\sin\left(\frac{l}{۲r}\right)\right]$$

اکنون از بسط تایلور تابع سینوس حول صفر می‌توان کمک گرفت تا به مقدار تقریبی $l\approx\frac{۸b-a}{۳}$ دست یافت.

۱۳) عبارت زیر را در نظر بگیرید:

$$A(x)=\left(e^{\left(x^{۳}+\frac{۱}{x}\right)}+x^{۲}\right)\sqrt{x^{۲}+\frac{۱}{x}}$$

(الف) برای x های به اندازه‌ی کافی بزرگ عبارت $A(x)$ تقریباً معادل با چیست؟ x تا چه اندازه بزرگ باشد تا خطا در این مقدار معادل، کمتر از ۰/۰۰۱ باشد؟

(ب) برای x های به اندازه‌ی کافی کوچک عبارت $A(x)$ تقریباً معادل با چیست؟ x تا چه اندازه کوچک باشد تا خطا در این مقدار معادل، کمتر از ۰/۰۰۱ باشد؟

۱۴) برای تعیین وزن انسان دو مدل زیر که رابطه‌ی بین وزن و قد را مشخص می‌کند پیشنهاد شده است:

(الف) $W=۱۶/۷۸H^{۲/۳}$

(ب) $W=۱۲/۵H^{۳}$

کدامیک از این مدلها بهترین برازش را برای داده‌های موجود در جدول ۴—۱۸ پیشنهاد می‌کند؟

جدول ۴—۱۸ وزن و قد مربوط به چند انسان مختلف.

$H=$ قد (m)	۰/۷۵	۰/۸۶	۰/۹۵	۱/۰۸	۱/۱۲	۱/۲۶	۱/۳۵	۱/۵۱
$W=$ وزن (Kg)	۱۰/۰	۱۲/۰	۱۵/۰	۱۷/۰	۲۰/۰	۲۷/۰	۳۵/۰	۴۱/۰

$H=$ قد (m)	۱/۵۵	۱/۶۰	۱/۶۳	۱/۶۷	۱/۷۱	۱/۷۸	۱/۸۵
$W=$ وزن (Kg)	۴۸/۰	۵۰/۰	۵۱/۰	۵۴/۰	۵۹/۰	۶۶/۰	۷۵/۰

۱۵) افزایش مالیات روی فروش نوعی کالای مصرفی باعث افزایش درآمد مالیاتی برای دولت می‌شود. درعین حال این افزایش باعث کاهش تعداد فروش آن کالا شده و کاهش در آمد فروش را به همراه خواهد داشت . فرض کنید برای این فرآیند فرضهای

زیر را در نظر بگیریم:

(الف) در حال حاضر روزانه N واحد از این کالا بفروش می‌رسد و مالیات روی هر واحد برابر با T تومان است.

(ب) تعداد واحدهایی که ار این کالا مصرف می‌شود نسبت مستقیم با افزایش قیمت آن دارد.

اگر میزان افزایش مالیات $\frac{x}{100}$ تومان برای هر واحد از این کالا باشد، چه محدودیتی باید برای x در نظر گرفت تا این افزایش برای دولت دارای ارزش باشد؟ اگر فرض (ب) را با فرض

(ج) برای هر افزایش $\frac{1}{100}$ تومان روی مالیات هر واحد کالا، مقدار ثابت $\%r$ از مصرف این کالا کم می شود.

عوض کنیم، چه تغییری در جواب سؤال فوق به‌وجود خواهد آمد؟

از بین دو مدلی که با این فرضها به‌دست می آورید کدامیک با واقعیت انطباق بیشتری دارد؟

فصل ۵

مثالهای تکمیلی از مدل‌سازی‌های ریاضی

۵–۱ مقدمه

در این فصل چندین مدل انتخابی از مسایل مطرح در امور مختلف مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرد. هدف از این فصل توضیح و تکمیل کارهای پیشنهاد شده در فصول قبل برای ساختن مدلهای ریاضی است. بحث و بررسی این مثالها این فرصت را به ما می‌دهد تا اصول ارائه شده برای ساختن مدلهای ریاضی در عمل مورد استفاده قرار گیرند.

همان‌طور که خواهیم دید برای ساختن مدلهای مناسب مربوط به این مثالها، متدلوژی‌های شرح داده شده در فصول قبل و به‌ویژه متدلوژی فصل سوم مورد استفاده قرار خواهد گرفت تا بار دیگر تأکید شود که فرآیند مدل‌سازی ریاضی در کلیه‌ی مسائل یکی است هر چند که هر مسأله موضوعی متفاوت با مسایل قبلی را مطرح می‌سازد.

لازم به توضیح است که مسایل ارائه شده در این فصل به‌طور کامل مورد بحث قرار نخواهند گرفت. در واقع سؤالات زیادی در ارتباط با این مسائل بدون پاسخ گذاشته شده‌اند تا علاقه‌مندان بتوانند با مطالعه‌ی عمیق‌تر این مدلها ایده‌های خود را نیز در ساختن آنها مورد آزمایش قرارداده و در صورت امکان آنها را بازبینی و مرمت کرده و موجبات گسترش آنها را فراهم کنند.

۵–۲ استفاده از آسانسورها در اوقات پر رفت و آمد

موضوع) شما توسط مدیر چند آسمان‌خراش واقع در تهران به‌عنوان یک مشاور استخدام شده‌اید. مشتریان ساکن در این آسمان‌خراشها غالباً از سرویس ضعیفی که آسانسورها در اوقات پر رفت و آمد ارائه می‌دهند گله دارند. بیشتر این شکایت‌ها به انتظارهای طولانی در سالن اصلی و توقف‌های بیش از حد برای تخلیه‌ی تعداد کمی از مسافرین باز می‌گردد.

مدیر مربوطه، به‌دلیل آنکه متقاعد شده است که مشکل موجود می‌تواند با یک برنامه‌ریزی مجدد حل شود، تمایلی به راه‌اندازی آسانسورهای اضافی ندارد.

شناسایی مسأله) در نظر گرفتن چند روش برای مدل‌سازی مسأله‌ی آسانسورها از اهمیت بالایی برخوردار است. بسیاری از مردم نسبت به مدت زمانی که در صفهای انتظار تلف می کنند حساسیت نشان می‌دهند، درنتیجه این طرح پیشنهاد می‌شود که برنامه‌ی آسانسورها در جهت مینیمم کردن میانگین مدت انتظار یک مشتری تنظیم شوند. باوجوداین باید در تنظیم چنین برنامه‌ای بیشتر دقت کنیم: تقلیل دادن سرویس دهی به طبقاتی که مورد استفاده‌ی تعداد کمی از مشتریان است باعث کاهش جدی میانگین مدت انتظار می‌شود، اما هنوز ممکن است منجر به افزایش بیش از حد طولانی‌ترین مدت انتظار شود. در اینجا بحث مشابهی را نیز می‌توان در مورد مدت زمانی که در خود آسانسور تلف می‌شود مطرح کرد. اگر اکثریت افراد نیاز به رفتن به بالاترین طبقه را داشته باشند، در این‌صورت میانگین مدت زمانی که در آسانسور تلف می‌شود می‌تواند با رفتن آسانسور به طبقه‌ی آخر در اولین مرحله و سپس تخلیه‌ی بقیه مسافرین به هنگام بازگشت کاهش داده شود. با وجوداین، ممکن است که طولانی‌ترین مدت زمان سرویس دهی به‌طور قابل ملاحظه‌ای افزایش یابد. به‌علاوه تأثیر روانی این برنامه را روی فردی در نظر بگیرید که می‌خواهد فقط به طبقه‌ی دوم برود.

در مدل‌سازی چنین مسائلی، در نظر گرفتن حساسیت مردم روی نوع سرویسی که ارائه میشود حائز اهمیت است. یک برنامه‌ریزی موفق چگونه توسط مدیر و مشتریان ارزیابی می‌شود؟ این مهم می‌تواند بر اساس اندازه‌ی بلندترین صف و یا تعداد شکایات دریافت شده از مشتریان ناراضی باشد. نکته اینجاست که هر کدام از این ملاک‌ها منجر به یک مدل ریاضی مجزا همراه با جوابهای بهینه‌ی کاملاً متفاوتی می‌شود. در واقع تا زمانی که چنین احتمالاتی را در نظر نگیریم، حتی اگر در مدل‌سازی و حل این مسأله‌ی مشکل موفق شده باشیم، هنوز نتوانسته‌ایم وضعیتی را که مدیر ساختمان باآن روبرو است بهبود بخشیم.

هرچند که هر نوع مدل‌سازی مسأله تنها در وضعیت مشخص شده‌ای مناسب است، برای شناسایی مسأله تنها کل زمان سرویس دهی را مدنظر قرار داده و مسأله‌ی زیر را در نظر می‌گیریم.

میانگین کل زمان سرویس دهی آسانسور مربوط به یک موقعیت پر رفت و آمد را، که بر حسب اختلاف بین زمان ورود هر فرد به سالن اصلی و زمان رسیدن به طبقه‌ی مورد نظر آن فرد اندازه‌گیری می‌شود، مینیمم کنید.

این مدل‌سازی به‌طور هم‌زمان مدت تلف شده در سالن اصلی و مدت تلف شده در آسانسور را به حساب می‌آورد. در واقع در نظر گرفتن یک ترکیب وزین از این دو زمان می‌تواند با مطلوبیت بیشتری همراه باشد.

در کنار این مسأله‌ی خاص، مسایل دیگری از قبیل می‌نیمم کردن طولانی‌ترین مدت زمان سرویس دهی یا طولانی‌ترین صف، که قبلاً مطرح شدند، مارا نسبت به در نظر گرفتن ملاک‌های دیگر برای مدل‌سازی مسأله حساس می‌کند.

فرضها) عواملی که کل زمان سرویس دهی را تحت تأثیر خود قرار می‌دهند عبارتند از طرح ساختمان (محل دفاتر، انبارها، کارخانه‌ها و غیره) و توزیع زمانهای شروع آژانس‌های مختلف توسط تعداد مشتری ها، تعداد طبقات و جدول ساعات مسافرین. برای تعیین روابط داخلی بین متغیرها، باید اطلاعات بیشتری در مورد آنها جمع آوری کنیم. یکی از حالات ممکن این است که آژانس‌های مختلف زمانهای شروع به کار متفاوتی داشته باشند و بنابراین منشأ سرویس‌دهی ضعیف کنونی، آمدن زود هنگام تعدادی از مشتریان یا افراد متفرقه باشد. در این صورت می‌توانیم آسانسورهای ویژه‌ای برای طبقاتی که نیاز به حجم زیادی از سرویس دهی دارند اختصاص دهیم تا بتوانیم به آنها در طول دوره‌ی پر رفت و آمد حق تقدم دهیم. از حالات ممکن دیگرآن است که ورود هم‌زمان بسیاری از افراد به‌طور فزاینده‌ای به جدول ساعات مسافرین مربوط باشد، و درنتیجه نیاز به بررسی و تجدید نظر جدی داشته باشد. در صورتی که بتوان تابع توزیع ورود مشتری‌ها و مقصد آنها را با توابع توزیع کاملاً شناخته شده‌ای تقریب زد، آنگاه می‌توانیم با بکار بردن خواص آن توابع توزیع تأثیر طرح‌های مختلف برای راه‌اندازی آسانسورها روی میانگین کل زمان سرویس دهی را تقریب بزنیم. بررسی این مسأله از جنبه‌های دیگر ما را به این نتیجه خواهد رساند که انجام شبیه‌سازی ورود مشتری ها توسط کامپیوتر و بررسی نتایج آزمایش‌های مربوط به برنامه‌ریزی‌های مختلف توسط این شبیه‌سازی برای طرح یک مدل قابل قبول ضروری است. از میان طرح‌هایی که ارزش در نظر گرفته شدن در این شبیه‌سازی را دارند، می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

- تخصیص آسانسورها به طبقات زوج و فرد.
- تقسیم طبقات ساختمان به دو یا چند گروه مجاور و تخصیص آسانسورهای مختلف

به هر یک از این گروهها.

• رزرو آسانسورهای ویژه برای طبقاتی که در طول اوقات پر رفت و آمد، بیشترین حجم مشتریان را دارا هستند.

• بکار بردن آسانسورهای ویژه برای طبقاتی مشخص و استفاده از آسانسورهای موضعی در بین آن طبقات.

تأیید مدل) فرض کنید مدلی را برای حل این مسأله طرح کرده باشیم و بخواهیم آنرا تأیید یا رد کنیم. یک روش آن است که نمونه‌ای از مشتری‌هارا در طول دوره‌ی پر رفت و آمد در نظر گرفته و کل زمان سرویس‌دهی را اندازه‌گیری کنیم. دیگر اینکه قبل و بعد از به‌کاربردن مد ل به جمع آوری اطلاعاتی از قبیل: میانگین و طولانی‌ترین زمان تلف شده در سالن اصلی، میانگین و طولانی‌ترین زمان تلف شده در آسانسور، و اندازه‌ی طولانی‌ترین صف، بپردازیم. در عین حال، این امر می‌تواند اعتراض مشتریان را در بر داشته باشد و درنتیجه سبب نارضایتی مدیر ساختمان شود. بنابراین، به اندازه‌گیری‌های ساده‌تر مانند: طول صف یا طول زمان در راه بودن آسانسورها برحسب زمان توقف آنها، می‌پردازیم. اما باید در خصوص بکار بردن این نوع اندازه‌گیری احتیاط کنیم. به‌عنوان مثال، ممکن است به‌دلیل طویل بودن صف مدل را طوری طراحی کنیم که طولانی‌ترین صف مینیمم شود. هر چند که این طرح زمان انتظار در صفها را کاهش می‌دهد، باعث اتلاف وقت بیشتر در آسانسورها می‌شود که باز هم نارضایتی مشتریان را درپی خواهد داشت.

۵–۳ شستن بشقابها

موضوع) صحنه‌ای بعد از یک میهمانی بزرگ را تصور کنید. تعداد زیادی بشقاب چرب برای شستن در پیش روی شماست و تنها یک کاسه پر از آب گرم که با مایع ظرفشویی مخلوط شده است در اختیار شما قرار دارد. گرمای آب درون کاسه به اندازه‌ای است که می‌تواند چربی بشقابها را کاملاً پاک کند و در عین حال به اندازه‌ای است که شما می‌توانید دست خود را برای شستن ظرفها در آن فرو کنید. با وجوداین، در جریان شسته شدن ظرفها آب کاسه تدریجاً سرد می شود تا آنجا که دیگر نمی‌توان بشقابها را بخوبی تمیز نمود.

صورت مسأله) تعداد بشقابهایی را که می‌توان با مقدار آب توصیف شده شست چند عدد است؟ آیا با داشتن اطلاعات فیزیکی مربوط می‌توانید تعداد کل بشقابهای چرب را پیدا کنید؟

طراحی یک مدل ریاضی) در این مسأله بشقاب، آب و هوا شرکت دارند که می‌توان آنها

را به‌عنوان عوامل اصلی به شمار آورد.

عوامل مربوط به آب) مقدار، درجه حرارت اولیه، مساحت سطح آب، درجه حرارت نهایی، جریان آب، ظرفیت گرمایی، ضریب تبادل گرما.

عوامل مربوط به بشقابها) تعداد، اندازه، درجه حرارت اولیه، درجه حرارت نهایی، ظرفیت گرمایی.

عوامل مربوط به هوا) درجه حرارت، جریان انتقال گرما (در اینجا با این فرض که بین آب و کاسه و بین جداره‌ی کاسه و هوا تبادل حرارت بسیار ناچیز است، از نقش کاسه در ساختن مدل صرف‌نظر می‌کنیم).

جدول ۵—۱ متغیرها و پارامترهای شرکت کننده در این مدل را مشخص می‌کند.

جدول ۵—۱ عوامل شرکت کننده در مسأله‌ی شستن بشقابها.

شرح عامل	نوع	نماد	واحد
تعداد بشقابها	متغیر خروجی	n	عدد طبیعی
جرم یک بشقاب	پارامتر ورودی	M_p	Kg
درجه حرارت هوا	پارامتر ورودی	T_a	K
درجه حرارت آب	متغیر خروجی	T_w	K
درجه حرارت اولیه آب	متغیر ورودی	$T_w(۰)$	K
درجه حرارت نهایی آب	متغیر ورودی	T_f	K
جرم آب	پارامتر ورودی	M_w	Kg
ضریب تبادل گرما از آب به هوا	پارامتر ورودی	h	$Wm^{-۲}K^{-۱}$
ضریب گرمایی مشخص برای بشقابها	پارامتر ورودی	C_p	$Jm^{-۳}K^{-۱}$
ضریب گرمایی مشخص برای آب	پارامتر ورودی	C_w	$Jm^{-۳}K^{-۱}$

با توجه به نمادهای بکار برده شده در این جدول و برای محاسبه صریح جوابهای این مساله، مقادیر خاصی را برای بعضی از متغیرها و پارامترهای ورودی به شرح زیر انتخاب می‌کنیم: $C_p = ۶۰۰\ Jm^{-۳}K^{-۱}$ ؛ $C_w = ۴۲۰۰\ Jm^{-۳}K^{-۱}$ ؛ $M = ۰/۵\ Kg$ ؛ $M_w = ۱۵\ Kg$ ؛ $T_a = ۲۰°\ C$ ؛ $T_w(۰) = ۶۰°\ C$ ؛ $A = ۰/۱\ m^۲$ ؛ $T_f = ۴۰°\ C$ و $h = ۱۰۰Wm^{-۲}K^{-۱}$.

فرضها)

۱) قبلاً فرض کرده‌ایم که کاسه در تبادل حرارت نقشی ندارد.

۲) بشقابها یکی یکی شسته می‌شوند، به این ترتیب که هر بشقاب برای مدت زمان Δt در کاسه آب قرار داده می‌شود (احتمالاً برای مالش جداره‌ی هر بشقاب) و سپس برای

خشک کردن بیرون آورده می‌شود.

۳) مقدار آب داخل کاسه ثابت است، هر چند که در واقع مقداری از آب در اثر تبخیر و بیرون ریخته شدن آب، به هنگام فرو بردن و بیرون آوردن هر بشقاب، از دست می‌رود.

۴) در ابتدا همه‌ی بشقابها دارای درجه حرارت هوا یعنی همان T_a هستند.

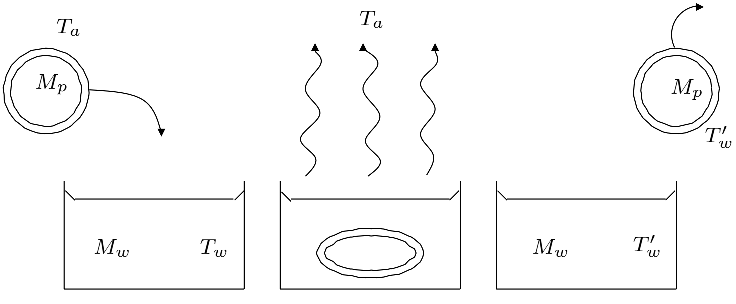
۵) مدت زمان Δt برای رسیدن حرارت هر بشقاب به درجه حرارت آب کافی است، به‌علاوه این مدت زمان برای تمیز شدن هر بشقاب کفایت می‌کند.

٦) مدت زمان Δt برای تمام بشقابها یکی است (البته با فرض ۵ سازگار نیست، زیرا هر چه آب سردتر می‌شود مدت زمان لازم برای پاک کردن چربی افزایش می‌یابد).

۷) گرمای آب توسط تابش و انتقال گرما مربوط به سطح آب کاهش می‌یابد. بعلاوه این گرما توسط انتقال به بشقابها و ذوب کردن چربی آنها نیز کاهش می‌یابد. در اینجا (با توجه به شکل ۵—۱) از اصل بقای انرژی گرمایی استفاده نموده و فرآیند ساختن مدل را ادامه می‌دهیم. در ضمن می‌دانیم که مقدار انرژی گرمایی که در بدنه‌ی هر جسم به جرم M قرار دارد برابر است با MCT ، که در آن C ظرفیت گرمایی و T درجه حرارت جسم بر حسب کلوین ($K = kelvin$) است. بنابراین، اگر T'_w را درجه حرارت آب در انتهای فاصله Δt فرض کنیم و اگر E_c و E_r به ترتیب انرژی از دست رفته توسط تابش و انتقال باشند، آنگاه تعادل انرژی گرمایی توسط رابطه‌ی زیر مشخص می‌شود:

$$M_pC_pT_a + M_wC_wT_w = M_pC_pT'_w + M_wC_wT'_w + E_c + E_r \qquad (۱)$$

اکنون برای لحظه‌ای بشقابها را فراموش کرده و فرض کنید که آب خودش شروع به سرد شدن می‌کند.



شکل ۵—۱ شسته شدن ظرف در طول Δt.

به این ترتیب می‌توان از مدلهای مناسب زیر برای E_c و E_r استفاده نمود:

سرعت از دست رفتن انرژی توسط انتقال گرما $= hA(T_w - T_a)$

سرعت از دست رفتن انرژی توسط تابش $= \epsilon\sigma A(T_w^۴ - T_a^۴)$

که در آنها σ $(= ۵/۶۷ \times ۱۰^{-۸} W m^{-۲} K^{-۴})$ عبارت است از ثابت بولتزمن و ϵ بیرون دهندگی گرما از سطح را اندازه‌گیری می‌کند. (برای اجسام سیاه $\epsilon = ۱$ و برای آب $\epsilon = ۰/۹۵$ است). در ضمن این مقادیر سرعت‌های لحظه‌ای از دست رفتن گرما است.

قبل از آنکه به ساختن مدل ادامه دهیم باید در خصوص پیوسته یا گسسته بودن متغیر اصلی یعنی T_w تصمیم‌گیری کنیم. این تصمیم‌گیری برای ادامه‌ی این مدل‌سازی حائز اهمیت است، زیرا هر یک از این انتخابها ما را در مسیر متفاوتی برای ادامه مدل‌سازی قرار می‌دهد. اگر T_w را پیوسته فرض کنیم، آنگاه فرض سرد شدن آب توسط خودش و مقادیر E_c و E_r ما را به سمت معادله‌ی دیفرانسیل

$$M_w C_w \frac{dT_w}{dt} = -hA(T_w - T_a) - \epsilon\sigma A(T_w^۴ - T_a^۴)$$

هدایت می‌کند. حل این معادله‌ی دیفرانسیل مقدار $T_w(t)$، که در آن t زمان اندازه‌گیری شده از لحظه‌ی شروع $t = ۰$ است، را ارائه می‌دهد. در حالتی که T_w گسسته فرض کنیم، به معادله‌ی گسسته‌ی

$$M_w C_w \left[T_w(n+۱) - T_w(n)\right] = -hA\left[T_w(n) - T_a\right] - \epsilon\sigma A\left[T_w^۴(n) - T_a^۴\right]$$

دست خواهیم یافت که در آن n بیانگر تعداد دفعات Δt از لحظه‌ی شروع $t = ۰$ است. چنان‌که مشاهده می‌شود به احتمال زیاد استفاده از این معادله‌ی گسسته برای پاسخ به سؤال مطرح شده در صورت مسأله عملی‌تر است.

حل ریاضی مدل پیشنهادی) به‌نظر می‌رسد که وجود جمله‌ی $T^۴$ در این معادلات ما را در حل این معادلات با مشکل روبرو سازد. آیا می‌توانیم آنها را ساده‌تر کنیم؟ برای این‌کار به مقایسه‌ی مقادیر عددی E_c و E_r که از روی داده‌ها به‌دست می‌آیند می‌پردازیم. هرچند که داده‌های مربوط به این مسأله حدسی هستند، به‌نظر می‌رسد که به اندازه‌ی کافی به واقعیت نزدیک هستند و می‌توان برای رسیدن به یک جواب تقریبی از آنها استفاده نمود. بنابراین،

$$E_c = hA(T_w - T_a) \approx ۱۰۰ \times ۰/۱(۳۳۳ - ۲۹۳) \approx ۴۰۰ J$$

و

$$\begin{aligned} E_r &= \epsilon\sigma A(T_w^{۴} - T_a^{۴}) \\ &\approx ۰/۹۵ \times ۵_{٦}۷ \times ۱۰^{-۸} \times ۰/۱ \left[(۳۳۳)^{۴} - (۲۹۳)^{۴}\right] \approx ۲٦/۵۴J \end{aligned}$$

درنتیجه $E_r \approx \frac{۱}{۱۵}E_c$ و چنین بنظر می‌رسد که می‌توان فرض کرد $E_r \approx ۰$. با جایگذاری $E_c = hA\left[T_w(n) - T_a\right]$ ، $E_r = ۰$ ، و $T'_w = T(n+۱)$ در معادله (۱) و مرتب کردن معادله‌ی حاصل خواهیم داشت:

$$(M_wC_w + M_pC_p)T_w(n+۱) = (M_wC_w - hA\Delta t)T_w(n) + (M_pC_p + hA\Delta t)T_a$$

و با قرار دادن داده‌ها در این معادله و انتخاب $\Delta t = ۱۰s$ (آیا این فاصله زمانی قانع کننده است؟) به معادله گسسته‌ی زیر خواهیم رسید:

$$T_w(n+۱) = ۰/۹۹۳۷T_w(n) + ۱/۸۵۱۵$$

جواب تحلیلی این معادله‌ی گسسته عبارت است از

$$T_w(n) = B(۰/۹۹۳۷)^n + ۲۹۳/۸۹$$

که با به‌کاربردن شرط اولیه $T_w(۰) = ۳۳۳$ ، برای B مقدار تقریبی $B \approx ۴۰$ بدست می‌آید و در نهایت مدل ریاضی به صورت

$$T_w(n) = ۴۰ \times (۰/۹۹۳۷)^n + ۲۹۳/۸۹$$

پیشنهاد می‌شود. اکنون برای محاسبه‌ی تعداد بشقابهایی که می‌توانند شسته شوند از داده $T_w(n) = T_f = ۳۱۳$ استفاده می‌کنیم. خواهیم داشت $۴۰ \times (۰/۹۹۳۷)^n + ۲۹۳/۸۹ = ۳۱۳$ یا $(۰/۹۹۳۷)^n = ۰/۴۷۷۸$، که با گرفتن لگاریتم $n \approx ۱۱۷$ بدست خواهد آمد.

تفسیر حل ریاضی مدل پیشنهادی) چنانکه دیدیم مدل ساخته شده پیش بینی می‌کند که تحت شرایط داده شده، و قبل از آنکه آب کاسه عوض شود، می توان تعداد ۱۱۷ بشقاب را شست. برای تصدیق مدل احتیاج به یک دماسنج داریم تا درجه حرارت آب و هوا را اندازه‌گیری کنیم و برای سنجیدن جرم بشقاب و آب احتیاج به یک ترازوی سنجش جرم داریم. به‌علاوه برای محاسبه‌ی سطح آب احتیاج به اندازه‌گیری ابعاد کاسه خواهیم داشت.

بکار بردن مدل)

۱) مقدار n چگونه با پارامترها و متغیرهای دیگر تغییر می‌کند؟ برای پاسخگویی به این

سؤال می‌توان نمودارهای n به‌عنوان تابعی از M_w ، M_p ، $T_w(\circ)$ ، T_f ، و Δt ترسیم کرد. برای رسم نمودار در هر یک از این حالات باید سایر متغیرها را ثابت نگه داشت.

۲) اگر در هر مدت زمان Δt تعداد بیشتری بشقاب را در آب بگذاریم، اما آنها را یکی یکی بیرون بیاوریم، چه تغییراتی را در مدل باید مدنظر قرار دهیم؟

۳) اگر فرض ۵ را به این‌صورت تغییر دهیم که "برای تمیز کردن هر بشقاب احتیاج به یک مقدار انرژی ثابت است"، در این‌صورت با توجه به این شرط چگونه مدل را تغییر و گسترش دهیم؟

۵–۴ خرید و رفت و آمدهای مربوط به آن

موضوع) مردم معمولاً خریدهای خود را در کجا انجام می‌دهند؟ اگر در یک مقطع زمانی به رفت و آمدهای مردم ساکن در یک منطقه، که برای خرید مایحتاجشان انجام می‌شود، توجه کنیم آیا می‌توانیم مدلی را پیشنهاد کنیم که این رفت و آمدها را برازش کند؟ به نظر می‌رسد که چنین مدلی برای پیش‌بینی نتایج حاصل از توسعه‌ی شهر یا سیاست‌های جدید حمل و نقل مسافرین مورد توجه قرار گیرد.

صورت مسأله) با در دست داشتن اطلاعات فیزیکی و اقتصادی مربوط به فرآیند رفت و آمد که برای خرید انجام می‌شود مدلی را برای تجزیه و تحلیل این فرآیند پیشنهاد کنید.

فرضها) فرض کنید منطقه‌ی مورد نظر به سه ناحیه، که هر کدام جمعیت و فروشگاههای مربوط به خود را دارد، تقسیم شده است. جدول ۵—۲ فاصله‌ی بین مراکز این نواحی را بر حسب کیلومتر نشان می‌دهد. در اینجا سؤال مربوط به تعریف ما از ناحیه و مرکز را نادیده می‌گیریم، هرچند که بر حسب عوامل اقتصادی و شرایط جغرافیایی ممکن است پاسخهای مختلفی برای این سؤال وجود داشته باشد.

در حال حاضر آمار جمعیت در هر ناحیه به شرح زیر است

A، ۵۸۰۰؛ B، ۹۴۰۰؛ C، ۱۰۶۰۰؛

جدول ۵—۲ فاصله‌ی بین مراکز.

	تا A	تا B	تا C
از A	۲	۷	۵
از B	۷	۳	۴
از C	۵	۴	۳

همچنین آمار فروشگاهها در هر ناحیه عبارت است از

A، ۲۲؛ B، ۸۰؛ C، ۲۲۰.

طراحی یک مدل ریاضی) عواملی که در این مدل‌سازی می‌توانند شرکت داشته باشند عبارتند از جمعیت، فواصل، تعداد فروشگاهها، انواع فروشگاهها، تسهیلات حمل و نقل، هزینه‌های رفت و آمد و هزینه‌های مربوط به خرید. در بین این عوامل چه عامل‌هایی باعث می‌شوند تا مردم خرید در یک ناحیه خاص را بیشتر مورد توجه قرار دهند؟

عواملی چون تعداد فروشگاهها و دسترسی آسان به مراکز خرید می‌تواند به‌عنوان عوامل جذب کننده به حساب آید و عواملی چون فاصله، هزینه‌های رفت و آمد، و مدت زمان مورد نیاز برای رسیدن به مراکز خرید می‌تواند به‌عنوان عواملی که سبب روی گردانی مردم از خرید در بعضی نواحی می‌شود شمرده شود. جدول ۵—۳ عواملی را که فعلاً برای ساختن این مدل در نظر گرفته‌ایم شرح می‌دهد.

جدول ۵—۳ عوامل شرکت کننده در مساله‌ی خرید و رفت و آمدهای مربوط به آن.

شرح عامل	نوع	نماد	واحد
جمعیت نواحی	پارامتر ورودی	P_i	عدد طبیعی
فاصله بین ناحیه i و ناحیه j	پارامتر ورودی	d_{ij}	کیلومتر
تعداد فروشگاهها در ناحیه i	پارامتر ورودی	N_i	عدد طبیعی
تعداد رفت و آمد از ناحیه i به ناحیه j	متغیر خروجی	x_{ij}	عدد طبیعی

با توجه به جدول ۵—۳ هدف ما ساختن مدلی است که متغیرهای x_{ij} را به پارامترهای N_j، d_{ij}، و P_i مربوط می‌سازد. البته می‌توانستیم با در نظر گرفتن هزینه‌های مربوط به فرآیند خرید، x_{ij} ها را بر حسب مقدار پول هزینه شده روی خرید در طول دوره، نیز تفسیر کنیم.

فرضها)

۱) x_{ij} با P_i نسبت مستقیم دارد (هر جه تعداد جمعیت بیشتری در ناحیه i باشد، تعداد رفت و آمدهای بیشتری از ناحیه‌ی i صورت می‌گیرد.)

۲) x_{ij} با N_j نسبت مستقیم دارد (هر جه تعداد فروشگاهها در ناحیه j باشد، خریداران بیشتری جذب آن ناحیه می‌شوند).

۳) با افزایش d_{ij} مقدار x_{ij} کاهش می‌یابد (فاصله‌ی زیاد باعث عدم تمایل مردم به خرید در این فروشگاهها می‌شود).

نتایج حاصل از فرضهای ۱ و ۲ به‌سادگی قابل تبدیل به فرمولهای ریاضی هستند، اما

در خصوص فرض ۳ چندین فرمول ممکن قابل پیشنهاد است:

الف) $x \propto (-d_{ij})$

ب) $x \propto \frac{1}{d_{ij}}$

ج) $x \propto \frac{1}{d_{ij}^2}$

د) $x \propto \frac{1}{d_{ij}^{\alpha}}$ که در آن α یک پارامتر مناسب است

ه) $x \propto \exp(-\beta d_{ij})$ که در آن β یک پارامتر مناسب است.

به‌طور کلی ثابت شده است که تأثیر مسافت بسیار جدی است و x_{ij} با افزایش d_{ij} به‌طور قابل ملاحظه‌ای کاهش می‌یابد و سرعت این کاهش به اندازه‌ای است که مدلهای (الف) و (ب) نمی‌توانند آن‌را برازش کنند. در عین حال به‌نظر می‌رسد که مدلهای (ج)، (د)، و (ه) تقریباً به مدلهای واقعی نزدیکتر هستند، به‌ویژه آنکه با انتخاب پارامترهای مناسب می‌توان از مدلهای (د) و (ه) مدلهای صحیح تری را برازش نمود. به‌عنوان مثال ثابت شده است که باانتخاب $1/5 \leq \alpha \leq 3$ مدل (د) می‌تواند بهترین برازش را ارائه دهد.

در اینجا و برای این مثال مدل (ج) را انتخاب نموده و با توجه به فرضهای ۱ و ۲ به ساختن مدل ادامه می‌دهیم. بنابراین،

$$x_{ij} \propto \frac{P_i N_j}{d_{ij}^2}$$

یعنی با یک انتخاب مناسب k داریم

$$x_{ij} = k\frac{P_i N_j}{d_{ij}^2}$$

حل ریاضی مدل پیشنهادی) برای حل ریاضی این مدل ابتدا مقادیر $\frac{P_i N_j}{d_{ij}^2}$ را برای تمام i و j ها محاسبه کرده و سپس مجموع زیر را پیدا می‌کنیم:

$$S = \sum_i \sum_j \frac{P_i N_j}{d_{ij}^2}$$

چون هدف ما ارائه‌ی الگویی برای فرآیند خرید است، این هدف را می‌توانیم بر حسب درصدها با تقسیم هر $\frac{P_i N_j}{d_{ij}^2}$ بر S برآورده سازیم. برای این مثال مقادیر $\frac{P_i N_j}{d_{ij}^2}$ در جدول ۵ــ۴ ارائه شده‌است.

جدول ۵—۴ مقادیر $\frac{P_i N_j}{d_{ij}^2}$ در مساله‌ی خرید و رفت و آمدهای مربوط به آن.

P_i	$N_j = ۲۲$	$N_j = ۸۰$	$N_j = ۲۲۰$
۵۸۰۰	۳۱۹۰۰	۹۴۶۹	۵۱۰۴۰
۹۴۰۰	۴۲۲۰	۸۳۵۵۶	۱۲۹۲۵۰
۱۰۶۰۰	۹۳۲۸	۵۳۰۰۰	۲۵۹۱۱۱

به این ترتیب

$$S = \sum_i \sum_j \frac{P_i N_j}{d_{ij}^2} = ۶۳۰۸۷۴$$

و در صد رفت و آمدهای خرید پس از محاسبه در جدول ۵—۵ نشان داده شده‌اند. این جدول در واقع الگوی رفت و آمد که برای خرید بین این سه ناحیه انجام می‌شود را نشان می‌دهد.

جدول ۵—۵ الگوی رفت و آمدها برای خرید بین نواحی مختلف شهر.

	به A	به B	به C
از A	۰٫۰۵۰۶	۰٫۰۱۵۰	۰٫۰۸۰۹
از B	۰٫۰۰۶۷	۰٫۱۳۲۴	۰٫۲۰۴۹
از C	۰٫۰۱۴۸	۰٫۰۸۴۰	۰٫۴۱۰۷
مجموع	۰٫۰۷۲۱	۰٫۲۳۱۴	۰٫۶۹۶۵

تفسیر حل ریاضی مدل پیشنهادی) مدل ساخته شده پیش‌بینی می‌کند که در نواحی تقسیم بندی شده تقریباً ۷٪ خریدها در ناحیه‌ی A ، ۲۳٪ خریدها در ناحیه‌ی B و ۷۰٪ خریدها در ناحیه‌ی C انجام می‌پذیرد.

باید توجه داشت که اگر نواحی A ، B ، و C بر حسب میانگین در آمد سرانه با یکدیگر اختلاف قابل ملاحظه‌ای داشته باشند، آنگاه انتظار می‌رود که در نواحی ثروتمندتر خرید بیشتری صورت پذیرد. به این ترتیب با اختصاص مقادیر ثابت مختلف k برای نواحی سه گانه می‌توان نتایج فوق را با انعطاف بیشتری به‌دست آورد. به این معنا که برای انعکاس قدرت خرید در این نواحی از ضرایب مختلف k_1 ، k_2 ، و k_3 استفاده نموده و به‌کمک داده‌های مربوط به میانگین در آمدها مدل مناسب را برازش کنیم.

لازم به توضیح است که برای ساختن مدل فوق می‌توانستیم به‌جای فواصل بین نواحی، از مدت زمانهای لازم برای رفت و آمد بین این نواحی یا هزینه‌های مربوط به این رفت و آمدها استفاده کنیم. همچنین می‌توانستیم به جای تعداد فروشگاهها به‌عنوان

عوامل جذب کننده، از اطلاعات کمی فروشگاهها، اندازه‌ی آنها (بر حسب سطح)، تعداد پارکینگها، و یا ترکیبی از این موارد استفاده کنیم.

بکار بردن مدل)
۱) اگر اضافه شدن ۲۰ مرکز خرید جدید در ناحیه‌ی A پیشنهاد شود، عملی شدن آن چه تأثیری روی الگوی بدست آمده خواهد داشت؟

۲) اگر احداث جاده‌ی جدیدی، که فاصله بین A و B را ۵ کیلومتر کوتاه می‌کند، پیشنهاد شود، عملی شدن آن چه تأثیری روی الگوی به‌دست آمده خواهد داشت؟

۵–۵ فرآیند تولید دیسکهای فلزی

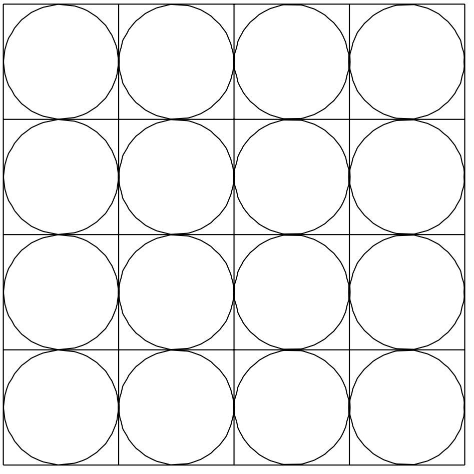
موضوع) فرض کنید شما برای مشاوره با مدیر یک شرکت سازنده‌ی محصولات صنعتی استخدام شده‌اید. قسمتی از تولیدات این واحد صنعتی بریدن دیسک از ورقه‌های مربعی شکل استیل به ضلع یک متر است. در حال حاضر ماشین پرس‌کننده‌ی دیسک طوری تنظیم شده است که از هر ورقه ۱۶ دیسک با قطر ۰/۲۵ متر را می‌برد. از شما سؤال شده است که آیا می‌توان دستگاه برش را طوری تنظیم نمود که در دور ریختن استیل‌های باقی‌مانده روی هر ورقه صرفه‌جویی شود. در ضمن این شرکت قصد دارد تا دیسک‌های با قطر ۰/۱ متر از همین نوع ورقه استیل تولید کند. برای این منظور دستگاه برش چگونه تنظیم شود تا ضایعات به حداقل برسد؟ آیا می‌توانید یک فرمول ریاضی برای محاسبه‌ی ماکزیمم تعداد دیسکهای با شعاع r که می‌تواند، از یک ورقه‌ی مربعی شکل استیل بابعد معلوم، بریده شوند ارائه دهید؟

صورت مسأله) با معلوم بودن قطر دیسک و ابعاد ورقه‌های استیل، بهترین الگوی برش و ماکزیمم تعداد دیسکهایی که می‌تواند از ورقه‌ی استیل بریده شود پیدا کنید.

طراحی یک مدل ریاضی) جدول ۵–۶ عوامل شرکت کننده در این مسأله را شرح می‌دهد.

جدول ۵–۶ عوامل شرکت کننده در مساله‌ی فرآیند تولید دیسکهای فلزی.

شرح عامل	نوع	نماد	واحد
طول ورقه‌ی استیل	پارامتر ورودی	l	m
پهنای ورقه‌ی استیل	پارامتر ورودی	b	m
شعاع دیسک	پارامتر ورودی	r	m
تعداد دیسکها	متغیر خروجی	N	عدد طبیعی
مقدار دور ریز	متغیر خروجی	W	$\%$



شکل ۵—۲ دیسکهای با چهار نقطه‌ی تماس.

فرضها)

۱) دستگاه پرس می‌تواند دیسکها را بطور منظم و با دقت کافی برش دهد، بنابراین می‌توانیم فرض کنیم که دستگاه می‌تواند دیسکهارا طوری برش دهد که مماس بودن دوایر بر یکدیگر و بر لبه‌های ورقه در عمل نیز امکان‌پذیر باشد.

۲) دوایری که در تماس با لبه‌های ورقه بریده نمی‌شوند به صورتهای زیر بر دوایر دیگر مماسند:

الف) در چهار نقطه با دوایر دیگر مماسند،

ب) در شش نقطه با دوایر دیگر مماسند.

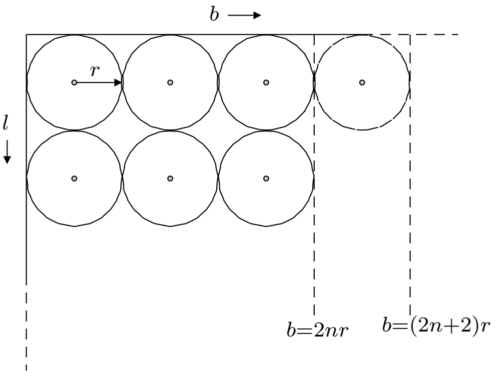
حل ریاضی مدل پیشنهادی) حالت (الف) مربوط به فرض ۲، که در شکل ۵—۲ نشان داده شده است، ساده‌ترین حالت است.

برای این حالت ابعاد $l = b = ۱$ و $r = ۰/۱۲۵$ را در نظر بگیرید. واضح است که در این حالت می‌توان $N = ۱۶$ دیسک را از هر ورقه برید و مقدار دور ریز برابر است با

$$W = ۱ - ۱۶\pi(۰/۱۲۵)^۲ \approx \%۲۱/۵$$

در همین حالت اگر ابعاد $l = b = ۱$ و $r = ۰/۰۵$ در نظر بگیریم، آنگاه می‌توان تعداد $N = ۱۰۰$ دیسک را از هر ورقه ببریم و و مقدار دور ریز برابر است با

$$W = ۱ - ۱۰۰\pi(۰/۰۵)^۲ \approx \%۲۱/۵$$



شکل ۵—۳ فرآیند برش دیسکهای با چهار نقطه‌ی تماس.

که ممکن است دور از انتظار بنظر برسد.

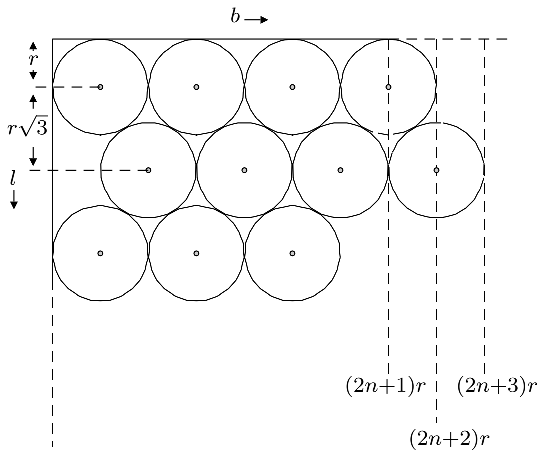
در حالت کلی اگر $b > ۲nr$ ، آنگاه می‌توانیم حداقل n ستون از دیسک را روی هر ورقه بسازیم (شکل ۵—۳)، و با افزایش b به مقدار $(۲n+۲)r$ ساختن یک ستون دیگر نیز امکان‌پذیر است. در واقع

$$n = \left[\frac{b}{۲r}\right] = \frac{b}{۲r} \quad \text{جزء صحیح عدد}$$

همان‌طور که در شکل ۵—۳ مشاهده می‌شود با بحثی مشابه می‌توان گفت که تعداد سطرها نیز $\left[\frac{l}{۲r}\right]$ است. پس تعداد کل دیسک‌هایی که می‌تواند بریده شود برابر است با $N = \left[\frac{b}{۲r}\right] \times \left[\frac{l}{۲r}\right]$ و درنتیجه مقدار دور ریز برابر است با

$$W = \frac{lb - \left[\frac{b}{۲r}\right] \times \left[\frac{l}{۲r}\right] \pi r^۲}{lb}$$

اکنون حالت (ب) را با مقادیر کلی l ، b ، و r در نظر بگیرید. چنان‌که مشاهده می‌کنید، وقتی b مضرب فردی از r است، یعنی $b = (۲n+۱)r$ ، آنگاه در هر سطر می‌توان n دیسک با شعاع r را برید. اگر b را افزایش دهیم، این تعداد ثابت می‌ماند تا اینکه b به $(۲n+۲)r$ می‌رسد. در این هنگام در سطر بعد می‌توان یک دیسک دیگر را برش داد. به این ترتیب سطرها به صورت یک در میان دارای $n+۱$ و n دیسک هستند. اگر b مجدداً افزایش یابد این وضعیت به همین صورت باقی می‌ماند تا اینکه $b = (۲n+۳)r$. در این موقع می‌توان در هر سطر به‌طور مساوی $n+۱$ دیسک را برش داد (شکل ۵—۴).



شکل ۵ــ۴ فرآیند برش دیسکهای با شش نقطه‌ی تماس.

در این شکل، با مشاهده‌ی ضلع عمودی می‌توان نتیجه گرفت که اگر x تعداد سطرها باشد، x باید در نامساوی $۲r + (x-۱)r\sqrt{۳} \le l$ صدق کند. حال چون x عددی صحیح است، باید داشته باشیم

$$x = \left[۱ + \left(\frac{۱}{\sqrt{۲}}\right)\left(\frac{l}{r} - ۲\right)\right]$$

در وضعیتی که در هر سطر می‌توان تعداد مساوی n دیسک را برش داد، حتماً شرط $(۲n+۱)r \le b < (۲n+۲)r$ برقرار است. به این ترتیب

$$n = \frac{۱}{۲}\left(\left[\frac{b}{r}\right] - ۱\right)$$

و درنتیجه

$$N = nx = \frac{۱}{۲}\left(\left[\frac{b}{r}\right] - ۱\right)\left[۱ + \left(\frac{۱}{\sqrt{۲}}\right)\left(\frac{l}{r} - ۲\right)\right]$$

در وضعیتی که در سطرها می‌توان به صورت یک در میان $n+۱$ و n دیسک را برش داد، تعداد سطرهای با $n+۱$ دیسک برابراست با $\frac{x}{۲}$ اگر x زوج باشد، و $\frac{x+۱}{۲}$ اگر x فرد باشد. در این وضعیت شرط $(۲n+۲)r \le b < (۲n+۳)r$ نیز باید برقرار باشد. بنابراین، $n = \frac{۱}{۲}\left(\left[\frac{b}{r}\right] - ۲\right)$، و درنتیجه تعداد کل دیسک‌هایی که می‌تواند

برش داده شود برابر است با

$$N = \begin{cases} x\left(n+\frac{1}{2}\right), & x \text{ زوج} \\ x\left(n+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}, & x \text{ فرد} \end{cases}$$

نتایج فوق را می‌توان به صورت زیر خلاصه نمود: در حالتی که در هر سطر می‌توان بطور مساوی n دیسک را برش داد، یعنی در حالت $(2n+1)r \leq b < (2n+2)r$

$$N = \frac{x}{2}\left(\left[\frac{b}{r}\right]-1\right)$$

و در حالتی که در سطرها می‌توان به صورت یک در میان $n+1$ و n دیسک را برش داد، یعنی در حالت $(2n+2)r \leq b < (2n+3)r$

$$N = \begin{cases} \frac{x}{2}\left(\left[\frac{b}{r}\right]-1\right), & x \text{ زوج} \\ \frac{x}{2}\left(\left[\frac{b}{r}\right]-1\right)+\frac{1}{2}, & x \text{ فرد} \end{cases}$$

در کلیه‌ی حالات $x = \left[1+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{l}{r}-2\right)\right]$. به این‌ترتیب می‌توانیم فرض کنیم که N تابعی است از دو پارامتر $\frac{l}{r}$ و $\frac{b}{r}$. برای نمونه تعدادی از این مقادیر در جدول ۵—۷ ارائه شده و برای مقایسه نیز مقادیر متناظر در حالت چهار نقطه‌ای در جدول ۵—۸ ارائه شده‌است.

جدول ۵—۷ تعداد دیسکها در حالت شش نقطه‌ی تماس.

	$\frac{b}{r}=3$	$\frac{b}{r}=4$	$\frac{b}{r}=5$	$\frac{b}{r}=8$	$\frac{b}{r}=10$	$\frac{b}{r}=14$
$\frac{l}{r}=4$	۲	۳	۴	۷	۹	۱۳
$\frac{l}{r}=7$	۳	۵	۶	۱۱	۱۴	۲۰
$\frac{l}{r}=10$	۵	۸	۱۰	۱۸	۲۳	۳۳
$\frac{l}{r}=15$	۸	۱۲	۱۶	۲۸	۳۶	۵۲
$\frac{l}{r}=20$	۱۱	۱۷	۲۲	۳۹	۵۰	۷۲

تفسیر حل ریاضی مدل پیشنهادی) با مقایسه‌ی جداول ۵—۷ و ۵—۸، مشاهده می‌شود که در بین نتایج بدست آمده نمی‌توان تفاوت قابل ملاحظه‌ای را نتیجه‌گیری نمود. این که کدام روش می‌تواند مفیدتر واقع شود، بستگی به مقدار پارامترها دارد. برای $l = b = 1$ و $r = 0/05$ ، در حالت شش نقطه‌ی تماس داریم $x = \left[1+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1}{0/05}-2\right)\right] = [11/39\cdots] = 11$ و $\frac{b}{r} = 20$ (که یک عدد صحیح زوج است)؛ در اینجا وضعیت یک در میان $n = 9$ و $n+1 = 10$ اتفاق می‌افتد. پس می‌توان $N = \frac{11}{2}(20-1)+\frac{1}{2} = 105$ دیسک را برش داد. واضح است که در حالت چهار نقطه‌ی تماس، تنهامی‌توان ۱۰۰ دیسک را برش داد، و درنتیجه برش با شش نقطه‌ی تماس ترجیح داده می‌شود.

جدول ۵—۸ تعداد دیسکها در حالت چهار نقطه‌ی تماس.

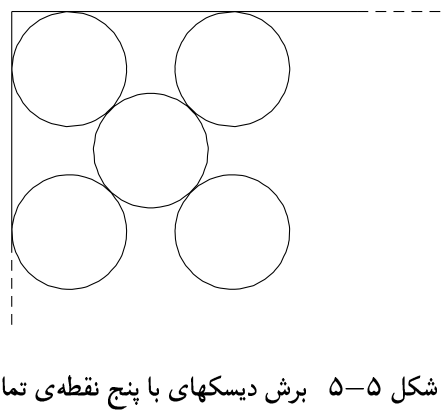
	$\frac{b}{r} = ۳$	$\frac{b}{r} = ۴$ ۷	$\frac{b}{r} = ۵$	$\frac{b}{r} = ۸$	$\frac{b}{r} = ۱۰$	$\frac{b}{r} = ۱۴$
$\frac{l}{r} = ۴$	۲	~~۴~~ ۷	۴	۸	۱۰	۱۴
$\frac{l}{r} = ۷$	۳	۶	۶	۱۲	۱۵	۲۱
$\frac{l}{r} = ۱۰$	۵	۱۰	۱۰	۲۰	۲۵	۳۵
$\frac{l}{r} = ۱۵$	۷	۱۴	۱۴	۲۸	۳۵	۴۹
$\frac{l}{r} = ۲۰$	۱۰	۲۰	۲۰	۴۰	۵۰	۷۰

بررسی حالات دیگر

۱ آیا می‌توان شیوه‌ی برش را به صورتی تغییر داد که مقدار دور ریز، مثلاً در حالتی که ۱۰۵ دیسک برش داده می‌شود، کمتر شود؟ به‌عنوان مثال توجه کنید که اگر در شیوه‌ی سطرهای نامساوی در ۱۱ سطر ۱۰، ۹، ۱۰، ۹، ۱۰، ۹، ۱۰، ۹، ۱۰، ۱۰ و ۱۰ دیسک را برش دهیم ۱۰۶ دیسک را خواهیم داشت، که ارزش تفکر روی چنین تغییراتی را نشان می‌دهد.

۲ در روش چهار نقطه‌ی تماس لزومی ندارد که هر چهار دیسک به نوعی برش داده شوند که در داخل یک مربع قرار گیرند. ترتیب این قرارگرفتن می‌تواند همانند برشی که در شکل ۵—۵ نشان داده شده است باشد. تأثیر مثبت یا منفی چنین روشی را مورد بحث و بررسی قرار دهید.

۳ آیا می‌توانید مدل را به گونه‌ای توسیع دهید که بتواند برش در حالتی که دو دیسک در اندازه‌های مختلف مورد نیاز است را بهینه سازد؟ تحت چه شرایطی دیسک های با اندازه‌ی کوچکتر می‌توانند در بین دیسک های بزرگتر برش داده شوند؟



شکل ۵—۵ برش دیسکهای با پنج نقطه‌ی تماس.

۵–۶ طراحی ناودان

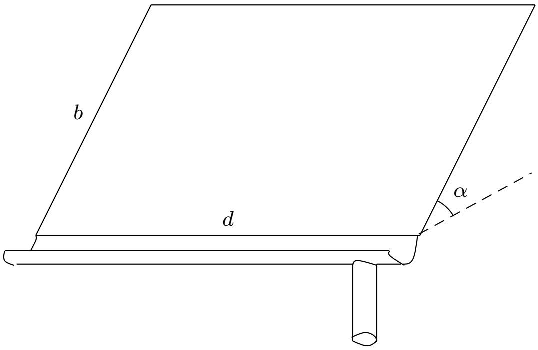
موضوع) بخش ساختمان سازی شورای یک شهر نیاز به دانستن اندازه‌ی ناودانهایی دارد که بتوانند به‌طور مناسب در پشت بام ساختمانهای در دست ساخت قرار داده شوند. در توسعه‌ی جدیدی که به شهر داده شده است، پشت بام ساختمانها به شکل مستطیل با ۱۲ متر طول و ٦ متر فاصله بین بالاترین لبه شیروانی تا محل قرار گرفتن ناودان است. در خصوص زاویه‌ی شیب پشت بام تا سطح افق هنوز تصمیمی گرفته نشده است، اما دارای محدودیتی بین 20° تا 30° است.

یکی از شرکت‌های سازنده‌ی ناودان تمایل زیادی به بستن قرارداد با این بخش ساختمان سازی جهت تأمین نیازهای آن دارد. این شرکت می‌گوید تعداد ناودانهای بادوام پلاستیکی موجود برای این منظور کافی است و درضمن ثابت شده است که این نوع ناودان تحت هر نوع آب و هوا از مقاومت بالایی برخوردار است. سطح مقطع این نوع ناودان به شکل یک نیم‌دایره با شعاع $7/5$ سانتی‌متر است و شرکت ادعا می‌کند، یک لوله‌ی پایین آورنده‌ی آب با قطر ۱۰ سانتی‌متر برای اتصال به این ناودان کافی است.

رئیس با تجربه‌ی بخش ساختمان سازی نسبت به ادعای این شرکت مطمئن نیست و به همین دلیل از شما خواسته است تا با ساختن یک مدل ریاضی در مورد موضوع تحقیق کرده و قبل از سفارش ناودانهایی از این نوع اطلاعات لازم را در اختیار آنها قرار دهید. مهمترین موضوع برای بخش ساختمان این است که آیا اندازه‌ی این نوع ناودانها برای مقابله با بارانهای سیل آسا کافی است. همان‌طور که مشاهده می‌شود موضوع مهم در این بحث، تحقیق در مورد ظرفیت ناودان برای نگه داشتن آب باران است. تحقیق روی حل این مسأله نوعی تحقیق در خصوص ورود و خروج آب است که می‌تواند در زمینه‌های دیگری مانند جاری شدن آب به داخل و خارج یک مخزن، رودخانه یا دریاچه‌های ذخیره‌ی آب، نیز مورد استفاده قرار گیرد. در این مسأله متغیر ورودی آب بارانی است که از سطح شیب دار بام وارد ناودان می‌شود و متغیر خروجی مقداری از این آب است که از لوله‌ی عمودی به پایین منتقل می‌شود.

در اینجا سؤال اصلی این است آیا ظرفیت ناودان به اندازه‌ای است که بتواند آب سرازیر شده در خود را بدون آنکه به بیرون سرازیر شود نگه دارد. پاسخ این سؤال به‌طور ضمنی ارتفاع آب داخل ناودان تا لحظه‌ای که از آن سرریز نشده است را مشخص می‌کند. چون سطح مقطع ناودان نیم‌دایره است، این ارتفاع برابر با شعاع دایره است.

طراحی یک مدل ریاضی) با دنبال کردن مراحل مختلف ساختن یک مدل ریاضی، که در مثالهای قبل نیز تکرار شد، در اولین مرحله برای ساختن مدل این مسأله عوامل مربوط به آن را شناسایی می‌کنیم. ابتدا به شکل ۵–٦ توجه کنید.



شکل ۵—۶ نمایش پشت بام و ابعاد آن.

با بهره گیری از این شکل با وضوح بیشتری می‌توان مدل‌سازی را ادامه داد. ابتدا عوامل مهم شرکت کننده در ساختن این مدل را معرفی می‌کنیم. اگر از اصل "سرعت جریان" آب به داخل سیستم ناودان استفاده کنیم خواهیم داشت:

نرخ تغییرات حجم آب در ناودان = دبی حجمی ورود آب به ناودان − دبی حجمی خروج آب از ناودان

با توجه به نمادهای معرفی شده در جدول ۵—۹ این فرمول به صورت $V'(t) = Q_i - Q_o$ نیز نوشته می‌شود:

جدول ۵—۹ عوامل مهم شرکت کننده در ساختن مدلی برای طراحی ناودان.

شرح عامل	نوع	نماد	واحد
سرعت بارش	متغیر ورودی	r	$m\ s^{-1}$
زمان	متغیر ورودی	t	s
شیب بام	پارامتر ورودی	α	deg
طول بام	پارامتر ورودی	d	m
پهنای بام (از نوک بام تا ناودان)	پارامتر ورودی	b	m
شعاع ناودان	پارامتر ورودی	a	m
ارتفاع آب داخل ناودان	متغیر خروجی	h	m
حجم آب داخل ناودان	متغیر خروجی	V	m^3
دبی حجمی ورود آب به ناودان	متغیر خروجی	Q_i	$m^3\ s^{-1}$
دبی حجمی خروج آب از ناودان	متغیر خروجی	Q_o	$m^3\ s^{-1}$
مساحت مقطع لوله‌ی هدایت کننده‌ی آب به پایین	پارامتر ورودی	A	m^2
شتاب جاذبه‌ی زمین	پارامتر ثابت	g	$m\ s^{-2}$

فرضها)

برای جریان آب چند فرض ساده را اختیار می‌کنیم:

۱) تمام آب بارانی که روی بام می‌ریزد وارد ناودان می‌شود.

۲) از آب بارانی که مستقیماً وارد ناودان می‌شود می‌توان صرف‌نظر کرد.

۳) احتمال بوجود آمدن مانع در ناودان، بر اثر ریزش برگ درختان و غیره، تقریباً صفر است.

۴) باران به‌طور مستقیم بر روی بام می‌بارد.

۵) قطرات باران در اثر برخورد به پشت بام به اطراف پرتاب نمی‌شوند.

مساحت بام برابر bd است اما، بر اثر وجود شیب، سطحی که بر روی آن باران می‌بارد برابر است با $bd\cos\alpha$. چون سرعت بارش باران برابر است با $r(t)$ ، سرعت حجمی بارانی که بر روی بام می‌بارد برابر است با

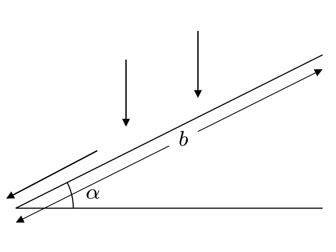
$$r(t) \times \text{مساحت} = r(t)bd\cos\alpha$$

در ضمن، شیب بام روی سرعت ورود آب باران به داخل ناودان تأثیر دارد: هر چه این شیب بیشتر باشد آب باران سریعتر وارد ناودان می‌شود. با توجه به شکل ۵—۷ مشاهده می‌کنیم که به مؤلفه‌ی سرعت باران که دارای جهتی رو به پایین است نیز احتیاج داریم. بنابراین، جمله‌ی $\sin\alpha$ نیز وارد محاسبات شده و سرعت حجمی آب بارانی که وارد ناودان می‌شود برابر است با

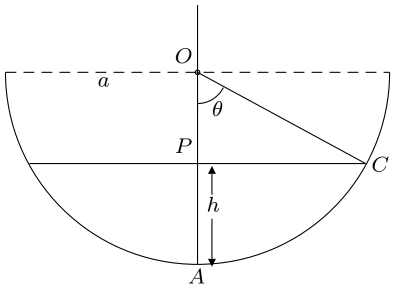
$$Q_i = r(t)bd\sin\alpha\cos\alpha$$

حال حجم آب جمع شده در ناودان را در هر لحظه در نظر بگیرید. این حجم آب را با در نظر گرفتن مقطع ناودان که در شکل ۵—۸ نشان داده شده است محاسبه می‌کنبم.

همان‌طور که از روی شکل مشاهده می‌شود این حجم آب برابر است با:



شکل ۵—۷ بارش باران و جاری شدن آب در ناودان.



شکل ۵–۸ مقطع ناودان.

$$\text{حجم آب داخل ناودان} = \text{مساحت مقطع} \times \text{طول ناودان}$$

توجه کنید که مقطع مطرح در این محاسبات قسمتی از یک نیم دایره است که مساحت آن‌را می‌توان به صورت زیر محاسبه نمود. اگر θ را اندازه‌ی زاویه‌ی AOC در نظر بگیریم، مساحت این مقطع برابر است با

$$\begin{aligned} \text{مساحت} &= \tfrac{۱}{۲}\, a^۲ \times ۲\theta - \tfrac{۱}{۲}\, a^۲ \sin ۲\theta \\ &= a^۲(\theta - \sin\theta\cos\theta) \end{aligned}$$

چون $\cos\theta = \dfrac{a-h}{a}$ ، داریم $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{۲ah-h^۲}}{a}$. بنابراین،

$$V(t) = da^۲\left[\cos^{-۱}\left(\frac{a-h}{a}\right) - \frac{(a-h)\sqrt{۲ah-h^۲}}{a^۲}\right]$$

با استفاده از قاعده‌ی زنجیره‌ای تغییرات V را نسبت به زمان پیدا می‌کنیم، پس

$$V'(t) = \frac{dV}{dh}\,\frac{dh}{dt}$$

که پس از مشتق‌گیری از V نسبت به h ، جایگذاری آن در فرمول $V'(t)$ و انجام عملیات جبری لازم خواهیم داشت:

$$V'(t) = ۲h'(t)d\sqrt{۲ah-h^۲}$$

برای محاسبه‌ی سرعت حجمی آبی که از درون لوله‌ی عمودی به پایین منتقل می‌شود از قانون پایستاری انرژی تریچلی استفاده می‌کنیم. برطبق این قانون انرژی پتانسیلی که روی ارتفاع $h(t)$ از دست می رود برابر است با انرژی جنبشی که از خروج به پایین آب

در لوله به‌دست می‌آید. چون سرعت خروج آب برابر است با $\sqrt{2gh}$ ، سرعت حجمی خروج آب برابر است با

$$Q_o = A\sqrt{2gh}$$

که در آن A مساحت مقطع لوله است. بنابراین، از تساوی $V'(t) = Q_i - Q_o$ معادله‌ی دیفرانسیل

$$r(t)bd\sin\alpha\cos\alpha - A\sqrt{2gh} = 2h'(t)d\sqrt{2ah - h^2}$$

به‌دست می‌آید، که از آن تغییرات h نسبت به زمان توسط معادله‌ی دیفرانسیل زیر قابل محاسبه است:

$$h'(t) = \frac{r(t)bd\sin\alpha\cos\alpha - A\sqrt{2gh}}{2d\sqrt{2ah - h^2}}$$

حل ریاضی مدل پیشنهادی) چون هر دو طرف معادله‌ی دیفرانسیل مربوط به h دارای بعد L/T هستند، می‌توانیم بگوییم که مدل پیشنهادی از نظر ابعادی سازگار است. مانند حل هر معادله‌ی دیفرانسیل، برای حل این مدل به یک شرط اولیه نیاز داریم. اگر در لحظه‌ای که باران شروع می‌شود ارتفاع آب را صفر در نظر بگیریم، شرط $h(0) = 0$ را خواهیم داشت. اما این شرط باعث بروز اشکالی در حل ریاضی مدل خواهد شد. توجه کنید که در معادله‌ی مورد بحث محاسبه‌ی $h'(0)$ با اشکال همراه است. البته، این اشکال را می‌توان با $h(0) = 1/0$ سانتی‌متر، یا کار با $\frac{dt}{dh}$ بر طرف نمود.

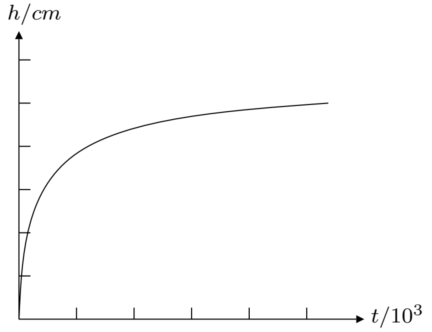
این مدل با اطلاعات موجود، یعنی با $a = 0/075$ متر، $b = 6/0$ متر، $d = 12/0$ متر، $g = 9/81$ متر بر مجذور ثانیه، $A = 0/0025\pi$ متر مربع و $\alpha = 30^\circ$ به صورت

$$h'(t) = \frac{1/299r - 0/0145\sqrt{h}}{\sqrt{0/15h - h^2}}$$

نوشته می‌شود. با داشتن سرعت بارش باران و حل معادله‌ی دیفرانسیل فوق ارتفاع آب در ناودان در هر لحظه محاسبه می‌شود. در اینجا دو پیشنهاد را برای بحث بیشتر مورد توجه قرار می‌دهیم.

(الف) $r(t) =$ مقدار ثابت

(ب) $$r(t) = \begin{cases} \frac{1}{20}\sin\left(\frac{\pi t}{40}\right), & 0 < t < 40 \\ 0, & t \geq 0 \end{cases}$$



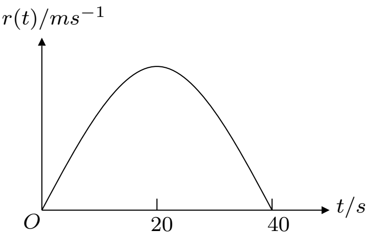
شکل ۵—۹ نمودار ارتفاع آب در ناودان.

جدول ۵—۱۰ مقدار ارتفاع آب در ناودان در زمانهای مختلف بارندگی.

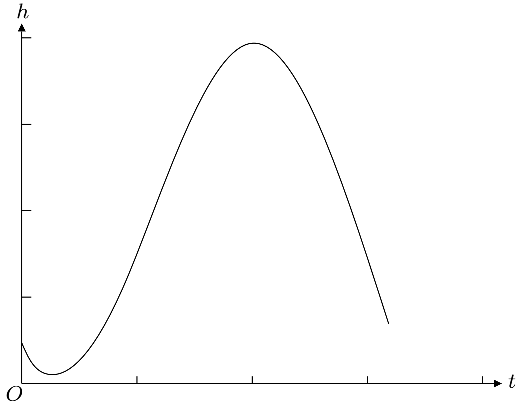
t/s h/cm	۰ ۱/۰۰	۵ ۲/۳۹	۱۰ ۳/۱۱	۱۵ ۳/۵۸	۲۰ ۳/۹۲	۲۵ ۴/۱۷	۳۰ ۴/۳۵	۳۵ ۴/۵۰
t/s h/cm	۴۰ ۴/۶۱	۴۵ ۴/۶۹	۵۰ ۴/۷۶	۵۵ ۴/۸۱	۶۰ ۴/۸۶	— — — — — —	۱۲۰ ۵/۰۰	

درحالت (الف)، بارش با یک سرعت ثابت شروع و ادامه می‌یابد. در این حالت یا آب از ناودان سرازیر خواهد شد، درنتیجه ناودان مناسب نیست، یااینکه وضعیت به حالت پایداری می‌رسد و ارتفاع آب درون ناودان کمتر از ۰/۰۷۵ متر ثابت می‌ماند. در این حالت پایدار داریم $h'(t) = ۰$ ، یعنی $۱/۲۹۹r = ۰/۰۱۴۵\sqrt{h}$، و درنتیجه $h = ۸۰۲۵/۷r^۲$. مثلاً اگر $r = ۰/۰۲۵ \ \frac{cm}{sec}$، حالت پایدار در ارتفاع $h \approx ۵$ سانتی‌متر اتفاق می‌افتد. جدول ۵—۱۰ و شکل ۵—۹ نیز این مقدار تقریبی را تأیید می‌کنند.

درحالت (ب)، که نمودار آن در شکل ۵—۱۰ نشان داده شده است، باران در مدت کوتاهی به‌طور سیل آسا شروع شده و در مدت ۲۰ ثانیه به بیشترین مقدار بارش می‌رسد.



شکل ۵—۱۰ رفتارارتفاع آب در ناودان.



شکل ۵—۱۱ ارتفاع آب در ناودان بر حسب زمان.

جدول ۵—۱۱ جوابهای حاصل از حل عددی معادله‌ی دیفرانسیل مربوط به h .

t/s	۰	۲	۴	۶	۸	۱۰	۱۲	۱۴	۱۶
h/cm	۱٫۰۰	۰٫۲۸	۰٫۱۲	۰٫۳۹	۰٫۸۴	۱٫۴۵	۲٫۱۹	۳٫۰۳	۳٫۹۲
t/s	۲۰	۲۵	۳۰	۳۵	۴۰	۴۵	۵۰	۵۱	
h/cm	۵٫۷۰	۷٫۳۵	۷٫۶۵	۶٫۴۲	۴٫۳۰	۲٫۷۴	۰٫۲۳	خالی	

سپس شدت آن کم شده تا اینکه پس از ۴۰ ثانیه بارش قطع می‌شود. با مشاهده‌ی نمودار r در شکل ۵—۱۰ می‌توانیم حدس بزنیم قبل از آنکه آب باران از لوله‌ی عمودی شروع به خارج شدن نماید، ارتفاع آب در ناودان به سرعت بالا برود. این رفتار را نیز می‌توان از روی تابع h' ، که در حالت (ب) به صورت زیر نوشته می‌شود، پیش‌بینی نمود.

$$h'(t)=\begin{cases}\dfrac{1.299\times\frac{1}{20}\sin\left(\frac{\pi t}{40}\right)-0.0145\sqrt{h}}{\sqrt{0.15h-h^2}}, & 0<t<40\\[2mm] \dfrac{-0.0145\sqrt{h}}{\sqrt{0.15h-h^2}}, & t\geq 40\end{cases}$$

شکل ۵—۱۱ نمودار h به‌عنوان تابعی از زمان، و جدول ۵—۱۱ حل عددی معادله‌ی دیفرانسیل مربوط را نشان می‌دهد. همان‌طور که قبلاً هم پیش‌بینی کردیم، تحت این وضعیت برای بارش، در ابتدا ارتفاع آب در درون ناودان به سرعت بالا می‌رود تا اینکه در لحظه‌ی $t=28$ ثانیه به مقدار ماکزیمم می‌رسد و سپس بعد از گذشت ۵۱ ثانیه به صفر می‌رسد. توجه کنید که در اینجا نیز با یک اشکال در محاسبات ریاضی برخورد می‌کنیم. در واقع در لحظاتی که محاسبات برای مقادیر کوچک h و در نزدیکی‌های صفر صورت می‌گیرد باید به‌کمک تجزیه و تحلیل‌های عددی از ورود خطاهای قابل پیش‌بینی به محاسبات جلوگیری نمود.

۵–۷ چمن میدانهای تنیس و غیره

موضوع) یکی از مشکلات مسابقات تنیس روی چمن تعلیق آن به‌دلیل بارندگی است. در اغلب اوقات پوشش ضد آب برای میدانهای چمن در دسترس نیست و از سر گیری بازیها تنها در صورتی امکان‌پذیر است که لایه بالایی چمن به اندازه‌ی کافی خشک شده باشد. خشک شدن به این صورت انجام می‌پذیرد که آب باران، از لحظه‌ای که باران شروع می‌شود، به خاک زیر چمن نفوذ می‌کند و پس از قطع باران همراه با نفوذ به خاک زیرین چمن مقداری از آن نیز تبخیر شده و به هوای محیط اطراف پراکنده می‌شود. هرچند که به‌کمک ماشینهای مخصوص می‌توان فرآیند خشک شدن را تسریع نمود، برای صدمه نزدن به چمن زمین ورزشگاه ترجیح داده می‌شود که تا خشک شدن چمن منتظر بمانند. آیا می‌توان برای فرآیند خشک شدن چمن یک مدل ریاضی مناسب ارائه نمود؟

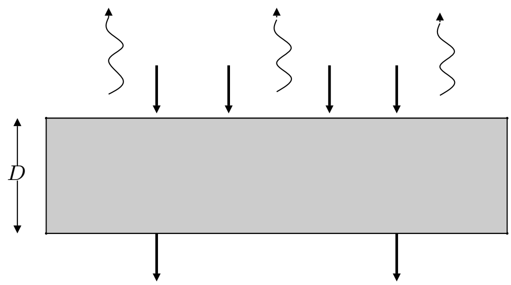
صورت مسأله) آیا با در دست داشتن اطلاعات مربوط به یک بارندگی موضعی می‌توان زمان از سرگیری بازی‌ها را پیش‌بینی نمود؟ فرض کنید خشک شدن چمن از زمانی آغاز می‌شود که بارندگی شروع می‌شود. همچنین فرض کنید که سرعت بارندگی ثابت، به مدت نیم ساعت ادامه می‌یابد و در این مدت ارتفاع آب جمع شده روی چمن ۱/۸ سانتی‌متر است. (توجه کنید که برای محاسبه‌ی حجم آب جمع شده روی چمن باید عدد ۱/۸ سانتی‌متر را در مساحت زمین چمن ضرب نمود.)

طراحی یک مدل ریاضی) این مسأله مشابه با مسأله‌ی مطرح شده در بخش ۵–۶ است و برای ساختن یک مدل ریاضی برای آن می‌توان از اصل جریان استفاده نمود: یعنی

دبی حجمی افزایش آب در چمن = سرعت آب ورودی به چمن – سرعت آب خروجی از چمن

جدول ۵–۱۲ عوامل شرکت کننده در مدل‌سازی فرآیند خشک شدن چمن میدانهای تنیس.

شرح عامل	نوع	نماد	واحد
سرعت بارش	متغیر ورودی	$r(t)$	$m\ s^{-1}$
زمان	متغیر ورودی	t	s
مساحت زمین چمن	پارامتر ورودی	A	m^2
ضخامت چمن	پارامتر ورودی	D	m
مقدار بارانی که هم اینک در چمن جمع شده	متغیر خروجی	$Q(t)$	m
سرعت تبخیر	متغیر ورودی	$e(t)$	$m\ s^{-1}$
سرعت نفوذ آب به خاک زیر چمن	متغیر ورودی	$s(t)$	$m\ s^{-1}$
ثابت‌های تناسب	پارامترهای ورودی	a, b	s^{-1}
زمانی که در آن بارش باران متوقف می‌شود	متغیر ورودی	c	s



شکل ۵—۱۲ وضعیت زمین چمن به هنگام بارندگی.

عوامل شرکت کننده در این مدل در جدول ۵—۱۲ نشان داده شده‌اند. در جدول ۵—۱۲ واحد در نظر گرفته شده برای Q متر است. باید توجه داشت که با ضرب مقدار Q در مساحت چمن حجم آب جمع شده روی چمن در هر لحظه محاسبه می‌شود. همچنین توجه کنید که واحدهای در نظر گرفته شده برای e و s متر بر ثانیه هستند که وقتی در A ضرب می‌شوند سرعت حجمی جریان‌های مربوط را نتیجه می‌دهند. شکل ۱۲.۵ که با وضوح بیشتری مدل مورد بحث را نمایش می‌دهد در نظر بگیرید. با توجه به فرضهای مسأله $Q(0) = 0$. چون سرعت حجمی جریان آب ورودی برابر است با حاصل‌ضرب سرعت بارش در مساحت چمن، مدل مربوط به محاسبه‌ی سرعت حجمی جریان ورودی بسیار ساده و به صورت

$$\text{سرعت حجمی جریان ورودی} = r(t)A$$

می‌باشد. برای تعیین سرعت جریان خروجی، باید مراحل محو شدن آب از روی چمن را مدنظر قرار دهیم. همان‌طور که قبلاً نیز گفتیم، این امر با نفوذ آب به خاک زیر چمن یا تبخیر صورت می‌گیرد. در موقعی‌که بارش باران ادامه دارد، احتمال تبخیر آب بسیار کم است و درنتیجه تنها سرعت نفوذ آب به خاک زیرین چمن را مدل‌سازی می‌کنیم. این سرعت متناسب است با مقدار آبی که هم اینک در چمن موجود است، یعنی

$$s(t) = aQ(t)$$

به محض اینکه بارش باران قطع می‌شود، نفوذ آب به داخل خاک ادامه پیدا می‌کند و همراه با این نفوذ تبخیر آب نیز شروع می‌شود. سرعت تبخیر آب به درجه حرارت و رطوبت محیط اطراف بستگی دارد. در ضمن تبخیر آب از لایه‌ی بالایی آب موجود روی سطح چمن شروع می‌شود. برای ساده ساختن مدل، سرعت تبخیر آب را متناسب با مقدار

آب درون چمن در نظر می‌گیریم. خواهیم داشت

$$e(t) = bQ(t)$$

به این ترتیب می‌توان معادله‌ی دیفرانسیل مربوط به مقدار آب روی چمن را به‌صورت زیر نتیجه‌گیری نمود:

$$\dot{Q}(t) = \begin{cases} r(t)A - aQ(t), & 0 < t < c \\ -aQ(t) - bQ(t), & c < t \end{cases}$$

توجه کنید که با در نظر گرفتن عوامل و فرضهای دیگر برای سرعت نفوذ آب در خاک یا تبخیر آن، می‌توان مدل را طوری ساخت که با واقعیت انطباق بیشتری داشته و در عین حال پیچیده‌تر باشد.

برای بررسی مدل ارائه شده باید پارامترهای a و b، سرعت بارش و زمان c تشخیص داده شوند. پارامترهای a و b از روی داده‌های متکی بر تجربه و استفاده از تکنیک‌های برازش قابل تشخیص هستند. البته در اینجا تنها به مقادیر از پیش تعیین شده‌ی $a = 0/001\ s^{-1}$ و $b = 0/0005\ s^{-1}$ اکتفا کرده و انجام عملیات برازش را ارائه نمی‌دهیم. چون فرض کرده‌ایم که باران باسرعت ثابت و به مدت نیم ساعت باریده و در این مدت $1/8$ سانتی‌متر آب در چمن جمع شده است، می‌توانیم بگوییم که $c = 1800$ ثانیه و

$$r(t) = \frac{0/018}{1800} = 10^{-5}\ m\ s^{-1}$$

حل ریاضی مدل پیشنهادی) با توجه به مقادیر a و b، سرعت بارش و زمان c که در بالا بیان شدند، برای هر یک متر مربع از زمین چمن، یعنی برای $A = 1\ m^2$ داریم:

$$\dot{Q}(t) = \begin{cases} 10^{-5} - 10^{-3}Q(t), & 0 < t < 1800 \\ -10^{-3}Q(t) - 5 \times 10^{-4}Q(t), & 1800 < t \end{cases}$$

مشاهده می‌شود که هر دو معادله‌ی فوق معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ی اول بسیار ساده هستند که با در نظر گرفتن شرایط اولیه‌ی مربوط، مثل $Q(1800) \approx 0/00835$، جواب منحصر به‌فرد زیر به‌دست می‌آید.

$$Q(t) = \begin{cases} 0/01[1 - \exp(-0/001\ t)], & 0 < t < 1800 \\ 0/124 \exp(-0/0015\ t), & 1800 < t \end{cases}$$

تفسیر حل ریاضی مدل پیشنهادی) دومین معادله به‌دست آمده برای Q نحوه‌ی کاهش آب درون چمن بعد از توقف باران را نشان می‌دهد. اگر برای از سرگیری مسابقات شرط

خشک شدن چمن به به‌طور کامل قید شود، باید معادله‌ی $\exp(-۰/۰۰۱۵\ t) = ۰$ را حل نمود که امکان‌پذیر نیست. اما اگر گفته شود که کاهش آب درون چمن تا میزان ۱۰ در صد مقدار اولیه نیز شرایط را برای ادامه بازی فراهم می‌کند، می‌توان با حل معادله‌ی

$$۰/۰۰۰۸۳۵ = ۰/۱۲۴ \exp(-۰/۰۰۱۵\ t)$$

مقدار $t \approx ۳۳۳۴$ ثانیه را بدست آورد که نشان می‌دهد پس از توقف باران باید ۱۵۳۴ ثانیه، یا تقریباً ۱٦ دقیقه، صبر نمود تا بتوان بازی‌ها را از سر گرفت. حال اگر میزان ۱۰ درصد فوق ۵ درصد دیگر نیز کاهش یابد، به معادله‌ی

$$۰/۰۰۰۰۴۱۷۵ = ۰/۱۲۴ \exp(-۰/۰۰۱۵\ t)$$

می‌رسیم که از حل آن $t \approx ۳۷۹٦$ حاصل شده و نشان می‌دهد که باید ۸ دقیقه‌ی دیگر نیز برای از سرگیری بازی‌ها صبر نمود.

۵–۸ پرش با چتر نجات

موضوع و صورت مساله) وقتی با چتر نجات از یک هواپیما پرش انجام می‌شود، در قسمت اول و در ارتفاع بالا غالباً این امر به صورت سقوط آزاد است. بعد از گذشت یک مدت زمان مناسب چترباز چتر خود را برای یک فرود ملایم و کامل باز می‌کند. سؤال مهم و اساسی برای چترباز این است که چه موقع برای باز کردن چتر خود تصمیم گیری کند. مسلماً مدت زمان این تصمیم‌گیری نباید طولانی باشد؛ درغیراین‌صورت سرعت فرود به اندازه‌ای زیاد خواهد شد که منجر به مرگ یا صدمه‌ی شدید برای چترباز می‌شود. از طرف دیگر، لایه‌های بالایی جو بسیار نازک است، درنتیجه سقوط آزاد در ارتفاعات بالا باعث ازدیاد سرعت شده و موجب لذت از پرش در آن قسمت می‌شود. از دلایل دیگری که ممکن است برای باز نکردن چتر بلافاصله بعد از پرش آورده شود نزدیک بودن چترباز به هواپیما یا سایر چتربازها است. با توجه به این واقعیات به‌نظر می‌رسد که ساختن یک مدل ریاضی برای مسیر حرکت پرش یک چترباز موضوع جالبی باشد. این مدل باید به گونه‌ای ساخته شود که توسط آن بتوان لحظه‌ی بهینه‌ای را تعیین نمود که در آن باز شدن چتر ضروری باشد.

فرض کنید هواپیما در ارتفاع ۵۰۰ متر با سرعت ۱۲۵ متر بر ثانیه به‌طور افقی در حال پرواز است. به‌نظر می‌رسد که جرم چترباز همراه با چتر نجاتش از اطلاعات مورد نیاز در این مدل‌سازی باشد، در عین حال ثابت می‌شود که ارزیابی دقیق مقاومت هوا و تغییر آشکار کشش هوا به هنگام باز شدن چتر از اهمیت بیشتر برخوردار است. یکی دیگر از

عوامل مهم در این مدل‌سازی سرعت نهایی چترباز در سقوط آزاد است که معمولاً ۱۲۰ مایل بر ساعت در نظر گرفته می‌شود. با توجه به اینکه یک فرود ملایم برای چترباز مدنظر است، معمول است که این فرود را مشابه با فرود از بالای یک دیوار با ارتفاع ۱۲ پا در نظر بگیرند. بنابراین، می‌توان سرعت برخورد چترباز به زمین را معادل با سرعت وی به هنگام برخورد به زمین از بالای یک دیوار به ارتفاع ۱۲ پا دانست. به این ترتیب، اگر این سرعت را با v نمایش دهیم، با صرف‌نظر از مقاومت هوا برای حرکت در یک فاصله‌ی کوتاه و استفاده از فرمول $v^۲ = ۲gh$ ، که برای فرود از ارتفاع h دارای اعتبار است، خواهیم داشت

$$v^۲ = ۲ \times ۹/۸۰۶۵ \times ۱۲ \times \frac{۱۲}{۳۹}$$

و درنتیجه $v \approx ۸/۴۷$ متر بر ثانیه بدست می آید.

اگر ضریب مقاومت هوا به هنگام پرش از دیوار را k نامیده و آن‌را متناسب با مربع سرعت فرض کنیم، آنگاه

$$k = \frac{g}{v^۲} = \frac{۹/۸۰۶۵}{(۸/۴۷)^۲} \approx ۰/۱۳۶۷\, m^{-۱}$$

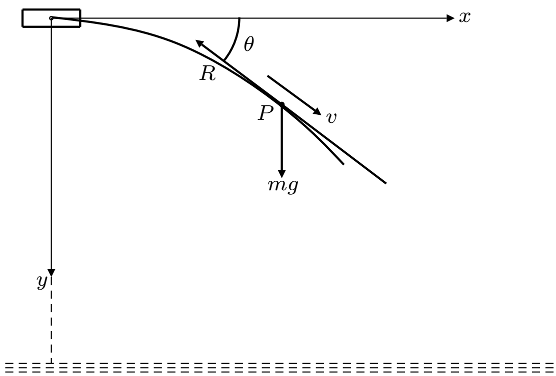
این ضریب برای سقوط آزاد از فرمول سرعت در سقوط آزاد، یعنی $v = \frac{g}{k}$ ، محاسبه می‌شود. بنابراین ضریب مقاومت هوا در سقوط آزاد برابر است با

$$k = \frac{۹/۸۰۶۵}{۵۳/۶۴۵} \approx ۰/۱۸۲۸\, s^{-۱}$$

توجه کنید که در فرمول فوق عدد ۵۳/۶۴۵ متر بر ثانیه تبدیل یافته‌ی ۱۲۰ مایل بر ساعت مربوط به سرعت نهایی چترباز در حالت سقوط آزاد است.

جدول ۵–۱۳ عوامل شرکت کننده در مدل‌سازی پرش با چتر نجات.

شرح عامل	نوع	نماد	واحد
مسافت افقی طی شده توسط چترباز	متغیر خروجی	$x(t)$	m
مسافت قائم فرود آمده توسط چترباز	متغیر خروجی	$y(t)$	m
زمان	متغیر ورودی	t	s
سرعت چترباز	متغیر ورودی	v	$m\, s^{-۱}$
جرم چترباز به همراه چترش	پارامتر ورودی	M	kg
نیروی مقاومت هوا	متغیر خروجی	R	N
ضریب مقاومت هوا	پارامتر ورودی	k	$s^{-۱}$
شتاب جاذبه‌ی زمین	پارامتر ثابت	g	$m\, s^{-۲}$
زاویه‌ی شیب مسیر چترباز	متغیر خروجی	θ	deg
ارتفاع اولیه	پارامتر ورودی	h	m
سرعت اولیه‌ی افقی	پارامتر ورودی	u	$m\, s^{-۱}$



شکل ۵—۱۳ نمودار حرکت چترباز.

طراحی یک مدل ریاضی) نمودار نشان داده شده در شکل ۵—۱۳ موضوع مربوط به این مسأله را با وضوح بیشتر نشان می‌دهد. همچنین از شکل ۵—۱۳ می‌توان عوامل مهم شرکت کننده در ساختن مدل را تشخیص و آنها را در جدول ۵—۱۳ نمایش داد.

با به‌کاربردن قانون نیوتن برای حرکت دو معادله‌ی دیفرانسیل، یکی برای حرکت افقی و یکی برای حرکت عمودی به‌دست می‌آید. در واقع، برای حرکت افقی معادله‌ی $-R\cos\theta = M\dfrac{d^{۲}x}{dt^{۲}} = M\ddot{x}$ و برای حرکت عمودی معادله‌ی $-R\sin\theta + Mg = M\dfrac{d^{۲}y}{dt^{۲}} = M\ddot{y}$ به‌دست خواهد آمد. در اینجا $R = Mkv^n$ ، $v\cos\theta = \dot{x}$ و $v\sin\theta = \dot{y}$ ، که در آن $\dot{x}$ و $\dot{y}$، به ترتیب، مؤلفه‌های سرعت هستند، و نمای n برای سقوط آزاد ۱ و برای تأثیر در لحظه‌ی باز شدن چتر ۲ می‌باشد. در ضمن از اینکه $\dot{x}$ و $\dot{y}$ به ترتیب مؤلفه‌های افقی و قائم هستند، رابطه‌ی $v^{۲} = \dot{x}^{۲} + \dot{y}^{۲}$ نیز برقرار است. بنابراین می‌توان متغیرهای θ و v را از روابط فوق حذف نمود و به معادلات دیفرانسیل زیر دست یافت:

$$\begin{cases} -k\dot{x}(\dot{x}^{۲} + \dot{y}^{۲})^{\frac{n-۱}{۲}} = \ddot{x} \\ \\ -g - k\dot{y}(\dot{x}^{۲} + \dot{y}^{۲})^{\frac{n-۱}{۲}} = \ddot{y} \end{cases}$$

دستگاه معادلات دیفرانسیل فوق یک مدل ریاضی برای حرکت پرش با چتر نجات معرفی می‌کند. این دستگاه بدون کمک گرفتن از نرم افزارهای کامپیوتری، برای یافتن جوابهای تقریبی، قابل حل نیست. در اینجا توجه کنید که مسیر حرکت چترباز در تمام مدت در درون یک صفحه، که با نماد xOy مشخص می‌شود، فرض شده‌است. در ضمن هر دو معادله، به‌دلیل وجود توان دوم برای $\dot{x}$ و $\dot{y}$ ، غیرخطی می‌باشند. با

وجوداین، اگر برای قسمت اول حرکت مقاومت هوا را مستقیماً وابسته به سرعت در نظر بگیریم، آنگاه $n = ۱$ و معادلات فوق به گونه‌ای ساده خواهند شد که به‌راحتی قابل انتگرال‌گیری بوده و می‌توان برای آنهاجوابهای تحلیلی پیدا نمود.

حل ریاضی مدل پیشنهادی) همان‌طور که در فوق توضیح داده شد با $n = ۱$ ، به دستگاه معادلات دیفرانسیل

$$\begin{cases} \ddot{x} = -k\dot{x} \\ \ddot{y} = -k\dot{y} + g \end{cases}$$

می‌رسیم. به‌کمک داده‌های فوق می‌توان مقدار k و شرایط اولیه را نیز به شرح زیر پیدا نمود: $k = ۰/۱۸۲۸$ ، $x(۰) = ۰$ ، $\dot{x}(۰) = u = ۱۲۵$ ، $y(۰) = ۰$ و $\dot{y}(۰) = ۰$. با دو بار انتگرال گیری از هر یک از معادلات این دستگاه و استفاده از شرایط اولیه به آسانی می‌توان جوابهای زیر را برای این دستگاه به شرح زیر پیدا نمود:

$$\begin{array}{l} x(t) = \frac{u}{k}\left[۱ - \exp(-kt)\right] \\ y(t) = \frac{gt}{k} - \frac{g}{k^۲}\left[۱ - \exp(-kt)\right] \end{array}$$

تا زمانی‌که فرض عدم وجود مقاومت هوا پا برجاست و چتر نجات باز نشده است، این دو معادله مسیر حرکت سقوط چترباز را نشان می‌دهند. در واقع با حذف متغیر t در بین این دو معادله می‌توان به رابطه‌ی زیر بین x و y دست یافت.

$$y = -\frac{gx}{ku} - \frac{g}{k^۲}\ln\left(۱ - \frac{kx}{u}\right)$$

برای پاسخگویی به این سؤال که چه زمانی مناسب‌ترین لحظه برای باز کردن چتر است، لحظه‌ای را مشخص می‌کنیم که در آن سرعت چترباز در سقوط آزاد به می‌نیمم مقدار خود می‌رسد. برای مشخص کردن این لحظه از دو تابع x و y بر حسب t مشتق می‌گیریم. خواهیم داشت

$$\begin{array}{l} \dot{x}(t) = u\exp(-kt) \\ \dot{y}(t) = \dot{u}(t) = \frac{g}{k}[۱ - \exp(-kt)] \end{array}$$

که چون $v^۲(t) = \dot{x}^۲(t) + \dot{y}^۲(t)$ ، داریم

$$v^۲(t) = u^۲\exp(-۲kt) + \left(\frac{g}{k}\right)^۲\left[۱ - ۲\exp(-kt) + \exp(-۲kt)\right]$$

چون در جایی که $v^۲$ مینیمم است v نیز مینیمم است، به حل معادله‌ی $\frac{dv^۲}{dt} = ۰$ می‌پردازیم. محاسبات مربوط نشان می‌دهد که

$$t = \frac{۱}{k}\ln\left(\frac{g^۲ + k^۲u^۲}{g^۲}\right)$$

و در این لحظه $v = \frac{gu}{\sqrt{g^۲ + k^۲u^۲}}$. در اینجا به آسانی می‌توان تحقیق نمود که

$$\frac{gu}{\sqrt{g^۲+k^۲u^۲}} < u(\text{سرعت اولیه})$$

$$\frac{gu}{\sqrt{g^۲+k^۲u^۲}} < \frac{g}{k}(\text{سرعت در انتهای فرود}).$$

در ضمن به‌کمک اطلاعات داده شده و معادلات به‌دست آمده، داریم که سرعت چترباز بعد از $t = ۱۰/۱۸$ ثانیه به مینیمم مقدار خود یعنی $۴۹/۳۱$ متر بر ثانیه می‌رسد و در این لحظه موقعیت چترباز دارای مختصات $x = ۵۷۷/۵$ متر و $y = ۲۹۸/۴$ می‌باشد.

اکنون یک بار دیگر به دستگاه معادلات دیفرانسیل غیرخطی به‌دست آمده برای x و y باز می‌گردیم. می‌توان نشان داد که امکان حل عددی این معادلات، توسط کامپیوتر، برای مقادیر کلی k و n وجود دارد. به‌عنوان مثال، اگر مدل خطی در سقوط آزاد رد شود و $n = ۲$ مدنظر قرار گیرد، در آن‌صورت مقدار جایگزین برای k از فرمول $g = kv^۲$، و در نظر گرفتن سرعت چترباز در لحظه‌ی فرود، قابل نتیجه‌گیری است. در اینجا نیز هنوز چترباز کاهشی را در سرعت فرودش مشاهده می‌کند. البته، این کاهش پس از رسیدن به یک مقدار مینیمم شروع به افزایش می‌کند.

در زمانی‌که چترنجات باز می‌شود، تغییر ناگهانی در نیروهای مقاومت موجب تکان شدیدی می‌شود. این تکان بسیار قابل ملاحظه است و احتمالاً برای چترباز ناخوشایند است. در اینجا است که پیشنهاد می‌شود چترباز زمانی چتر خود را باز کند که سرعت فرودش به مینیمم مقدار رسیده است. این مقدار تغییر در نیروی مقاومت را می‌توان با محاسبه‌ی اختلاف مقدار R قبل و بعد از باز شدن چتر محاسبه نمود. در واقع قبل از باز شدن چتر

$$R = mk_۱v = m \times ۰/۱۸۲۸ \times ۴۹/۳۱$$

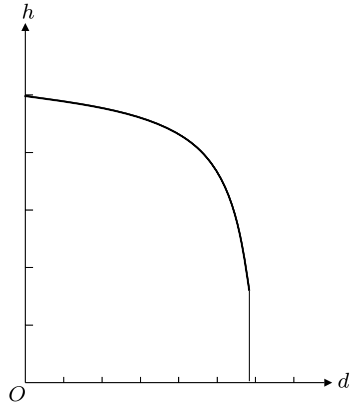
و بعد از باز شدن چتر

$$R = mk_۲v^۲ = m \times ۰/۱۳۶۷ \times (۴۹/۳۱)^۲$$

این اختلاف تقریباً برابر است با $۳۰۰m$ نیوتن که بسیار زیاد است، در عین حال چون باز شدن چتر سریعاً اتفاق نمی‌افتد، این تغییر در طول چندین ثانیه به وقوع می‌پیوندد. برای شبیه‌سازی ادامه‌ی حرکت چترباز، دستگاه معادلات دیفرانسیل غیرخطی مربوط به x و y را در حالتی که $k = ۰/۱۳۶۷$ و $n = ۲$ حل می‌کنیم.

جدول ۵—۱۴ جوابهای دستگاه معادلات دیفرانسیل حاصل از حل توسط کامپیوتر.

شرح وضعیت	سرعت بر حسب متر بر ثانیه	y متر	t ثانیه
وضعیت در لحظه‌ی شروع	۱۲۵٫۰۰	۰	۰
سقوط‌آزاد	۹۱٫۹۶	۱۷٫۴۳	۲
سقوط‌آزاد	۶۶٫۲۹	۶۲٫۳۷	۴
سقوط‌آزاد	۵۴٫۹۵	۱۲۶٫۴۱	۶
سقوط‌آزاد	۵۰٫۳۷	۲۰۳٫۶۹	۸
چتر نجات باز می شود	۴۵٫۰۲	۲۹۰٫۱۶	۱۰
تاثیر باز شدن چتر	۱۹٫۵۴	۳۲۳٫۴۹	۱۱
سرعت افقی قابل صرفنظر است	۸٫۷۹	۳۳۳٫۳۳	۱۲
مسیر فرود تقریبا افقی است	۸٫۵۰	۳۴۱٫۸۹	۱۳
مسیر فرود تقریبا افقی است	۸٫۴۷	۳۵۰٫۳۷	۱۴
سرعت پایانی	۸٫۴۷	۳۵۴٫۸۴	۱۵
⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮
فرود	۸٫۴۷	۵۰۰٫۰۰	۳۳

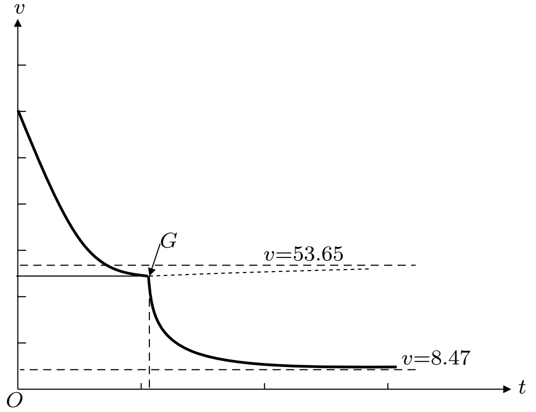


شکل ۵—۱۴ مسیر حرکت چترباز.

چون ارتفاع در لحظه‌ای که پرش آغاز می شود ۵۰۰ متر در نظر گرفته شده است، تقریباً ۲۰۰ متر دیگر برای فرود باقی مانده است. حل این معادلات به‌کمک شبیه‌سازی کامپیوتری انجام شده و جوابهای عددی مورد نیاز در جدول ۱۴.۵ نشان داده شده‌اند.

شکل ۵—۱۴ مسیر فرود چترباز را در طول پرش نشان می‌دهد. در این شکل محور عمودی، یعنی h، بیانگر ارتفاع در بالای زمین و محور افقی، یعنی d، بیانگر فاصله‌ی افقی طی شده است. شکل ۵—۱۵ تغییرات سرعت بر حسب زمان در طول این فرود نشان

می‌دهد. در این شکل نقطه‌ی G جایی است که چترباز می‌شود، خط $v = ۵۳/۶۵$ سرعت نهایی چترباز بدون چتر را نشان می‌دهد، و خط $v = ۸/۴۷$ بیانگر سرعت نهایی چترباز با چتر نجات است.



شکل ۵–۱۵ تغییرات سرعت چترباز.

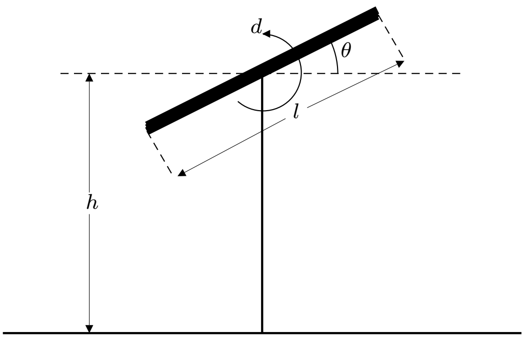
۵–۹ تمرین‌ها

۱) مسافت طی شده در طول انجام کار

کارمندان یک شرکت در خواست باز پرداخت هزینه‌هایی که برای سفرهای مربوط به کارهای شرکت متحمل شده‌اند نموده‌اند. هر فرد متقاضی باید فرمی را به صورت زیر تهیه و ارسال نماید.

زمان مسافرت	مسیر مسافرت		جمع مسافت طی شده
	از	به	
X	A	B	m

از کارشناسی که درخواستها را بررسی می‌کند خواسته شده است که صحت مسافت ادعا شده را به‌کمک نقشه‌ای که در اختیارش قرار داده شده تحقیق کند. این کارشناس به‌دلیل کمبود وقت مبادرت به اندازه‌گیری مسیر مستقیم بین A و B نموده است. واضح است که این روش اندازه‌گیری مسافت واقعی را دست کم می‌گیرد. آیا می‌توانید مدلی را پیشنهاد کنید تا مسافت m را به‌طور تقریبی در مدت زمان کوتاهی محاسبه کند؟



شکل ۵–۱۶ نمودار پرتاب سکه.

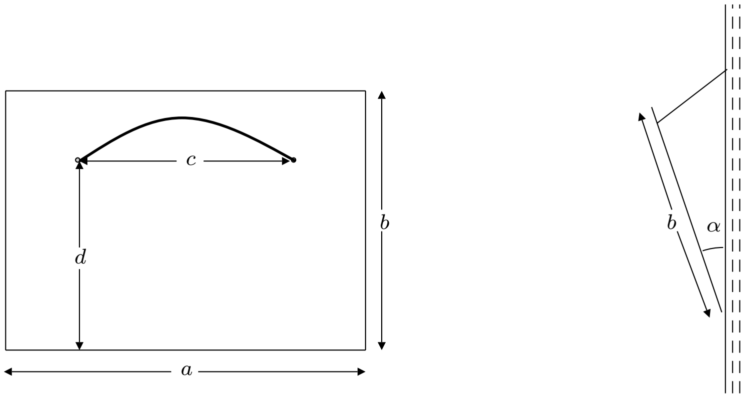
۲) پرتاب سکه

نتیجه‌ی پرتاب یک سکه معمولاً به صورت یک متغیر تصادفی مدل‌سازی می‌شود به‌گونه‌ای که برای آن احتمال مشاهده‌ی هر کدام از دو روی سکه مساوی است. در عالم واقع این نتیجه بستگی کامل به موقعیت اولیه‌ی سکه قبل از پرتاب دارد، که اگر این موقعیت و سایر عوامل مربوط کاملاً شناخته شوند نتیجه‌ی پرتاب قابل پیش‌بینی است. شکل ۵–۱۶ مدل هندسی ساده‌ای را از موقعیت سکه قبل از پرتاب مثال می زند، که در آن سکه‌ی مورد بحث به صورت یک پاره‌خط به طول l نمایش داده شده، در موقعیتی قرار دارد که با افق زاویه‌ی θ می‌سازد و مرکز آن دارای ارتفاع h تا سطح افقی میزی است که سکه پس از پرتاب روی آن قرار می‌گیرد. فرض کنید سکه طوری تنظیم شده است که بعد از پرتاب با سرعت زاویه‌ای $\frac{d\theta}{dt}$ حول مرکز بچرخد و تحت نیروی جاذبه‌ی زمین به گونه‌ای فرود آید که مرکز آن همواره روی خط قائم گذرنده از مرکز (مطابق شکل ۵–۱۶) قرار گیرد. همچنین فرض کنید نتیجه‌ی پرتاب درست در لحظه‌ی برخورد یکی از دو انتهای سکه به میز تعیین شود. معنای این فرض آن است که در مدل‌سازی بالا و پایین آمدن بعدی سکه در نظر گرفته نشود.

هدف ما این است که تعیین کنیم چگونه نتیجه‌ی پرتاب به h ، l ، θ و $\frac{d\theta}{dt}$ وابسته است.

۳) آویزان کردن تابلو

قرار است که یک تابلو (به شکل مستطیل) توسط سیمی که در پشت آن نصب شده است از قلابی که در دیوار عمودی قرار گرفته دارد آویزان شود (شکل ۵–۱۷).



شکل ۵—۱۷ تصاویر فرضی آویزان کردن تابلو.

پارامترهای مربوط به این مدل عبارتند از طولهای a ، b ، c و d که در شکل ۵—۱۷ نیز مشخص شده‌اند، طول سیم و عدد ثابت اصطکاک بین تابلو و دیوار.

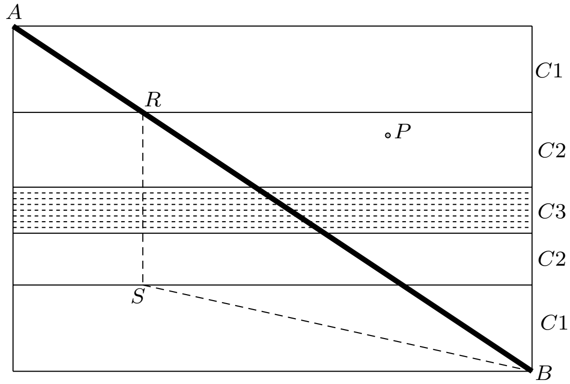
مدلی را طراحی کنید که توسط آن بتوان چگونگی وابستگی بین کشش سیم و پارامترهای دیگر را مشاهده نمود. بعلاوه، بتوان از روی آن تصمیم گرفت که طول سیم و نقاط اتصال باید چگونه انتخاب شوند تا احتمال پاره شدن سیم صفر باشد.

از روی این مدل زاویه‌ی شیب تابلو را نیز پیدا کنید.

برای چه دامنه‌ای از این پارامترها، در زمانیکه به تابلو به صورت افقی نگاه می‌شود، سیم اتصال دهنده از ضلع بالایی تابلو قابل مشاهده است؟

۴) بزرگراه

قرار است که یک بزرگراه بین دو شهر A و B احداث شود. شهر B در فاصله‌ی ۲۰ کیلومتر از طرف جنوب و ۳۰ کیلومتر از طرف شرق شهر A قرار دارد. در ضمن رشته کوهی وجود دارد که به‌طور تقریبی از شرق به غرب کشیده شده و در بین این دو شهر قرار دارد. هزینه‌ی ساخت بزرگراه بستگی به طبیعت ناحیه دارد و همان‌طور که در شکل ۵—۱۸ نشان داده شده است تمام ناحیه‌ی مورد نظر به سه ناحیه‌ی مختلف که بطور موازی از شرق به غرب کشیده شده‌اند تقسیم شده است. در این شکل $C1$ نشان دهنده‌ی دشت، $C2$ نشان دهنده‌ی زمین بلند، و $C3$ نشان دهنده‌ی ناحیه‌ی با کوههای بلند است. وظیفه‌ی شما طرح یک مدل ریاضی است که توسط آن بتوان با داشتن هزینه‌های مربوط به ساخت بزگراه در هر ناحیه ارزان‌ترین مسیر را تعیین نمود. همان‌طور که در شکل ۵—۱۸ نیز مشاهده می‌شود پاره خط AB نشان دهنده‌ی کوتاه‌ترین مسیر بین این دو شهر است اما ممکن است که این مسیر با ارزان‌ترین هزینه همراه نباشد.



شکل ۵–۱۸ نقشه‌ی مکان احداث بزرگراه.

مسیری مثل $ARSB$ دارای کمترین مسیر کوهستانی است، اما آیااین بهترین راه حل است؟ چطور می‌توانید مدل خود را تحت دو محدودیت زیر طراحی کنید؟

۱) وقتی مسیر تغییر جهت می‌دهد، زاویه ای که تشکیل می‌شود حداقل $^\circ$۱۴۰ باشد،

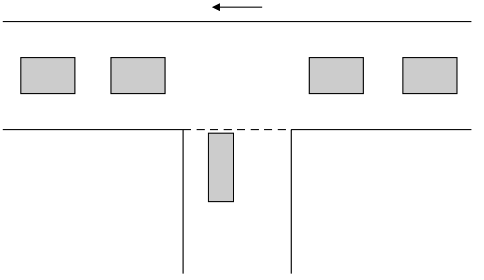
۲) مسیر باید از نقطه‌ی داده شده‌ی P عبور کند تا اینکه جاده‌ای که در این بین وجود دارد را فرا بگیرد.

۵) گذر از خیابان

از بخش راه و حمل ونقل شهرداری یک منطقه سؤال شده است که آیا می‌تواند برای رفاه بیشتر حال عابرین احداث یک گذرگاه عابر پیاده را روی نقطه‌ای خاص از خیابان تصویب نماید. چون وضعیت ترافیک در این خیابان معتدل است، عابرین پیاده عادت کرده‌اند بدون آنکه از نزدیک‌ترین گذرگاه عابر پیاده استفاده کنند، با استفاده از وقفه‌ی بین اتومبیل‌ها خود را به آن‌طرف خیابان برسانند. شهرداری منطقه نمی‌تواند برای هر نقطه‌ی قابل قبول برای عابرین یک گذرگاه عابر پیاده احداث نماید، اما در صورتی‌که در نقطه‌ی مورد نظر میانگین زمان بیشتر از ۱۵ ثانیه باشد می‌توان برای آن نقطه احداث یک گذرگاه عابر پیاده را مدنظر قرار داد. با در نظر گرفتن فرضها و پارامترها ومتغیرهای شرکت کننده‌ی مربوط به این موضوع، مدلی را طراحی کنید که شهرداری منطقه را در این تصمیم گیری یاری کند.

٦) تأخیر رفت آمد اتومبیل‌ها در یک سه راهی

شکل ۵–۱۹ یک جاده‌ی یک طرفه اصلی، که جهتش از راست به چپ است، و یک جاده‌ی فرعی، که وارد جاده‌ی اصلی می‌شود، را نشان می‌دهد (همان‌طور که مشاهده می‌شود گردش به راست برای ورود به جاده‌ی اصلی ممنوع است).



شکل ۵—۱۹ نمودار حرکت اتومبیل‌هادر یک سه‌راهی.

سرعت جریان اتوموبیل‌هایی که در جاده‌ی اصلی حرکت می‌کنند معلوم و مثلاً برابر با q اتومبیل در هر ساعت است. زمانهای وقفه‌ی بین اتومبیل‌هایی که در جاده‌ی اصلی تردد می‌کنند، و از یک نقطه‌ی ثابت اندازه‌گیری می‌شوند، متغیرهای تصادفی مستقل فرض می‌شوند. فرض کنید اتومبیل‌ها در زمانهای تصادفی به جاده‌ی فرعی می‌رسند و راننده‌ی هر خودرو به‌شرط کافی بودن زمان وقفه بین دو اتومبیل، که ورودش به خیابان اصلی را با خطر مواجه نسازد، به جریان ترافیک در خیابان اصلی می‌پیوندد. این وضعیت را می‌توان با این فرض که راننده همواره زمان وقفه‌ی کمتر از مقدار مینیمم T را برای ورود به خیابان اصلی کافی نمی‌داند، مدل‌سازی نمود. اگر در لحظه‌ای که راننده به تقاطع می‌رسد زمان وقفه قابل قبول باشد، زمان انتظار راننده برای ورود به خیابان اصلی برابر صفر است درغیراین‌صورت راننده ناچار است تا رسیدن به یک وقفه‌ی قابل قبول صبر کند. در خصوص فرضهایی مناسب برای مقادیر q و T و پارامترهای دیگری که در این مدل‌سازی شرکت دارند فکر کنید. توزیع زمانهای انتظار در تقاطع را پیدا کنید و چگونگی وابستگی این توزیع را با پارامترهای دیگر مورد بررسی و تحقیق قرار دهید.

۷) زاویه‌ی گردش در راهرو بیمارستان

یکی از مسائل آشنا در بیمارستان‌هایی که بخش جراحی دارند، حمل بیمار با تخت مخصوص از اطاق بیمار به بخش جراحی است. به عبارت دیگر برای آنکه بیمار اذیت نشود، ودر حالی‌که بیمار روی تخت خوابیده است، تخت وی توسط کارکنان مخصوص بیمارستان به سمت بخش جراحی هل‌داده می‌شود. متأسفانه، بعضی از بیمارستانها دارای کریدورهای باریک هستند و معمولاً در گوشه‌ای با زاویه‌ی قائمه به یکدیگر متصل می‌شوند. فرض کنید چنین گوشه‌ی قائمه‌ای بین اطاق بیمار و بخش جراحی وجود دارد. بنابراین، برای عبور تخت‌های چرخدار از این گوشه‌ها ابعاد تخت باید دارای اندازه‌های قابل قبولی باشد. در ضمن برای نگه داشتن بیمارستان در یک وضعیت مطلوب نیاز به نردبان‌ها و الوارهای بلندی است که بتوانند از این گوشه‌ها عبور داده شوند.

در هر یک از حالات فوق با یک مسأله‌ی مدل‌سازی مواجه می‌شویم. مسأله‌ای که در اینجا قابل توجه است این است که تخت یا نردبان برای رد شدن از این گوشه دارای چه طولی باشد تا بتواند در این گوشه دور بزند. همچنین آیا یک تخت معمولی بیمارستان را می‌توان با دور زدن در این گوشه به جلو هل‌داد؟ برای صرفه‌جویی در فضا و دکوراسین کریدور بیمارستان، ممکن است احتیاج به دانستن مینیمم پهنای کریدوری باشیم که بتوان یک تخت معمولی بیمارستان را با دور زدن در گوشه‌ی موجود به جلو هل‌داد.

۸) نام خانوادگی

از شما برای کمک به مطالعه‌ی یک وضعیت اجتماعی در خصوص بقا یا انقراض نام خانوادگی‌ها در خواست همکاری شده است. فرض کنید جامعه‌ی بسته‌ای، که در آن N نفر زندگی می‌کنند، مورد مطالعه قرار گرفته و در لحظه‌ی $t = ۰$ تعداد K نام خانوادگی مختلف وجود دارد. فرض کنید تمام بچه‌های هر ازدواجی نام خانوادگی پدر خود را اختیار کنند.

بر حسب نیاز فرضهای دیگری را مدنظر قرار دهید و مدلی را با هدف پاسخگویی به سؤالات زیر طراحی کنید.

۱) بعد از x نسل توزیع نام خانوادگی‌ها چگونه است؟

۲) احتمال اینکه نام خانوادگی خاصی منقرض شود چیست؟

۳) به‌طور میانگین تا چه مدتی نام خانوادگی خاصی بقا پیدا می‌کند؟

۹) جنگ قیمت‌ها

فرض کنید جایگاه‌های پمپ بنزین توسط شرکت‌های خصوصی ایجاد شده و می‌توانند قیمت بنزین را با توجه به شرایط رأساً تعیین کنند. دو جایگاه پمپ بنزین، که در مقابل یکدیگر در کنار یک جاده‌ی اصلی قرار گرفته‌اند، در حال فعالیت شبانه روزی و رقابت با یکدیگر می‌باشند. با توجه به وجود یک پمپ بنزین دیگر که به فاصله‌ی اندکی از این دو قرار دارد و اینکه سود حاشیه‌ای حاصل از فروش بنزین نسبت به تغییر ناگهانی تقاضا بسیار حساس است، رقابت بین این دو جایگاه بسیار شدید است. از طرف دیگر، بازار بنزین بسیار گسترده است و هر دو جایگاه دریافته‌اند که، هر چند که هر دو دارای مشتریان معمول هستند، بسیاری از فروش آنها به مشتریانی بازمی گردد که تحت تأثیر موضوعی به آنها مراجعه می‌کنند.

در یکی از روزها یکی از این دو جایگاه به‌طور ناگهانی قیمت بنزین در هر لیتر را، برطبق یک آگهی که روی تابلو بزرگ جایگاه نصب کرده است، برای جلب نظر مشتریان

کاهش می‌دهد. در نتیجه‌ی این تصمیم جایگاه دیگر مشاهده می‌کند که میزان فروش آن پایین آمده است. مدیران جایگاه دوم بلافاصله تصمیم می‌گیرند که برای جبران این کاهش و وفق دادن خود با شرایط موجود قیمت را کاهش دهند و به این ترتیب با جایگاه اول وارد جنگ قیمت می‌شوند. البته در این راستا جایگاه دوم می‌خواهد استراتژی خاصی را ابداع کند که همراه با کاهش دادن قیمت بنزین، سود حاصل از فروش را تا حد امکان بالا ببرد. اگر برای تهیه‌ی این استراتژی از شما کمک خواسته شود چگونه می‌توانید با طرح یک مدل مناسب جایگاه دوم را در راه رسیدن به هدفش یاری کنید.

۱۰) برف‌روبی

در مواقعی که به‌طور ناگهانی برف سنگین می‌بارد، جاده‌های روستایی به آسانی بسته می‌شوند. بنابراین ضروری است که انجمن‌های محلی از قبل در خصوص این نوع وضعیت تسهیلات لازم را فراهم نموده و در چنین مواقعی برای برف‌روبی به سرعت اقدام نمایند. اکنون موقعیت خاصی را در نظر بگیرید که در آن ۱۰ کیلومتر از جاده‌ای با برف سنگینی با عمق یکسان ۰/۵ مترپوشیده شده و باید سریعاً برف‌روبی شود. بدون در نظر گرفتن اینکه به محض شروع عملیات برف‌روبی باریدن برف سنگین دیگری آغاز می‌شود، انجام عملیات برف‌روبی به‌طور عادی و گام به گام به کندی صورت می‌پذیرد. به همراه افزایش عمق برف، سرعت برف‌روبی کاهش می‌یابد تا اینکه، در عمقی معین، ادامه‌ی عملیات برف‌روبی امکان‌پذیر نمی‌شود.

واضح است که سرعت بارش جدید برف در پیشرفت عملیات برف‌روبی تأثیر دارد و سؤالی که در اینجا پیش می‌آید این است که آیا عملیات برف‌روبی می‌تواند پاک کردن این ۱۰ کیلومتر را به انجام برساند یا اینکه برف به گونه‌ای با سرعت انباشته می‌شود که عملیات گیرافتاده و کاملاً متوقف می‌شود.

باتوجه به داده‌های زیر مدلی را طراحی کنید که پاسخگوی سؤالات فوق باشد.

۱) در مجموع مدت بارش برف یک ساعت است.

۲) سرعت بارش برف متغیر است، اما ماکزیمم شدت آن ۰/۱ سانتیمتر بر ثانیه است.

۳) عملیات برف‌روبی در زمانی‌که عمق برف به ۱/۵ متر می‌رسد گیرافتاده و کاملاً متوقف می‌شود.

۴) در جاده‌ای که کاملاً خالی از برف است، سرعت برف‌روبی ۱۰ متر بر ثانیه است.

کتاب‌نامه

[1] Dilwyn Edwards and Michael Hamson *"Guide to Mathematical Modelling"*, M. MacMillan, 1989.

[2] Dilwyn Edwards and Michael Hamson *"Mathematical Modelling Skills"*, MacMillan College Work out Series, 1996

[3] Neil Gershenfeld *"The Nature of Mathematical Modelling"*, Cambridge University Press, 1999.

[4] Frank R. Giordano, Maurice D., William P. Fox *"A First Course in Mathematical Modelling"*, Thomson Learning College, 2002.

[5] Mike Mesterton-Gibbons *"A Concrete Approach to Mathematical Modelling"*, Wiley-Interscience Paperback Series, (2007).

[6] Douglas Mooney and Randall Swift *"A Course in Mathematical Modelling"*, The Mathematical Association of America, 1999.

An Introduction to Mathematical Modelling

By:

Dr. Mohammad Taghi Jahandideh

Assistant Professor of College of Mathematical Sciences
Isfahan University of Technology