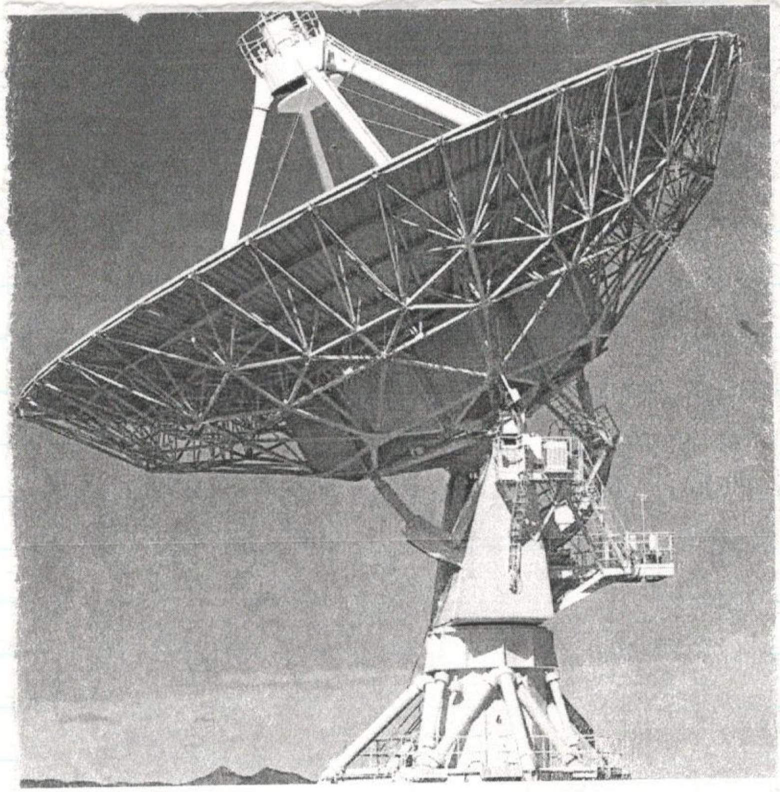


بخش ب
جبر خطی و آنالیز برداری

فصل ۷ جبر خطی: ماتریس‌ها، بردارها، دترمینان‌ها، دستگاه‌های خطی

فصل ۸ جبر خطی: مسائل مقادیر ویژه ماتریس

فصل ۹ حساب دیفرانسیل برداری، گرادیان، دیورژانس، پیچش

فصل ۱۰ حساب انتگرال برداری، قضیه‌های انتگرال

بردارها و ماتریس‌ها، که جبر خطی بر اساس آن‌ها پایه ریزی شده است (فصل‌های ۷ و ۸) به ما این امکان را می‌دهند تا اعداد و توابع را به صورت مرتب و فشرده نمایش دهیم. ماتریس‌ها می‌توانند تعداد یا حجم بسیار زیادی از داده‌ها را در خود ذخیره کنند - ارتباط میلیون‌ها کامپیوتر یا تلفن همراه را تصور کنید - و امکان عملیات سریع روی آن‌ها توسط کامپیوترها را فراهم کنند. مهم‌ترین موضوع فصل ۷ توضیح چگونگی حل دستگاه‌های معادلات خطی توسط ماتریس‌هاست. مفاهیم رتبه، پایه، تبدیل های خطی و فضاهای برداری در ارتباط نزدیک با این موضوع هستند. در فصل ۸ مسائل

مقدار ویژه مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرد. جبرخطی در حال حاضر یکی از شاخه‌های فعال علم ریاضی است که دارای کاربردهای فراوان در مهندسی، فیزیک، آنالیز عددی (فصل‌های ۲۰-۲۲ کتاب اصلی را ببینید)، اقتصاد و بسیاری دیگر است.

فصل‌های ۹ و ۱۰ حسابان معمولی را به حسابان برداری تعمیم می‌دهند. این تعمیم با مفهوم بردار از جبرخطی شروع می‌شود و با تعمیم حسابان دیفرانسیل برداری ادامه می‌یابد. بخش مهمی از این تعمیم به این صورت است که با استفاده از تعریف مشتق توابع چند متغیره، عملگرهای دیفرانسیل برداری مانند گرادیان، دیورژانس و پیچش معرفی می‌شوند. فصل ۱۰ انتگرال‌گیری معمولی را به انتگرال‌گیری روی خم‌ها، رویه‌ها و فضاهای صلب تعمیم می‌دهد و به این ترتیب انتگرال‌های نوع جدید نتیجه می‌شوند. قضیه‌های مبتکرانه گاوس، گرین و استوکس امکان تبدیل این انتگرال‌ها را به یکدیگر فراهم می‌آورند.

نرم‌افزارهای مناسب برای جبرخطی (لاپک، میپل، مسیمتیکا، مطلب) می‌توانند در صورت لزوم در لیستی که در آغاز بخش E ارائه شده‌اند مورد توجه قرار گیرند.

جبرخطی عددی (فصل ۲۰) می‌تواند مستقیماً بعد از فصل ۷ و ۸ مطالعه شود زیرا فصل ۲۰ مستقل از فصل‌های دیگر ارائه شده در بخش E است که در خصوص روش‌های عددی می‌باشند

فصل ۷

جبرخطی: ماتریس‌ها، بردارها، دترمینان‌ها، دستگاه‌های خطی

جبرخطی موضوعی بسیار گسترده است که مفاهیمی چون بردار، ماتریس، دترمینان، دستگاه‌های معادلات خطی، فضاهای برداری و تبدیل‌های خطی، مسائل مقادیر ویژه و بسیاری دیگر را می‌پوشاند. به عنوان شاخه‌ای از ریاضی، جبرخطی از اهمیت فراوانی برخوردار است زیرا دارای کاربردهای گسترده‌ای در مهندسی، فیزیک، هندسه، علم کامپیوتر، اقتصاد و بسیاری دیگر است. علاوه بر این جبرخطی در درک عمیق‌تر خود مفاهیم ریاضی مشارکت بسزایی دارد.

ماتریس‌ها، که آرایه‌های مستطیلی اعداد یا توابع هستند، و بردارها از مهمترین ابزارهای جبرخطی به شمار می‌آیند. ماتریس‌ها از این نقطه نظر دارای اهمیت هستند که به ما امکان بیان تعداد زیادی داده را به صورت مختصر و منظم می‌دهند. به علاوه، چون ماتریس‌ها به عنوان اشیاء منفرد شناخته می‌شوند، آن‌ها را با یک حرف نمایش می‌دهیم و به طور مستقیم محاسبه می‌کنیم. تمام این خصوصیت‌ها باعث شده است که ماتریس‌ها و بردارها برای بیان ایده‌های ریاضی و علمی مورد توجه عموم قرار گیرند.

در این فصل ضمن ارائه تئوری ماتریس‌ها ارتباط خوبی را نیز بین این تئوری و کاربرد آن

در شبکه‌های الکتریکی، فرآیندهای مارکف، جریان ترافیک و غیره برقرار می‌کند.

ساختار فصل ۷ به شرح زیر است: بخش‌های ۱.۷ و ۲.۷ مقدمه‌ای شهودی از بردارها و ماتریس‌ها و عملیات روی آن‌ها که شامل ضرب ماتریس‌ها نیز می‌شود ارائه می‌دهد. بخش‌های بعدی ۳.۷ - ۵.۷ مهمترین روش حل دستگاه‌های معادلات خطی که به روش حذف گاوس مشهور است ارائه می‌دهند. این روش اساس جبر خطی است. این روش و روش‌های معادل آن در بسیاری از شاخه‌های مختلف ریاضی و بسیاری از کاربردها مشاهده می‌شوند. این روش منجر به در نظر گرفته شدن رفتار جواب‌های دستگاه و مفاهیمی مثل رتبه ماتریس، استقلال خطی و پایه‌های فضای برداری می‌شود. در بخش‌های ۶.۷ و ۷.۷ توجه به سمت مفهوم دترمینان ماتریس و اهمیت آن سوق داده می‌شود و در بخش ۸.۷ در خصوص معکوس ماتریس‌ها در صورت وجود بحث می‌شود. در انتهای فصل هفتم مفاهیم فضاهای برداری، ضرب داخلی فضاها، تبدیل‌های خطی و ترکیب آن‌ها ارائه می‌شوند. مسائل مربوط به مقادیر ویژه در فصل هشتم دنبال خواهند شد.

توجه. جبر خطی عددی (بخش‌های ۱.۲۰ - ۵.۲۰ از کتاب اصلی) می‌توانند بلافاصله بعد از این فصل مطالعه شوند.

پیش‌نیاز: ندارد

بخش‌هایی که در دوره‌های کوتاه قابل حذف هستند، بخش‌های ۵.۷ و ۹.۷ می‌باشند.

مراجع و جواب مسائل: ضمیمه ۱ بخش B و ضمیمه ۲.

به این معنا که تعداد سطر و ستون های آن ها باهم برابر است. در اینجا در ماتریس دوم تعداد سطر و ستون ها ۳ و در ماتریس سوم ۲ است. در دومین ماتریس درایه ها دارای دو اندیس هستند که به طور مشخص محل قرار گرفتن درایه را در ماتریس نشان می دهند. اولین اندیس نشان دهنده شماره سطر و دومین اندیس نشان دهنده شماره ستون است، بنابراین هر دو اندیس باهم به طور یکتا موقعیت درایه را مشخص می کنند. به عنوان مثال a_{23} (بخوانید a ۲ ۳) در سطر دوم و ستون سوم قرار دارد و غیره. این نمادگذاری برای درایه ها که برای تمام ماتریس ها به کار برده می شود استاندارد است و فرقی نمی کند که ماتریس مربعی باشد یا نباشد.

ماتریس هایی که تنها دارای یک سطر و یا یک ستون می باشند بردار نامیده می شوند. بنابراین، چهارمین ماتریس در (۱) که تنها دارای یک سطر است، بردار سطری نامیده می شود. آخرین ماتریس در (۱) تنها دارای یک ستون است و بردار ستونی نامیده می شود. به دلیل آن که هدف از اندیس گذاری درایه های یک ماتریس تعیین موقعیت منحصر به فرد آن درایه در ماتریس است، تنها یک اندیس برای مشخص کردن موقعیت درایه در یک بردار کافی است، خواه این بردار سطری باشد یا ستونی. پس، سومین درایه در بردار ستونی (۱) توسط a_3 نمایش داده می شود.

۱.۷ ماتریس‌ها، بردارها
جمع و ضرب اسکالری

در بخش ۱.۷ مفاهیم و قواعد جبری بردارها و ماتریس‌ها معرفی می‌شوند و بعد از آن در بخش ۲.۷ دستگاه معادلات (دستگاه معادلات خطی) معرفی خواهد شد. کاربردهای اصلی مفاهیم معرفی شده در بخش‌های ۱.۷ و ۲.۷ در بخش ۳.۷ ارائه می‌شوند

در ابتدا و قبل از ارائهٔ یک بحث سازمان یافته، بهتر است بدون عجله در خصوص ساختار ماتریس‌ها توضیحات لازم داده شود. هر ماتریس آرایه‌ای مستطیلی شکل از اعداد یا توابع است که توسط دو کروشه در سمت چپ و راست آن‌ها محصور شده‌اند. به عنوان مثال،

$$\begin{bmatrix} 0.3 & 1 & -5 \\ 0 & -0.2 & 16 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \tag{1}$$

$$\begin{bmatrix} e^{-x} & 2x^2 \\ e^{6x} & 4x \end{bmatrix}, \quad [a_1 \quad a_2 \quad a_3], \quad \begin{bmatrix} 4 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

ماتریس هستند. اعداد (توابع) ظاهر شده در این ماتریس‌ها را درایه یا، به تفصیل، اعضای ماتریس می‌نامند. اولین ماتریس در (1) دارای دو سطر است، که خطوط افقی درایه‌ها می‌باشند. به علاوه، این ماتریس دارای سه ستون است که خطوط عمودی درایه‌ها می‌باشند. دومین و سومین ماتریس در (1) ماتریس‌های مربع می‌باشند،

۷

در کاربردها ماتریس‌ها به عنوان ابزاری که به راحتی قابل استفاده هستند برای ذخیره و انجام پروسه‌های داده‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرند. دو زیر که به طور معمول به آن‌ها اشاره می‌شود را در نظر بگیرید.

مثال ۱ دستگاه معادلات، یکی از کاربردهای اصلی ماتریس‌ها

دستگاه معادلات خطی، یا به اختصار دستگاه خطی، مانند

$$\begin{aligned} 4x_1 + 6x_2 + 9x_3 &= 6 \\ 6x_1 \qquad\quad - 2x_3 &= 20 \\ 5x_1 - 8x_2 + x_3 &= 10 \end{aligned}$$

که در آن x_1، x_2 و x_3 مجهول هستند را در نظر بگیرید. برای این دستگاه، ماتریس A که ماتریس ضرائب نامیده می‌شود را به صورت زیر می‌سازیم. ضریب هر مجهول در دستگاه خطی را به عنوان درایه ماتریس در نظر می‌گیریم اندیس‌های آن‌ها را براساس موقعیتی که در دستگاه معادلات ظاهر شده‌اند انتخاب می‌کنیم. مثلاً $a_{13}=9$ که ضریب مجهول سوم در اولین معادله است. در مثال ۱ ضریب دومین مجهول در معادله دوم صفر است، یعنی $a_{22}=0$. بنابراین،

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 9 \\ 6 & 0 & -2 \\ 5 & -8 & 1 \end{bmatrix}. \qquad \text{همزمان ماتریس افزوده ساخته می‌شود} \qquad \tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 9 & 6 \\ 6 & 0 & -2 & 20 \\ 5 & -8 & 1 & 10 \end{bmatrix}$$

ماتریس افزوده، که با نماد $\tilde{A}$ نشان داده می‌شود ماتریسی است که با اضافه کردن اعداد (یا توابع) سمت راست معادلات دستگاه به ماتریس A به دست می‌آید و

ماتریس افزوده، دستگاه معادلات نامگذاری می‌شود.

چون با بازگشت به عقب می‌توانیم دستگاه معادلات را مستقیماً از روی ماتریس افزوده، $\tilde{A}$ بازسازی کنیم، $\tilde{A}$ تمام اطلاعات مربوط به دستگاه را در خود دارد و می‌تواند برای حل دستگاه معادلات مورد نظر استفاده شود. به این معنا که می‌توانیم تنها با استفاده از ماتریس افزوده، محاسبات لازم را برای حل دستگاه انجام دهیم. چگونگی انجام این محاسبات در بخش ۷.۳ توضیح داده خواهد شد. در عین حال، می‌توانید تحقیق کنید که جواب دستگاه معادله بالا عبارت است از $x_1=3$، $x_2=\frac{1}{2}$ و $x_3=-1$.

علت استفاده از نمادهای x_1، x_2 و x_3 برای نمایش جواب دستگاه تنها جنبه کاربری دارد و اساسی نیست: می‌توانستیم از حروف x، y و z یا حروف دیگر نیز استفاده کنیم. ■

مثال ۲ ارقام فروش به صورت ماتریس

ارقام فروش برای سه محصول I، II و III در یک فروشگاه، و در روزهای دوشنبه (Mon)، سه‌شنبه (Tues)، ... می‌تواند برای هر هفته در یک ماتریس نمایش داده شود.

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccc} \text{Mon} & \text{Tues} & \text{Wed} & \text{Thur} & \text{Fri} & \text{Sat} & \text{Sun} \end{array} \\
\mathbf{A} = & \begin{bmatrix} 40 & 33 & 81 & 0 & 21 & 47 & 33 \\ 0 & 12 & 78 & 50 & 50 & 96 & 90 \\ 10 & 0 & 0 & 27 & 43 & 78 & 56 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{I} \\ \cdot\ \text{II} \\ \text{III} \end{array}
\end{array}
$$

اگر شرکت تولیدکننده این محصولات دارای ۱۰ فروشگاه باشد، می‌توانیم ۱۰ ماتریس

به صورت بالا تشکیل دهیم. سپس، با جمع زدن درایه‌های مربوط، ماتریسی را به دست آوریم که نشان دهنده فروش کل از هر محصول در هر روز است. آیا می‌توانید در خصوص داده‌های دیگری فکر کنید که بتواند در یک ماتریس ذخیره شود؟ به عنوان مثال، در مسائل حمل و نقل و انبارداری؟ یا در لیست کردن فاصله‌ها در یک شبکه جاده‌ای.

مفاهیم کلی و نمادها

در این قسمت مطالب بحث شده در بالا را به صورتی که در جبر خطی و کاربردهای آن مرسوم و معمول است ارائه می‌دهیم. ماتریس‌ها را با حروف بزرگ لاتین مثل **A**، **B**، **C**، ...، که سیاه و توپر است، یا نوشتن درایه کلی آن در کروشه؛ مثلاً $A=[a_{jk}]$، و غیره نمایش می‌دهیم. منظور از یک ماتریس $m\times n$ (بخوانید m در n) ماتریسی است که دارای m سطر و n ستون است ـ سطرها همیشه در ابتدا ظاهر می‌شوند! عدد $m\times n$ ابعاد ماتریس نامیده می‌شود. پس یک ماتریس $m\times n$ به شکل زیر است.

$$\mathbf{A} = [a_{jk}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}. \tag{2}$$

ماتریس‌هایی که در (۱) ارائه شده‌اند به ترتیب دارای ابعاد ۲×۳، ۳×۳، ۲×۲، ۱×۳ و ۲×۱ هستند.

۱۰

هر درایه در (۲) دارای دو اندیس است. اولین اندیس شماره سطر و دومین اندیس شماره ستون است. پس a_{21} آن درایه ای است که در سطر دوم و ستون اول قرار دارد.

اگر $m=n$، در این صورت A را یک ماتریس مربع $n \times n$ می نامیم. برای ماتریس های مربع درایه های a_{11}، a_{22}، ...، a_{nn} قطر اصلی A نامیده می شوند. پس قطرهای اصلی آن دو ماتریس مربع ارائه شده در (۱) به ترتیب a_{11}، a_{22}، a_{33} و e^{-x}، $4x$ می باشند.

چنانکه خواهیم دید ماتریس های $n \times n$ دارای اهمیت ویژه هستند. ماتریس هایی که دارای هر نوع سطر $m \times n$ هستند را ماتریس های مستطیلی می نامند؛ در نتیجه ماتریس های مربع حالت های خاص ماتریس های مستطیلی هستند.

بردارها

هر بردار ماتریسی است که تنها دارای یک سطر یا یک ستون است. درایه های بردار مؤلفه های آن نامیده می شوند. بردارها را توسط حروف کوچک لاتین $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$، $\mathbf{c}$، ... که سیاه تر هستند، یا نوشتن مؤلفه کلی آن در کروشه؛ مثلاً $\underline{a} = [a_j]$، و غیره نمایش می دهیم. حالات خاص ارائه شده در (۱) پیشنهاد می کنند که صورت (کلی) یک بردار سطری به شکل

$$\mathbf{a} = [a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n].$$

به عنوان مثال

$$\mathbf{a} = [-2 \quad 5 \quad 0.8 \quad 0 \quad 1].$$

وصورت (کلی) بردار ستونی به شکل

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}. \quad \text{(به عنوان مثال)} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

است.

جمع وضرب اسکالری ماتریس ها و بردارها

چیزی که باعث شده است واقعاً مفید و در عمل مناسب بر کامپیوترها باشند آن است که محاسبات روی آن ها تقریباً به آسانی محاسبات روی اعداد است.

اکنون قوانینی را برای عمل جمع و ضرب اسکالری (ضرب در اعداد) ماتریس ها معرفی می کنیم که در کاربردهای عملی پیشنهاد شده اند. (ضرب یک ماتریس در یک ماتریس در بخش بعد ارائه می شود.) در ابتدا به مفهوم تساوی ماتریس ها احتیاج داریم.

تعریف

تساوی ماتریس ها

دو ماتریس $A=[a_{jk}]$ و $B=[b_{jk}]$ را مساوی گویند، و می نویسند $A=B$، اگر و تنها اگر هر دو دارای ابعاد مساوی باشند و درایه های نظیر به نظیر آن ها با یکدیگر مساوی باشند، یعنی، $a_{11}=b_{11}$، $a_{12}=b_{12}$، و غیره. ماتریس هایی که با هم مساوی نیستند را مختلف می نامند. پس ماتریس هایی که ابعادشان با هم یکی نیست را همواره مختلف می نامند

مثال ۳ تساوی ماتریس ها

فرض شود

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

آنگاه

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} \quad \text{if and only if} \quad \begin{matrix} a_{11} = 4, & a_{12} = 0, \\ a_{21} = 3, & a_{22} = -1. \end{matrix}$$

ماتریس های زیر باهم مساوی نیستند. توضیح دهید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

■

تعریف

جمع ماتریس ها

مجموع دو ماتریس $A=[a_{jk}]$ و $B=[b_{jk}]$ که ابعادشان باهم برابر است به صورت $A+B$ نوشته می شود و درایه های آن $a_{jk}+b_{jk}$ هستند از جمع نظیر به نظیر درایه های A و B به دست می آید. ماتریس های با ابعاد متفاوت را نمی توان باهم جمع زد.

به عنوان حالت خاص، مجموع $a+b$ از دو بردار سطری یا دو بردار ستونی، که تعداد مؤلفه های آن ها باهم برابر است، از جمع مؤلفه های نظیر به نظیر به دست می آید.

مثال ۴ مجموع ماتریس‌ها و بردارها

اگر $A=\begin{bmatrix} -۴ & ۶ & ۳ \\ ۰ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۵ & -۱ & ۰ \\ ۳ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$، آن‌گاه $A+B=\begin{bmatrix} ۱ & ۵ & ۳ \\ ۳ & ۲ & ۲ \end{bmatrix}$.

ماتریس A در مثال ۳ و ماتریس A در این مثال را نمی‌توان باهم جمع زد.

اگر $a=[۵, ۷\ ۲]$ و $b=[-۶\ ۲\ ۰]$، آن‌گاه $a+b=[-۱, ۹\ ۲]$.

کاربردی از جمع ماتریس‌ها در مثال ۲ ارائه شد. در ادامه کاربردهای بیشتری ارائه خواهند شد. ■

تعریف

ضرب اسکالری (ضرب ماتریس در یک عدد)

ضرب هر ماتریس $m\times n$، $A=[a_{jk}]$ و هر اسکالر c (عدد c) به‌صورت cA نوشته می‌شود و یک ماتریس $m\times n$، $cA=[ca_{jk}]$ است که از ضرب هر درایه A در عدد c به دست می‌آید.

در اینجا $(-1)A$ به‌صورت $-A$ نوشته می‌شود و قرینه A نامگذاری می‌شود. به طور مشابه، $(-k)A$ به‌صورت $-kA$ نوشته می‌شود. همچنین $A+(-B)$ به‌صورت $A-B$ نوشته می‌شود و تفاضل دو ماتریس A و B نامیده می‌شود. (البته می‌دانیم که در این تفاضل A و B باید دارای ابعاد یکسان باشند!).

مثال ۵ ضرب اسکالری

اگر $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2.7 & -1.8 \\ 0 & 0.9 \\ 9.0 & -4.5 \end{bmatrix}$، آن‌گاه

$$-\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2.7 & 1.8 \\ 0 & -0.9 \\ -9.0 & 4.5 \end{bmatrix}, \quad \frac{10}{9}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \\ 10 & -5 \end{bmatrix}, \quad 0\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

اگر ماتریس B نشان دهنده، فاصله بین چند شهر مختلف باشد که برحسب مایل محاسبه شده‌اند، آن‌گاه ماتریس $1.609\,B$ اطلاعات مربوط به فاصله این شهرها برحسب کیلومتر را نشان می‌دهد.

قواعد جمع و ضرب اسکالری ماتریس‌ها. از همان قوانین آشنا مربوط به جمع اعداد قوانین مشابه را برای جمع ماتریس‌هایی که ابعادشان با هم برابر است به دست می‌آوریم، یعنی،

$$(3) \quad \begin{aligned} &\text{(a)} && \mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A} \\ &\text{(b)} && (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) \\ &\text{(c)} && \mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A} \\ &\text{(d)} && \mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

(که $A+B+C$ نوشته می‌شود)

در اینجا $\underline{0}$ نمایش دهنده ماتریس صفر (با بعد $m \times n$) است، یعنی یک ماتریس $m \times n$ که تمام درایه‌های آن عدد صفر هستند. اگر $m=1$ یا $n=1$، $\underline{0}$ یک بردار است و بردار صفر نامیده می‌شود.

قواعد (۳) نشان می‌دهند که جمع ماتریس‌ها جابجاپذیر و شرکت‌پذیر است [بنابر (3a) و (3b)]. به طور مشابه برای ضرب اسکالری قوانین زیر به دست می‌آیند

(۱۵)

(4)

(a) $c(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = c\mathbf{A} + c\mathbf{B}$

(b) $(c+k)\mathbf{A} = c\mathbf{A} + k\mathbf{A}$

(c) $c(k\mathbf{A}) = (ck)\mathbf{A}$ (نوشته شود ckA)

(d) $1\mathbf{A} = \mathbf{A}.$

مجموعه تمرین های ۱.۷

۷-۱ سؤالات عمومی

۱. تساوی. دلایل مساوی نبودن پنج ماتریس در مثال ۳ را ارائه دهید.

۲. نمادنویسی دوتایی. اگر ماتریس مثال ۲ را به صورت $A=[a_{jk}]$ بنویسید، a_{31} چیست؟ a_{13}؟ a_{26}؟ a_{33}؟

۳. بعد. ابعاد ماتریس های ارائه شده در مثال های ۱، ۲، ۳ و ۵ چیستند؟

۴. قطر اصلی. قطر اصلی ماتریس A در مثال ۱ چیست؟ قطرهای اصلی A و B در مثال ۳ چیستند؟

۵. ضرب اسکالری. اگر A در مثال ۲، نشان دهنده تعداد جنس فروش رفته باشد، در این صورت ماتریس B از واحدهای فروش رفته در حالاتی که واحد تشکیل شده است از (الف) ۵ جنس و (ب) ۱۰ جنس چیست؟

۶. اگر یک ماتریس A با ابعاد ۱۲×۱۲ فاصله بین ۱۲ شهر را برحسب کیلومتر نشان دهد، چطور می توانید از روی A ماتریس B را که فاصله این شهرها را برحسب مایل نشان می دهد به دست آورید؟

۷. جمع بردارها. آیا می توانید این موارد را جمع بزنید: یک بردار سطری و یک بردار ستونی با تعداد مؤلفه های مختلف؟ با تعداد مؤلفه های یکسان؟ دو بردار سطری با تعداد مؤلفه های یکسان اما تعداد صفرهای مختلف؟ یک بردار و یک اسکالر؟ برداری با چهار مؤلفه و یک ماتریس ۲×۲.

۸-۱۶ جمع و ضرب اسکالری ماتریس ها و بردارها

فرض شود.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 6 & 5 & 5 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 5 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 0 \\ -3.0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} -5 \\ -30 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

در اینصورت با ذکر اینکه کدام یک از قوانین (۳) یا (۴) را به کار می برید، هر یک از عبارات زیر را محاسبه کنید یا دلایلی را ذکر کنید که چرا آن عبارت تعریف شده نیست.

.۸ $2\mathbf{A} + 4\mathbf{B}$, $4\mathbf{B} + 2\mathbf{A}$, $0\mathbf{A} + \mathbf{B}$, $0.4\mathbf{B} - 4.2\mathbf{A}$

.۹ $3\mathbf{A}$, $0.5\mathbf{B}$, $3\mathbf{A} + 0.5\mathbf{B}$, $3\mathbf{A} + 0.5\mathbf{B} + \mathbf{C}$

.۱۰ $(4 \cdot 3)\mathbf{A}$, $4(3\mathbf{A})$, $14\mathbf{B} - 3\mathbf{B}$, $11\mathbf{B}$

.۱۱ $8\mathbf{C} + 10\mathbf{D}$, $2(5\mathbf{D} + 4\mathbf{C})$, $0.6\mathbf{C} - 0.6\mathbf{D}$, $0.6(\mathbf{C} - \mathbf{D})$

.۱۲ $(\mathbf{C} + \mathbf{D}) + \mathbf{E}$, $(\mathbf{D} + \mathbf{E}) + \mathbf{C}$, $0(\mathbf{C} - \mathbf{E}) + 4\mathbf{D}$, $\mathbf{A} - 0\mathbf{C}$

.۱۳ $(2 \cdot 7)\mathbf{C}$, $2(7\mathbf{C})$, $-\mathbf{D} + 0\mathbf{E}$, $\mathbf{E} - \mathbf{D} + \mathbf{C} + \mathbf{u}$

.۱۴ $(5\mathbf{u} + 5\mathbf{v}) - \frac{1}{2}\mathbf{w}$, $-20(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + 2\mathbf{w}$, $\mathbf{E} - (\mathbf{u} + \mathbf{v})$, $10(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$

.۱۵ $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) - \mathbf{w}$, $\mathbf{u} + (\mathbf{v} - \mathbf{w})$, $\mathbf{C} + 0\mathbf{w}$, $0\mathbf{E} + \mathbf{u} - \mathbf{v}$

.۱۶ $15\mathbf{v} - 3\mathbf{w} - 0\mathbf{u}$, $-3\mathbf{w} + 15\mathbf{v}$, $\mathbf{D} - \mathbf{u} + 3\mathbf{C}$, $8.5\mathbf{w} - 11.1\mathbf{u} + 0.4\mathbf{v}$

۱۷. برآیند نیروها. اگر بردارهای u، v و w در بالا بیانگر نیروهایی در فضا باشند، مجموع آن ها برآیند نامیده می شود. آن را محاسبه کنید.

۱۸. تعادل. بنا بر تعریف، نیروها را در حالت تعادل گویند اگر برآیند آن ها بردار صفر باشد. نیروی p را طوری پیدا کنید که u، v، w و p در حالت تعادل باشند.

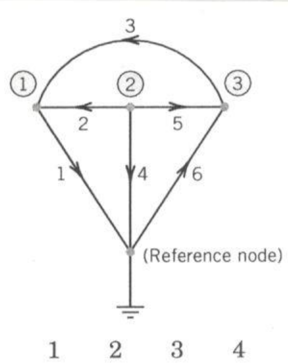
۱۹. قواعد کلی. قواعد (۳) و (۴) را برای تمام ماتریس های ۲×۳ و اسکالرهای c و k ثابت کنید.

۲۰- پروژه تیمی. ماتریس ها و شبکه ها. همانطور که خواهیم دید ماتریس ها دارای کاربردهای مختلف در مهندسی هستند. به عنوان مثال می توان از آن ها در توصیف اتصالات شبکه های الکتریکی، شبکه های جاده ای، فرآیند تولیدات، و غیره به شرحی که ذیلاً ارائه می شود استفاده کرد.

(الف) ماتریس نقطه برخورد. شبکه ای که در شکل ۱۵۵ رسم شده است از شش شاخه (خط اتصال) و چهار نقطه (جائیکه دو یا چند شاخه به یکدیگر متصل می شوند) تشکیل شده است. یکی از این نقاط، نقطه بازگشت (نقطه با ولتاژ صفر) است. نقاط دیگر را شماره گذاری و خطوط اتصال را شماره و جهت گذاری می کنیم. این شماره گذاری و جهت گذاری ها به دلخواه می باشند. اکنون این شبکه می تواند توسط یک ماتریس $A=[a_{jk}]$ تشریح شود، که در آن

$$a_{jk} = \begin{cases} +1 & \text{اگر شاخه } k \text{ نقطه } (j) \text{ را ترک کند} \\ -1 & \text{اگر شاخه } k \text{ به نقطه } (j) \text{ وارد شود} \\ 0 & \text{اگر شاخه } k \text{ نقطه } (j) \text{ را لمس نکند} \end{cases}$$

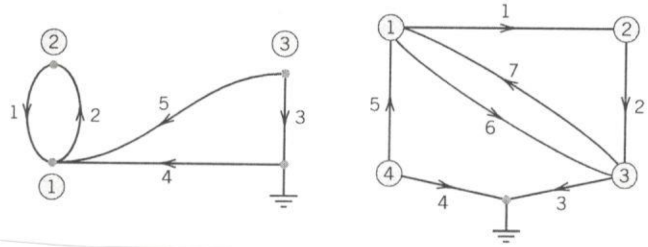
ماتریس A را ماتریس نقطه برخورد شبکه می نامند. نشان دهید که برای شبکه نشان داده شده در شکل ۱۵۵ ماتریس به صورتی است که در شکل رسم شده است.



Branch	1	2	3	4	5	6
Node ①	1	−1	−1	0	0	0
Node ②	0	1	0	1	1	0
Node ③	0	0	1	0	−1	−1

شکل ۱۵۵. شبکه و ماتریس نقطه برخورد در پروژه تیمی ۲۰ (الف)

(ب) ماتریس های تقاطع برخورد مربوط به شبکه های شکل ۱۵۶ را پیدا کنید.



شکل ۱۵۶. شبکه های الکتریکی پروژه تیمی ۲۰ (ب)

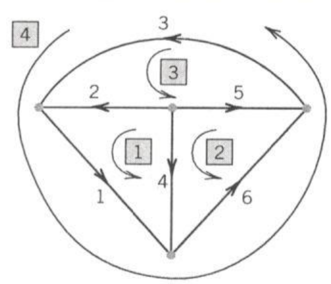
(ج) شبکه ای که به ماتریس های زیر مربوط می شوند را رسم کنید.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(د) ماتریس برخورد مشی. همچنین یک شبکه می تواند توسط ماتریس برخورد مش $M=[m_{jk}]$ که در آن

$$m_{jk} = \begin{cases} +1 & \text{اگر شاخه } k \text{ در مش } \boxed{j} \text{ قرار دارد و هم جهت با آن است} \\ -1 & \text{اگر شاخه } k \text{ در مش } \boxed{j} \text{ قرار دارد و در خلاف جهت آن است} \\ 0 & \text{اگر شاخه } k \text{ در مش } \boxed{j} \text{ قرار ندارد} \end{cases}$$

و مش حلقه جهت داری است که شاخه ای در درون یا بیرون آن قرار نخواهد. در اینجا مش ها به دلخواه شماره و جهت گذاری شده اند. نشان دهید که برای شبکه رسم شده در شکل ۱۵۷ ماتریس M دارای نمایش رسم شده در همان شکل است. در اینجا سطر ۱ مربوط به مش با شماره ۱ و غیره است.



$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

شکل ۱۵۷. شبکه و ماتریس M در پروژه تیمی ۲۰ (د).

۲.۷ ضرب ماتریس ها

منظور از ضرب ماتریس ها آن است که ماتریس را در دیگری ضرب کنیم. تعریف این ضرب یک تعریف استاندارد است ولی به نظر مصنوعی است. بنابراین برای درک این تعریف

به دقت آن را مطالعه کنید و آنقدر این تعریف را برای ضرب دو ماتریس بکار برید
دلخواه به کار برید تا آن که ابهام آن را درک کنید. در ابتدا تعریف ضرب ارائه
می‌شود و بعد از آن در خصوص انگیزه ارائه این تعریف صحبت خواهد شد.

تعریف

ضرب ماتریس در ماتریس

ضرب $C=AB$ (با همین ترتیب) از یک ماتریس $A=[a_{jl}]$ با بعد $m\times n$ در یک ماتریس $B=[b_{jk}]$ با بعد $r\times p$ تنها و تنها در حالت $r=n$ دارای معناست و در چنین حالت $C=[c_{jk}]$ یک ماتریس $m\times p$ است که درایه‌های آن عبارت است از

$$(1)\qquad c_{jk}=\sum_{l=1}^{n} a_{jl}b_{lk}=a_{j1}b_{1k}+a_{j2}b_{2k}+\cdots+a_{jn}b_{nk}\qquad \begin{array}{l} j=1,\cdots,m \\ k=1,\cdots,p. \end{array}$$

شرط $r=n$ به معنای آن است که عامل ضرب دوم، B، باید همان تعدادی سطر داشته باشد که عامل اول، یعنی A، دارای ستون است. نموداری از ابعاد ماتریس‌ها که نشان می‌دهد در چه حالتی ضرب دو ماتریس امکان‌پذیر است در زیر رسم شده است:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A} & \mathbf{B} & = \quad \mathbf{C} \\ [m\times n] & [n\times p] & = [m\times p]. \end{array}$$

درایه c_{jk} در (1) از ضرب هر درایه در سطر jام ماتریس A با درایه نظیر در ستون kام B و جمع این ضرب‌ها که تعدادشان n است به دست می‌آید. مثلاً، $c_{21}=a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+\cdots+a_{2n}b_{n1}$، و غیره. می‌توان به اختصار گفت که ضرب

ضرب سطرها در ستون ها. برای $n=3$ این عمل ضرب در شکل زیر توضیح داده شده است:

$$m=4\left\{\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix}}_{n=3}\right.\underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}}_{p=2}=\left.\underbrace{\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \\ c_{41} & c_{42} \end{bmatrix}}_{p=2}\right\}m=4$$

نمادهای مربوط به ضرب $AB=C$

در شکل بالا درایه هایی که در محاسبه درایه c_{21} شرکت داشته اند هاشور زده شده اند.

در همین فصل و به طور کامل در بخش ۹.۷ توضیح خواهیم داد که چگونه کاربرد ضرب ماتریس ها در تبدیل های خطی انگیزه ای برای تعریف آن شده است.

بیایید تا ضرب ماتریس ها را با ارائه چند مثال توضیح دهیم. توجه کنید که ضرب ماتریس ها شامل ضرب یک ماتریس در یک بردار نیز می شود، زیرا، بعد از همه این ها بردار حالت خاص از یک ماتریس است.

مثال ۱ ضرب ماتریس ها

$$\mathbf{AB}=\begin{bmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \\ -6 & -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & 7 & 8 \\ 9 & -4 & 1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 22 & -2 & 43 & 42 \\ 26 & -16 & 14 & 6 \\ -9 & 4 & -37 & -28 \end{bmatrix}$$

در اینجا $c_{11}=3\cdot2+5\cdot5+(-1)\cdot9=22$ ، و غیره. درایه در جعبه هاشور زده در ماتریس سمت راست تساوی به صورت $c_{23}=4\cdot3+0\cdot7+2\cdot1=14$ محاسبه شده است. ضرب BA نمی تواند تعریف شود. ■

مثال ۲ ضرب ماتریس و بردار

$$\begin{bmatrix}4 & 2\\ 1 & 8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\ 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\cdot 3 + 2\cdot 5\\ 1\cdot 3 + 8\cdot 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}22\\ 43\end{bmatrix}$$

در حالیکه $\begin{bmatrix}3\\ 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 2\\ 1 & 8\end{bmatrix}$ بی معناست. ■

مثال ۳ ضرب بردارهای سطری و ستونی

$$[3 \quad 6 \quad 1]\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 4\end{bmatrix} = [19], \qquad \begin{bmatrix}1\\ 2\\ 4\end{bmatrix}[3 \quad 6 \quad 1] = \begin{bmatrix}3 & 6 & 1\\ 6 & 12 & 2\\ 12 & 24 & 4\end{bmatrix}.$$

■

مثال ۴ احتیاط! ضرب ماتریس ها جابجاپذیر نیست، در حالت کلی $AB \neq BA$

این واقعیت توسط مثالهای ۱و۲، که در آن حتی یکی از ضرب های بی معناست، و مثال ۳، که در آن هر دو حاصلضرب از ابعاد مختلف هستند، توضیح داده شده است. اما این واقعیت حتی برای ماتریس های مربع نیز درست است. به عنوان مثال،

$$\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 100 & 100\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}99 & 99\\ -99 & -99\end{bmatrix}. \quad \text{اما} \quad \begin{bmatrix}1 & 1\\ 100 & 100\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

یکی از نکات جالب این واقعیت آن است که $AB=0$ ضرورتاً نشان نمی دهد که $BA=0$ یا $A=0$ یا $B=0$. این واقعیت را بازهم در بخش ۸.۷، همراه با دلایل مربوط در هنگامی که رخ می دهد، مورد بحث قرار می دهیم. ■

مثال های ارائه شده در بالا نشان می دهند که در ضرب ماتریس ها همواره باید ترتیب عوامل ضرب شرکت کننده با دقت کنترل شود. در عین حال بسیاری از قواعد ضرب ماتریس ها مشابه قواعد ضرب اعداد است، یعنی

(2)

(a) $(k\mathbf{A})\mathbf{B} = k(\mathbf{AB}) = \mathbf{A}(k\mathbf{B})$ نوشته می شود kAB یا AkB

(b) $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$ نوشته می شود ABC

(c) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$

(d) $\mathbf{C}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{CA} + \mathbf{CB}$

مشروط بر آن که A، B و C به گونه ای باشند که عبارات سمت چپ در تساوی های بالا تعریف شده باشند؛ در اینجا k هر اسکالری می تواند باشد. تساوی (۲b) قاعده شرکت پذیری نامیده می شود. تساوی (۲c) و (۲d) قواعد توزیع پذیری نامیده می شوند.

چون ضرب ماتریس ها ضرب سطرها در ستون هاست، می توانیم فرمول تعریف آن در (۱) را به صورت فشرده به صورت

$$c_{jk} = \mathbf{a}_j\mathbf{b}_k, \qquad j = 1, \cdots, m; \quad k = 1, \cdots, p, \tag{3}$$

که در آن a_j بردار سطری jاُم ماتریس A و b_k بردار ستونی kاُم B است، بازنویسی کنیم. پس با توجه به تعریف (۱)

$$\mathbf{a}_j\mathbf{b}_k = [a_{j1} \quad a_{j2} \quad \cdots \quad a_{jn}]\begin{bmatrix} b_{1k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{bmatrix} = a_{j1}b_{1k} + a_{j2}b_{2k} + \cdots + a_{jn}b_{nk}.$$

مثال ۵ ضرب برحسب بردارهای سطری و ستونی

اگر $A=[a_{jk}]$ با ابعاد ۳×۳ و $B=[b_{jk}]$ با ابعاد ۳×۴ باشد، آن گاه

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1\mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1\mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_1\mathbf{b}_3 & \mathbf{a}_1\mathbf{b}_4 \\ \mathbf{a}_2\mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2\mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_2\mathbf{b}_3 & \mathbf{a}_2\mathbf{b}_4 \\ \mathbf{a}_3\mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_3\mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_3\mathbf{b}_3 & \mathbf{a}_3\mathbf{b}_4 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

با قرار دادن $a_1=[۳ \ ۵ \ -۱]$ و $a_2=[۴ \ ۰ \ ۲]$، و غیره صحت (۴) را برای ضرب مربوط به مثال ۱ تحقیق کنید.

با انجام اندکی تغییر روی (۳) پردازش عمل ضرب توسط کامپیوتر (رایانه) تسهیل یافته است. در حال حاضر بسیاری از الگوریتم های استاندارد (نظیر لاپک) این تغییر را مورد استفاده قرار می دهند. در این روش، A به عنوان ماتریس معلوم به کار برده و B بر حسب بردارهای سطری آن در نظر گرفته و ضرب به صورت ستونی، یعنی

$$AB = A[\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{b}_p] = [A\mathbf{b}_1 \quad A\mathbf{b}_2 \quad \cdots \quad A\mathbf{b}_p]. \tag{5}$$

محاسبه می شود. به این ترتیب، ستون های B (به طور فردی یا چندتایی) به پردازش گرهای مختلف اختصاص می یابند که به طور هم زمان ستون های ماتریس حاصلضرب Ab_1، Ab_2، و غیره را محاسبه می کنند.

مثال ۶ محاسبه ضرب به طور ستونی توسط (۵)

برای محاسبه

$$AB = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 7 \\ -1 & 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 4 & 34 \\ -17 & 8 & -23 \end{bmatrix}$$

توسط (۵) ستون های

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -17 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 \\ -23 \end{bmatrix}$$

از AB را محاسبه کنید و سپس، به همان صورتی که در تساوی اول نشان داده شده است از آن ها برای نمایش ماتریس ضرب استفاده کنید.

انگیزه ضرب ماتریس ها توسط تبدیل های خطی

در این قسمت با توجه به کاربرد ضرب ماتریس ها در تبدیل های خطی انگیزه این تعریف

مغناطیس را بوجود می آوریم. برای $n=2$ متغیر این تبدیل های خطی به صورت

$$
(6^*) \qquad
\begin{aligned}
y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2\\
y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2
\end{aligned}
$$

می باشند و برای توضیح ایده کافی هستند. (در بخش ۹.۷ حالت کلی مورد بحث قرار خواهد گرفت.) برای نمونه، (۶*) می تواند مختصات x_1 و x_2 را به مختصات y_1 و y_2 در صفحه مربوط سازد. تساوی (۶*) می تواند به صورت برداری توسط تساوی

$$
(6) \qquad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{bmatrix}.
$$

نوشته شود. اکنون فرض کنید که مختصات x_1 و x_2 خودش به مختصات دیگری مانند w_1 و w_2 توسط تبدیل خطی دیگری، مثل

$$
(7) \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{Bw} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11}w_1 + b_{12}w_2 \\ b_{21}w_1 + b_{22}w_2 \end{bmatrix}.
$$

مربوط می شود. در اینصورت مختصات y_1 و y_2 به طور غیرمستقیم از طریق مختصات x_1 و x_2 به مختصات w_1 و w_2 مربوط می شود، و می خواهیم این ارتباط را به طور مستقیم بیان کنیم. جایگذاری نشان خواهد داد که این رابطه مستقیم خودش نیز یک تبدیل خطی مثل

$$
(8) \qquad \mathbf{y} = \mathbf{Cw} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}w_1 + c_{12}w_2 \\ c_{21}w_1 + c_{22}w_2 \end{bmatrix}.
$$

در حقیقت با جایگذاری (۷) در (۶) روابط

$$
\begin{aligned}
y_1 &= a_{11}(b_{11}w_1 + b_{12}w_2) + a_{12}(b_{21}w_1 + b_{22}w_2)\\
&= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})w_1 + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})w_2\\
y_2 &= a_{21}(b_{11}w_1 + b_{12}w_2) + a_{22}(b_{21}w_1 + b_{22}w_2)\\
&= (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})w_1 + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22})w_2.
\end{aligned}
$$

را به دست می آوریم. با مقایسه این روابط با (۸) می بینیم که

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} \qquad c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}$$

$$c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} \qquad c_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}.$$

این ثابت می کند که با همان تعریفی که در (۱) ارائه شده است $C=AB$. برای ماتریس های با ابعاد بزرگتر ایده و نتیجه دقیقاً مشابه با همین حالت $n=2$ است. تنها تعداد متغیرها عوض می شود. در چنین حالاتی دارای تعداد m متغیر y و n متغیر x و p متغیر w هستیم. پس ماتریس های A، B و C به ترتیب دارای ابعاد $m\times n$، $n\times p$ و $m\times p$ هستند. در نهایت شرط آنکه C برابر AB باشد منجر به تعریف (۱) در حالت کلی آن می شود. این نتیجه انگیزه تعریف ضرب به صورت (۱) را توضیح می دهد.

ترانهاده

ماتریس ترانهاده را از نوشتن سطرهایش به عنوان ستونها (یا به طور معادل ستون هایش به عنوان سطرها) به دست می آوریم. این کار را برای پیدا کردن ترانهاده بردارها نیز انجام می دهیم. پس، با این کار یک بردار سطری به ستونی تبدیل می شود و برعکس. به علاوه، برای ماتریس های مربع ماتریس ترانهاده انعکاس همان ماتریس در طول قطر اصلی است؛ یعنی، ترانهاده یک ماتریس مربع از تبادل درایه هایی که نسبت به قطر اصلی در موقعیت متقارن قرار دارند به دست می آید. در نتیجه a_{12} به a_{21}، a_{21} به a_{13} و غیره تبدیل می شود. مثال ۷ این ایده را توضیح می دهد. در ضمن توجه کنید که اگر A ماتریس معلوم باشد،

آن‌گاه ترانهاده آن با A^T نمایش داده می‌شود.

مثال ۷ ترانهاده ماتریس‌ها و بردارها

اگر $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -8 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$، آن‌گاه $\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -8 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

با اندکی فشردگی بیشتر می‌توان نوشت

$$\begin{bmatrix} 5 & -8 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -8 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 7 \\ 8 & -1 & 5 \\ 1 & -9 & 4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 1 \\ 0 & -1 & -9 \\ 7 & 5 & 4 \end{bmatrix},$$

در ضمن، ترانهاده $[۶ \; ۲ \; ۳]^T$ از بردار سطری $[۶ \; ۲ \; ۳]$ بردار ستونی زیر است:

$$[6 \;\; 2 \;\; 3]^T = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

برعکس

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}^T = [6 \;\; 2 \;\; 3].$$

تعریف

ترانهاده ماتریس‌ها و بردارها

ترانهاده ماتریس $A=[a_{jk}]$ با بعد $m\times n$ ماتریس A^T (بخوانید ترانهاده A) است که بعد آن $n\times m$، ستون اول آن سطر اول A، ستون دوم آن سطر دوم A، و غیره است. پس ترانهاده A در (۲) ماتریس $A^T=[a_{jk}]$ است که به صورت

$$\mathbf{A}^T = [a_{kj}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}. \qquad (9)$$

نوشته می‌شود. در حالت خاص، ترانهاده بردارهای سطری را به بردارهای ستونی و برعکس بردارهای ستونی را به بردارهای سطری تبدیل می‌کند.

ترانهاده به ما این اختیار را می‌دهد که براساس راحتی کار یا با ماتریس و یا ترانهاده آن کار کنیم.

قوائد ترانهاده عبارت هستند از:

$$(10)\qquad \begin{aligned} &\text{(a)} & (\mathbf{A}^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}} &= \mathbf{A} \\ &\text{(b)} & (\mathbf{A}+\mathbf{B})^{\mathsf{T}} &= \mathbf{A}^{\mathsf{T}} + \mathbf{B}^{\mathsf{T}} \\ &\text{(c)} & (c\mathbf{A})^{\mathsf{T}} &= c\mathbf{A}^{\mathsf{T}} \\ &\text{(d)} & (\mathbf{AB})^{\mathsf{T}} &= \mathbf{B}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}^{\mathsf{T}}. \end{aligned}$$

احتیاط! در تساوی (10d) توجه کنید که ماتریس های ترانهاده شده در ترتیب عکس قرار دارند. اثبات قواعد ۱۰ به عنوان تمرین در مسائل ۹ و ۱۰ ارائه شده اند.

ماتریس های خاص

بعضی از انواع خاص ماتریس ها غالباً در کاربردها دیده می شوند، و در اینجا مهمترین آن ها را معرفی می کنیم.

ماتریس های متقارن و پاد-متقارن. ترانهاده ماتریس دو ماتریس مهم را مورد شناسایی قرار می دهد. ماتریس های متقارن ماتریس های مربعی هستند که ترانهاده آن ها با خود ماتریس برابر است. ماتریس های پاد-متقارن ماتریس های مربعی هستند که ترانهاده آن ها با قرینه خودشان برابر است. این نوع ماتریس ها در (11) تعریف شده اند و در مثال (۸) توضیح داده می شوند.

(11) $\mathbf{A}^{\mathsf{T}} = \mathbf{A}$ (پس $a_{jk} = a_{kj}$) $\qquad \mathbf{A}^{\mathsf{T}} = -\mathbf{A}$ (پس $a_{kj} = -a_{jk}$ در نتیجه $a_{jj} = 0$)

ماتریس متقارن $\qquad\qquad$ ماتریس پاد-متقارن

مثال ۸ ماتریس های متقارن و پاد متقارن

$$A = \begin{bmatrix} 20 & 120 & 200 \\ 120 & 10 & 150 \\ 200 & 150 & 30 \end{bmatrix}$$ متقارن و $$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$ پاد - متقارن است.

به عنوان مثال، اگر یک شرکت دارای سه مرکز تولید C_1، C_2 و C_3 باشد، آنگاه A می تواند نشان دهد، هزینه های حمل و نقل تولیدات در درون و بین این مراکز باشد. مثلاً، a_{jj} هزینه حمل و نقل ۱۰۰۰ کیسه سیمان در درون مرکز C_j، و a_{jk} $(j \neq k)$ هزینه حمل و نقل ۱۰۰۰ کیسه سیمان از C_j به C_k می باشد. واضح است که تساوی $a_{jk} = a_{kj}$ به معنای آن است که فرض کرده ایم هزینه حمل و نقل در جهت های مخالف باهم برابر است.

ماتریس های متقارن دارای چند ویژگی عمومی هستند که آن ها را بسیار با اهمیت نشان می دهد. این اهمیت را در بحث های آینده خواهیم دید.

ماتریس های مثلثی. ماتریس های بالامثلثی ماتریس های مربعی هستند که درایه های ناصفر آن ها تنها در بالای قطر اصلی قرار دارند، در حقیقت برای این نوع ماتریس ها هر درایه ای که در زیر قطر اصلی قرار گیرد باید برابر با صفر باشد. به طور مشابه، ماتریس های پایین مثلثی تنها می توانند دارای درایه های ناصفر روی قطر اصلی یا در پایین آن باشند. هر درایه ای روی قطر اصلی یک ماتریس مثلثی می تواند صفر یا ناصفر باشد.

مثال ۹ ماتریس های پایین یا بالا مثلثی

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 8 & -1 & 0 \\ 7 & 6 & 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 9 & 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

بالا مثلثی   پایین مثلثی

ماتریس های قطری. ماتریس های قطری ماتریس های مربعی هستند که درایه های ناصفر آن ها تنها می توانند روی قطر اصلی قرار گیرد. برای این ماتریس ها هر درایه ای که در بالا یا پایین قطر اصلی قرار می گیرد باید برابر با صفر باشد. اگر تمام درایه های قطری یک ماتریس قطری مثل S باهم برابر و مثلاً برابر c باشند، آن گاه S ماتریس اسکالر نامیده می شود، زیرا اگر S در هر ماتریس مربعی مثل A، که ابعاد آن با ابعاد S برابر است، ضرب شود اثرش مانند ضرب اسکالری c در A است، یعنی

$$AS = SA = cA \qquad (۱۲)$$

به ویژه، آن ماتریس اسکالر، که تمام درایه های روی قطر اصلی آن برابر 1 است، ماتریس همانی (ماتریس یکانی) نامیده می شود و با نماد I_n یا به اختصار I نمایش داده می شود. برای I، تساوی (۱۲) تبدیل به تساوی

$$AI = IA = A \qquad (۱۳)$$

می شود.

مثال ۱۰. ماتریس قطری D ، ماتریس اسکالر S ، ماتریس همانی I

$$D=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&-3&0\\0&0&0\end{bmatrix},\quad S=\begin{bmatrix}c&0&0\\0&c&0\\0&0&c\end{bmatrix},\quad I=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

چند کاربرد از ضرب ماتریس‌ها

مثال ۱۱. ماتریس تولید، ضرب دو ماتریس

شرکت سوپر کامپیوتر دو نوع کامپیوتر با نام‌های PC1086 و PC1186 تولید می‌کند. ماتریس A نشان دهنده هزینه هر کامپیوتر (برحسب ۱۰۰۰ دلار) و ماتریس B نشان دهنده تولیدات در سال ۲۰۱۰ (برحسب مضارب ده‌هزار واحد) می باشد، ماتریس C که نشان دهنده هزینه‌های فصلی (برحسب میلیون دلار) برای مواد خام، نیروی کار و مواد متفرقه است را برای اطلاع سهام داران پیدا کنید.

$$A=\begin{array}{c} \begin{array}{cc}\text{PC1086}&\text{PC1186}\end{array}\\ \begin{bmatrix}1.2&1.6\\0.3&0.4\\0.5&0.6\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\text{مواد خام}\\ \text{نیروی کار}\\ \text{مواد متفرقه}\end{array}\qquad B=\begin{array}{c}\text{فصل}\\ \begin{array}{cccc}1&2&3&4\end{array}\\ \begin{bmatrix}3&8&6&9\\6&2&4&3\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\text{PC1086}\\ \text{PC1186}\end{array}$$

جواب:

$$C=AB=\begin{array}{c}\text{فصل}\\ \begin{array}{cccc}1&2&3&4\end{array}\\ \begin{bmatrix}13.2&12.8&13.6&15.6\\3.3&3.2&3.4&3.9\\5.1&5.2&5.4&6.3\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\text{مواد خام}\\ \text{نیروی کار}\\ \text{مواد متفرقه}\end{array}$$

چون هزینه‌ها مضربی از ۱۰۰۰ دلار و تولیدات مضربی از ۱۰,۰۰۰ واحد هستند، درایه‌های C مضربی از ۱۰ میلیون دلار می باشند؛ در نتیجه $c_{11}=۱۳,۲$ به معنای ۱۳۲ میلیون دلار، و غیره می باشد.

مثال ۱۲ رصد وزن. ضرب ماتریس در بردار

فرض کنید که در یک برنامه رصد وزن هر فرد با وزن ۱۸۵ پوند در ساعت ۳۵۰ کالری را در قدم زدن (۳ مایل بر ساعت)، ۵۰۰ کالری را در دوچرخه سواری (۱۳ مایل بر ساعت) و ۹۵۰ کالری را در دویدن آهسته (۵٫۵ مایل بر ساعت) از دست می دهد. بر اساس ماتریسی که در زیر نمایش داده شده است، بیل تصمیم گرفته است که تمرینات خود را شروع کند. اگر بیل ۱۸۵ پوند وزن داشته باشد، صحت محاسبات در زیر (که در آن W = قدم زدن، B = دوچرخه سواری و J = دویدن آهسته) را تحقیق کنید:

$$\begin{array}{c} \\ \text{MON} \\ \text{WED} \\ \text{FRI} \\ \text{SAT} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} W & B & J \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0.5 \\ 1.0 & 1.0 & 0.5 \\ 1.5 & 0 & 0.5 \\ 2.0 & 1.5 & 1.0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} 350 \\ 500 \\ 950 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 825 \\ 1325 \\ 1000 \\ 2400 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \text{MON} \\ \text{WED} \\ \text{FRI} \\ \text{SAT} \end{array}$$

مثال ۱۳ فرآیند مارکف. توانهای ماتریس. ماتریس تصادفی

فرض کنید که در سال ۲۰۰۴ وضعیت استفاده شده از زمین های یک شهر با وسعت ۶۰ مایل مربع، برای ساخت و سازهای مختلف به شرح زیر است:

C: ٪۲۵ تجاری I: ٪۲۰ صنعتی R: ٪۵۵ مسکونی

به فرض آن که ماتریس انتقالی برای ۵ سال فاصله زمانی توسط ماتریس A مشخص شده باشد و در طول زمان درنظر گرفته شده بدون تغییر باقی بماند، وضعیت استفاده از زمین های شهر را در سال های ۲۰۰۹، ۲۰۱۴ و ۲۰۱۹ پیدا کنید.

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{از } C & \text{از } I & \text{از } R \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.7 & 0.1 & 0 \\ 0.2 & 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0 & 0.8 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \text{به } C \\ \text{به } I \\ \text{به } R \end{array}$$

ماتریس A یک ماتریس تصادفی است، یعنی، مربعی است، تمام درایه‌های آن نامنفی هستند و مجموع درایه‌های هر ستون برابر با 1 است. در این مثال با یک فرآیند مارکف! مواجه هستیم، یعنی، فرآیندی که برای آن احتمال ورود به وضعیتی مشخص تنها و تنها به آخرین وضعیت موجود (و ماتریس A) بستگی دارد، نه به هیچکدام از وضعیت‌های قبل.

حل: از ماتریس A و وضعیت در سال ۲۰۰۴ می‌توانیم وضعیت در سال ۲۰۰۹ را محاسبه کنیم:

$$\begin{array}{c} \mathrm{C} \\ \mathrm{I} \\ \mathrm{R} \end{array} \begin{bmatrix} 0.7\cdot 25+0.1\cdot 20+0\cdot 55 \\ 0.2\cdot 25+0.9\cdot 20+0.2\cdot 55 \\ 0.1\cdot 25+0\cdot 20+0.8\cdot 55 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.1 & 0 \\ 0.2 & 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 \\ 20 \\ 55 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19.5 \\ 34.0 \\ 46.5 \end{bmatrix}.$$

توضیح: وضعیت C در سال ۲۰۰۹ برابر است با مجموع ۲۵٪ ضرب در ۰/۷ (احتمال رفتن C به C)، ۲۰٪ ضرب در ۰/۱ (احتمال رفتن I به C) و ۵۵٪ ضرب در ۰ (احتمال رفتن R به C). در نتیجه

$$25\cdot 0.7+20\cdot 0.1+55\cdot 0=19.5\,[\%].$$

همچنین

$$25\cdot 0.2+20\cdot 0.9+55\cdot 0.2=34\,[\%].$$

به طور مشابه برای سال ۲۰۰۹ مقدار جدید برای R برابر است با ۴۶٫۵٪. مشاهده می‌کنیم که بردار وضعیت در سال ۲۰۰۹، بردار ستونی زیر است:

$$\mathbf{y}=[19.5\quad 34.0\quad 46.5]^{\mathsf{T}}=\mathbf{Ax}=\mathbf{A}\,[25\quad 20\quad 55]^{\mathsf{T}}$$

در تساوی بالا $x=[25\quad 20\quad 55]^T$ بردار وضعیت در سال ۲۰۰۴ است. توجه کنید که مجموع درایه‌ها (مؤلفه‌ها) در بردار y، ۱۰۰[٪] است. به طور مشابه، می‌توانید تحقیق کنید که بردارهای وضعیت در سال‌های ۲۰۱۴ و ۲۰۱۹ به ترتیب عبارت است از:

$$\mathbf{z}=\mathbf{Ay}=\mathbf{A}(\mathbf{Ax})=\mathbf{A}^2\mathbf{x}=[17.05\quad 43.80\quad 39.15]^{\mathsf{T}}$$

$$\mathbf{u}=\mathbf{Az}=\mathbf{A}^2\mathbf{y}=\mathbf{A}^3\mathbf{x}=[16.315\quad 50.660\quad 33.025]^{\mathsf{T}}.$$

جواب. در سال ۲۰۰۹ مساحت قسمت تجاری ۱۹٫۵٪ (۱۱٫۷ مایل مربع) مساحت قسمت صنعتی ۳۴٪ (۲۰٫۴ مایل مربع) و مساحت قسمت مسکونی ۴۶٫۵٪ (۲۷٫۹ مایل مربع) خواهد بود. برای سال ۲۰۱۴ مساحت قسمت های نظیر به ترتیب ۱۷٫۰۵٪، ۴۳٫۸۰٪ و ۳۹٫۱۵٪ است. به طور مشابه، برای سال ۲۰۱۹ مساحت قسمت های نظیر به ترتیب ۱۶٫۳۱۵٪، ۵۰٫۶۶۰٪ و ۳۳٫۰۲۵ است. (در بخش ۲.۸ اتفاقی را که ممکن است در نهایت رخ دهد خواهیم دید. البته در طول محاسبه فرض بر آن است که احتمال تغییر وضعیت ها تغییر نکند. در حال حاضر، آیا می توانید وضعیت نهایی را مورد آزمایش قرار دهید یا این که حدس بزنید؟)

مجموعه تمرین های ۲.۷

۱-۱۰ سؤالات عمومی

۱. ضرب. چرا ضرب ماتریس ها با شرط روی عامل ها محدود می شود.

۲. ماتریس مربع. صورت کلی یک ماتریس مربع ۳×۳ که متقارن یا پاد-متقارن است، چیست؟

۳. ضرب بردارها. آیا هر ماتریس مربع ۳×۳ می تواند به صورتی که در مثال ۳ ارائه شده است نمایش داده شود.

۴. ماتریس های پادمتقارن. هر ماتریس پاد-متقارن ۴×۴ می تواند چند درایه مختلف داشته باشد. همین سؤال را برای هر ماتریس پاد-متقارن $n\times n$ نیز پاسخ دهید.

۵. اگر در مسأله ۴ ماتریس ها متقارن در نظر گرفته شوند پاسخ چیست؟

۶. ماتریس های مثلثی. اگر U_1 و U_2 ماتریس های بالامثلثی و L_1 و L_2 ماتریس های پایین مثلثی باشند، کدام یک از ماتریس های زیر مثلثی است؟

$$U_1 + U_2,\quad U_1U_2,\quad U_1^2,\quad U_1 + L_1,\quad U_1L_1,\quad L_1 + L_2$$

۷. ماتریس های خودتوان. ماتریس A را خودتوان گویند هرگاه $A^2=A$. آیا می توانید چهار ماتریس

خود توان ۲×۲ که با یکدیگر مساوی نیستند پیدا کنید؟

۸. ماتریس های پوچتوان. اگر برای ماتریس B با بعد $n \times n$ بتوان عدد طبیعی m را پیدا کرد که $B^m=0$، آن گاه B را پوچتوان می گویند. آیا می توانید ۳ ماتریس پوچتوان با ابعاد ۲×۲ پیدا کنید؟

۹. ترانهاده. آیا می توانید روابط (۱۰a)-(۱۰c) را برای ماتریس های ۳×۳ ثابت کنید؟ برای ماتریس های $m \times n$ چطور؟

۱۰. ترانهاده. (الف) صحت (۱۰d) را به کمک مثال های ساده تحقیق کنید. (ب). تساوی (۱۰d) را در حالت کلی ثابت کنید.

$\boxed{۱۱ - ۲۰}$ فرض شود.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a} = [1 \quad -2 \quad 0], \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

با نشان دادن نتایج شرکت کننده در محاسبات مربوط، تمام عبارات تمرین های ۱۱ تا ۲۰ را محاسبه کنید یا اینکه دلایلی ارائه دهید که چرا نمی توانید بعضی از آن ها را محاسبه کنید:

۱۱. $\mathbf{AB}, \ \mathbf{AB}^T, \ \mathbf{BA}, \ \mathbf{B}^T\mathbf{A}$

۱۲. $\mathbf{AA}^T, \ \mathbf{A}^2, \ \mathbf{BB}^T, \ \mathbf{B}^2$

۱۳. $\mathbf{CC}^T, \ \mathbf{BC}, \ \mathbf{CB}, \ \mathbf{C}^T\mathbf{B}$

۱۴. $3\mathbf{A} - 2\mathbf{B}, \ (3\mathbf{A} - 2\mathbf{B})^T, \ 3\mathbf{A}^T - 2\mathbf{B}^T, \ (3\mathbf{A} - 2\mathbf{B})^T\mathbf{a}^T$

۱۵. $\mathbf{Aa}, \ \mathbf{Aa}^T, \ (\mathbf{Ab})^T, \ \mathbf{b}^T\mathbf{A}^T$

۱۶. $\mathbf{BC}, \ \mathbf{BC}^T, \ \mathbf{Bb}, \ \mathbf{b}^T\mathbf{B}$

۱۷. $\mathbf{ABC}, \ \mathbf{ABa}, \ \mathbf{ABb}, \ \mathbf{Ca}^T$

۱۸. $\mathbf{ab}, \ \mathbf{ba}, \ \mathbf{aA}, \ \mathbf{Bb}$

۱۹. $1.5\mathbf{a} + 3.0\mathbf{b}, \ 1.5\mathbf{a}^T + 3.0\mathbf{b}, \ (\mathbf{A} - \mathbf{B})\mathbf{b}, \ \mathbf{Ab} - \mathbf{Bb}$

۲۰. $\mathbf{b}^T\mathbf{Ab}, \ \mathbf{aBa}^T, \ \mathbf{aCC}^T, \ \mathbf{C}^T\mathbf{ba}$

۲۱. قوانین کلی. روابط (۲) را برای ماتریس های $A=[a_{jk}]$، $B=[b_{jk}]$ و $C=[c_{jk}]$ که ۲×۲ هستند و c هر اسکالر دلخواهی است ثابت کنید.

۲۲. ضرب. در مسأله ۱۱ ماتریس AB را برحسب بردارهای سطری و ستونی بنویسید.

۲۳. ضرب. ماتریس AB در مسأله ۱۱ را با روش ستونی محاسبه کنید. مثال ۱ را ببینید.

۲۴. جابجاپذیری. تمام ماتریس های $A=[a_{jk}]$ با ابعاد ۲×۲ را پیدا کنید که با $B=[b_{jk}]$ جابجا می شوند و در آن $b_{jk}=j+k$.

۲۵. پروژه تیمی. ماتریس های متقارن و پادمتقارن. این نوع ماتریس ها غالباً در کاربردها دیده می شوند، پس مطالعه بعضی از خواص مهم آن ها می تواند مفید واقع شود.
(الف) ادعاهای ارائه شده در (۱۱) را که می گوید

---

[1] آندره آندریویچ مارکف (۱۸۵۶-۱۹۲۲)، ریاضی دان روسی، به دلیل کارش در نظریه احتمال مشهور می باشد.

برای هر ماتریس متقارن $a_{kj}=a_{jk}$ و برای هر ماتریس پاد-متقارن $a_{kj}=-a_{jk}$ ثابت کنید و مثال های مختلف ارائه دهید.

(ب) ثابت کنید که برای هر ماتریس مربع C ماتریس $C+C^T$ متقارن و $C-C^T$ پاد-متقارن است. ماتریس C را به صورت $C=S+T$ که در آن S متقارن و T پاد-متقارن است بنویسید و S و T را برحسب ماتریس C پیدا کنید. در تمرین های ۱۱-۲۰ ماتریس های A و B را به این صورت نمایش دهید.

(ج) یک ترکیب خطی از ماتریس های A، B، C، ...، M که همگی آن ها ابعادشان باهم برابر است عبارتی است به صورت

$$aA+bB+cC+\cdots+mM \qquad (14)$$

که در آن a، b، c، ...، m اسکالرهای دلخواه هستند. ثابت کنید که اگر تمام این ماتریس ها مربعی و متقارن باشند آن گاه ماتریس به دست آمده در (۱۴) نیز متقارن است؛ به طور مشابه اگر تمام این ماتریس ها پاد-متقارن باشند آن گاه ماتریس به دست آمده در (۱۴) نیز پاد-متقارن است.

(د) ثابت کنید که اگر A و B متقارن باشند، آن گاه AB متقارن است اگر A با B جابجا شود، یعنی $AB=BA$.

(هـ) تحت چه شرایطی حاصل ضرب ماتریس های

یاد-متقارن یک ماتریس پاد-متقارن است.

$\boxed{۲۶ - ۳۰}$ کاربردهای بیشتر

۲۶. <u>تولید</u>. فرض شود که در یک فرآیند تولید N به معنای "بدون زحمت" و T به معنای "با زحمت" باشد. فرض شود که احتمال های انتقال از یک روز به روز دیگر ۰٫۸ برای $N \to N$، درنتیجه ۰٫۲ برای $T \to N$، و ۰٫۵ برای $N \to T$، درنتیجه ۰٫۵ برای $T \to T$ باشد. اگر امروز روز بدون زحمت باشد، احتمال N دو روز بعد از امروز چیست؟ احتمال N سه روز بعد از امروز چیست؟

۲۷. <u>آزمایش CAS. فرآیند مارکف</u>. برنامه ای را برای فرآیند مارکف بنویسید. با به کار بردن این برنامه گام های بعدی در مثال ۱۳ که در متن آمده است محاسبه کنید. این آزمایش را برای ماتریس های تصادفی دیگر و با شروع های مختلف نیز انجام دهید.

۲۸. <u>عضویت در کنسرت</u>. در یک محله که در آن ۱۰۰٫۰۰۰ بزرگسال زندگی می کنند، کسانی که در یک کنسرت سریالی عضویت دارند به احتمال ۹۰٪ تمایل به تمدید عضویت خود دارند و افرادی که عضو نیستند به احتمال ۰٫۲٪

تمایل به عضویت در سری بعد پیدا کنند. اگر در حال حاضر تعداد اعضای کنسرت ۱۲۰۰ باشد، آیا کسی می‌تواند افزایش، کاهش و عدم تغییر را در هر یک از سه سری بعد پیش‌بینی کند؟

۲۹. بردار سود. مرکز فروش دو کارخانه F_1 و F_2 در نیویورک وسایل آشپزی تشک (S)، صندلی (C) و میز (T) را به ترتیب با سودهای ۳۵\$، ۶۲\$ و ۳۰\$ می‌فروشند. فرض شود ماتریس فروش در یک هفته بخصوص به صورت

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} S & C & T \end{array} \\ \begin{bmatrix} 400 & 60 & 240 \\ 100 & 120 & 500 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ F_1 \\ F_2 \end{array}$$

باشد. «بردار سود» p را طوری تعریف کنید که $V = Ap$ تمام سودهای F_1 و F_2 را نمایش دهد.

۳۰. پروژه تیمی. تبدیل‌های خطی خاص. دوران دارای کاربردهای مختلف است. در این پروژه نشان خواهیم داد که هر دوران می‌تواند توسط یک ماتریس نمایش داده شود.

(الف) دوران در صفحه. نشان دهید که تبدیل خطی $y = Ax$ با

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

دوران در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت

مختصات دکارتی x_1Ox_2 صفحه، حول مبدأ با زاویه دوران θ است.

(ب) دوران با زاویه $n\theta$. ثابت کنید که اگر A همان ماتریس قسمت (الف) باشد، آنگاه

$$\mathbf{A}^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}.$$

آیا این تساوی صحیح است؟ توضیح دهید.

(ج) فرمول‌های سینوس و کسینوس مجموع. از نظر هندسی باید داشته باشیم:

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix}.$$

از روی این تساوی فرمول‌های (۶) مربوط به سینوس و کسینوس مجموع در صفحه A3.1 را به دست آورید.

(د) نگاره‌سازی رایانه‌ای. برای تجسم یک شیء سه بعدی با وجه‌های مسطح (مثلاً یک مکعب)، می‌توانیم بردارهای محل قرار گرفتن رئوس را نسبت به یک دستگاه مختصات مناسب $x_1x_2x_3$ ذخیره کنیم و سپس یک شکل دو بعدی را با تصویر کردن آن شیء روی یکی از صفحات مختصات به دست آوریم. به عنوان مثال این تصویر می‌تواند با قرار دادن $x_3 = 0$ روی صفحه x_1Ox_2 به دست آید. برای تغییر منظر شکل می‌توان یک تبدیل خطی را روی بردارهای محل قرار گرفتن رئوس طراحی کرد. نشان دهید که ماتریس قطری D که قطر اصلی آن به ترتیب دارای درایه‌های

۳، ۱ و $\frac{1}{2}$ است به بردار $x = [x_j]$ موقعیت جدید $y = Dx$ می‌دهد که در آن $y_1 = 3x_1$ (انبساط در جهت x_1 با ضریب ۳)، $y_2 = x_2$ (بدون تغییر) و $y_3 = \frac{1}{2}x_3$ (انقباض در جهت x_3 با ضریب $\frac{1}{2}$ است). تأثیر ماتریس اسکالر روی بردار x چیست؟

(e). دوران در فضا. به طور هندسی $y = Ax$ را که در آن A یکی از سه ماتریس زیر است توضیح دهید:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

این تبدیل‌های خطی چه تأثیری خواهند داشت اگر وضعیت‌های موجود آنهایی باشند که در (d) توضیح داده شد.

۳.۷ دستگاه‌های معادلات خطی
روش حذف گاوس

اکنون به یکی از مهمترین کاربرد ماتریس‌ها رسیده‌ایم، یعنی، به کار بردن ماتریس‌ها برای حل دستگاه‌های معادلات خطی. قبلاً در مثال ۱ از فصل ۱.۷ به طور غیررسمی نشان دادیم که چگونه می‌توان اطلاعات موجود در یک دستگاه معادلات خطی را توسط یک ماتریس، که ماتریس افزوده نامیده می‌شود، ذخیره کرد. بعداً از این ماتریس در حل دستگاه معادلات خطی استفاده خواهد شد. رویکرد ما برای حل دستگاه‌های خطی روش حذفی گاوس نامیده می‌شود. چون این روش یکی از پایه‌های جبرخطی به شمار می‌رود، دانشجویان باید از آن آگاهی کامل داشته باشند.

عبارت کوتاه‌تری که برای دستگاه معادلات خطی به کار می‌رود، دستگاه خطی است.

دستگاه‌های خطی کاربردهای زیادی را در مهندسی، اقتصاد، آمار و بسیاری دیگر از شاخه‌های

علوم مدل سازی می کنند. شبکه‌های الکتریکی، جریان ترافیک و بازارهای کالا را می توان

به عنوان مثال‌هایی مشخص از کاربرد این دستگاه‌ها برشمرد.

دستگاه خطی، ماتریس ضرائب، ماتریس افزوده

یک دستگاه خطی از m معادله با n مجهول x_1، x_2، ...، x_n مجموعه‌ای از معادلات

به شکل

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned} \tag{1}$$

می باشد. چنین دستگاهی خطی نامیده می شود، زیرا هر متغیر x_j تنها به صورت

توانی از مرتبه اول، به همان صورتی که در معادله خط مستقیم دیده‌ایم، ظاهر می شود.

اعداد a_{11}، a_{12}، ...، a_{mn} اعداد معلوم هستند که ضرائب دستگاه نامیده می شوند.

اعداد b_1، b_2، ...، b_m که در سمت راست دستگاه ظاهر می شوند نیز معلوم

هستند. اگر تمام b_jها صفر باشند، در این صورت (۱) را دستگاه همگن می نامند.

اگر حداقل یکی از b_j ها ناصفر باشد، در این صورت (۱) را دستگاه ناهمگن می نامند

هر مجموعه از اعداد x_1، x_2، ...، x_n که در تمام m معادله (۱) صدق کند را یک

جواب برای دستگاه (۱) می نامند. بردار جواب (۱) برداری است مثل x که مؤلفه‌هایش

یک جواب برای دستگاه (۱) تشکیل می دهند. اگر دستگاه (۱) همگن باشد، آن‌گاه

(۱) همواره دارای جواب بدیهی $x_1=0$، $x_2=0$، ...، $x_n=0$ است.

فرم ماتریسی دستگاه خطی (۱). از تعریف ضرب ماتریس‌ها می‌بینیم که می‌توان m معادله در (۱) را به صورت معادله

$$Ax = b \qquad (۲)$$

نوشت که در آن

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} \quad و \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

ماتریس $A=[a_{jk}]$ ماتریس ضرایب است که بعد آن $m \times n$ است و x و b بردارهای ستونی هستند. فرض می‌کنیم که ضرایب a_{jk} همه با هم برابر صفر نیستند، پس A ماتریس صفر نیست. توجه کنید که x دارای n مؤلفه و b دارای m مؤلفه است. ماتریس

$$\tilde{\mathbf{A}} = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

ماتریس افزوده دستگاه (۱) نامیده می‌شود. خط‌چین عمودی رسم شده در ماتریس افزوده، می‌تواند حذف شود و در محاسبات بعد این خط‌چین حذف خواهد شد. یادآوری می‌کنیم که آخرین ستون $\tilde{A}$ از ماتریس A نیامده است اما این سطرها همان بردار ستونی b است. پس در واقع b به ماتریس A افزوده شده است.

توجه کنید که ماتریس افزوده $\tilde{A}$ به طور کامل دستگاه (۱) را مشخص می‌کند، زیرا این ماتریس شامل تمام اعدادی است که در (۱) دیده می‌شوند.

مثال ۱ تفسیر هندسی، وجود و یکتایی جواب‌ها

اگر $m=n=2$، در این صورت دو معادله با دو مجهول x_1 و x_2 به صورت

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

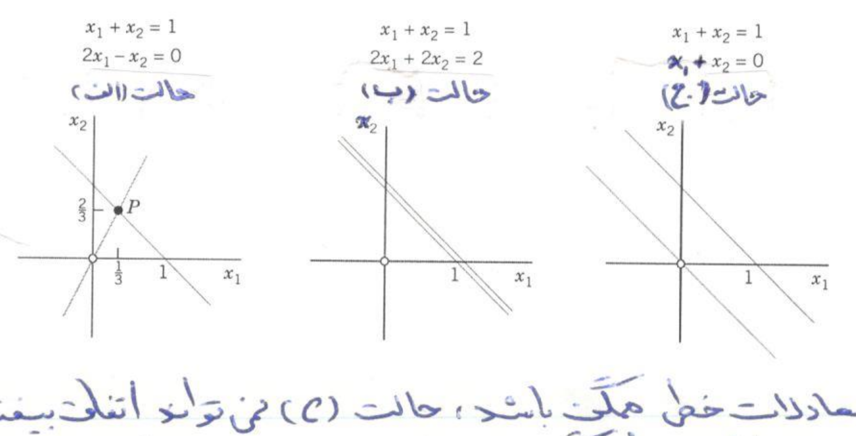
خواهیم داشت. اگر x_1 و x_2 را طول و عرض در صفحه x_1ox_2 تفسیر کنیم، در این صورت هریک از دو معادله بالا بیانگر یک خط راست است و (x_1, x_2) جواب دستگاه است اگر و تنها نقطه P با مختصات‌های x_1 و x_2 روی هر دو خط قرار گیرد. پس سه حالت ممکن است اتفاق بیفتد (شکل ۱۵۸ در صفحه بعد را ببینید)

(الف) اگر دو خط متقاطع باشند، دستگاه دقیقاً دارای یک جواب است

(ب) اگر دو خط برهم منطبق باشند، دستگاه دارای بی‌نهایت جواب است

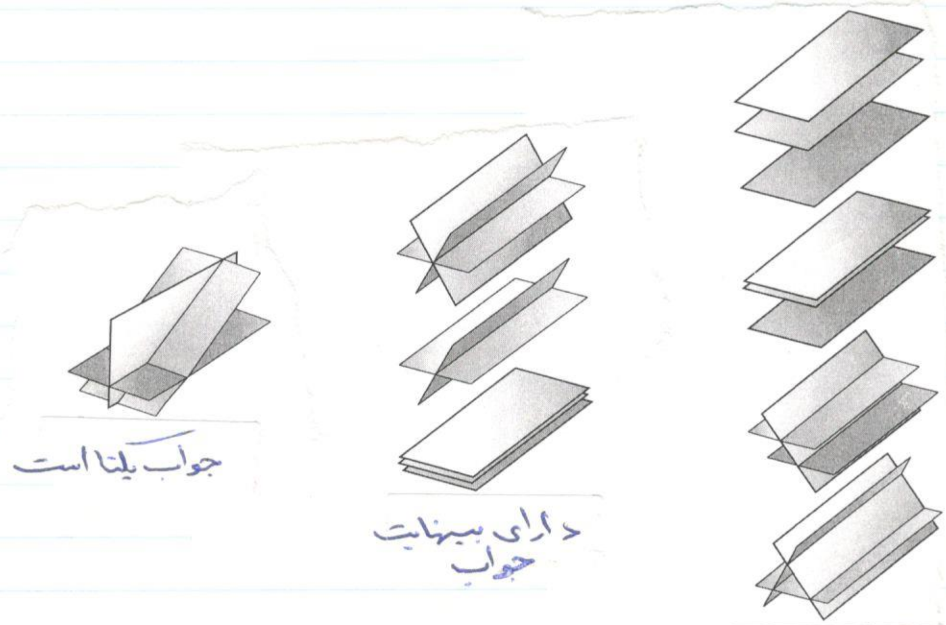
(ج) اگر دو خط باهم موازی باشند، دستگاه دارای جواب نیست.

به عنوان مثال،



اگر دستگاه معادلات خطی همگن باشد، حالت (ج) نمی‌تواند اتفاق بیفتد، زیرا تحت این شرط هر دو خط از مبدأ می‌گذرند و در نتیجه $(0,0)$ جواب بدیهی دستگاه را تشکیل می‌دهد. به طور مشابه، مبحث بالا را می‌توان از دو معادله با دو مجهول به سه معادله با سه مجهول تعمیم داد. تفسیر هندسی سه حالتی که مرتبط با جواب‌های چنین دستگاهی است را در شکل ۱۵۸ ارائه می‌دهیم. در این شرایط به جای خطوط مستقیم

با صفحات در فضا مواجه هستیم و جواب دستگاه بستگی به موقعیت این صفحات در فضا نسبت به یکدیگر دارد. دانشجویان می‌توانند مثالهای مشخصی را برای چنین حالاتی ارائه دهند.



شکل ۱۵۸. سه معادله با سه مجهول که توسط صفحات در فضا تفسیر شده‌اند.

مثال ساده‌ای که در بالا ارائه شد این واقعیت را توضیح می‌دهد که ممکن است دستگاه (۱) دارای جواب نباشد. در نتیجه چند سؤال در ارتباط با دستگاه (۱) مطرح می‌شود: آیا دستگاه معلوم (۱) دارای جواب است؟ تحت چه شرایطی این دستگاه دقیقاً دارای یک جواب است؟ اگر دستگاه بیش از یک جواب داشته باشد، چگونه می‌توانیم مجموعه تمام جواب‌ها را توصیف کنیم؟ در بخش ۵.۷ در خصوص این سؤالها بحث خواهیم کرد.

در همین حال، در ابتدا روشی اصولی را برای حل دستگاه‌های معادلات خطی صورت‌بندی قرار می‌دهیم.

حذف گاوسی و جایگذاری بازگشتی

حل مثال زیر می‌تواند انگیزه‌ای را برای معرفی روش حذف گاوسی ایجاد کند.

دستگاه معادلات خطی زیر که به صورت مثلثی (تماماً بالامثلثی) طرح شده است را در نظر بگیرید:

$$2x_1 + 5x_2 = 2$$
$$13x_2 = -26$$

(بالامثلثی به این معناست که تمام درایه‌های ناصفر ماتریس ضرایب مربوط به دستگاه در بالا یا روی قطر اصلی قرار دارند و همه آنها با هم مثلث قائم‌الزاویه‌ای را تشکیل می‌دهند که وارونه است. مشاهده کنید که این دستگاه را می‌توان به روش جایگذاری بازگشتی حل کرد، یعنی آخرین معادله را برای متغیر x_2 حل می‌کنیم، خواهیم داشت: $x_2 = -26/13 = -2$ و سپس به صورت بازگشتی مقدار $x_2 = -2$ را در اولین معادله قرار می‌دهیم و آن را برای محاسبه x_1 حل می‌کنیم، خواهیم داشت: $x_1 = \frac{1}{2}(2 - 5x_2) = \frac{1}{2}\underbrace{(2 - 5\cdot(-2))}_{}^{=6}$

این مثال ساده به ما ایده تحویل یک دستگاه معادلات عمومی به فرم مثلثی را می‌دهد.

به عنوان مثال، فرض شود که دستگاه معادله از ابتدا به صورت زیر باشد:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 &= 2 \\ -4x_1 + 3x_2 &= -30. \end{aligned}$$

ماتریس افزوده این دستگاه به صورت

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 \\ -4 & 3 & -30 \end{bmatrix}$$

خواهد بود. اولین معادله دستگاه را به همان صورتی که نوشته شده است نگه می‌داریم. از معادله دوم x_1 را حذف می‌کنیم تا دستگاه مثلثی را به دست آوریم. برای این کار معادله اول را در ۲ ضرب و با معادله دوم جمع می‌کنیم، و همین عمل را روی سطرهای

ماتریس افزوده انجام می دهیم. خواهیم داشت $-4x_1 + 4x_1 + 3x_2 + 10x_2 = -30 + 2\cdot 2$، یعنی،

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 0 & 13 & -26 \end{bmatrix} \qquad \text{سطر۲ + ۲(سطر۱)} \qquad \begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 &= 2 \\ 13x_2 &= -26 \end{aligned}$$

که در آن سطر ۲ + ۲(سطر ۱) به معنای آن است که در ماتریس اصلی دو برابر سطر ۱ را با سطر ۲ جمع بزنید. این عملیات حذف گاوسی (برای دو معادله با دو مجهول) است که فرم مثلثی را نتیجه می دهد. اکنون از این فرم مثلثی با جایگذاری بازگشتی مانند قبل $x_2=-2$ و $x_1=6$ به دست می آید.

چون هر دستگاه معادلات خطی به طور کامل توسط ماتریس افزوده اش مشخص می شود، به همین روشی که الان توضیح داده شد، حذف گاوسی می تواند تنها با در نظر گرفته شدن ماتریس ها انجام پذیرد. این روش را در مثال بعد نیز انجام دهیم. در اینجا نیز برای تأکید در ابتدا ماتریس ها و سپس معادلات را می نویسیم، فقط به این دلیل که مسیر انجام عملیات را گم نکنیم

مثال ۲ حذف گاوس. شبکه های الکتریکی

دستگاه معادلات زیر را حل کنید:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 10x_2 + 25x_3 &= 90 \\ 20x_1 + 10x_2 \qquad &= 80. \end{aligned}$$

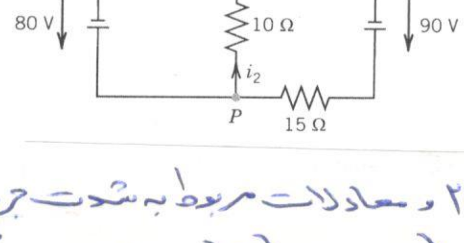
نتیجه گرفته شدن دستگاه بالا از روی مدار در شکل ۱۵۹ (اختیاری). این دستگاه برای شدت جریان های مجهول $x_1=i_1$، $x_2=i_2$ و $x_3=i_3$ در شبکه الکتریکی رسم شده در

شکل ۱۵۹ است. برای به دست آوردن آن، به صورتی که در شکل نشان داده شده، شدت جریان‌ها را علامت‌گذاری می‌کنیم، جهت جریان را به دلخواه انتخاب می‌کنیم و اگر جریان الکتریکی در خلاف جهت نوک پیکان انتشار یابد به آن مقدار منفی نظیر می‌کنیم. فرض بر آن است که شدت جریانی که وارد هر باطری می‌شود برابر است با شدت جریانی که از آن خارج می‌شود. معادلات مربوط به شدت جریان‌ها از قوانین کیرشف نتیجه‌گیری می‌شوند:

<u>قانون شدت جریان کیرشف (KCL)</u>. در هر نقطه از مدار الکتریکی، مجموع شدت جریان‌هایی که به داخل آن وارد می‌شوند برابر است با مجموع شدت جریان‌هایی که از آن خارج می‌شوند.

<u>قانون ولتاژ کیرشف (KVL)</u>. در هر حلقه بسته از مدار، مجموع تمام افت‌های ولتاژ برابر است با نیروی الکتروموتور تحت تأثیر.

به همان صورتی که در شکل نشان داده شده، گره P اولین، گره Q دومین، حلقه سمت راست سومین و حلقه سمت چپ چهارمین معادله را نتیجه می‌دهند.



گره P: $i_1 - i_2 + i_3 = 0$

گره Q: $-i_1 + i_2 - i_3 = 0$

حلقه راست: $10i_2 + 25i_3 = 90$

حلقه چپ: $20i_1 + 10i_2 = 80$

شکل ۱۵۹. شبکه مثال ۲ و معادلات مربوط به شدت جریان‌ها

<u>حل دستگاه به روش حذفی گاووسی</u>. با توجه به ساختار ساده دستگاه می‌توان آن را

به سادگی حل کرد. اما هدف تنها حل دستگاه نیست. هدف نشان دادن این واقعیت است که روش حذف گاوس اصولی است و می تواند به طور عمومی برای حل هر دستگاهی، به ویژه دستگاه های معادلات خطی بسیار بزرگ به کار برده شود. در اینجا نیز این روش را برای این دستگاه به کار می بریم و سپس با جایگذاری بازگشتی آن را حل می کنیم. بنابر آنچه که توضیح داده شد، ابتدا ماتریس افزوده دستگاه و به دنبال آن خود دستگاه را می نویسیم:

ماتریس افزوده $\tilde{A}$

$$
\begin{array}{rl}
\text{محور ۱} \rightarrow & \\
 & \\
\text{حذف کنید} \rightarrow & \\
 &
\end{array}
\left[\begin{array}{rrr|r}
1 & -1 & 1 & 0 \\
-1 & 1 & -1 & 0 \\
0 & 10 & 25 & 90 \\
20 & 10 & 0 & 80
\end{array}\right]
$$

معادلات

$$
\begin{array}{rl}
\text{محور ۱} \rightarrow & x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\
 & -x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\
\text{حذف کنید} \rightarrow & 10x_2 + 25x_3 = 90 \\
 & 20x_1 + 10x_2 = 80.
\end{array}
$$

گام ۱. حذف x_1

اولین سطر ماتریس افزوده را سطر محور و اولین معادله از دستگاه را معادله محور نامگذاری کنید. ضریب ۱ مربوط به مجهول x_1 را محور این گام نامگذاری کنید. به کمک این معادله مجهول x_1 را در سایر معادلات حذف کنید. برای این کار عملیات زیر را انجام دهید:

۱ برابر محور را در معادله محور ضرب و حاصل را با معادله دوم جمع بزنید.

۲۰- برابر محور را در معادله محور ضرب و حاصل را با معادله چهارم جمع بزنید.

مشابه این عملیات روی ماتریس افزوده به صورتی که در (۳) نشان داده شده است نیز انجام می شود. بنابراین عملیات روی ماتریس قبلا انجام می شود. در نتیجه

$$\text{(3)}\quad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 25 & 90 \\ 0 & 30 & -20 & 80 \end{array}\right] \qquad \begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 0 & & \\ 0 &= 0 & & \text{سطر۲ + سطر۱} \\ 10x_2 + 25x_3 &= 90 & & \\ 30x_2 - 20x_3 &= 80. & & \text{سطر۴ − ۲۰(سطر۱)} \end{aligned}$$

گام ۲. حذف x_2

اولین معادله به همان صورتی که بود باقی می‌ماند. خواسته ما این است که دومین معادله به عنوان معادله محور بعدی باشد. اما همان طور که مشاهده می‌کنید معادله دوم دارای جمله x_2 نیست (در حقیقت به صورت $0=0$ است)، در نتیجه باید معادلات را جابجا کرد و عین همین عملیات را روی ماتریس مربوط نیز انجام داد. معادله $0=0$ را در انتها قرار می‌دهیم و معادلات سوم و چهارم را در یک مکان بالاتر قرار می‌دهیم. این عملیات محورسازی جزئی نامیده می‌شود (که در تقابل با اصطلاح محورسازی تام است، که در آن ترتیب مجهول‌ها نیز عوض می‌شود). در نتیجه

$$\begin{array}{r} \\ \text{محور ۱۰} \rightarrow \\ \text{۳۰ را حذف کنید} \rightarrow \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & 25 & 90 \\ 0 & \boxed{30} & -20 & 80 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{rr} & x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ \text{محور ۱۰} \rightarrow & 10x_2 + 25x_3 = 90 \\ \text{۳۰}x_2 \text{ را حذف کنید} \rightarrow & \boxed{30x_2} - 20x_3 = 80 \\ & 0 = 0. \end{array}$$

برای حذف x_2، به صورت زیر عمل کنید:

۳- برابر معادله محور را با معادله سوم جمع بزنید.

در نتیجه

$$\text{(4)}\quad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & 25 & 90 \\ 0 & 0 & -95 & -190 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad \begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 0 & & \\ 10x_2 + 25x_3 &= 90 & & \\ -95x_3 &= -190 & & \text{سطر۳ − ۳(سطر۲)} \\ 0 &= 0. & & \end{aligned}$$

جایگذاری بازگشتی. تعیین x_3، x_2، x_1 (با همین ترتیب)

با عملیات بازگشتی از حل معادله آخر به معادله اول در دستگاه مثلثی (۴)، به آسانی می‌توانیم

ابتدا x_3، سپس x_2 و در انتها x_1 را به دست آوریم:

$$\begin{aligned} -95x_3 &= -190 \\ 10x_2 + 25x_3 &= 90 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_3 &= i_3 = 2\,[\mathrm{A}] \\ x_2 &= \tfrac{1}{10}(90 - 25x_3) = i_2 = 4\,[\mathrm{A}] \\ x_1 &= x_2 - x_3 = i_1 = 2\,[\mathrm{A}] \end{aligned}$$

که در آن A به معنای "آمپر" است. این جواب مسأله ما است و جوابی یکتاست. ■

عملیات سطری مقدماتی. دستگاه‌های معادل سطری

مثال ۲ عملیات مربوط به حذف گاوسی را توضیح می‌دهد. عملیاتی که در این مثال به کار رفته‌اند دو عملیات اول از سه عملیاتی هستند که در زیر توضیح داده می‌شوند:

عملیات سطری مقدماتی برای ماتریس‌ها:

تعویض دو سطر با یکدیگر
ضرب یک سطر در یک عدد ثابت و جمع سطر حاصل با سطری دیگر
ضرب یک سطر در یک عدد ناصفر مانند c

احتیاط! این عملیات روی سطرها انجام می‌شوند، نه روی ستون‌ها!. نظیر این عملیات روی معادلات نیز انجام می‌شوند که در زیر توضیح داده می‌شود:

عملیات مقدماتی برای معادلات

تعویض دو معادله با یکدیگر
ضرب یک معادله در یک عدد ثابت و جمع معادله حاصل با معادله دیگر
ضرب یک معادله در یک عدد ناصفر مانند c.

واضح است که تعویض دو معادله با یکدیگر جواب نهایی دستگاه را تغییر نمی‌دهد.

حتی جمع دو معادله نیز تغییری در جواب نهایی دستگاه نمی‌دهد، زیرا می‌توانیم با تفاضل نظیر به حالت قبل باز گردیم. به طور مشابه، ضرب یک معادله در عدد ناصفر c نیز

تغییری در جواب دستگاه نمی‌دهد، زیرا با ضرب معادله حاصل در عدد $\frac{1}{c}$ معادله قبل را به دست می‌آوریم.

دستگاه معادلات خطی S_1 را معادل سطری با دستگاه معادلات خطی S_2 گویند، هرگاه S_1 بتواند از روی S_2 توسط تعدادی متناهی از عملیات سطری مقدماتی به دست آید. این تعریف روش حذفی گاوس را توجیه و نتیجه زیر را پایه‌گذاری می‌کند.

قضیه ۱

دستگاه‌های معادل سطری
دستگاه‌های خطی که معادل سطری هستند دارای مجموعه جواب‌های یکسان هستند

با توجه به این قضیه، غالباً دستگاه‌هایی که دارای مجموعه جواب‌های یکسان هستند را دستگاه‌های معادل می‌نامند. ولی کاملاً توجه داشته باشید که عملیات مورد نظر برای رسیدن به دستگاه‌های معادل عملیات سطری مقدماتی هستند. در این فرآیند مجاز به استفاده از عملیات ستونی روی ماتریس افزوده نیستیم، زیرا این عملیات به طور کلی مجموعه جواب را تغییر می‌دهند.

دستگاه خطی (۱) را فرامعین می‌نامند، هرگاه تعداد معادلات آن از تعداد مجهول‌ها بیشتر باشد مانند آنچه که در مثال ۲ دیدیم. اگر $m=n$، مثلاً در مثال ۱، دستگاه را معین می‌نامیم. در حالتی که تعداد معادلات کمتر از تعداد مجهولات

باشد، دستگاه نامعین نامیده می‌شود.

همچنین، دستگاه (۱) را سازگار می‌نامند هرگاه حداقل دارای یک جواب باشد (یعنی یک جواب یا تعداد نامتناهی جواب)، اما اگر دستگاه دارای هیچ جواب نباشد، مانند $x_1+x_2=1$ ، $x_1+x_2=0$ در مثال ۱-c، آن را ناسازگار می‌نامند.

حذف گاوسی: سه حالت ممکن از انواع دستگاه‌ها

در مثال ۲ دیدیم که چگونه عملیات حذف گاوس دستگاه معادلات را حل و ما را به تنها جواب دستگاه رسانید. در مثال‌های ۳ و ۴ خواهیم دید که همین عملیات می‌تواند ما را به ترتیب به مجموعه جواب‌های نامتناهی و تهی برساند.

مثال ۳ حذف گاوسی برای حالتی که بی‌نهایت جواب وجود دارد

دستگاه معادلات خطی زیر را که دارای سه معادله و چهار مجهول است حل کنید.

$$(5)\quad \left[\begin{array}{cccc|c} 3.0 & 2.0 & 2.0 & -5.0 & 8.0 \\ 0.6 & 1.5 & 1.5 & -5.4 & 2.7 \\ 1.2 & -0.3 & -0.3 & 2.4 & 2.1 \end{array}\right]. \quad \text{پس} \quad \begin{aligned} 3.0x_1 + 2.0x_2 + 2.0x_3 - 5.0x_4 &= 8.0 \\ \boxed{0.6x_1} + 1.5x_2 + 1.5x_3 - 5.4x_4 &= 2.7 \\ \boxed{1.2x_1} - 0.3x_2 - 0.3x_3 + 2.4x_4 &= 2.1. \end{aligned}$$

حل. مانند آنچه که در مثال قبل انجام دادیم، دور محورها دایره می‌کشیم و جملاتی که باید حذف شوند را در یک مستطیل قرار می‌دهیم. عملیات حذف را برحسب معادلات مشخص می‌کنیم و هم‌زمان آن‌ها را روی معادلات و ماتریس افزوده، انجام می‌دهیم.

گام ۱. حذف x_1. با عملیات زیر x_1 را در معادلات دوم و سوم حذف می‌کنیم:

$-0.6/3.0=-0.2$ برابر سطر اول را با سطر دوم جمع می‌زنیم

$-1.2/3.0=-0.4$ برابر سطر اول را با سطر سوم جمع می‌زنیم

این عملیات دستگاه خطی معادل با دستگاه اصلی و ماتریس افزوده نظیر آن را به صورت زیر نتیجه می دهد که در آن حول محور مورد نظر دایره کشیده شده است.

$$(6)\quad \left[\begin{array}{cccc|c} 3.0 & 2.0 & 2.0 & -5.0 & 8.0 \\ 0 & 1.1 & 1.1 & -4.4 & 1.1 \\ 0 & -1.1 & -1.1 & 4.4 & -1.1 \end{array}\right] \qquad \begin{aligned} 3.0x_1 + 2.0x_2 + 2.0x_3 - 5.0x_4 &= 8.0 \\ 1.1x_2 + 1.1x_3 - 4.4x_4 &= 1.1 \\ \boxed{-1.1x_2} - 1.1x_3 + 4.4x_4 &= -1.1. \end{aligned}$$

سطر۲ − ۰/۲(سطر۱)

سطر۲ − ۰/۴(سطر۱)

گام ۲. حذف x_2 از سومین معادله در دستگاه (۶) به وسیله ۱=۱/۱/۱/۱ برابر سطر دوم و جمع معادله حاصل با معادله سوم.

این عمل نتیجه می دهد که

$$(7)\quad \left[\begin{array}{cccc|c} 3.0 & 2.0 & 2.0 & -5.0 & 8.0 \\ 0 & 1.1 & 1.1 & -4.4 & 1.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad \begin{aligned} 3.0x_1 + 2.0x_2 + 2.0x_3 - 5.0x_4 &= 8.0 \\ 1.1x_2 + 1.1x_3 - 4.4x_4 &= 1.1 \\ 0 &= 0. \end{aligned}$$

سطر۳ + سطر۲

جایگذاری بازگشتی. از معادله دوم جواب $x_2 = 1 - x_3 + 4x_4$ به دست می آید. با این جواب و از معادله اول جواب $x_1 = 2 - x_4$ به دست می آید. چون x_3 و x_4 به طور دلخواه باقی می مانند، بینهایت جواب برای این دستگاه خواهیم داشت. البته توجه داشته باشید که هر دو مقدار دلخواه برای x_3 و x_4 تنها یک جواب یکتا برای x_1 و x_2 نتیجه می دهد.

درخصوص نمادها. اگر در حل دستگاهها بعضی از مجهولها دلخواه باقی بمانند، معمول است که آن ها را با حروف دیگری مثل t_1، t_2، ... نمایش دهیم. در این مثال می توانیم بنویسیم $x_1 = 2 - x_4 = 2 - t_2$ ، $x_2 = 1 - x_3 + 4x_4 = 1 - t_1 + 4t_2$ ، $x_3 = t_1$ (اولین مجهول دلخواه) و $x_4 = t_2$ (دومین مجهول دلخواه).

مثال ۴ حذف گاوسی برای حالتی که جواب وجود ندارد

چه اتفاقی خواهد افتاد اگر عملیات حذف گاوس را برای یک دستگاه خطی به کار ببریم که دارای جواب نیست؟ جواب این است که در چنین حالتی این واقعیت را با تولید یک تناقض نشان خواهد داد. به عنوان مثال، دستگاه زیر را در نظر بگیرید:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 4 & 6 \end{array}\right] \qquad \begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 3 \\ \boxed{2x_1} + x_2 + x_3 &= 0 \\ \boxed{6x_1} + 2x_2 + 4x_3 &= 6. \end{aligned}$$

گام ۱. حذف x_1 از معادله دوم و سوم توسط عملیات زیر:

جمع $-\frac{۲}{۳}$ برابر سطر اول با سطر دوم

جمع $-\frac{۶}{۳}=-۲$ برابر سطر اول با سطر سوم.

انجام این عملیات دستگاه معادله خطی معادل و ماتریس افزوده نظیر را به صورت زیر نتیجه می‌دهند:

$$\begin{array}{cc} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right] & \begin{array}{l} \\ \text{سطر۲} - \frac{۲}{۳}(\text{سطر۱}) \\ \text{سطر۳} - ۲(\text{سطر۱}) \end{array} \end{array} \qquad \begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 3 \\ -\tfrac{1}{3}x_2 + \tfrac{1}{3}x_3 &= -2 \\ \boxed{-2x_2} + 2x_3 &= 0. \end{aligned}$$

گام ۲. حذف x_2 از معادله سوم نتیجه زیر را می‌دهد:

$$\begin{array}{cc} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{array}\right] & \begin{array}{l} \\ \\ \text{سطر۳} - ۶(\text{سطر۲}) \end{array} \end{array} \qquad \begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 3 \\ -\tfrac{1}{3}x_2 + \tfrac{1}{3}x_3 &= -2 \\ 0 &= 12. \end{aligned}$$

گزاره نادرست ۰=۱۲ نشان می‌دهد که دستگاه دارای جواب نیست. ■

فرم سطری پلکانی و نتایج حاصل از آن

در انتهای عملیات حذفی فرم ماتریس ضرایب، ماتریس افزوده و خود دستگاه را سطری پلکانی می‌نامند. در این فرم، در صورت حضور، تمام سطرهایی که درایه‌های آن‌ها صفر هستند سطرهای آخر می‌باشند، و، در هر سطر ناصفر، درایه ناصفری که در منتهی الیه سمت چپ قرار دارد، در سمت راست و دورتر از درایه نظیر در سطر قبل قرار دارد. به عنوان مثال، در مثال ۴ ماتریس ضرایب و ماتریس افزوده‌اش بعد از تبدیل به فرم سطری پلکانی به صورت زیر می‌باشند.

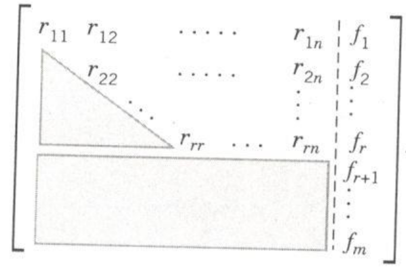
$$
(8) \qquad \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{array}\right].
$$

توجه کنید که هیچ الزامی برای آنکه در هر سطر درایه‌ای که در منتهی الیه سمت چپ قرار دارد برابر ۱ باشد نیست، زیرا این الزام مزیت تئوریک یا عددی در بر نخواهد داشت. (اصطلاح فرم تحویلی پلکانی، که در آن تمام آن درایه‌ها برابر ۱ هستند، در بخش ۸.۷ مورد بحث قرار می‌گیرد.)

دستگاه معادلات اصلی که دارای m معادله و n مجهول است دارای ماتریس افزوده $[A|b]$ است. این ماتریس توسط عملیات حذف گاوس به ماتریس سطری پلکانی $[R|f]$ تحویل می‌یابد. هر دو دستگاه $Ax=b$ و $Rx=f$ با یکدیگر معادل هستند: اگر هر کدام از آن‌ها دارای جواب باشد، دیگری نیز دارای جواب است، و جواب‌ها با یکدیگر یکسان هستند.

در انتهای عملیات حذفی (قبل از جایگذاری بازگشتی) فرم سطری پلکانی ماتریس افزوده به صورت زیر خواهد بود

(9)



در اینجا $r \le m$ ، $r_{11} \neq 0$ و تمام درایه‌های واقع در مثلث و مستطیل آبی رنگ برابر صفر هستند.

تعداد سطرهای ناصفر، یعنی r، در ماتریس ضرایب تحویل یافته سطری، یعنی R رتبه R و همچنین رتبه A نامیده می‌شود. در ادامه روش تشخیص این واقعیت که آیا دستگاه $Ax=b$ دارای جواب است و جواب‌ها چیستند توضیح داده می‌شود:

(الف) بدون جواب. اگر r کمتر از m باشد (یعنی R در حقیقت دارای حداقل یک سطر است که تمام درایه‌های آن صفر است) و حداقل یکی از اعداد f_{r+1} ، f_{r+2} ، ... ، f_m ناصفر باشد، در این صورت دستگاه $Rx=f$ ناسازگار است: وجود جواب غیرممکن است. بنابراین، دستگاه $Ax=b$ نیز ناسازگار است.

مثال ۴ را که در آن $r=2<m=3$ و $f_{r+1}=f_3=12$ ببینید.

اگر دستگاه سازگار باشد ($r=m$ ، یا $r<m$ و تمام اعداد f_{r+1} ، f_{r+2} ، ... ، f_m صفر باشند)، آنگاه دستگاه دارای جواب است.

(ب) جواب یکتا. اگر دستگاه سازگار باشد و $r=n$ ، دقیقاً یک جواب وجود دارد،

که می‌توانند با جابجایی‌های بازگشتی پیدا شود. مثال ۲، که در آن $r=n=3$ و $m=4$ ببینید.

(ج) وجود تعداد نامتناهی جواب. برای به دست آوردن هر کدام از جواب‌ها، برای مجهول‌های x_{r+1}، x_{r+2}، ...، x_n مقادیر دلخواه انتخاب کنید. سپس معادله rاُم را برای پیدا کردن x_r (برحسب آن مقادیر دلخواه)، بعد معادله $(r-1)$اُم را برای پیدا کردن x_{r-1}، و غیره، حل کنید. مثال ۳ را ببینید.

گرایش. استفاده از عملیات حذف گاوس در کاربردها برای کوتاه کردن زمان محاسبات و کاهش فضای ذخیره اطلاعات کاملاً قابل قبول و منطقی است. این جنبه از فواید عملیات حذف گاوس در بخش ۱.۲۰، از فصلی که در آن جبر خطی عددی ارائه می‌شود، مورد توجه قرار خواهد گرفت. در بخش ۴.۷ مفاهیم اساسی جبر خطی مانند استقلال خطی و رتبه ماتریس ارائه می‌شود. این مفاهیم بلافاصله در بخش ۵.۷ برای تشخیص کامل رفتار دستگاه برحسب وجود و یکتایی جواب‌ها مورد استفاده قرار خواهند گرفت

مجموعه تمرین‌های ۳.۷

$\boxed{1-14}$ حذف گاوس

دستگاه خطی که به طور صریح توسط معادلات آن یا ماتریس افزوده مربوط مشخص شده است را حل کنید. جزئیات محاسبات را نشان دهید.

1. $$\begin{aligned} 4x - 6y &= -11 \\ -3x + 8y &= 10 \end{aligned}$$

2. $$\begin{bmatrix} 3.0 & -0.5 & 0.6 \\ 1.5 & 4.5 & 6.0 \end{bmatrix}$$

3. $$\begin{aligned} x + y - z &= 9 \\ 8y + 6z &= -6 \\ -2x + 4y - 6z &= 40 \end{aligned}$$

4. $$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 4 \\ 5 & -3 & 1 & 2 \\ -9 & 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

5. $$\begin{bmatrix} 13 & 12 & -6 \\ -4 & 7 & -73 \\ 11 & -13 & 157 \end{bmatrix}$$

6. $$\begin{bmatrix} 4 & -8 & 3 & 16 \\ -1 & 2 & -5 & -21 \\ 3 & -6 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

7. $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}$

8. $\begin{aligned} 4y + 3z &= 8 \\ 2x \quad - z &= 2 \\ 3x + 2y \quad &= 5 \end{aligned}$

9. $\begin{aligned} -2y - 2z &= -8 \\ 3x + 4y - 5z &= 13 \end{aligned}$

10. $\begin{bmatrix} 5 & -7 & 3 & 17 \\ -15 & 21 & -9 & 50 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} 0 & 5 & 5 & -10 & 0 \\ 2 & -3 & -3 & 6 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & -6 & 5 & 15 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

13. $\begin{aligned} 10x + 4y - 2z &= -4 \\ -3w - 17x + y + 2z &= 2 \\ w + x + y \quad &= 6 \\ 8w - 34x + 16y - 10z &= 4 \end{aligned}$

14. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & -11 & 1 \\ 5 & -2 & 5 & -4 & 5 \\ 1 & -1 & 3 & -3 & 3 \\ 3 & 4 & -7 & 2 & -7 \end{bmatrix}$

۱۵. رابطه هم‌ارزی. بنابر تعریف، یک رابطه هم‌ارزی روی یک مجموعه رابطه‌ای است که دارای سه شرط زیر (با نام‌های اختصاص داده شده) است:

(i) هر عضو A از مجموعه با خودش معادل است. (بازتابی)

(ii) اگر A با B معادل باشد، آن‌گاه B با A معادل است (تقارنی)

(iii) اگر A با B و B با C معادل باشد، آن‌گاه A با C معادل است (انتقالی)

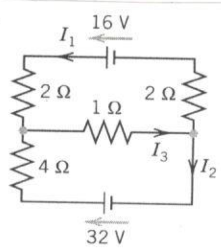
نشان دهید که هم‌ارزی سطری ماتریس‌ها دارای این سه شرط است. راهنمایی. نشان دهید که برای هر یک از سه عملیات سطری مقدماتی این سه شرط برقرار هستند.

۱۶. پروژه CAS. حذف گاوس و جایگذاری بازگشتی. برای حذف گاوس و جایگذاری بازگشتی برنامه‌ای بنویسید که (الف) در آن عمل محورگیری انجام نشود و (ب) در آن عمل محورگیری انجام شود. برنامه نوشته شده را برای حل تمرین‌های ۱۱-۱۴ و دستگاه‌های بزرگتری که خودتان انتخاب می‌کنید به کار برید.

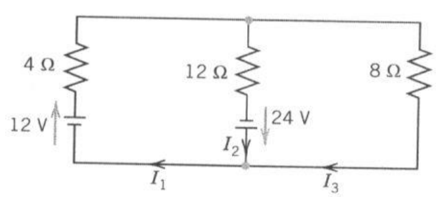
$\boxed{۱۷-۲۱}$ مدل‌های شبکه

در مسائل ۱۷-۱۹، با به کار بردن قوانین کیرشف (مثال ۲ را ببینید) و نشان دادن جزئیات، شدت جریان‌ها را پیدا کنید.

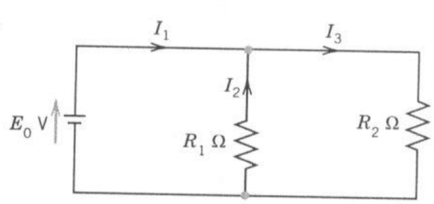
17.



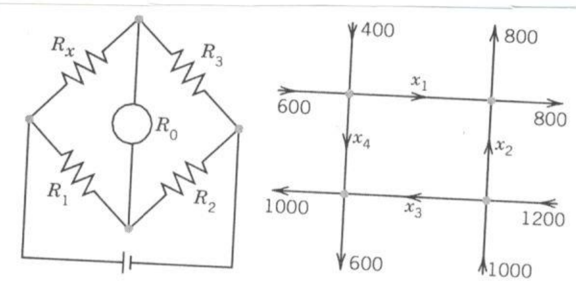
18.



19.



۲۰. پل وتستون. ثابت کنید که اگر در شکل زیر $R_x/R_3 = R_1/R_2$، آنگاه $I=0$. (R_0 مقاومت ابزاری است که توسط آن I اندازه‌گیری می‌شود.) این پل روشی برای تعیین R_x است. مقادیر R_1، R_2 و R_3 معلوم هستند. R_3 قابل تغییر است. برای به دست آوردن R_x می‌توان با تغییر دادن R_3 رابطه $I=0$ را به دست آورد. سپس با محاسبه $R_x = R_3 R_1 / R_2$ مقدار R_x را به دست آورید.



Wheatstone bridge

Problem 20

Net of one-way streets

Problem 21

۲۱. جریان ترافیک. روش تجزیه و تحلیل مدارهای الکتریکی دارای کاربردهای مختلف در شاخه‌های دیگر است. به عنوان مثال، با به کار بردن قوانین مشابه با قوانین کیرشف، جریان ترافیک (تعداد ماشین‌ها در ساعت) را در یک شبکه از خیابان‌های یکطرفه (در جهتی که نوک پیکان در شکل بالا نشان می‌دهد) پیدا کنید. آیا جواب یکتاست.

۲۲. مدل‌های فروشگاه‌ها. جواب تعادلی ($D_1=S_1$، $D_2=S_2$) از بازار دو کالایی با معادلات خطی زیر

$$D_1 = 40 - 2P_1 - P_2, \qquad S_1 = 4P_1 - P_2 + 4,$$
$$D_2 = 5P_1 - 2P_2 + 16, \qquad S_2 = 3P_2 - 4.$$

(که در آن D، S و P به ترتیب تقاضا، عرضه و قیمت هستند و اندیس ۱ برای کالای اول و اندیس ۲ برای کالای دوم است) را تعیین کنید.

۲۳. تعادل معادله شیمیایی. واکنش $x_1 C_3H_8 + x_2 O_2 \to x_3 CO_2 + x_4 H_2O$ به معنای آن است که اعداد صحیح x_1، x_2، x_3 و x_4 طوری تعیین شوند که تعداد اتم‌های کربن (C)، هیدروژن (H) و اکسیژن (O) در دو طرف این واکنش، که در آن گاز پروپان C_3H_8 و O_2 اکسید کربن و آب تولید می‌شود، یکسان باشد. کوچکترین اعداد صحیح برای رسیدن به این هدف را پیدا کنید.

۲۴. پروژه. ماتریس‌های مقدماتی. ایده‌ای که در این مسأله ارائه می‌شود آن است که نشان داده شود عملیات سطری مقدماتی می‌توانند توسط ضرب ماتریس‌ها نیز انجام شوند. در حقیقت اگر A آن ماتریس $m \times n$ است که روی آن می‌خواهیم یکی از عملیات سطری مقدماتی را انجام دهیم، در این صورت ماتریس E وجود دارد به طوری که EA ماتریس جدید

بعد از انجام آن عمل سطری مقدماتی است. چنین ماتریسی E را یک ماتریس مقدماتی می‌نامند. چنین ایده‌ای، مثلاً، در طراحی الگوریتم‌ها مفید واقع می‌شود. (البته از نقطه نظر محاسباتی انجام مستقیم عملیات سطری مقدماتی به ضرب ماتریس در E ترجیح داده می‌شود.)

(الف) نشان دهید که ماتریس‌های زیر به ترتیب آن ماتریس‌های مقدماتی هستند که سطر ۲ و ۳ را با یکدیگر عوض می‌کنند، ۵- برابر اولین سطر را با سطر سوم جمع می‌کنند و سطر چهارم را در عدد ۸ ضرب می‌کنند.

$$\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{E}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

ماتریس‌های E_1، E_2 و E_3 را در مورد یک بردار و یک ماتریس ۴x۳ به انتخاب خودتان به کار ببرید. $B = E_3E_2E_1A$ را که در آن $A=[a_{jk}]$ ماتریس عمومی ۴x۲ است پیدا کنید. آیا B با $C = E_1E_2E_3A$ مساوی است؟

(ب) ثابت کنید که E_1، E_2 و E_3 با انجام عملیات سطری مقدماتی نظیر روی ماتریس ۴x۴ همانی به دست می‌آیند.

ثابت کنید که اگر M از روی A توسط یک عملیات سطری مقدماتی به دست آمده باشد، آن‌گاه $M=EA$ که در آن E از روی ماتریس همانی I_n (با بعد $n\times n$) توسط همان عمل سطری مقدماتی به دست آمده است.

۴.۷ استقلال خطی. رتبه ماتریس. فضای برداری

چون هدف بعدی ما تشخیص کامل رفتار دستگاه‌های خطی برحسب وجود و یکتایی جواب‌هاست (بخش ۵.۷)، باید مفاهیم جدید و اساسی جبر خطی را که برای رسیدن به این هدف ما را یاری می‌کنند معرفی کنیم. مقدم‌ترین در بین

این مفاهیم استقلال خطی و رتبه ماتریس می باشد. به خاطر داشته باشید که این مفاهیم به طور مأنوسی با روش مهم حذف گاوس و اینکه چه گونه رفتاری کند در ارتباط هستند.

استقلال و وابستگی خطی بردارها

برای مجموعه ای معلوم از m بردار $a_{(1)}$، ...، $a_{(m)}$ (که همگی دارای تعداد مؤلفه های یکسان هستند) یک ترکیب خطی از این بردارها عبارت است به فرم

$$c_1\mathbf{a}_{(1)} + c_2\mathbf{a}_{(2)} + \cdots + c_m\mathbf{a}_{(m)}$$

که در آن c_1، c_2، ...، c_m اسکالرهای دلخواه هستند. اکنون معادله زیر را در نظر بگیرید.

$$c_1\mathbf{a}_{(1)} + c_2\mathbf{a}_{(2)} + \cdots + c_m\mathbf{a}_{(m)} = \mathbf{0}. \tag{1}$$

واضح است که معادله (۱) در صورت انتخاب عدد صفر برای تمام c_j ها برقرار است، زیرا در این صورت $0=0$. اگر این تنها m تایی مرتب از اسکالرها باشد که برای آن (۱) درست است، در این صورت بردارهای $a_{(1)}$، ...، $a_{(m)}$ مستقل خطی نامیده می شوند. در غیر این صورت اگر (۱) برای m تایی های مرتب دیگر، که همگی صفر نیستند، درست باشد آنگاه می گوییم که این بردارها وابسته خطی هستند. این به آن معنی است که می توانیم حداقل یکی از این بردارها را به صورت ترکیبی خطی از سایر بردارها بنویسیم. به عنوان مثال اگر رابطه (۱) با، مثلاً، $c_1 \neq 0$ درست باشد، می توانیم (۱) را برای پیدا کردن $a_{(1)}$ حل کنیم:

$$\mathbf{a}_{(1)} = k_2\mathbf{a}_{(2)} + \cdots + k_m\mathbf{a}_{(m)} \quad \text{که در آن} \quad k_j = -c_j/c_1.$$

(ممکن است که در رابطه بالا بعضی از k_j ها صفر باشند. حتی ممکن است تمام آن ها صفر باشند،

یعنی وقتی $a_1=0$).

چرا استقلال خطی با اهمیت است؟ زیرا، اگر مجموعه ای از بردارها وابسته خطی باشند، آن گاه می توانیم حداقل یک یا حتی چندتای آن ها را حذف کنیم تا به مجموعه ای از بردارهای مستقل خطی دست یابیم. در حقیقت این مجموعه کوچکترین و در واقع اساسی ترین مجموعه ای است که با آن می توانیم کار کنیم. بنابراین، نمی توانیم هیچ کدام از بردارهای درون این مجموعه را به طور خطی برحسب سایر بردارها بیان کنیم.

مثال ۱ استقلال و وابستگی خطی.

سه بردار

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{(1)} &= [\ 3 \quad 0 \quad 2 \quad 2] \\ \mathbf{a}_{(2)} &= [-6 \quad 42 \quad 24 \quad 54] \\ \mathbf{a}_{(3)} &= [\ 21 \quad -21 \quad 0 \quad -15] \end{aligned}$$

وابسته خطی هستند زیرا

$$6\mathbf{a}_{(1)} - \tfrac{1}{2}\mathbf{a}_{(2)} - \mathbf{a}_{(3)} = \mathbf{0}.$$

هرچند که این واقعیت را می توان با انجام عملیات جبری تحقیق کرد (انجام دهید!) پیدا کردن آن به این سادگی نیست. در عین حال، یک روش اصولی برای تشخیص استقلال و وابستگی خطی در زیر ارائه خواهد شد.

از سه بردار بالا، دو بردار اول مستقل خطی هستند، زیرا $c_1 a_{(1)} + c_2 a_{(2)} = 0$ نتیجه می دهد که $c_2=0$ (این از مؤلفه دوم هر دو بردار نتیجه می شود) و بعد از آن (از هر کدام از مؤلفه های $a_{(1)}$ نتیجه می شود) $c_1=0$.

رتبه ماتریس

تعریف

رتبه ماتریس A ماکزیمم تعداد بردارهای سطری A است که مستقل خطی هستند. رتبه هر ماتریس A به صورت $rank(A)$ نمایش داده می‌شود.

بحث بعدی ما نشان می‌دهد که رتبه ماتریس یکی از مفاهیم کلیدی مهم برای درک خواص ماتریس‌ها و دستگاه‌های معادلات خطی است.

مثال ۲ رتبه ماتریس

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 \\ -6 & 42 & 24 & 54 \\ 21 & -21 & 0 & -15 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

دارای رتبه ۲ است، زیرا در حل مثال ۱ مشاهده کردیم که دو سطر اول این ماتریس مستقل خطی هستند، در حالیکه هر سه سطر وابسته خطی می‌باشند.

همچنین توجه کنید که $rank(A)=0$ اگر و تنها اگر $A=0$. این واقعیت به طور مستقیم از روی تعریف رتبه قابل نتیجه‌گیری است. ■

ماتریس A_1 را با ماتریس A_2 هم‌ارز سطری گویند هرگاه A_1 را بتوان از روی A_2 با (تعداد متناهی) از عملیات سطری مقدماتی به دست آورد.

توجه کنید که ماکزیمم تعداد بردارهای سطری مستقل خطی در یک ماتریس با عوض کردن ترتیب سطرها، یا ضرب یک سطر در اسکالر ناصفر c، یا ترکیب خطی دو سطر (ضرب یکی در اسکالر ناصفر c و جمع با دیگری) تغییر نخواهد کرد. این واقعیت نشان می‌دهد که رتبه ماتریس تحت عملیات سطری مقدماتی پایا است:

قضیه ۱ — ماتریس های هم ارز سطری

ماتریس های که با یکدیگر هم ارز سطری هستند دارای رتبه های یکسان هستند.

درنتیجه، مانند آنچه که در بخش ۳.۷ انجام دادیم، می توانیم رتبه یک ماتریس را بعد از تبدیل آن به یک ماتریس سطری پلکانی تعیین کنیم. به محض آن که ماتریس به یک ماتریس سطری پلکانی تبدیل شد، تعداد سطرهای ناصفر آن را می شماریم و حاصل شمارش دقیقاً رتبه ماتریس است.

مثال ۳. تعیین رتبه

برای ماتریس مثال ۲ به ترتیب ماتریس های

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 \\ -6 & 42 & 24 & 54 \\ 21 & -21 & 0 & -15 \end{bmatrix}$$ (معلوم)

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 42 & 28 & 58 \\ 0 & -21 & -14 & -29 \end{bmatrix}$$
(سطر۱) ۲ + سطر۲
(سطر۱) ۷ − سطر۲

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 42 & 28 & 58 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
(سطر۲) $\frac{1}{2}$ + سطر۳

آخرین ماتریس به فرم سطری پلکانی است و دارای دو سطر ناصفر است. درنتیجه $rank(A)=2$، یعنی همان نتیجه ای که قبلاً به دست آوردیم.

مثال های ۱-۳ قضیه مهم و کارآمد زیر را (با $p=3$، $n=3$ و رتبه ماتریس که برابر ۲ است) توضیح می دهند.

قضیه ۲ **استقلال و وابستگی خطی ماتریس ها**

تعداد p بردار که هر کدام دارای n مؤلفه هستند در نظر بگیرید. در این صورت این بردارها مستقل خطی اند اگر ماتریسی که سطرهای آن با این بردارها ساخته می شوند، دارای رتبه ای برابر p باشد. اما این بردارها وابسته خطی هستند اگر رتبه آن ماتریس کمتر از p باشد.

گزاره های دیگر از این قضیه اساسی قابل نتیجه گیری هستند.

قضیه ۳ **رتبه برحسب بردارهای ستونی**

رتبه r از ماتریس A برابر است با ماکزیمم تعداد بردارهای ستونی A که مستقل خطی هستند.

در نتیجه A و ترانهاده آن یعنی A^T دارای رتبه های یکسان هستند

اثبات: در اثبات این قضیه برای سادگی در نوشتار به ترتیب از کلمه "سطر" و "ستون" به جای بردارهای سطری و بردارهای ستونی استفاده می کنیم. فرض شود که A یک ماتریس با بعد $m\times n$ است و $rank(A)=r$. در این صورت بنابر تعریف رتبه، A دارای r سطر مستقل خطی است که آن ها را توسط $V_{(1)}, \ldots, V_{(r)}$ (بدون توجه به موقعیت قرار گرفتن آن ها در A) نمایش می دهیم. بنابراین، تمام سطرهای $a_{(1)}, a_{(2)}, \ldots, a_{(m)}$ از r ترکیب خطی از آن ها می باشند، یعنی،

$$
(3)\qquad
\begin{aligned}
\mathbf{a}_{(1)} &= c_{11}\mathbf{v}_{(1)} + c_{12}\mathbf{v}_{(2)} + \cdots + c_{1r}\mathbf{v}_{(r)}\\
\mathbf{a}_{(2)} &= c_{21}\mathbf{v}_{(1)} + c_{22}\mathbf{v}_{(2)} + \cdots + c_{2r}\mathbf{v}_{(r)}\\
\vdots\quad & \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots\\
\mathbf{a}_{(m)} &= c_{m1}\mathbf{v}_{(1)} + c_{m2}\mathbf{v}_{(2)} + \cdots + c_{mr}\mathbf{v}_{(r)}.
\end{aligned}
$$

معادلات (۳) معادلات برداری برای سطرهای A هستند. برای تعویض بحث از سطرها به ستون‌ها، معادلات (۳) را برحسب مؤلفه‌ها به صورت n دستگاه زیر

$$
(4)\qquad
\begin{aligned}
a_{1k} &= c_{11}v_{1k} + c_{12}v_{2k} + \cdots + c_{1r}v_{rk}\\
a_{2k} &= c_{21}v_{1k} + c_{22}v_{2k} + \cdots + c_{2r}v_{rk}\\
\vdots\quad & \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots\\
a_{mk} &= c_{m1}v_{1k} + c_{m2}v_{2k} + \cdots + c_{mr}v_{rk}
\end{aligned}
$$

با $k=1,2,\ldots,n$ می‌نویسیم، و مؤلفه‌ها را، برای هر k، در یک ستون قرار دهیم.

درحقیقت (۴) را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت

$$
(5)\qquad
\begin{bmatrix} a_{1k}\\ a_{2k}\\ \vdots\\ a_{mk}\end{bmatrix}
= v_{1k}\begin{bmatrix} c_{11}\\ c_{21}\\ \vdots\\ c_{m1}\end{bmatrix}
+ v_{2k}\begin{bmatrix} c_{12}\\ c_{22}\\ \vdots\\ c_{m2}\end{bmatrix}
+ \cdots + v_{rk}\begin{bmatrix} c_{1r}\\ c_{2r}\\ \vdots\\ c_{mr}\end{bmatrix}
$$

که در آن $k=1,2,\ldots,n$. اکنون بردار واقع در سمت چپ (۵) kاُمین بردار ستونی ماتریس A است. مشاهده می‌کنیم که هر یک از این n ستون یک ترکیب خطی از r ستون یکسان در سمت راست (۵) است. در نتیجه A نمی‌تواند بیشتر از تعداد سطرهای مستقل خطی دارای ستون‌های مستقل خطی باشد؛ و این تعداد همان $rank(A)=r$ است.

بنابر تعریف ترانهاده، سطرهای A^T ستون‌های A هستند پس برای A^T، نتیجه‌ای که می‌توان گرفت این است که A^T نمی‌تواند بیشتر از تعداد سطرهای مستقل خطی دارای ستون‌های

مستقل خطی باشد. درنتیجه A نمی تواند بیشتر از تعداد ستون های مستقل خطی دارای سطرهای مستقل خطی باشد. از تمام این گزاره ها نتیجه می شود که تعداد ستون های مستقل خطی ماتریس A باید $r = rank(A)$ باشد. این نتیجه گیری اثبات قضیه را کامل می کند ■

مثال ۴. توضیح قضیه ۳

ماتریس (۲) دارای رتبه ۲ است. از مثال ۲ نتیجه می گیریم که دو سطر اول دو بردار سطری مستقل خطی اند و با یک «عملیات بازگشتی» می توانیم تحقیق کنیم که سطر۳ = ۶(سطر۱) − $\frac{1}{2}$(سطر۲).

بطور مشابه، دو ستون اول دو بردار ستونی مستقل خطی اند، و با تحویل ستونی آخرین ماتریس در مثال ۳ نتیجه می گیریم که

ستون۳ = $\frac{2}{3}$(ستون۱) + $\frac{2}{3}$(ستون۲) ، ستون۴ = $\frac{2}{3}$(ستون۱) + $\frac{29}{21}$(ستون۲) ■

از ترکیب قضایای ۲ و ۳ نتیجه بعد به دست می آید.

قضیه ۴

بردارهای وابسته خطی
p بردار را که هر کدام دارای n مؤلفه هستند در نظر بگیرید. اگر $n < p$، آنگاه این بردارها وابسته خطی اند

اثبات ماتریس A که آن p بردار به عنوان سطرهایش در نظر گرفته شوند، دارای p سطر و n $(n<p)$ ستون است؛ پس بنابر قضیه ۳ $rank(A) \le n < p$.

درنتیجه بنابر قضیه ۲ آن p بردار وابسته خطی اند. ■

فضای برداری

مفاهیمی که در زیر ارائه می شوند در ارتباط با مفاهیم ارائه شده در بالا هستند و در جبر خطی به طور عموم مورد توجه قرار می گیرند. این مفاهیم وضوح خواص اساسی ماتریس ها و نقش آن ها را در ارتباط با دستگاه های خطی بیشتر می سازند.

فرض شود که V مجموعه ای است ناتهی و اعضای آن بردارهایی هستند که هر بردار دارای تعداد مؤلفه های یکسان است. اگر، برای هر دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ در V، تمام ترکیب های خطی به صورت $\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}$ (α و β هر دو عدد حقیقی هستند) متعلق به V باشند، و اگر، برای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ شرائط (۳a)، (۳c)، (۳d) و (۴) در بخش ۱.۷، و همچنین، برای $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ در V شرط (۳b) برقرار باشد، در این صورت V یک فضای برداری است. توجه کنید که در اینجا قوانین (۳) و (۴) از بخش ۱.۷ با حروف کوچک $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ نوشته می شوند که برای نمایش بردارها به کار می روند. بحث بیشتر روی فضاهای برداری در بخش ۹.۷ ارائه می شود.

ماکزیمم تعداد بردارهای مستقل خطی در V بعد V نامیده می شود و با $\dim V$ نشان داده می شود. در اینجا فرض بر آن است که بعد V متناهی است؛ فضاهای با بعد بینهایت در بخش ۹.۷ تعریف می شوند.

یک زیرمجموعه مستقل خطی از V که دارای ماکزیمم ممکن تعداد بردار است یک <u>پایه</u> برای V نامیده می شود. به عبارت دیگر، هر بزرگترین مجموعه ممکن از بردارهای مستقل خطی

مستقل به V یک پایه برای V تشکیل می دهد. یعنی، اگر یک یا چند بردار را به آن مجموعه اضافه کنیم، مجموعه به یک مجموعه وابسته خطی تبدیل می شود. (قسمت آغازین بخش ۴.۷ که در مورد استقلال و وابستگی خطی می باشد را نیز ببینید) پس، تعداد بردارهای یک پایه برای V برابر است با $\dim V$.

مجموعه تمام ترکیب های خطی از بردارهای معلوم $a_{(1)}, \dots, a_{(p)}$ با تعداد مؤلفه های یکسان، پوشش این بردارها نامیده می شود. واضح است که هر پوشش یک فضای برداری است. اگر بردارهای $a_{(1)}, \dots, a_{(p)}$ مستقل خطی باشند، آنگاه این بردارها یک پایه را برای پوشش تولید شده (فضای تولید شده) تشکیل می دهند.

تعریف بالا به تعریف معادل دیگری برای پایه منجر می شود. مجموعه ای از بردارها یک پایه برای فضای V است هرگاه (۱) بردارهای آن مجموعه مستقل خطی باشند، و (۲) هر بردار در V بتواند به صورت یک ترکیب خطی از بردارهای آن مجموعه نوشته شود. اگر شرط (۲) برقرار باشد، می توانیم بگوییم که آن مجموعه فضای V را تولید می کند.

هر وقت صحبت از یک زیرفضا از فضای برداری V می شود، منظور زیر مجموعه ای ناتهی از V است (که می تواند خود V نیز باشد) که خود نسبت به عملیات جبری (جمع و ضرب اسکالر) تعریف شده برای بردارهای V یک فضای برداری است.

مثال ۵. فضای برداری، بعد، پایه

فضای برداری تولید شده از سه بردار در مثال ۱ یک فضای برداری است که بعد آن ۲ است.

یک پایه برای آن فضا می تواند شامل هر دو بردار از آن سه بردار باشد، به عنوان مثال

■ $a_{(1)}$ ، $a_{(2)}$ یا $a_{(1)}$ ، $a_{(3)}$ یا $a_{(2)}$ ، $a_{(3)}$.

از بحث های بالا نتیجه ساده زیر نیز به دست می آید:

قضیه ۵

فضای برداری $\mathbb{R}^n$

فضای برداری $\mathbb{R}^n$ که شامل تمام بردارهایی است که دارای n مؤلفه هستند و تمام مؤلفه ها در $\mathbb{R}$ قرار دارند دارای بعد n است.

اثبات مشاهده کنید که n بردار $a_{(1)} = [1, 0, 0, \dots, 0]$ ، $a_{(2)} = [0, 1, 0, 0, \dots, 0]$ ،
...... $a_{(n)} = [0, 0, \dots, 0, 1]$ مستقل خطی اند و یک پایه را برای $\mathbb{R}^n$ تشکیل
می دهند

■

برای ماتریس A ، پوشش تولید شده توسط بردارهای سطری A را فضای سطری A می نامند. به طور مشابه، پوشش تولید شده توسط بردارهای ستونی A را فضای ستونی A می نامند.

اکنون، بنابر قضیه ۳ تعداد سطرهای مستقل خطی A با تعداد ستون های مستقل A برابر است. بنابر تعریف بعد، این تعداد بعد فضای سطری یا فضای ستونی A است. این واقعیت گزاره زیر را نتیجه می دهد:

قضیه

فضای سطری و فضای ستونی

فضای سطری و فضای ستونی ماتریس A دارای ابعاد یکسان هستند و بعد آن ها برابر $\operatorname{rank}(A)$ است.

بالاخره، برای ماتریس معلوم A مجموعه جواب دستگاه همگن $Ax=0$ یک فضای برداری است که فضای پوچ A و بعد آن را پوچی A می‌نامند.

(یا به زبان ساده‌تر پوچی A) می‌نامند. در بخش بعد رابطهٔ اساسی زیر را ثابت می‌کنیم و برای به کاربردن آن انگیزه لازم را ایجاد می‌کنیم:

$$(۶) \qquad \mathrm{rank}(A) + \mathrm{null}(A) = A \text{ تعداد ستونهای }$$

که در آن $\mathrm{null}(A)$ همان بعد فضای پوچ A است.

مجموعه تمرینهای ۴.۷

۱-۱۰ رتبه، فضای سطری، فضای ستونی

در تمرینهای ۱-۱۰ برای ماتریس‌های تعریف شده رتبه را بیابید و یک پایه برای فضای سطری و یک پایه برای فضای ستونی به دست آورید. راهنمایی: برای هر ماتریس و ترانهادهٔ آن فرم سطری پلکانی آن را بیابید. (توضیح آنکه می‌توانید فاکتورهای واضح در نمایش بردارهای این پایه‌ها را حذف کنید)

1. $\begin{bmatrix} 4 & -2 & 6 \\ -2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ 2. $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 10 \end{bmatrix}$ 4. $\begin{bmatrix} 6 & -4 & 0 \\ -4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 0.2 & -0.1 & 0.4 \\ 0 & 1.1 & -0.3 \\ 0.1 & 0 & -2.1 \end{bmatrix}$ 6. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 8 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ 8. $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 & 16 \\ 16 & 8 & 4 & 2 \\ 4 & 8 & 16 & 2 \\ 2 & 16 & 8 & 4 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} 9 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ 10. $\begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & -11 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

۱۱. آزمایش CAS. رتبه

(الف) به صورت آزمایشی نشان دهید که ماتریس $A=[a_{jk}]$ با ابعاد $n\times n$ و $a_{jk}=j+k-1$ برای هر n دارای رتبه ۲ است. (مسأله ۲۰ حالت $n=4$ را ثابت می‌کند. سعی کنید که این واقعیت را اثبات کنید.

(ب) قسمت (الف) را برای حالتی که $a_{jk}=j+k+c$، که در آن c هر عدد صحیح مثبت دلخواه است نیز ثابت کنید.

ج) اگر $a_{jk} = 2^{j+k-2}$ ، آنگاه $rank(A)$ برابر چیست؟ سعی کنید ماتریس‌های با ابعاد بزرگتر و رتبه کم را که مستقل از n هستند بیابید.

۱۲-۱۶ خواص عمومی رتبه

گزاره‌های زیر را ثابت کنید:

۱۲. $rank(B^T A^T) = rank(AB)$ (به ترتیب موجود توجه کنید.)

۱۳. تساوی $rank(A) = rank(B)$ تساوی $rank(A^2) = rank(B^2)$ را نتیجه نمی‌دهد. (مثال نقض ارائه دهید.)

۱۴. اگر A ماتریس مربع نباشد، یا بردارهای سطری مستقل خطی نیستند یا بردارهای ستونی.

۱۵. اگر بردارهای سطری یک ماتریس مربع مستقل باشند، آنگاه بردارهای ستونی نیز مستقل خطی هستند و برعکس.

۱۶. مثال‌هایی ارائه دهید که نشان دهد رتبه حاصلضرب ماتریس‌ها می‌تواند از رتبه هر یک از عامل‌های ضرب بیشتر باشد.

۱۷-۲۵ استقلال خطی

آیا مجموعه بردارهای زیر مستقل خطی‌اند؟ جزئیات محاسبات مربوط به هر یک را نشان دهید.

17. $[3\ \ 4\ \ 0\ \ 2]$, $[2\ \ -1\ \ 3\ \ 7]$, $[1\ \ 16\ \ -12\ \ -22]$

18. $[1\ \ \frac{1}{2}\ \ \frac{1}{3}\ \ \frac{1}{4}]$, $[\frac{1}{2}\ \ \frac{1}{3}\ \ \frac{1}{4}\ \ \frac{1}{5}]$, $[\frac{1}{3}\ \ \frac{1}{4}\ \ \frac{1}{5}\ \ \frac{1}{6}]$, $[\frac{1}{4}\ \ \frac{1}{5}\ \ \frac{1}{6}\ \ \frac{1}{7}]$

19. $[0\ \ 1\ \ 1]$, $[1\ \ 1\ \ 1]$, $[0\ \ 0\ \ 1]$

20. $[1\ \ 2\ \ 3\ \ 4]$, $[2\ \ 3\ \ 4\ \ 5]$, $[3\ \ 4\ \ 5\ \ 6]$, $[4\ \ 5\ \ 6\ \ 7]$

21. $[2\ \ 0\ \ 0\ \ 7]$, $[2\ \ 0\ \ 0\ \ 8]$, $[2\ \ 0\ \ 0\ \ 9]$, $[2\ \ 0\ \ 1\ \ 0]$

22. $[0.4\ \ -0.2\ \ 0.2]$, $[0\ \ 0\ \ 0]$, $[3.0\ \ -0.6\ \ 1.5]$

23. $[9\ \ 8\ \ 7\ \ 6\ \ 5]$, $[9\ \ 7\ \ 5\ \ 3\ \ 1]$

24. $[4\ \ -1\ \ 3]$, $[0\ \ 8\ \ 1]$, $[1\ \ 3\ \ -5]$, $[2\ \ 6\ \ 1]$

25. $[6\ \ 0\ \ -1\ \ 3]$, $[2\ \ 2\ \ 5\ \ 0]$, $[-4\ \ -4\ \ -4\ \ -4]$

۲۶. زیرمجموعه مستقل خطی. با شروع از آخرین بردار در مجموعه بردارهای $[3\ \ 0\ \ 1\ \ 2]$، $[6, 1, 0, 0]$، $[12\ \ 1\ \ 2\ \ 4]$، $[6\ \ 0\ \ 2\ \ 4]$ و $[9\ \ 0\ \ 1\ \ 2]$ یکی بعد از دیگری را حذف کنید تا به مجموعه‌ای مستقل خطی دست یابید.

۱۷-۳۵ فضای برداری

در تمرین‌های ۱۷-۲۵ مشخص کنید که آیا مجموعه بردارهای تعریف شده یک فضای برداری است؟ دلایل خود را ارائه دهید. اگر پاسخ مثبت است بعد فضا را تعیین و یک پایه

برای آن مشخص کنید. ($v_1, v_2, \ldots$ مؤلفه‌های بردار را نشان می‌دهند.)

۲۷. تمام بردارهای متعلق به $\mathbb{R}^3$ با $v_1 - v_2 + 2v_3 = 0$.

۲۸. تمام بردارهای متعلق به $\mathbb{R}^3$ با $3v_2 + v_3 = k$

۲۹. تمام بردارهای متعلق به $\mathbb{R}^2$ با $v_1 \geq v_2$.

۳۰. تمام بردارهای متعلق به $\mathbb{R}^n$ که $n-2$ مؤلفه‌های اول آن‌ها صفر هستند

۳۱. تمام بردارهای متعلق به $\mathbb{R}^5$ که مؤلفه‌های آن‌ها مثبت هستند

۳۲. تمام بردارهای متعلق به $\mathbb{R}^3$ با $3v_1 - 2v_2 + v_3 = 0$ و $4v_1 + 5v_2 = 0$.

۳۳. تمام بردارهای متعلق به $\mathbb{R}^3$ با $3v_1 - v_3 = 0$ و $2v_1 + 3v_2 - 4v_3 = 0$

۳۴. تمام بردارهای متعلق به $\mathbb{R}^n$ با $|v_j| = 1$ و $j = 1, 2, \ldots, n$.

۳۵. تمام بردارهای متعلق به $\mathbb{R}^4$ با $v_1 = 2v_2 = 3v_3 = 4v_4$

۵.۷ حل دستگاه‌های خطی: وجود و یکتایی جواب

مفهوم رتبه که در بخش قبل تعریف شد، تمام اطلاعات در مورد وجود، یکتایی و ساختار عمومی مجموعه جواب را به صورت زیر ارائه می‌دهد.

یک دستگاه معادلات خطی n مجهولی دارای جواب یکتا است، هرگاه رتبه ماتریس ضرائب و ماتریس افزوده هر دو برابر n باشند، دارای بی‌نهایت جواب است هرگاه این دو ماتریس دارای رتبه یکسان اما کمتر از n باشند و بدون جواب است هرگاه این دو ماتریس دارای رتبه‌های متفاوت باشند.

برای بیان دقیق این واقعیت و اثبات آن، از مفهوم مهم و عمومی زیرماتریس استفاده می‌کنیم. یک زیرماتریس از ماتریس A هر ماتریسی است که از A با حذف

چند سطر یا ستون (یا هردو) به دست می آید. بنا بر تعریف یک زیرماتریس می تواند خود A باشد (که از A بدون حذف سطر یا ستون به دست می آید)؛ که در عمل امکان پذیر است.

قضیه ۱ <u>قضیه اساسی دستگاه های خطی</u>

(الف) <u>وجود جواب</u>. دستگاه خطی m معادله با n مجهول $x_1, \dots, x_n$

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned} \tag{1}
$$

سازگار است، یعنی، دارای جواب است، اگر و تنها اگر ماتریس ضرایب A و ماتریس افزوده $\tilde{A}$ دارای رتبه های یکسان باشند. در اینجا

$$
\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \tilde{\mathbf{A}} = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]
$$

(ب) <u>یکتایی جواب</u>. دستگاه (۱) دقیقاً دارای یک جواب است هرگاه r، یعنی رتبه مشترک A و $\tilde{A}$ برابر n باشد.

(ج) <u>وجود تعدادی نامتناهی جواب</u>. اگر رتبه مشترک، یعنی، r، کمتر از n باشد، دستگاه (۱) دارای بینهایت جواب است. تمام این جواب ها توسط تعیین مناسب r مجهول (که زیرماتریس ضرایب آن ها باید

دارای رتبه r باشد) برحسب $n-r$ مجهول باقی‌مانده، که می‌توانند به آن‌ها مقادیر دلخواه تخصیص داده شود، مشخص می‌شوند. (مثال ۳ در بخش ۳.۷ را ببینید.

(د) حذف گاوس (بخش ۳.۷). اگر جواب‌های دستگاه وجود داشته باشند، تمام آن‌ها را می‌توان توسط روش حذف گاوس به دست آورد. (این روش به طور خود وجود یا عدم وجود جواب را آشکار می‌کند؛ بخش ۳.۷ را ببینید.

اثبات (الف) دستگاه (۱) را می‌توان یا به صورت برداری $Ax=b$ یا برحسب بردارهای ستونی A، یعنی $c_{(1)}, \ldots, c_{(n)}$ به صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{c}_{(1)}x_1 + \mathbf{c}_{(2)}x_2 + \cdots + \mathbf{c}_{(n)}x_n = \mathbf{b}. \quad (2)$$

ماتریس $\tilde{A}$ با افزودن یک ستون، یعنی b، به ماتریس A به دست می‌آید. در نتیجه بنابر قضیه ۳ در بخش ۴.۷ $\operatorname{rank}(\tilde{A})$ یا برابر است با $\operatorname{rank}(A)$ یا $\operatorname{rank}(A)+1$. حال اگر (۱) دارای جواب x باشد، آنگاه (۲) نشان می‌دهد که b باید یک ترکیب خطی از آن بردارهای ستونی باشد، در نتیجه $\tilde{A}$ و A دارای ماکزیمم تعداد بردارهای ستونی مستقل خطی هستند و بنابراین دارای رتبه‌های یکسان می‌باشند.

برعکس، اگر $\operatorname{rank}(\tilde{A}) = \operatorname{rank}(A)$، آن‌گاه b باید یک ترکیب خطی از بردارهای ستونی A باشد، مثلاً

$$(2^*) \qquad \mathbf{b} = \alpha_1\mathbf{c}_{(1)} + \cdots + \alpha_n\mathbf{c}_{(n)}$$

زیرا در غیر این صورت $rank(\tilde{A}) = rank(A)+1$. امّا (۲*) به معنای آن است که

(۱) دارای جواب است، در حقیقت، $x_1=\alpha_1$، ....، $x_n=\alpha_n$، که می‌توانند با مقایسه

(۲) و (۲*) تحقیق شود.

(ب) اگر $rank(A)=n$، بنابر قضیه ۳ در بخش ۴.۷، n بردار ستونی در (۲) مستقل

خطی هستند. ادعا می‌کنیم که نمایش (b) در (۲) یکتاست زیرا در غیر این صورت

$$\mathbf{c}_{(1)}x_1 + \cdots + \mathbf{c}_{(n)}x_n = \mathbf{c}_{(1)}\tilde{x}_1 + \cdots + \mathbf{c}_{(n)}\tilde{x}_n.$$

از این تساوی (با انتقال تمام جملات سمت راست به سمت چپ، با علامت منفی) رابطه

زیر به دست می‌آید:

$$(x_1 - \tilde{x}_1)\mathbf{c}_{(1)} + \cdots + (x_n - \tilde{x}_n)\mathbf{c}_{(n)} = \mathbf{0}$$

که بنابر استقلال خطی ستون‌ها باید $x_1-\tilde{x}_1=0$، ....، $x_n-\tilde{x}_n=0$. یعنی،

اسکالرهای x_1، ...، x_n در (۲) یکتا هستند، در نتیجه، جواب (۱) یکتاست.

(ج) اگر $rank(A) = rank(\tilde{A}) = r<n$، در این صورت بنابر قضیه ۳ در بخش ۴.۷

مجموعه K که از r بردار مستقل خطی ستونی A تشکیل شده است وجود دارد به طوری که

$(n-r)$ بردار ستونی دیگر A ترکیب‌های خطی آن بردارهای متعلق به K هستند. اکنون

با تجدید شماره‌گذاری ستون‌ها و مجهولات و مشخص کردن کمیت‌هایی که مجدداً

شماره‌گذاری شده‌اند با علامت "^" داریم که $\{\hat{C}_{(1)}, \ldots, \hat{C}_{(r)}\}$ همان مجموعه مستقل

خطی K است و (۲) به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\hat{\mathbf{c}}_{(1)}\hat{x}_1 + \cdots + \hat{\mathbf{c}}_{(r)}\hat{x}_r + \hat{\mathbf{c}}_{(r+1)}\hat{x}_{r+1} + \cdots + \hat{\mathbf{c}}_{(n)}\hat{x}_n = \mathbf{b},$$

که در آن $\hat{c}_{(n)}$ ، ... ، $\hat{c}_{(r+1)}$ ترکیب های خطی بردارهای مستقل به K هستند و در نتیجه بردارهای $\hat{x}_n \hat{c}_{(n)}$ ، ... ، $\hat{c}_{(r+1)}\hat{x}_{r+1}$ نیز ترکیب های خطی بردارهای مستقل به K می باشند. با بیان کردن این بردارها برحسب بردارهای K و جمع و جور کردن جملات، می توانیم دستگاه را به صورت

$$\hat{\mathbf{c}}_{(1)}y_1 + \cdots + \hat{\mathbf{c}}_{(r)}y_r = \mathbf{b} \quad (3)$$

بنویسیم، که در آن $y_j = \hat{x}_j + z_j$ و z_j نتیجه ای است از $(n-r)$ جمله $\hat{c}_{(n)}x_n$ ، ... ، $\hat{c}_{(r+1)}\hat{x}_{r+1}$ و $j = 1, \dots, r$. چون دستگاه دارای جواب است، اعداد y_1 ، y_2 ، ... ، y_r وجود دارند به طوری که در رابطه (۳) صدق می کنند. چون K مستقل خطی است، این اسکالرها یکتا هستند. انتخاب دلخواه $\hat{x}_n$ ، ... ، $\hat{x}_{r+1}$ مقدار هر z_j و مجهول نظیر آن، یعنی $\hat{x}_j = y_j - z_j$ ، را که در آن $j = 1, \dots, r$ مشخص می کند.

(د) این قسمت از قضیه در بخش ۷.۳ به اثبات رسید و در اینجا برای یادآوری و تأکید تکرار شد. ■

قضیه بالا در بخش ۷.۳ توضیح داده شده است. در مثال ۲ جواب دستگاه یکتا است زیرا $\text{rank}(\tilde{A}) = \text{rank}(A) = n = ۳$ (این واقعیت را می توان با مشاهده آخرین ماتریس در آن مثال دید). در مثال ۳ رابطه $\text{rank}(\tilde{A}) = \text{rank}(A) = ۲ < n = ۴$ را داریم و می توانیم با انتخاب دلخواه x_3 و x_4 مجهول های x_1 ، x_2 را به دست آوریم. در مثال ۴ جوابی برای دستگاه نمی توانیم پیدا کنیم زیرا $\text{rank}(A) = ۲ < \text{rank}(\tilde{A}) = ۳$.

دستگاه خطی همگن

از بخش ۳.۷ یادآوری می‌کنیم که دستگاه خطی (۱) همگن نامیده می‌شود هرگاه تمام b_jها برابر صفر باشند، و ناهمگن نامیده می‌شود اگر یک یا چندتا از b_jها ناصفر باشند. برای دستگاه‌های همگن قضیه زیر از قضیه اساسی دستگاه‌های خطی نتیجه می‌شود.

قضیه ۲ دستگاه خطی همگن

یک دستگاه خطی همگن مانند

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0\\
\cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0
\end{aligned}
\qquad (4)
$$

همواره دارای جواب بدیهی $x_1=0,\ x_2=0,\ \dots,\ x_n=0$ است. جواب‌های غیربدیهی تنها و تنها در حالتی وجود دارند که $\mathrm{rank}(A)=r<n$. این جواب‌ها، به همراه جواب بدیهی $x=0$، یک فضای برداری (بخش ۴.۷ را ببینید) با بعد $n-r$ تشکیل می‌دهند که فضای جواب دستگاه (۴) نامیده می‌شود.

به ویژه، اگر $x_{(1)}$ و $x_{(2)}$ بردارهای جواب برای (۴) باشند، آنگاه برای هر دو اسکالر c_1 و c_2 بردار $x=c_1x_{(1)}+c_2x_{(2)}$ نیز جواب (۴) است. (چنین چیزی در مورد دستگاه‌های ناهمگن درست نیست. در ضمن، عبارت فضای جواب تنها برای دستگاه‌های همگن به کار برده می‌شود

اثبات اولین گزاره قضیه را می‌توان مستقیماً از دستگاه نتیجه گیری کرد. این واقعیت با توجه به اینکه $rank(\tilde{A})=rank(A)$ تساوی $b=0$ را نتیجه می‌دهد همخوانی دارد، پس یک دستگاه همگن همواره سازگار است. اگر $rank(A)=n$، در اینصورت بنابر قسمت (ب) در قضیه ۱ جواب بدیهی همان جواب یکتا برای دستگاه است. اگر $rank(A)<n$، بنابر قسمت (ج) در قضیه ۱ دستگاه دارای جواب‌های نابدیهی است. مجموعه جواب‌های یک دستگاه همگن یک فضای برداری را تشکیل می‌دهند زیرا اگر $x_{(1)}$ و $x_{(2)}$ هر دو جواب از آن دستگاه باشند، آنگاه $Ax_{(1)}=0$، $Ax_{(2)}=0$ و این دو تساوی نتیجه می‌دهند $A(x_{(1)}+x_{(2)})=Ax_{(1)}+Ax_{(2)}=0$. همچنین برای هر اسکالر دلخواه c رابطهٔ $A(cx_{(1)})=cAx_{(1)}=0$ برقرار است. اگر $rank(A)=r<n$، آنگاه قسمت (ج) از قضیه ۱ نتیجه می‌دهد که می‌توانیم $(n-r)$ مجهول مناسب، که آنها را $x_{r+1},\ldots,x_n$ می‌نامیم، به طور دلخواه انتخاب و با توجه به روش ارائه شده در قسمت (ج) هر جواب دستگاه را به دست آوریم. در نتیجه یک پایه برای فضای جواب، که به طور خلاصه پایه جواب (۴) نامیده می‌شود، $y_{(1)},\ldots,y_{(n-r)}$ است، که در آن هر بردار پایه $y_{(j)}$ با انتخاب $x_{r+j}=1$ و صفر برای سایر $x_{r+1},\ldots,x_n$ ها و پیدا کردن r مؤلفه اول نظیر آن به کمک روش ارائه شده در قسمت (ج) از قضیه ۱ به دست می‌آید. پس فضای جواب دستگاه (۴) دارای بعد $n-r$ است. این قضیه ۲ را به اثبات می‌رساند. ∎

فضای جواب دستگاه (۴) فضای پوچ A نیز نامیده می شود زیرا برای هر x که متعلق به فضای پوچ است رابطه $Ax=0$ برقرار است. بعد فضای پوچ را پوچی A می نامند و آن را با $null(A)$ نمایش می دهند. در نتیجه از قضیه ۲ رابطه

$$rank(A) + null(A) = n \tag{۵}$$

که در آن n تعداد مجهولات (تعداد ستون های A) است.

به علاوه، بنابر تعریف رتبه در (۴) داریم $rank(A) \leq m$. پس اگر $m<n$، آنگاه $rank(A)<n$. بنابراین، بنابر قضیه ۲ این واقعیت گزاره زیر که در عمل بسیار مهم است را نتیجه می دهد.

قضیه ۳

> **دستگاه های خطی همگن با تعداد معادلات کمتر از مجهولات**
>
> هر دستگاه معادلات خطی همگن که تعداد معادلات داشته کمتر از تعداد مجهول های آن است همواره دارای جواب های نابدیهی است.

دستگاه های خطی ناهمگن

اکنون مشخص سازی تمام جواب های دستگاه (۱) بسیار ساده است. گزاره زیر این فرآیند را توضیح می دهد.

قضیه ۴

> **دستگاه خطی ناهمگن**
>
> اگر دستگاه معادلات خطی (۱) سازگار باشد، آنگاه تمام جواب های آن به صورت
>
> $$x = x_0 + x_h \tag{۶}$$
>
> به دست می آیند که در آن x_0 هر جواب عمومی (۱) است که ثابت نگه داشته می شود و x_h در سرتاسر مجموعه جواب (فضای جواب) دستگاه خطی همگن نظیر، یعنی دستگاه (۴) تغییر می کند.

اثبات اگر x هر جواب دستگاه (۱) باشد، آنگاه تفاضل $x_h = x - x_0$ جواب دستگاه (۴) است زیرا $Ax_h = A(x - x_0) = Ax - Ax_0 = b - b = 0$. چون x هر جواب دستگاه (۱) است، نتیجه می‌گیریم که می‌توانیم تمام جواب های دستگاه (۱) را به کمک (۶) با انتخاب و ثابت نگه داشتن یک جواب عمومی (۱) مثل x_0 و اجازه تغییر x_h روی فضای جواب (۴) به دست آوریم. ■

قضیه بالا بخش اصلی بحث ما را در خصوص مشخص سازی جواب های دستگاه های معادلات خطی پوشش می دهد. موضوع اصلی بعدی که مورد بحث قرار خواهیم داد دترمینان ها و نقش آن ها در معادلات خطی است

۶.۷ برای ارجاع

دترمینان‌های درجه دوم و سوم

این بخش به عنوان یک بخش مرجع سریع روی دترمینان های مرتبه دوم و سوم طراحی و ساخته شده است. مطالب این بخش کاملاً مستقل از تئوری ارائه شده در بخش ۷.۷ می باشند و به عنوان یک مرجع برای بسیاری از مسائل و مثال‌های این کتاب کفایت می کنند. با توجه به مرجع بودن این بخش، به بخش بعد بروید و هر وقت نیاز شد برای استفاده، به مطالب آن رجوع کنید.

دترمینان مرتبه دوم توسط رابطه زیر تعریف و نمایش داده می شود.

$$D = \det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{1}$$

توجه کنید که در اینجا برای نمایش دترمینان از دو میله موازی استفاده شده است (در حالیکه در نمایش ماتریس از کروشه استفاده می‌شود).

قاعده کرامر برای حل دستگاه دو معادله و دو مجهولی

$$(2)\qquad \begin{aligned} &\text{(a)}\quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ &\text{(b)}\quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{aligned}$$

به صورت

$$(3)\qquad \begin{aligned} x_1 &= \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{D} = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{D}, \\ x_2 &= \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{D} = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{D} \end{aligned}$$

به شرط آنکه $D \neq 0$. در (۳) D همان دترمینان است که در (۱) تعریف شده است.

مقدار $D=0$ در حالتی که دستگاه ممکن است و دارای جواب‌های نامعین است اتفاق می‌افتد.

اثبات رابطهٔ (۳) را ثابت می‌کنیم. برای حذف x_2 معادله (۲a) را در a_{22} و (۲b) را در $-a_{12}$ ضرب و معادلات حاصل را با هم جمع کنید. در این صورت

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2.$$

به طور مشابه، برای حذف x_1 معادله (۲a) را در $-a_{21}$ و (۲b) را در a_{11} ضرب و معادلات حاصل را با هم جمع کنید. در این صورت

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}.$$

به فرض آنکه $D=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$، با تقسیم دو طرف هر دو رابطهٔ بالا بر D و نوشتن عبارت سمت راست معادلات حاصل برحسب D، رابطهٔ (۳) به دست می‌آید ■

مثال ۱ قاعده کرامر برای دو معادله

اگر
$$4x_1 + 3x_2 = 12$$
$$2x_1 + 5x_2 = -8$$
آن‌گاه

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 12 & 3 \\ -8 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{84}{14} = 6, \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 12 \\ 2 & -8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{-56}{14} = -4.$$

دترمینان‌های مرتبه سوم

دترمینان مرتبه سوم توسط رابطه زیر تعریف و نمایش داده می‌شود.

$$(4) \quad D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

به موارد زیر توجه کنید. علامت هایی که در سمت راست رابطه بالا ظاهر شده اند به ترتیب + − + هستند. هر یک از عبارت هایی که در سمت راست (۴) ظاهر شده اند ضرب یکی از درایه‌های اولین ستون D در کهاد خود، یعنی دترمینان مرتبه دوم ماتریسی که از حذف سطر و ستون هایی که آن درایه در آن‌ها قرار دارد، می‌باشد. مشاهده کنید که برای a_{11} کهاد آن از حذف سطر اول و ستون اول به دست می‌آید، برای a_{21} از حذف سطر دوم و ستون اول، و غیره.

اگر در (۴) کهادها را با استفاده از تعریف به صورت عبارات جبری بنویسیم، آن‌گاه

$$(4^*) \quad D = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{21}a_{13}a_{32} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{13}a_{22}.$$

قاعده کرامر برای دستگاه‌های سه معادله و سه مجهولی

$$(5) \quad \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

به صورت

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} \qquad (D \neq 0) \tag{6}$$

می باشد که در آن D دترمینان دستگاه است و توسط (۴) به دست می آید و

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

توجه کنید که D_1، D_2 و D_3 به ترتیب از جایگزین کردن ستون سمت راست ۵ به جای ستون های ۱، ۲ و ۳ ماتریس ضرایب به دست می آیند.

قاعده کرامر (۶) می تواند مشابه با آنچه که برای (۳) انجام شد با حذف متغیرها نتیجه گیری شود، در عین حال می توان آن را از حالت عمومی (قضیه ۴) که در بخش بعدی توضیح داده می شود نیز به دست آورد.

۷.۷ دترمینان ها. قاعده کرامر

دترمینانها در ابتدا برای حل دستگاه های خطی معرفی شدند. هرچند که دترمینانها در محاسبات غیرعملی هستند، دارای کاربردهای مهندسی مهم در مسائل مقادیر ویژه (بخش ۱.۸)، معادلات دیفرانسیل، جبر برداری (بخش ۳.۹) و سایر شاخه ها می باشند. آن ها را می توان به چند روش معادل معرفی نمود. تعریفی که در اینجا ارائه می دهیم به طور خاص برای استفاده در حل و تجزیه و تحلیل دستگاه های خطی است.

هر دترمینان مرتبه n اسکالری است مربوط به یک ماتریس (مربع!) n×n

$A=[a_{jk}]$ که توسط

$$(1) \qquad D = \det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

نمایش داده می‌شود.

برای $n=1$، این دترمینان توسط

$$(۲) \qquad D = a_{11}$$

تعریف می‌شود. برای $D \geq ۲$ توسط

$$(3a) \qquad D = a_{j1}C_{j1} + a_{j2}C_{j2} + \cdots + a_{jn}C_{jn} \qquad (j = 1, 2, \cdots, \text{or } n)$$

یا

$$(3b) \qquad D = a_{1k}C_{1k} + a_{2k}C_{2k} + \cdots + a_{nk}C_{nk} \quad (k = 1, 2, \cdots, \text{or } n).$$

در اینجا

$$C_{jk} = (-1)^{j+k} M_{jk}$$

و M_{jk} دترمینانی است از مرتبه $n-1$، یعنی دترمینان زیرماتریس A که از A با حذف سطر و ستونی که درایه a_{jk} در آن‌ها قرار دارد، یعنی حذف سطر jاُم و ستون kاُم به دست می‌آید.

با این روش، D برحسب n دترمینان از مرتبه $n-1$، که هر یک به نوبت خود، توسط $n-1$ دترمینان از مرتبه $n-2$، و غیره تا وقتی که بالاخره به دترمینان‌های مرتبه دوم می‌رسیم نوشته می‌شود. اکنون در این مرحله زیرماتریس‌های مربوط تنها دارای یک درایه هستند و دترمینان آن‌ها همان درایه مربوط می‌باشد.

از تعریف دترمینان نتیجه می‌شود که می‌توانیم D را توسط هر سطر یا ستون بسط دهیم، یعنی در (۳) درایه‌ها را در هر سطر یا ستون انتخاب کنیم، به طور مشابه، وقتی که C_{jk} ها در (۳) بسط داده می‌شوند، وغیره.

در تعریف دترمینان ابهامی وجود ندارد، یعنی، مقدار آن بستگی به سطر یا ستونی که برای بسط انتخاب می‌شود ندارد. اثبات این واقعیت در ضمیمه ارائه شده است.

عبارت هایی که در ارتباط با دترمینان ها به کار برده می‌شوند، از ماتریس ها گرفته می‌شوند. در D دارای n^2 درایه a_{jk}، همچنین n سطر و n ستون و یک قطر اصلی که روی آن a_{11}، a_{22}، ...، a_{nn} قرار دارند هستیم. دو عبارت که در زیر تعریف می‌شوند جدید هستند.

M_{jk} کهاد a_{jk} و C_{jk} هم عامل a_{jk} در D نامیده می‌شوند.

برای کاربردهای بعدی متذکر می‌شویم که (۳) می‌توانیم برحسب کهادها به صورت های زیر بنویسیم.

(4a) $$D = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{jk} M_{jk} \qquad (j = 1, 2, \cdots \text{ یا } n)$$

(4b) $$D = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{jk} M_{jk} \qquad (k = 1, 2, \cdots \text{ یا } n).$$

مثال ۱ کهادها و هم عامل‌های دترمینان مرتبه ۳

در رابطه (۴) از بخش قبل کهادها و هم عامل‌های درایه‌های اولین ستون می‌توانند به طور مستقیم دیده شوند. برای درایه‌های سطر دوم کهادها عبارت هستند از

$$M_{21}=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad M_{22}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad M_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

و هم عامل‌ها $C_{21}=-M_{21}$ ، $C_{22}=+M_{22}$ و $C_{23}=-M_{23}$ می‌باشند. به طور مشابه برای سطر سوم خودتان کهادها و عامل‌ها را بنویسید. تحقیق کنید که علامت‌های C_{jk} تشکیل یک الگوی شطرنجی به صورت زیر می‌دهند.

$$\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}$$

■

مثال ۲. گسترش دترمینان‌های مرتبه ۳

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 1(12-0) - 3(4+4) + 0(0+6) = -12.$$

این گسترش توسط اولین سطر است. گسترش توسط ستون سوم به صورت

$$D = 0\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0 - 12 + 0 = -12.$$

است. تحقیق کنید که چهار گسترش دیگر نیز مقدار ۱۲- را نتیجه می‌دهند. ■

مثال ۳. دترمینان یک ماتریس مثلثی

$$\begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -3 \cdot 4 \cdot 5 = -60.$$

با الهام گیری از این مثال، آیا می‌توانید قضیه کوتاهی را برای دترمینان ماتریس‌های مثلثی نتیجه‌گیری کنید؟ برای ماتریس‌های قطری چطور؟

■

خواص عمومی دترمینان‌ها

روش جالبی برای محاسبهٔ دترمینان‌های (۱) که متشکل از به کار بردن عملیات سطری مقدماتی روی (۱) است وجود دارد. در حقیقت با انجام این عملیات به یک دترمینان "بالامثلثی" دست می‌یابیم که مقدارش به آسانی قابل محاسبه است؛ زیرا مقدار آن برابر است با حاصلضرب درایه‌های روی قطر اصلی دترمینان. (برای تعریف دترمینان بالامثلثی وموارد مشابه به بخش ۱.۷ با قرار دادن دترمینان به جای ماتریس مراجعه کنید.) این روش مشابه (اساساً یکسان) است با آنچه که در مورد ماتریس‌ها در بخش ۳.۷ انجام دادیم. به ویژه، توجه کنید که تعویض دو سطر با یکدیگر مقدار دترمینان را در ۱- ضرب می‌کند! جزئیات در قضیه زیر توضیح داده می‌شود.

قضیه ۱

رفتار دترمینان مرتبه n ام تحت عملیات سطری مقدماتی

(الف) تعویض دو سطر با یکدیگر مقدار دترمینان را در عدد (۱-) ضرب می‌کند.

(ب) ضرب یک سطر در اسکالر c وجمع بردار حاصل با بردار سطری دیگر تغییری در مقدار دترمینان نمی‌دهد.

(ج) ضرب یک سطر در عدد ثابت وناصفر c مقدار دترمینان را در c ضرب می‌کند. (این واقعیت برای $c=0$ نیز درست است ولی این عمل دیگر به عنوان یک عمل سطری مقدماتی به حساب نمی‌آید.)

اثبات (الف) با استقراء. گزاره (الف) برای $n=2$ درست است زیرا

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc, \quad \text{اما} \quad \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = bc - ad.$$

اکنون فرض می‌کنیم (فرض استقراء) که (الف) برای دترمینانهای مرتبه $n-1 \geq 2$ درست است و نشان می‌دهیم که (الف) برای دترمینان‌های مرتبه n نیز درست است. فرض شود D مرتبه n است. فرض شود E از روی n با تعویض دو سطر به دست آمده است. D و E را توسط سطری که یکی از دو سطر تعویض شده نیست گسترش دهید و آن را سطر jاُم بنامید. در این صورت بنابر (۴a)

$$(5) \qquad D = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{j+k}a_{jk}M_{jk}, \qquad E = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{j+k}a_{jk}N_{jk}$$

که در آن N_{jk} از روی M_{jk} نظیر a_{jk} با تعویض همان دو سطر که در D با یکدیگر تعویض شدند (و اینکه N_{jk} باید حاوی آن دو سطر باشد، زیرا گسترش توسط سطر دیگری انجام شده است) به دست می‌آید. حال چون این کهادها از مرتبه $n-1$ هستند، بنابر فرض استقراء $N_{jk} = -M_{jk}$. در نتیجه بنابر (۵) باید $E=-D$.

(ب) جمع c برابر سطر i با سطر j. فرض شود $\tilde{D}$ دترمینان جدید است. درایه‌هایش در سطر j به صورت $a_{jk} + ca_{ik}$ هستند. اگر $\tilde{D}$ را توسط همین سطر j گسترش دهیم، مشاهده خواهیم کرد که $\tilde{D}$ را می‌توانیم به صورت $\tilde{D} = D_1 + cD_2$ بنویسیم، که در آن $D_1 = D$ در سطر j دارای a_{jk} است، درحالیکه D_2 در سطر j دارای a_{ik} است که از این جمع به دست آمده است. پس D_2 دارای a_{ik} در سطر i و سطر j است. پس اگر این دو سطر D_2 را باهم عوض کنیم باز هم D_2 را به دست می‌آوریم و در نتیجه بنابر (الف) $D_2 = -D_2$ یعنی باید $D_2 = 0$. بنابراین

۸۶

$\tilde{D} = D_1 = D$.

ج) اگر دترمینان را توسط سطری که در آن c ضرب شده گسترش دهیم گزاره (ج) نیز به وضوح نتیجه گیری می شود. ∎

<u>احتیاط!</u> $\det(cA) = c^n \det(A)$ (و نه $c\det(A)$). توضیح دهید چرا؟

<u>مثال ۴ محاسبه دترمینان بوسیله تحویل به فرم مثلثی</u>

بنابر قضیه ۱ می توانیم با تحویل دترمینان به فرم مثلثی، به همان صورتی که روش حذف گاوسی را برای ماتریس ها انجام دادیم، آن را محاسبه کنیم. به عنوان مثال (با توضیحاتی که همواره به دترمینان قبل ارجاع می دهد)

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -4 & 6 \\ 4 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & -1 \\ -3 & 8 & 9 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 0 & -4 & 6 \\ 0 & 5 & 9 & -12 \\ 0 & 2 & 6 & -1 \\ 0 & 8 & 3 & 10 \end{vmatrix}$$

(سطر۱)۲ - سطر۲

(سطر۱)۱٫۵ + سطر۴

$$= \begin{vmatrix} 2 & 0 & -4 & 6 \\ 0 & 5 & 9 & -12 \\ 0 & 0 & 2.4 & 3.8 \\ 0 & 0 & -11.4 & 29.2 \end{vmatrix}$$

(سطر۲)۰٫۴ - سطر۳

(سطر۲)۱٫۶ - سطر۴

$$= \begin{vmatrix} 2 & 0 & -4 & 6 \\ 0 & 5 & 9 & -12 \\ 0 & 0 & 2.4 & 3.8 \\ 0 & 0 & -0 & 47.25 \end{vmatrix}$$

(سطر۳)۴٫۷۵ + سطر۴

$$= 2 \cdot 5 \cdot 2.4 \cdot 47.25 = 1134.$$

قضیه ۲ **خواص دیگری از دترمینان های مرتبه n**

(الف) - (ج) قضیه ۱ برای ستون ها نیز درست هستند.

(د) ترانهاده مقدار دترمینان را تغییر نمی دهد

(هـ) هر سطر یا ستون صفر باعث می شود تا مقدار دترمینان برابر صفر شود.

(و) سطرها یا ستون های متناسب باعث می شوند که مقدار دترمینان صفر شود. به ویژه دترمینان هایی که دارای دو سطر یا ستون یکسان هستند مقدارشان صفر است

اثبات (الف) - (ج) مستقیماً از این واقعیت که دترمینان می تواند توسط هر سطر یا هر ستون گسترش یابد نتیجه می شوند. در (د) ترانهاده، دترمینان ماتریس ترانهاده ماتریس تعریف می شود، یعنی سطر jام به ستون jام ترانهاده تبدیل می شود و درنتیجه بنابر تعریف دترمینان مقدار آن عوض نمی شود.

(و) اگر (سطر i) c = سطر j، آن گاه $D = cD_1$، که در آن D_1 دارای سطر i = سطر j است. در این صورت تعویض این دو سطر، D_1 را دوباره تولید می کند و درنتیجه $D_1 = -D_1$ و باید $D_1 = 0$. پس $D = 0$.

به طور مشابه این حکم برای ستون ها نیز ثابت می شود ■

این واقعیت بسیار قابل توجه است که مفهوم مهم رتبه ماتریس A که ما گرفتیم

تعداد بردارهای سطری یا ستونی A است (بخش ۴.۷ را ببینید) ، می‌تواند به دترمینان‌ها مربوط شود. در اینجا می‌توانیم فرض کنیم که $rank(A) > 0$ ، زیرا تنها ماتریس‌های با رتبه 0 ماتریس‌های 0 هستند (بخش ۴.۷ را ببینید)

قضیه ۳

رتبه برحسب دترمینان

ماتریس $A = [a_{jk}]$ که $m \times n$ است را درنظر بگیرید.

(۱) اگر $r = rank(A)$ ، آن‌گاه $r \geq 1$ اگروتنها اگر A دارای یک زیرماتریس با بعد $r \times r$ باشد که دترمینان آن ناصفر است.

(۲) دترمینان هر زیرماتریس مربع با بیش از r سطر که در A قرار دارد (اگر چنین ماتریسی وجود داشته باشد) دارای مقداری برابر صفر است

به‌علاوه، اگر $m = n$ ، آنگاه

(۳) ماتریس مربع A با بعد $n \times n$ دارای رتبه n است اگروتنها اگر $det(A) \neq 0$

اثبات - ایده کلیدی در اثبات این قضیه آن است که عملیات سطری مقدماتی (بخش ۳.۷) رتبه و ناصفر بودن دترمینان ماتریس را تغییر نمی‌دهد (قضیه ۱ در بخش ۴.۷ و قضیه ۱ در همین بخش را ببینید). اگر $\hat{A}$ فرم پلکانی A باشد (بخش ۳.۷ را ببینید) آنگاه $\hat{A}$ دارای r بردار سطری ناصفر است (که r بردار سطری اول هستند) اگروتنها اگر $rank(A) = r$. بدون از دست دادن کلیت، می‌توانیم فرض کنیم $r \geq 1$. فرض شود $\hat{R}$ آن $r \times r$ زیرماتریس است که در گوشه سمت چپ بالایی

ماتریس $\hat{A}$ قرار دارد (پس درایه‌های ناصفر $\hat{R}$ در هر دو r سطر یا ستون اول $\hat{A}$ قرار دارند). حال $\hat{R}$ یک ماتریس مثلثی است که تمام درایه‌های r_{jj} روی قطر اصلی آن ناصفر هستند. پس $\det(\hat{R}) = (r_{11})\cdots(r_{rr}) \neq 0$. حال اگر R آن $r\times r$ زیرماتریس A باشد که $\hat{R}$ از آن با چند عملیات سطری مقدماتی نتیجه شده است، آنگاه $\det(R) \neq 0$. این نتیجه (۱) را به اثبات می‌رساند.

به طور مشابه برای هر زیرماتریس مربع S که دارای $r+1$ سطر یا بیشتر است و احتمالاً در A قرار دارد داریم $\det(S) = 0$، زیرا زیرماتریس نظیر آن یعنی $\hat{S}$ از $\hat{A}$ باید شامل یک سطر صفر باشد (در غیر این صورت باید داشته باشیم $\text{rank}(A) \geq r+1$)، در نتیجه بنابر قضیه ۲ داریم $\det(\hat{S}) = 0$. این نتیجه (۲) را به اثبات می‌رساند.

در نتیجه قضیه برای ماتریس $m\times n$ اثبات شده است.

برای ماتریس مربع A که $n\times n$ است به صورت زیر به پیش می‌رویم. برای اثبات (۳) قسمت (۱) را به کار می‌بریم (که قبلاً به اثبات رسیده است!). بنابر (۱) $\text{rank}(A) = n \geq 1$ اگر و تنها اگر A دارای یک زیرماتریس $n\times n$ با دترمینان ناصفر باشد. اما چنین زیرماتریسی که در A قرار می‌گیرد تنها می‌تواند همان ماتریس مربع A باشد. در نتیجه $\det(A) \neq 0$ و (۳) به اثبات می‌رسد ■

قاعده کرامر

قضیه ۳ مسیری را برای به دست آوردن فرمول کلاسیک جواب برای دستگاه‌های

خطی که به قاعده کرامر[۲] مشهور است بازی می‌کند. این قاعده جواب‌ها را برحسب خارج قسمت دترمینان‌ها ارائه می‌دهد. استفاده از قاعده کرامر در کاربردها عملی نیست و به جای آن از روش‌های ارائه شده در بخش‌های ۳.۷ و ۲.۰.۱-۲.۰.۳، که مناسب‌تر هستند استفاده می‌شود. در عین حال، قاعده کرامر از نقطه نظر تئوریک در معادلات دیفرانسیل (بخش‌های ۲.۰.۱ و ۳.۰۳) و سایر کارهای تئوریک که دارای کاربردهای فنی هستند مورد توجه قرار می‌گیرد.

قضیه ۴

قضیه کرامر (جواب دستگاه‌های خطی برحسب دترمینان‌ها)

اگر دستگاه معادله خطی n معادله n مجهولی

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}
\tag{6}
$$

دارای دترمینان ضرایب $D=\det(A)$ باشد که ناصفر است، آن‌گاه دستگاه دقیقاً دارای یک جواب است. این جواب توسط فرمول‌های

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \ldots, \quad x_n = \frac{D_n}{D} \tag{7}$$

(قاعده کرامر)

به دست می‌آید که در آن D_k دترمینانی است که از D با قرار دادن ستون b با درایه‌های $b_1, b_2, \ldots, b_n$ به جای ستون k اُم آن حاصل می‌شود.

(b) اگر دستگاه (۶) همگن باشد و $D\neq 0$، آن‌گاه تنها دارای جواب بدیهی $x_1=0, x_2=0, \ldots, x_n=0$ است. اگر $D=0$، دستگاه همگن دارای جواب نابدیهی نیز می‌باشد

۲ گابریل کرامر (۱۷۰۴-۱۷۵۲)، ریاضیدان سوئیسی

اثبات ماتریس افزوده دستگاه (۶) با بعد $n\times(n+1)$ است. پس رتبه آن حداکثر n است. حال اگر

$$D = \det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0, \tag{8}$$

در اینصورت بنابر قضیه ۳ $\operatorname{rank}(A)=n$. پس $\operatorname{rank}(\tilde{A})=\operatorname{rank}(A)$. در نتیجه بنابر قضیه اساسی در بخش ۷.۵، دستگاه (۶) دارای جواب یکتاست.

اکنون برای اثبات (۷) D را توسط ستون kاُم آن گسترش می‌دهیم، خواهیم داشت:

$$D = a_{1k}C_{1k} + a_{2k}C_{2k} + \cdots + a_{nk}C_{nk}, \tag{9}$$

که در آن C_{jk} همفاکتور درایه a_{jk} در D است. اگر اعداد دیگری را در ستون kاُم D به جای درایه‌های آن ستون قرار دهیم، دترمینان جدیدی را مثل $\hat{D}$ به دست می‌آوریم. واضح است که، گسترش آن توسط ستون kاُم به همان صورت (۹) است که در آن به جای $a_{1k}, \dots, a_{nk}$ آن اعداد جدید قرار گرفته‌اند و C_{jk}ها همان همعامل‌های قبل هستند. به ویژه، اگر درایه‌های ستون lاُم از D، یعنی $a_{1l}, \dots, a_{nl}$ به عنوان آن اعداد جدید انتخاب شوند (که در آن $l\neq k$)، دترمینان جدید $\hat{D}$ را خواهیم داشت که در آن ستون $[a_{1l} \ \dots \ a_{nl}]^T$ دوبار، یکبار به عنوان همان ستون lاُم و یکبار، به دلیل جایگزینی، به عنوان ستون kاُم تکرار می‌شود. پس بنابر قضیه ۲ قسمت (ه) باید $\hat{D}=0$. پس اگر $\hat{D}$ را توسط این

ستون جایگذاری شده گسترش دهیم، رابطهٔ

$$a_{1l}C_{1k} + a_{2l}C_{2k} + \cdots + a_{nl}C_{nk} = 0 \qquad (l \neq k). \tag{10}$$

را به دست می‌آوریم. اکنون دو طرف معادلهٔ اول در (۶) را در C_{1k}، دوم را در C_{2k}، ... و آخرین را در C_{nk} ضرب و معادلات حاصل را با هم جمع می‌کنیم، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} C_{1k}(a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n) + \cdots + C_{nk}(a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n) \\ = b_1C_{1k} + \cdots + b_nC_{nk}. \end{aligned} \tag{11}$$

با جمع زدن جملات که عامل مشترک x_j را دارند می‌توانیم سمت چپ (۱۱) را به صورت

$$x_1(a_{11}C_{1k} + a_{21}C_{2k} + \cdots + a_{n1}C_{nk}) + \cdots + x_n(a_{1n}C_{1k} + a_{2n}C_{2k} + \cdots + a_{nn}C_{nk}).$$

بنویسیم. از عبارت قبل می‌توانیم مشاهده کنیم که متغیر x_k در عبارت

$$a_{1k}C_{1k} + a_{2k}C_{2k} + \cdots + a_{nk}C_{nk}.$$

ضرب شده است و معادلهٔ (۹) نشان می‌دهد که این برابر D است. به طور مشابه، x_l در عدد

$$a_{1l}C_{1k} + a_{2l}C_{2k} + \cdots + a_{nl}C_{nk}.$$

ضرب شده است و معادلهٔ (۱۰) نشان می‌دهد که اگر $l \neq k$، این عدد باید برابر صفر باشد. پس، سمت چپ (۱۱) عبارت ساده $D x_k$ است، در نتیجه (۱۱) به رابطهٔ

$$x_kD = b_1C_{1k} + b_2C_{2k} + \cdots + b_nC_{nk}.$$

تبدیل می‌شود. اکنون بنا بر تعریف D_k که در اثبات قضیه ارائه شده است، سمت راست رابطهٔ قبل همان D_k است. پس اگر دو طرف آخرین رابطهٔ بالا بر $D \neq 0$ تقسیم شود رابطهٔ (۷) به دست می‌آید و قاعدهٔ کرامر به اثبات می‌رسد.

اگر (۶) همگن و $D \neq 0$، در این صورت هر D_k دارای یک ستون صفر است،

پس برای هر k، بنابر قضیه ۲ قسمت (هـ)، باید $D_k = 0$ و درنتیجه (۷)

برای دستگاه جواب بدیهی را نتیجه می‌دهد.

بالاخره، اگر (۶) همگن باشد و $D = 0$، آنگاه بنابر قضیه ۳ داریم $rank(A) < 3$،

درنتیجه بنابر قضیه ۲ در بخش ۷.۵ جواب‌های نابدیهی وجود دارند. ■

مثال ۵ توضیح قاعده کرامر (قضیه ۴)

برای $n = 2$، مثال ۱ از بخش ۷.۶ را ببینید. همچنین، در انتهای همان بخش،

قاعده کرامر را برای دستگاه عمومی که دارای سه معادله است ارائه داده‌ایم. ■

در پایان، یکی از مهم‌ترین کاربردهای قاعده کرامر که با معکوس ماتریس‌ها در

ارتباط است در بخش بعد ارائه خواهد شد.

مجموعه تمرین‌های ۷.۷

۱-۶ مسائل عمومی

۱. خواص عمومی دترمینان‌ها. هریک از گزاره‌های قضیه ۱ و ۲ را با ارائه یک مثال به انتخاب خودتان توضیح دهید.

۲. دترمینان مرتبه دوم. دترمینان عمومی مرتبه دوم را به چهار روش ممکن گسترش دهید و نشان دهید که هر چهار روش نتایج با یکدیگر مساوی هستند.

۳. دترمینان مرتبه سوم. کار خواسته شده در تمرین ۲ را برای دترمینان‌های مرتبه سوم انجام دهید. همچنین با تبدیل دترمینان به دترمینان مثلثی آن را محاسبه کنید.

۴. گسترش دترمینان از نظر عددی غیرعملی است. نشان دهید که محاسبه دترمینان مرتبه nاُم توسط گسترش $(n!)$ عمل ضرب شرکت دارد، که حتی اگر یک عمل ضرب 10^{-9} ثانیه وقت کامپیوتر را بگیرد مدت زمان محاسبه آن برای nهای مختلف

به صورت زیر است:

n	10	15	20	25
Time	0.004 sec	22 min	77 years	$0.5 \cdot 10^9$ years

۵. ضرب در یک اسکالر. ثابت کنید که $\det(kA) = k^n \det(A)$ (نه $k\det(A)$). مثالی ارائه دهید.

۶. کهادها و هم‌عاملها. لیست مربوط به مثال ۱ را کامل کنید.

۷-۱۵ محاسبه دترمینانها

با نشان دادن جزئیات دترمینانهای زیر را محاسبه کنید.

7. $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$

8. $\begin{vmatrix} 0.4 & 4.9 \\ 1.5 & -1.3 \end{vmatrix}$

9. $\begin{vmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{vmatrix}$

10. $\begin{vmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{vmatrix}$

11. $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 8 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$

12. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$

13. $\begin{vmatrix} 0 & 4 & -1 & 5 \\ -4 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & -3 & 0 & 1 \\ -5 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$

14. $\begin{vmatrix} 4 & 7 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{vmatrix}$

15. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 16 \end{vmatrix}$

۱۶. آزمایش CAS. دترمینان اعداد صفر و یک. دترمینان آن ماتریس A_n با بعد $n \times n$ که تمام درایه‌های قطر اصلی آن صفر و سایر درایه‌هایش یک است را تعیین کنید. سعی کنید که فرمولی را برای محاسبه این دترمینان پیدا کنید. سعی کنید که فرمول به دست آمده را به وسیله استقراء به اثبات برسانید. ماتریس‌های A_3 و A_4 را به ترتیب به عنوان ماتریس‌های محل تلاقی اضلاع (یالهای) یک مثلث و یک هرم (مانند آنچه که در مجموعه تمرین‌های ۱۰.۷ تفسیر شد. اما بدون علامت منفی) تفسیر کنید؟ به طور مشابه این تفسیر را برای یک n-سیمپلکس با n رأس و $n(n-1)/2$ یال (و پدید آورنده $R^{(n-1)}$، $n=5,6,\dots$) انجام دهید.

۱۷-۱۹ در تمرین‌های ۱۷-۱۹ (هرچند که از نقطه نظر عملی نامناسب است) رتبه ماتریس را با به کار بردن قضیه ۳ محاسبه کنید و صحت جواب به دست آمده را با استفاده از روش تحویل سطری تحقیق کنید. جزئیات را نشان دهید.

17. $\begin{bmatrix} 4 & 9 \\ -8 & -6 \\ 16 & 12 \end{bmatrix}$

18. $\begin{bmatrix} 0 & 4 & -6 \\ 4 & 0 & 10 \\ -6 & 10 & 0 \end{bmatrix}$

19. $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 6 \\ 4 & 0 & 8 & 48 \end{bmatrix}$

۲۰. پروژه تیمی. کاربردهای هندسی: خم‌ها و رویه‌های گذرنده از نقاط معلوم. ایده این مسأله پیدا کردن معادله‌ای است که از یک دستگاه معادلات خطی با دترمینان صفر به عنوان شرطی برای قاعده کرامر برای وجود جواب غیربدیهی، به دست می‌آید. در اینجا شگرد به دست آوردن این دستگاه را برای حالتی که خط L از دو نقطه معلوم $P_1=(x_1,y_1)$ و $P_2=(x_2,y_2)$ می‌گذرد توضیح می‌دهیم. فرض شود که معادله خط مجهول به صورت $ax+by=-c$ است. این معادله را به صورت $ax+by+c(1)=0$ بازنویسی می‌کنیم. برای به دست آوردن جواب غیربدیهی a، b، c، باید دترمینان "ضرائب" x، y، 1 برابر صفر باشد. دستگاه مربوط به صورت زیر است:

$$
\begin{aligned}
ax + by + c \cdot 1 &= 0 \quad (\text{خط } L)\\
ax_1 + by_1 + c \cdot 1 &= 0 \quad (L \text{ روی } P_1) \qquad (12)\\
ax_2 + by_2 + c \cdot 1 &= 0 \quad (L \text{ روی } P_2)
\end{aligned}
$$

(الف) خطی که از دو نقطه می‌گذرد. از شرط $D=0$ در (۱۲) فرمول آشنای معادله خط را است که به صورت

$$\frac{x - x_1}{x_1 - x_2} = \frac{y - y_1}{y_1 - y_2}.$$

می‌باشد را نتیجه‌گیری کنید.

(ب) دستگاه مشابه (۱۲) را برای صفحه‌ای که از سه نقطه معلوم می‌گذرد پیدا کنید. از آن دستگاه برای پیدا کردن صفحه‌ای که از سه نقطه (۱،۱،۱)، (۳،۲،۶) و (۵،۰،۵) می‌گذرد استفاده کنید.

(ج) فرمول مشابهی را برای دایره‌ای که از سه نقطه معلوم می‌گذرد پیدا کنید. دایره‌ای که از سه نقطه (۲،۶)، (۶،۴) و (۷،۱) می‌گذرد را پیدا و رسم کنید.

(د) فرمول مشابه با فرمول (ج) را برای کره‌ای که از چهار نقطه معلوم می‌گذرد پیدا کنید. کره‌ای که از چهار نقطه (۰،۰،۵)، (۴،۰،۱)، (۰،۴،۱) و (۰،۰،۳-) می‌گذرد را به کمک این فرمول و تحقیق درستی آن پیدا کنید.

(ه) مقاطع مخروطی عمومی. فرمولی را برای یک مقطع مخروطی عمومی (صفر شدن یک دترمینان مرتبه ۶) پیدا کنید. از آن برای پیدا کردن معادله یک سهمی مرتبه ۲ و مقاطع مخروطی عمومی‌تر به انتخاب خودتان استفاده کنید.

۲۱-۲۵ قاعده کرامر

در تمرین‌های ۲۱-۲۵ دستگاه را به کمک روش کرامر حل کنید. صحت جواب‌ها را توسط روش حذف گاوس و جایگذاری بازگشتی تحقیق کنید. جزئیات محاسبات را نشان دهید.

21. $3x - 5y = 15.5$, $6x + 16y = 5.0$

22. $2x - 4y = -24$, $5x + 2y = 0$

23. $3y - 4z = 16$, $2x - 5y + 7z = -27$, $-x - 9z = 9$

24. $3x - 2y + z = 13$, $-2x + y + 4z = 11$, $x + 4y - 5z = -31$

25. $-4w + x + y = -10$, $w - 4x + z = 1$, $w - 4y + z = -7$, $x + y - 4z = 10$

۸.۷ معکوس ماتریس. حذف گاوس - ژردان

در این بخش منحصراً ماتریس های مربع مورد بحث قرار می گیرند.

معکوس یک ماتریس $n \times n$ مثل $A=[a_{jk}]$ (در صورت وجود) توسط A^{-1} نمایش داده می‌شود و ماتریسی است که برای آن رابطه

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I \qquad (1)$$

که در آن I ماتریس همانی $n \times n$ است، برقرار است (بخش ۲.۷ را ببینید).

اگر A دارای معکوس باشد، آنگاه A یک ماتریس غیرتکین (معکوس پذیر) نامید. می شود. اگر A دارای معکوس نباشد آنگاه A را ماتریس تکین (معکوس ناپذیر) می نامند.

اگر A دارای معکوس باشد، معکوس آن یکتاست.

در حقیقت، اگر B و C هر دو معکوس A باشند، آنگاه $AB=I$ و $CA=I$ و یکتایی معکوس از رابطه

$$B = IB = (CAB) = C(AB) = CI = C$$

به دست می آید.

در سمت بعد نشان می دهیم که A غیرتکین (معکوس پذیر) است اگر و تنها اگر دارای ماکزیمم رتبه ممکن یعنی n باشد. در ضمن اثبات گزاره نشان خواهد داد که از $Ax=b$ تساوی $x=A^{-1}b$ نتیجه می شود، مشروط بر آنکه A^{-1} وجود داشته باشد. بنابراین، این واقعیت انگیزه ای را برای معکوس و ارتباط آن با دستگاه های خطی ایجاد می کند.

(در عین حال برای حل عددی دستگاه $Ax=b$ روش مناسبی را ارائه می دهد

97

زیرا در حذف گاوسی احتیاج بسیار کمتری به محاسبات است.)

قضیه ۱ **وجود معکوس**

معکوس A^{-1} از یک ماتریس $n \times n$ مانند A وجود دارد اگر و تنها اگر $\operatorname{rank}(A)=n$، پس (بنابر قضیه ۳، بخش ۷.۷) اگر و تنها اگر $\det(A)\neq 0$. درنتیجه A نیز تکین است اگر $\operatorname{rank}(A)=n$ و تکین است اگر $\operatorname{rank}(A)<n$

اثبات فرض شود A آن ماتریس $n \times n$ معلوم است و دستگاه

$$Ax=b \qquad (2)$$

را در نظر بگیرید. اگر معکوس، یعنی A^{-1}، وجود داشته باشد، آنگاه با ضرب از طرف چپ A^{-1} در دو طرف رابطهٔ (۲) تساوی

$$A^{-1}Ax=x=A^{-1}b$$

را نتیجه می دهد. این نشان می دهد که (۲) دارای جواب است. این جواب یکتاست، زیرا اگر u جواب دیگری برای (۲) باشد، باید $Au=b$، پس $u=A^{-1}b=x$.

پس بنابر قضیه اساسی در بخش ۵.۷ رتبه ماتریس A باید برابر n باشد.

برعکس، فرض شود $\operatorname{rank}(A)=n$. در این صورت دستگاه (۲) برای هر b دارای جواب یکتای x است. حال جایگذاری بازگشتی که بعد از حذف گاوسی انجام می شود، نشان می دهد که مؤلفه های x_j از x ترکیب های خطی مؤلفه های b هستند. درنتیجه x می تواند به صورت

$$x=Bb \qquad (3)$$

نوشته شود که در آن B باید تعیین شود. جایگذاری (۳) در (۲) رابطهٔ

$$Ax = A(Bb) = (AB)b = Cb = b \qquad (C = AB)$$

را برای هر b نتیجه می‌دهد. پس $C = AB = I$، که در آن I ماتریس همانی است.

به طور مشابه جایگذاری (۲) در (۳)، نتیجه می‌دهد

$$x = Bb = B(Ax) = (BA)x$$

برای هر x (و $b = Ax$). در نتیجه $BA = I$. نتایج بالا باهم نشان می‌دهند که $B = A^{-1}$ و معکوس A وجود دارد. ■

تعیین معکوس توسط روش گاوس - ژردان

برای تعیین A^{-1}، یعنی معکوس یک ماتریس ناتکین $n \times n$ مثل A، می‌توانیم یکی از روش‌های تغییریافته حذف گاوس (بخش ۳.۷)، که به روش حذف گاوس - ژردان[3] مشهور است، را به کار بریم.

با به کار بردن A، n دستگاه معادلات خطی

$$Ax_{(1)} = e_{(1)}, \quad \dots, \quad Ax_{(n)} = e_{(n)}$$

که در آن‌ها $e_{(1)}, \dots, e_{(n)}$ ستون‌های ماتریس $n \times n$ همانی، یعنی $I_{(n)}$ هستند، را تشکیل می‌دهیم. پس $e_{(1)} = [1 \ 0 \ \dots \ 0]^T$، $e_{(2)} = [0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0]^T$ وغیره. این دستگاه‌های معادلات

---

[3] ویلهم ژردان (۱۸۹۹ - ۱۸۴۲)، ریاضی‌دان و زمین‌شناس آلمانی. او در آفریقا، در حالیکه آبادی‌های میان کویرها را نقشه‌برداری می‌کرد، تحقیقات مهمی را در زمین‌شناسی انجام داد. [مرجع Altoen, S.C. و R. McLaughlin در مورد تحویل گاوس - ژردان، که خلاصه‌ای است تاریخی در American Mathematical Monthly، جلد ۹۴، شماره ۲، (1987)، صفحات ۱۴۲-۱۳۰، را مشاهده کنید.]

این روش را به عنوان روشی برای حل دستگاه‌های خطی توصیه نمی‌کنیم، زیرا تعداد عملیات که علاوه بر تعداد عملیات حذف گاوس انجام می‌شود بسیار بیشتر از تعداد عملیات جایگذاری بازگشتی است که حذف گاوس - ژردان از آن اجتناب می‌کند. بخش ۲۰.۱ را نیز ببینید.

n معادله برداری در بردارهای مجهول $x_{(n)}$ ، ... ، $x_{(1)}$ هستند. تمام این معادلات را با هم ترکیب و به یک معادله ماتریسی $AX=I$ تبدیل می‌کنیم، که در آن X ماتریس مجهول با ستون‌های $x_{(n)}$ ، ... ، $x_{(1)}$ است. متقابلاً n ماتریس افزوده $[A\ e_{(n)}]$ ، ... ، $[A\ e_{(1)}]$ را ترکیب و به "ماتریس افزوده" یعنی $\tilde{A}=[A, I]$ که $n\times 2n$ است تبدیل می‌کنیم. اگر دو طرف رابطه $AX=I$ را از سمت چپ در A^{-1} ضرب کنیم خواهیم داشت $X=A^{-1}I=A^{-1}$. در نتیجه، برای حل $AX=I$ و پیدا کردن X ، عملیات حذف گاوس را در مورد ماتریس افزوده $\tilde{A}=[A, I]$ انجام می‌دهیم. این عملیات ماتریسی به فرم $[U\ H]$ را که در آن U بالا مثلثی است نتیجه می‌دهد، زیرا عملیات حذف گاوس دستگاه را به یک دستگاه مثلثی تبدیل می‌کند. در روش گاوس-جردن این عملیات تا تبدیل U به یک ماتریس قطری و سپس تبدیل ماتریس قطری به ماتریس همانی ادامه پیدا می‌کند. در حقیقت در ادامه عملیات حذف گاوس ابتدا درایه‌های بالای قطر اصلی U حذف می‌شوند تا یک ماتریس قطری حاصل شود و سپس توسط عمل سطری، "ضرب سطر در اسکالر" تمام درایه‌های روی قطر اصلی به ۱ تبدیل می‌شوند (مثال ۱ را ببینید). مسلماً وقتی عملیات بالا روی درایه‌های ماتریس $[U\ H]$ انجام می‌شود، H را به ماتریس دیگری مثل K تبدیل می‌کند، در نتیجه تمام ماتریس $[U\ H]$ به $[I\ K]$ تبدیل می‌شود. این همان ماتریس افزوده دستگاه $IX=K$ است. از طرف دیگر $IX=X=A^{-1}$. با مقایسه تساوی‌های بالا نتیجه می‌شود که $K=A^{-1}$ ، پس ماتریس A^{-1} مستقیماً از ماتریس $[I, K]$ به دست می‌آید.

مثال زیر جزئیات روش را عملاً توضیح می دهد.

مثال ۱ پیدا کردن معکوس ماتریس توسط روش حذف گاوس - ژردان

معکوس A^{-1} از ماتریس A با تعریف زیر را تعیین کنید.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

حل. عملیات حذف گاوس (بخش ۲.۷) را در مورد ماتریس $n\times 2n = 3\times 6$ زیر به کار می بریم. توجه کنید که توضیحات سمت راست همواره به ماتریس قبل آن ارجاع می دهد.

$$[\mathbf{A} \quad \mathbf{I}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \text{سطر۲ + ۳(سطر۱)} \\ \text{سطر۳ - سطر۱} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -4 & -1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \text{سطر۳ - سطر۲} \end{array}$$

آخرین ماتریس همان ماتریس $[U \; H]$ است که توسط روش حذف گاوس تولید شده است. اکنون مراحل اضافی روش گاوس - ژردان را دنبال کنید تا U به I، یعنی، به ماتریس همانی تبدیل شود.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3.5 & 1.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.8 & 0.2 & -0.2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \text{- سطر۱} \\ \text{۰٫۵ (سطر۲)} \\ \text{-۰٫۲ (سطر۳)} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0.6 & 0.4 & -0.4 \\ 0 & 1 & 0 & -1.3 & -0.2 & 0.7 \\ 0 & 0 & 1 & 0.8 & 0.2 & -0.2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \text{سطر۱ + ۲(سطر۳)} \\ \text{سطر۲ - ۳٫۵(سطر۳)} \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -0.7 & 0.2 & 0.3 \\ 0 & 1 & 0 & -1.3 & -0.2 & 0.7 \\ 0 & 0 & 1 & 0.8 & 0.2 & -0.2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \text{سطر۱ + سطر۲} \\ \\ \\ \end{array}$$

سه ستون آخر ماتریس قبل A^{-1} را تشکیل می‌دهند. تحقیق کنید:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.7 & 0.2 & 0.3 \\ -1.3 & -0.2 & 0.7 \\ 0.8 & 0.2 & -0.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

پس $AA^{-1}=I$. به طور مشابه، $A^{-1}A=I$. [redacted]

فرمول تعیین معکوس‌ها

چون پیدا کردن معکوس ماتریس در واقع حل مسأله دستگاه معادلات خطی است، ارتباط آن با قاعده کرامر (قضیه ۴، بخش ۷.۷) دور از انتظار نیست. به طور مشابه، همان طور که قاعده کرامر برای مطالعات نظری مفید است و نه برای محاسبه، فرمول صریح (۴) در قضیه بعد نیز تنها برای کاربردهای نظری مفید است و برای تعیین دقیق معکوس ماتریس‌ها توصیه نمی‌شود، مگر در حالات خاصی که ماتریس‌های ۲×۲ مورد بحث قرار می‌گیرند. برای این حالات فرمول (۴*) در قضیه بعد ارائه شده است.

قضیه ۲ **معکوس ماتریس توسط دترمینان**

معکوس ماتریس $n\times n$ و غیرتکین $A=[a_{jk}]$ توسط رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}}[C_{jk}]^{\mathsf{T}} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}, \tag{4}$$

که در آن C_{jk} هم‌عامل a_{jk} در دترمینان A است (بخش ۷.۷ را ببینید). (احتیاط!) خوب توجه کنید که در A^{-1}، هم‌عامل C_{jk} در جایی قرار می‌گیرد که a_{kj} (نه a_{jk}) قرار دارد.

در حالت خاص، معکوس $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ به صورت $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$. است. (۴*)

اثبات سمت راست (۴) را با B نمایش می دهیم و ثابت می کنیم $BA=I$. در ابتدا تساوی

$$BA = G = [g_{kl}] \qquad (5)$$

را می نویسیم و سپس نشان می دهیم $G=I$. حال بنابر تعریف ضرب ماتریس و به دلیل فرم B در (۴) تساوی زیر را به دست می آوریم (احتیاط! C_{sk}، نه C_{ks})

$$g_{kl} = \sum_{s=1}^{n} \frac{C_{sk}}{\det \mathbf{A}} a_{sl} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} (a_{1l}C_{1k} + \cdots + a_{nl}C_{nk}). \qquad (6)$$

اکنون بنابر (۹) و (۱۰) در بخش ۷.۷ مجموع $(\ldots + \cdots + \ldots)$ در سمت راست (۶) برابر است با $D=\det A$ اگر $l=k$ و صفر اگر $l \neq k$. در نتیجه

$$g_{kk} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \det \mathbf{A} = 1,$$

$$g_{kl} = 0 \quad (l \neq k).$$

به ویژه، برای $n=2$، در سطر اول رابطه (۴) داریم $C_{11} = a_{22}$، $C_{21} = -a_{12}$ و در سطر دوم، $C_{12} = -a_{21}$، $C_{22} = a_{11}$. این روابط (۴*) را ثابت می کند ■

حالت خاص $n=2$ اغلب در هندسه و سایر کاربردها رخ می دهد. شما شاید بخواهید که فرمول (۴*) را حفظ کنید. مثال فرمول (۴*) را توضیح می دهد.

مثال ۲ معکوس ماتریس ۲×۲ توسط دترمینان ها

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 & -0.1 \\ -0.2 & 0.3 \end{bmatrix}$$

■

مثال ۳ توضیح دیگری برای قضیه ۲

با به کار بردن (۴) معکوس ماتریس زیر را پیدا کنید.

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 2\\ 3 & -1 & 1\\ -1 & 3 & 4\end{bmatrix}.$$

حل. با استفاده از فرمول‌های محاسبه دترمینان داریم

$$\det \mathbf{A} = -1(-7) - 1\cdot 13 + 2\cdot 8 = 10$$

و برای سایر هم‌عامل‌های شرکت کننده در (۴) داریم

$$C_{11}=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 3 & 4\end{vmatrix}=-7,\qquad C_{21}=-\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=2,\qquad C_{31}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix}=3,$$

$$C_{12}=-\begin{vmatrix}3 & 1\\ -1 & 4\end{vmatrix}=-13,\quad C_{22}=\begin{vmatrix}-1 & 2\\ -1 & 4\end{vmatrix}=-2,\quad C_{32}=-\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix}=7,$$

$$C_{13}=\begin{vmatrix}3 & -1\\ -1 & 3\end{vmatrix}=8,\qquad C_{23}=-\begin{vmatrix}-1 & 1\\ -1 & 3\end{vmatrix}=2,\quad C_{33}=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 3 & -1\end{vmatrix}=-2,$$

پس بنابر (۴)

$$\mathbf{A}^{-1}=\begin{bmatrix}-0.7 & 0.2 & 0.3\\ -1.3 & -0.2 & 0.7\\ 0.8 & 0.2 & -0.2\end{bmatrix}.$$

که با نتیجه مثال ۲ یکسان است. ■

ماتریس قطری $A=[a_{jk}]$، که در آن اگر $j\neq k$ آنگاه $a_{jk}=0$، معکوس پذیر است اگر و تنها اگر برای تمام jها $a_{jj}\neq 0$. در این صورت A^{-1} نیز قطری است و درایه‌های روی قطر آن به ترتیب عبارت هستند از $1/a_{11}, \dots, 1/a_{nn}$.

اثبات برای ماتریس قطری در رابطه (۴) داریم

$$\frac{C_{11}}{D}=\frac{a_{22}\cdots a_{nn}}{a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}}=\frac{1}{a_{11}},$$ و غیره. ■

مثال ۴ معکوس ماتریس قطری

فرض شود

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-0.5 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

آن‌گاه معکوس A^{-1} را با معکوس کردن هر درایه قطری A به دست می‌آوریم، یعنی،
باید اکردن ۱/(۰/۵−)، ۱/۴ و ۱/۱ که به ترتیب درایه‌های قطر اصلی A^{-1} هستند، یعنی،

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

درصورت معکوس‌پذیر بودن تمام ماتریس‌های شرکت کننده در ضرب ماتریس‌ها، معکوس ضرب ماتریس‌ها را می‌توان با معکوس کردن هر عامل و ضرب آن‌ها به صورت برعکس به دست آورد، مثلاً

$$(AC)^{-1} = C^{-1}A^{-1}. \qquad (۷)$$

و برای ضرب بیش از چند ماتریس

$$(AC \cdots PQ)^{-1} = Q^{-1}P^{-1} \cdots C^{-1}A^{-1}. \qquad (8)$$

اثبات برای اثبات از (۱) شروع می‌کنیم و در آن از AC به جای A استفاده می‌کنیم، یعنی $AC(AC)^{-1} = I$. حال دو طرف این رابطه را در A^{-1} ضرب و از $A^{-1}A = I$ استفاده می‌کنیم. درنتیجه

$$A^{-1}AC(AC)^{-1} = C(AC)^{-1}$$
$$= A^{-1}I = A^{-1},$$

درپایان با ضرب دوطرف رابطه بالا در C^{-1} و استفاده از $C^{-1}C = I$ خواهیم داشت

$$C^{-1}C(AC)^{-1} = (AC)^{-1} = C^{-1}A^{-1}.$$

این (۷) را ثابت می‌کند، و با استفاده از آن و اصل استقراء (۸) نیز ثابت می‌شود.

درضمن مشاهده می‌کنیم که معکوس معکوس هر ماتریس همان ماتریس است، یعنی می‌توانید ثابت کنید که

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

خواص معمول ضرب ماتریس‌ها. قاعده حذف

بخش ۲.۷ حاوی اخطارهایی است که می‌گوید بعضی از خواص ضرب ماتریس‌ها با آن‌هایی که برای اعداد هستند تفاوت دارد. اکنون این توانایی را داریم تا محدودیت‌های اعتبار قانون حذف که از گزاره‌های [۲] و [۳] زیر قابل درک هستند را توسط مفاهیم رتبه و معکوس که در بخش ۲.۷ در دسترس نبودند، توضیح دهیم. تفاوت‌هایی که قوانین ضرب ماتریس‌ها با قوانین معمول ضرب اعداد دارند از اهمیت زیادی برخوردار هستند و باید با دقت مشاهده شوند. این تفاوت‌ها به شرح زیر هستند.

[۱] ضرب ماتریس‌ها جابجایی نیست، یعنی، در حالت کلی داریم

$$AB \neq BA$$

[۲] به طور کلی $AB=0$ نتیجه نمی‌دهد که $A=0$، $B=0$ و یا $BA=0$؛ به عنوان مثال

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

[۳] به طور کلی $AC=AD$ نتیجه نمی‌دهد که $C=D$ (حتی اگر $A \neq 0$).

پاسخ‌های کامل به موارد [۱] و [۲] در قضیه زیر موجود است.

قضیه ۳ فرض شود A، B و C ماتریس‌های $n \times n$ هستند. در این صورت:

(الف) اگر $rank(A)=n$ و $AB=AC$، آن‌گاه $B=C$

(ب) اگر $rank(A)=n$، آن‌گاه $AB=0$ نتیجه می‌دهد که $B=0$. پس اگر $AB=0$ امّا $A \neq 0$ و $B \neq 0$، آن‌گاه $rank(A)<n$ و $rank(B)<n$

(ج) اگر A تکین باشد، آن‌گاه BA و AB نیز تکین هستند.

اثبات (الف) بنابر قضیه ۱ معکوس A وجود دارد. حال اگر دو طرف تساوی را از سمت چپ در A^{-1} ضرب کنیم خواهیم داشت $A^{-1}AB = A^{-1}AC$، در نتیجه $B=C$.

(ج) فرض شود $rank(A)=n$. بنابر قضیه ۱ معکوس A، A^{-1}، وجود دارد، و $AB=0$ نتیجه می‌دهد که $A^{-1}AB = B = 0$. به طور مشابه $A=0$ اگر $rank(B)=n$.

این واقعیت گزاره دوم در (ب) را نتیجه می‌دهد.

(ج۱) بنابر قضیه ۱ داریم $rank(A) < n$. پس بنابر قضیه ۲ در بخش ۷.۵ دستگاه $Ax=0$ دارای جواب‌های نابدیهی است. با ضرب دستگاه $Ax=0$ از سمت چپ در ماتریس B خواهیم داشت که این جواب‌های نابدیهی جواب‌های دستگاه $BAx=0$ نیز هستند. در نتیجه بنابر قضیه ۲ در بخش ۷.۵ $rank(BA) < n$، و در نتیجه بنابر قضیه ۱ BA تکین است.

(ج۲) بنابر قضیه (d2) در بخش ۷.۷ ماتریس A^T تکین است. پس بنابر قسمت (ج۱) B^TA^T تکین است. امّا بنابر قضیه (d10) در بخش ۷.۲ $(AB)^T=B^TA^T$، پس $(AB)^T$ تکین است. در نتیجه بنابر قضیه (d2) در بخش ۷.۷ ماتریس AB تکین است ■

دترمینان ضرب ماتریس‌ها

دترمینان ضرب ماتریسی AB و BA می‌تواند به صورت دترمینان عامل‌های ضرب نوشته شود و جالب اینجاست که $\det(AB)=\det(BA)$، هرچند که در حالت کلی $AB \neq BA$.

به فرمول (۱۰)، که فرمول مربوط به این ضرب است، گاه و بیگاه احتیاج پیدا می‌شود و می‌تواند

از روش حذف گاوس ژردان (مثال را ببینید) یا قضیه‌ای که در بالا اثبات کردیم نتیجه‌گیری شود.

قضیه ۴ دترمینان ضرب ماتریس‌ها

برای هر دو ماتریس $n \times n$، A و B داریم

$$\det(AB) = \det(BA) = \det(A)\det(B) \tag{۱۰}$$

اثبات. بنابر قضیه (۳ج) اگر A یا B تکین باشند، آنگاه AB و BA نیز تکین هستند. در نتیجه بنابر ۳ در بخش ۷.۷ رابطه (۱۰) به $0=0$ تحویل می‌یابد.

حال فرض شود A و B هر دو غیرتکین هستند. در این صورت می‌توانیم با انجام مراحل گاوس-ژردان A را به ماتریس قطری $\hat{A} = [a_{jk}]$ تبدیل کنیم. بنابر قضیه ۱ در بخش ۷.۷ دستورهای (الف) و (ب) (به غیر از (ج)) تحت این عملیات $\det A$ مقدارش را (مگر احتمالاً علامت آن به دلیل تعویض سطرها) حفظ می‌کند.

اما همین عملیات ماتریس AB را به $\hat{A}B$ با تأثیر مشابه روی $\det(AB)$ تبدیل می‌کند.
پس کافی است که رابطه (۱۰) را برای ماتریس $\hat{A}B$ ثابت کنیم. برای این کار $\hat{A}B$ را به صورت

$$\hat{\mathbf{A}}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \hat{a}_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \hat{a}_{22} & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & \hat{a}_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ & & \vdots & \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \hat{a}_{11}b_{11} & \hat{a}_{11}b_{12} & \cdots & \hat{a}_{11}b_{1n} \\ \hat{a}_{22}b_{21} & \hat{a}_{22}b_{22} & \cdots & \hat{a}_{22}b_{2n} \\ & & \vdots & \\ \hat{a}_{nn}b_{n1} & \hat{a}_{nn}b_{n2} & \cdots & \hat{a}_{nn}b_{nn} \end{bmatrix}.$$

می‌نویسیم و $\det(\hat{A}B)$ را به دست می‌آوریم. در سمت راست تساوی بالا می‌توانیم از $\hat{a}_{11}$ در سطر اول، $\hat{a}_{22}$ در سطر دوم، ... و $\hat{a}_{nn}$ در سطر nاُم فاکتورگیری کنیم. مشاهده کنید که به دلیل مثلثی بودن $\hat{A}$، حاصلضرب $\hat{a}_{11}\hat{a}_{22}\cdots\hat{a}_{nn}$ برابر $\det \hat{A}$ است. در ضمن دترمینانی که از این فاکتورگیری باقی می‌ماند $\det B$ است. این رابطه (۱۰) را برای $\det(AB)$ ثابت می‌کند، و اثبات برای $\det(BA)$ نیز توسط همین ایده انجام می‌شود. ■

مطالب بالا مبحث ماتریس‌ها را در خصوص دستگاه‌های خطی کامل می‌کند (بخش‌های ۳.۷ - ۸.۷). بخش ۹.۷ که در ادامه ارائه خواهد شد و در مورد فضاهای برداری و تبدیل‌های خطی است اختیاری می‌باشد. روش‌های عددی در بخش‌های ۱.۲۰ - ۴.۲۰ مورد بحث قرار می‌گیرند، که مستقل از بخش‌های دیگر در مورد محاسبات عددی

مجموعه تمرین‌های ۸.۷

$\boxed{۱۰-۱}$ معکوس

در تمرین‌های ۱-۱۰ به کمک روش گاوس-جردن (یا توسط (۴*) اگر $n=2$) معکوس ماتریس را پیدا کنید. با به کار بردن (۱) صحت جواب به دست آمده را تحقیق کنید.

1. $\begin{bmatrix} 1.80 & -2.32 \\ -0.25 & 0.60 \end{bmatrix}$ **2.** $\begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 0.3 & -0.1 & 0.5 \\ 2 & 6 & 4 \\ 5 & 0 & 9 \end{bmatrix}$ **4.** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.1 \\ 0 & -0.4 & 0 \\ 2.5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ **6.** $\begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 13 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **8.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

$$9.\ \begin{bmatrix} 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad 10.\ \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

۱۸-۱۱ چند فرمول عمومی

۱۱. معکوس مربع ماتریس. برای ماتریس A در مسأله ۱ تحقیق کنید که

$$(A^2)^{-1}=(A^{-1})^2$$

۱۲. فرمول ارائه شده در مسأله ۱۱ را ثابت کنید

۱۳. معکوس ترانهاده. برای ماتریس A در مسأله ۱ ثابت کنید

$$(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$$

۱۴. فرمول ارائه شده در مسأله ۱۳ را ثابت کنید

۱۵. معکوس معکوس. ثابت کنید

$$(A^{-1})^{-1}=A$$

۱۶. دوران. کاربردی از ماتریس تعریف شده در مسأله ۲ را که فرم معکوس را آشکار می‌سازد ارائه دهید.

۱۷. ماتریس مثلثی. آیا (مانند مسأله ۵) معکوس هر ماتریس مثلثی همواره مثلثی است؟ دلیل خود را ارائه دهید.

۱۸. تعویض سطر. همان سؤال مسأله ۱۶ را در مورد مسأله ۷ پاسخ دهید.

۲۰-۱۹ فرمول (۴)

فرمول (۴) گاه‌وبیگاه در مباحث نظری مورد استفاده قرار می‌گیرد. برای درک آن، آن را در مورد تمرین‌های ۱۹-۲۰ بکار ببرید و صحت نتایج را توسط روش گاوس-جردان تحقیق کنید.

۱۹. معکوس ماتریس مسأله ۳

۲۰. معکوس ماتریس مسأله ۶

۹.۷ فضاهای برداری. فضاهای ضرب داخلی تبدیل‌های خطی اختیاری

در بخش ۴.۷ جوهره فضاهای برداری را درک کردیم. در آن بخش فضاهای برداری خاص را معرفی کردیم که به طور طبیعی در مباحث ماتریس‌ها و دستگاه‌های خطی پدید ار می‌شوند. اعضای این فضاهای برداری، که بردار نامیده می‌شوند، در قواعد (۳) و (۴)

بخش ۱.۷ (که شبیه قواعد مربوط به اعداد هستند) صدق می کند. این فضاهای برداری خاص توسط پوشش ها، یعنی، ترکیب های خطی تعداد متناهی بردار بوجود می آیند. به علاوه، هرکدام از این بردارها دارای n عدد حقیقی به عنوان مؤلفه هستند. قبل از ادامه این بخش بهتر است که یکبار دیگر این مطالب مرور شوند.

با در نظر گرفتن تمام بردارهایی که دارای n مؤلفه و هر مؤلفه عددی حقیقی است می توان این ایده را تعمیم داد و به فضای برداری n-بعدی حقیقی، یعنی $\mathbb{R}^n$، دست یافت. بردارهای این فضا به عنوان "بردارهای حقیقی" شناخته می شوند. بنابراین، هر بردار در $\mathbb{R}^n$ یک n-تایی مرتب از اعداد حقیقی است.

اکنون می توان برای n مقادیر خاصی در نظر گرفت. برای $n=2$، $\mathbb{R}^2$، فضای برداری تمام زوج های مرتب، که به بردارهای درون صفحه نظیر می شوند، به دست می آید. برای $n=3$، $\mathbb{R}^3$، فضای برداری تمام سه تایی های مرتب، که بردارها در فضای سه بعدی هستند، به دست می آید. این بردارها دارای کاربردهای وسیع در مکانیک، هندسه و حسابان هستند و برای مهندسین و فیزیکدانان ابزاری اساسی به شمار می آیند.

به طور مشابه، اگر تمام n تایی های مرتب از اعداد مختلط را به عنوان بردار و اعداد مختلط را به عنوان اسکالر در نظر بگیریم، فضای برداری مختلط $\mathbb{C}^n$ را به دست می آوریم، که در بخش ۵.۸ مورد توجه قرار خواهد گرفت.

به علاوه، مجموعه های دیگری هستند که در کاربردها مورد توجه قرار می گیرند که شامل

ماتریس‌ها، توابع، تبدیل‌ها و بسیاری دیگر که می‌توان برای آن‌ها جمع و ضرب اسکالری را طوری تعریف کرد که آن‌ها نیز به فضاهای برداری تبدیل شوند.

مسلماً ارائهٔ مفهوم مجرد فضای برداری حقیقی V که از روی مدل واقعی $\mathbb{R}^n$، با در نظر گرفتن خواص (۳) و (۴) در بخش ۷.۱ به عنوان اصول آن، ساخته می‌شود دور از انتظار نخواهد بود. به این ترتیب، تعریف فضای برداری حقیقی ظهور پیدا می‌کند.

تعریف

فضای برداری حقیقی

مجموعهٔ ناتهی V از اعضای a، b، ... فضای برداری حقیقی (یا فضای خطی حقیقی) نامیده می‌شود، و اعضای آن (صرف‌نظر از وطبیعت آن‌ها، که از محتوای کلام نتیجه یا به دلخواه تفسیر می‌شود) بردار نامیده می‌شوند هرگاه، در V دو عمل جبری (با نام‌های جمع برداری و ضرب اسکالری) با خواص همراه آن‌ها به صورت زیر تعریف شوند.

۱. جمع برداری به هر زوج مرتب از بردارهای a و b در V برداری یکتا در V، که جمع a و b نامیده، و با نماد $a+b$ نمایش داده می‌شود، طوری نظیر می‌کند که برای آن اصول موضوع زیر صادق هستند:

۱.۱ جابجایی. برای هر دو بردار a و b در V

$$a+b=b+a$$

۱.۲ شرکت‌پذیری. برای هر سه بردار a، b و c در V

$$(a+b)+c=a+(b+c)$$

(که به صورت $a+b+c$ نوشته می‌شود)

۳.۱ برداری یکتا، که بردار صفر نامیده و با نماد 0 نشان داده می‌شود، وجود دارد، به طوری که برای هر a در V

$$a+0=a$$

۴.۱ برای هر بردار a در V برداری یکتا، که با نماد $-a$ نشان داده می‌شود، وجود دارد به طوری که

$$a+(-a)=0$$

۲. ضرب اسکالری. اعداد حقیقی اسکالر نامیده می‌شوند. ضرب اسکالری به هر a در V و هر اسکالر c برداری یکتا در V، که ضرب c در V نامیده و با نماد ca (یا ac) نمایش داده می‌شود، طوری نظیر می‌کند که برای آن اصول موضوع زیر صادق هستند:

۱.۲ توزیع‌پذیری. برای اسکالر c و بردارهای a و b در V،

$$c(a+b)=ca+cb$$

۲.۲ توزیع‌پذیری. برای تمام اسکالرهای c و k و هر a در V

$$(c+k)a=ca+ka$$

۳.۲ شرکت‌پذیری. برای تمام اسکالرهای c و k و هر a در V

$$c(ka)=(ck)a$$

(که به صورت cka نوشته می‌شود)

۴.۲ برای هر a در V،

$$1a=a$$

اگر، در تعریف بالا، اعداد مختلط را به جای اعداد حقیقی به عنوان اسکالر در نظر بگیریم، تعریف اصولی فضای برداری مختلط را به دست می‌آوریم.

به اصول موضوع ارائه شده در تعریف بالا به دقت توجه کنید. هر اصل متکی به خود است: مختصر و مفید است و یک ویژگی ساده، V را بیان می‌کند. در این تعریف در حد

ممکن تعدادکمی اصل موضوع شرکت دارد و همه آن‌ها با هم تمام خواص مورد نظر V را بیان می‌کنند. انتخاب اصول موضوع مناسب یک فرآیند توأم با سعی و خطاست که اغلب در مدت زمان طولانی گسترش می‌یابد. اما وقتی به اتفاق آرا انتخاب شدند، مانند اصولی که در تعریف فضای برداری حقیقی شرکت دارند، به اصولی استاندارد تبدیل می‌شوند.

مفاهیم زیر که به فضاهای برداری مرتبط هستند دقیقاً به همان صورتی که در بخش ۴.۷ ارائه شده است تعریف می‌شوند. در واقع، یک ترکیب خطی از بردارهای $a_{(1)}, a_{(2)}, \ldots, a_{(m)}$ در یک فضای برداری V عبارتی است به شکل

$$c_1 a_{(1)} + c_2 a_{(2)} + \cdots + c_m a_{(m)}$$ ($c_1, c_2, \ldots, c_m$ اسکالر هستند)

این بردارها تشکیل یک مجموعه مستقل خطی می‌دهند (به طور خلاصه مستقل خطی نامیده می‌شوند) هرگاه

$$c_1 a_{(1)} + c_2 a_{(2)} + \cdots + c_m a_{(m)} = 0 \qquad (1)$$

نتیجه دهد $c_1 = 0, c_2 = 0, \ldots, c_m = 0$. در غیر این صورت، اگر (۱) برای اسکالرهایی که همه آن‌ها با هم صفر نیستند درست باشد، بردارها را وابسته خطی می‌نامند.

توجه کنید که (۱) با $m=1$ به صورت $ca=0$ است که نشان می‌دهد هر بردار a به تنهایی مستقل خطی است اگر و تنها اگر $a \neq 0$.

V دارای بعد n است، یا n-بعدی است، هرگاه حاوی مجموعه‌ای

مستقل خطی از n بردار باشد و هر زیرمجموعه‌ای از V که دارای بیش از n بردار است وابسته خطی باشد. مجموعه‌ای که دارای n بردار مستقل خطی است، یک پایه برای V نامیده می‌شود و هر بردار در V می‌تواند به صورت یک ترکیب خطی از بردارهای آن پایه نوشته شود. به علاوه، برای یک پایه معلوم این ترکیب خطی یکتاست (تمرین ۲ را ببینید).

مثال ۱ فضای برداری ماتریس‌ها

ماتریس‌های حقیقی ۲×۲ تشکیل یک فضای برداری حقیقی می‌دهند که بعد آن ۴ است. یک پایه برای این فضا به صورت زیر است:

$$\mathbf{B}_{11}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}_{12}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}_{21}=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}_{22}=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$$

زیرا هر ماتریس ۲×۲ مانند $A=[a_{jk}]$ دارای نمایش یکتا به صورت $A=a_{11}B_{11}+a_{12}B_{12}+a_{21}B_{21}+a_{22}B_{22}$ است. به طور مشابه، ماتریس‌های حقیقی $m\times n$ با اعداد ثابت m و n تشکیل یک فضای برداری mn-بعدی می‌دهند. بعد فضای برداری ماتریس‌های پادمتقارن ۳×۳ چیست؟ آیا می‌توانید برای آن یک پایه پیدا کنید؟

مثال ۲ فضای برداری چندجمله‌ای‌ها

مجموعه تمام چندجمله‌ای‌های ثابت، خطی و درجه دوم با متغیر x تحت جمع معمول چندجمله‌ای‌ها و ضرب معمول یک عدد حقیقی در یک چندجمله‌ای، تشکیل یک فضای برداری حقیقی با بعد ۳ با پایه $\{1, x, x^2\}$ می‌دهد؛ زیرا این دو عمل روی چندجمله‌ای‌های درجه دوم چندجمله‌ای جدیدی

را تولید می کنند که درجه اش بیشتر از ۲ نیست. بعد فضای برداری چندجمله ای هایی که درجه آنها بیشتر از عدد معلوم n نیست چیست؟ آیا می توانید برای آن یک پایه پیدا کنید؟ $\boxed{}$

اگر برای هر عدد طبیعی n، هر چقدر بزرگ، فضای برداری V حاوی زیرمجموعه ای n عضوی از بردارهای مستقل خطی باشد، آنگاه V نامتناهی البعد نامیده می شود، که در مقابل فضای برداری متناهی البعد (n-بعدی) است که در بالا تعریف شد.

به عنوان مثالی از فضای برداری نامتناهی البعد (با بعد نامتناهی) می توان از فضای تمام توابع پیوسته روی فاصله $[a, b]$ از محور x-ها نام برد که بدون اثبات آن را معرفی می کنیم.

فضاهای ضرب داخلی

اگر a و b بردارهایی در $\mathbb{R}^n$ باشند، که به صورت بردارهای ستونی در نظر گرفته شده اند، می توانیم حاصلضرب $a^T b$ را تشکیل دهیم. این حاصلضرب ماتریسی 1×1 است که می تواند توسط تنها درایه اش، یعنی یک عدد، شناسایی شود.

این ضرب ضرب داخلی یا ضرب نقطه ای a و b نامیده می شود. سایر نمادهایی که برای ضرب داخلی به کار می روند عبارت هستند از (a, b) یا $a \cdot b$. پس

$$\mathbf{a}^T\mathbf{b} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = [a_1 \cdots a_n] \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \sum_{l=1}^{n} a_l b_l = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n.$$

اکنون با در نظر گرفتن خواص اصلی (a, b) به عنوان اصول موضوع، مفهوم ضرب داخلی را به صورت زیر به فضاهای برداری عمومی تعمیم می دهیم.

تعریف

فضای ضرب داخلی حقیقی

فضای برداری حقیقی V فضای ضرب داخلی حقیقی (یا فضای پیش‌هیلبرت[4]) نامیده می‌شود، اگر دارای شرط زیر باشد: برای هر زوج از بردارهای a و b عددی حقیقی که توسط (a, b) نشان داده و ضرب داخلی a و b نامیده می‌شود به گونه‌ای نظیر شود که اصول موضوع زیر صادق باشند:

I. برای تمام اسکالرهای q_1 و q_2 و تمام بردارهای a، b و c در V

$$(q_1 a + q_2 b, c) = q_1(a,c) + q_2(b,c) \qquad \text{(خطی)}$$

II. برای تمام بردارهای a و b در V

$$(a, b) = (b, a) \qquad \text{(تقارنی)}$$

III. برای هر a در V

$$\begin{cases} (a, a) \geq 0 \\ (a, a) = 0 \quad \text{اگر و تنها اگر} \quad a = 0 \end{cases} \qquad \text{(معین مثبت)}$$

بردارهایی که ضرب داخلی آن‌ها برابر صفر است عمود بر هم گفته می‌شوند.

طول یا نرم یک بردار در V به صورت

$$\|a\| = \sqrt{(a, a)} \quad (\geq 0) \qquad (2)$$

تعریف می‌شود. برداری که نرم آن برابر 1 است بردار یکانی (یکه) نامیده می‌شود.

---

[4] دیوید هیلبرت (۱۹۴۳-۱۸۶۲)، ریاضی‌دان بزرگ آلمانی، که در کونیگزبرگ و گاتینگن تدریس می‌کرد و سازنده مدرسه ریاضی مشهور گاتینگن بود. اشتهار وی به دلیل آثار اساسی است که در جبر، حساب تغییرات، معادلات انتگرالی، آنالیز تابعی و منطق ریاضی از خود به جا گذاشته است. یکی از آثار او «اساس هندسه» باعث شد تا روش‌های تعریف همراه با اصول موضوع از نظر عمومی به رسمیت شناخته شوند. ۲۳ مسأله مشهور او (که در سال ۱۹۰۰ در پاریس و در کنگره بین المللی ریاضیات منتشر شد) به طور قابل ملاحظه‌ای در پیشبرد ریاضیات سودمند تأثیر گذاشته است.

اگر V با بعد متناهی باشد، در واقع همان فضای هیلبرتی مصطلح است. صفحه ۱۲۸ از مرجع [GenRef7] که در ضمیمه ۱ لیست شده است ببینید.

از این اصول موضوع و از (۲) می‌توان نامساوی پایه زیر را نتیجه‌گیری کرد.

(۳) $|(a,b)| \leq \|a\|\,\|b\|$ (نامساوی کشی - شوارتز)

از (۳) نامساوی

(۴) $\|a+b\| \leq \|a\| + \|b\|$ (نامساوی مثلث)

به دست می‌آید. و با یک محاسبه مستقیم ساده تساوی

(۵) $$\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|^2 + \|\mathbf{a}-\mathbf{b}\|^2 = 2(\|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2)$$ (رابطه متوازی الاضلاع)

نتیجه‌گیری می‌شود.

مثال ۳. فضای اقلیدسی n-بعدی

$\mathbb{R}^n$ همراه با ضرب داخلی

(۶) $$(a,b) = a^T b = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n$$

(که در آن a و b هر دو بردارهای ستونی هستند) فضای اقلیدسی n-بعدی نامیده می‌شود و توسط E^n یا همان $\mathbb{R}^n$ نمایش داده می‌شود. محاسبه مستقیم نشان می‌دهد که اصول موضوع I - III برای این ضرب داخلی صدق می‌کند. فرمول (۲) "نرم اقلیدسی" را به صورت

(7) $$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{(\mathbf{a},\mathbf{a})} = \sqrt{\mathbf{a}^T\mathbf{a}} = \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}.$$

نتیجه می‌دهد.

مثال ۴. ضرب داخلی توابع. فضاهای تابعی

مجموعه تمام توابع پیوسته و با مقادیر حقیقی $f(x)$، $g(x)$، ... روی فاصله $\alpha \leq x \leq \beta$ یک

۵ هرمان آماندوس شوارتز (۱۸۴۳-۱۹۲۱). ریاضیدان آلمانی، که به دلیل آثارش در آنالیز مختلط (نگاشت همدیس) و هندسه دیفرانسیل مشهور است. برای کشی بخش ۵.۲ را ببینید.

عمل معمول جمع توابع و ضرب در اسکالر (اعداد حقیقی) یک فضای برداری حقیقی است. روی این "فضای تابعی" می توانیم ضرب داخلی را توسط انتگرال معین

$$(f, g) = \int^{\beta} f(x)\, g(x)\, dx. \tag{8}$$

صحت اصول موضوع در مورد این تعریف را می توان با محاسبه مستقیم تحقیق کرد.

فرمول (۲) نرم حاصل از این ضرب داخلی را به صورت

$$\|f\| = \sqrt{(f,f)} = \sqrt{\int_{\alpha}^{\beta} f(x)^2\, dx}. \tag{9}$$

نتیجه می دهد.

مثال های بالا اولین تصور از کلیت بزرگ مفاهیم انتزاعی فضاهای برداری و فضاهای ضرب داخلی ارائه می دهند. جزئیات بیشتر به دروس پیشرفته تر (آنالیز تابعی، آنالیز مدرن مجرد؛ مرجع [GenRef 7] که در ضمیمه I لیست شده است را ببینید) تعلق دارند و نمی توانند در اینجا مورد بحث قرار گیرند. در عوض هم اکنون موضوعی مرتبط که در آن ماتریس ها نقش اصلی را بازی می کنند مورد بحث و بررسی قرار می دهیم.

تبدیل های خطی

فرض شود X و Y دو فضای برداری هستند. به هر بردار x در X بردار یکتای y در Y را نظیر کنیم. در نتیجه می توان گفت که یک نگاشت (یا تبدیل یا اپراتور) مشخص شده است. چنین نگاشتی توسط یک حرف بزرگ، مثلاً F، نمایش داد.

می‌شود. بردار y در Y که توسط این نگاشت به بردار x در X نظیر شده است

را تصویر x تحت F می‌نامند و توسط $F(x)$ [یا Fx، بدون پرانتز] نمایش می‌دهند.

F یک نگاشت خطی یا تبدیل خطی نامیده می‌شود هرگاه، برای تمام بردارهای

v و x در X و تمام اسکالرهای c داشته باشیم

$$F(\mathbf{v} + \mathbf{x}) = F(\mathbf{v}) + F(\mathbf{x}) \qquad (10)$$
$$F(c\mathbf{x}) = cF(\mathbf{x}).$$

تبدیل‌های خطی از فضای $\mathbb{R}^n$ به فضای $\mathbb{R}^m$

از این به بعد فرض می‌شود که $X = \mathbb{R}^n$ و $Y = \mathbb{R}^m$. در این صورت هر ماتریس حقیقی

$m \times n$، مثل $A = [a_{jk}]$، یک تبدیل از $\mathbb{R}^n$ به $\mathbb{R}^m$ را به صورت

$$y = Ax \qquad (11)$$

تعریف می‌کند. چون $A(u+x) = Au + Ax$ و $A(cx) = cAx$، این تبدیل خطی است.

برعکس، نشان خواهیم داد که، هر تبدیل خطی F از $\mathbb{R}^n$ به $\mathbb{R}^m$ می‌تواند، بعد از آنکه

پایه‌هایی برای $\mathbb{R}^n$ و $\mathbb{R}^m$ انتخاب شدند، برحسب یک ماتریس $m \times n$، مانند A،

ارائه شود. این واقعیت می‌تواند به صورت زیر ثابت شود.

فرض شود $e_{(1)}, \ldots, e_{(n)}$ هر پایه‌ای برای $\mathbb{R}^n$ باشد. در این صورت هر x در $\mathbb{R}^n$

دارای نمایش یکتایی به صورت

$$x = x_1 e_{(1)} + \cdots + x_n e_{(n)}$$

است. چون F خطی است، از این نمایش ترکیب خطی زیر برای نمایش $F(x)$

نتیجه می‌شود.

$$F(\mathbf{x}) = F(x_1\mathbf{e}_{(1)} + \cdots + x_n\mathbf{e}_{(n)}) = x_1F(\mathbf{e}_{(1)}) + \cdots + x_nF(\mathbf{e}_{(n)}).$$

پس F به طور یکتا توسط تصاویر بردارهای پایه‌ای برای $\mathbb{R}^n$ تعیین می‌شود. حال برای $\mathbb{R}^n$ «پایه استاندارد» را انتخاب می‌کنیم. یعنی،

$$\mathbf{e}_{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \cdots, \quad \mathbf{e}_{(n)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \tag{12}$$

که در آن برای $e_{(j)}$ مؤلفه jاُم مساوی 1 و سایر مؤلفه‌ها مساوی صفر هستند. اکنون نشان می‌دهیم که می‌توانیم ماتریس A با بعد $m\times n$ را طوری تعیین کنیم که برای هر x در $\mathbb{R}^n$ و تصویر $y=F(x)$ در $\mathbb{R}^m$ رابطه

$$y = F(x) = Ax$$

برقرار است. در حقیقت از تصویر $e_{(1)}$، یعنی $F(e_{(1)})$، شرط

$$\mathbf{y}^{(1)} = \begin{bmatrix} y_1^{(1)} \\ y_2^{(1)} \\ \vdots \\ y_m^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

به دست می‌آید که از آن می‌توانیم اولین ستون A، یعنی $a_{11}=y_1^{(1)}$، $a_{21}=y_2^{(1)}$، ...، $a_{m1}=y_m^{(1)}$ را به دست آوریم. به طور مشابه از تصویر $e_{(2)}$ دومین ستون A را به دست می‌آوریم، و غیره. این عملیات اثبات را کامل می‌کند.

بعد از به دست آوردن ماتریس A می‌گوییم، برحسب پایه‌های $\mathbb{R}^n$ و $\mathbb{R}^m$، A تبدیل خطی F را نمایش می‌دهد، یا A یک نمایش دهنده F است.

به طور کلی، منظور از یک «نمایش دهنده» جایگزینی یکی از مفاهیم تحت بررسی با دیگری است که خواص آن بیشتر واضح است.

در فضای سه بعدی اقلیدسی، E^3، معمولاً پایه استاندارد به صورت $e_{(1)}=i$، $e_{(2)}=j$ و $e_{(3)}=k$ نوشته می‌شود. پس

$$\mathbf{i}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\quad \mathbf{j}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\quad \mathbf{k}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}.$$

این سه بردار، بردارهای یکانی در جهت مثبت محورهای دستگاه مختصات دکارتی در فضا، یعنی، دستگاه مختصات معمولی با مقیاس اندازه‌گیری یکسان روی سه محور مختصات عمود برهم، می‌باشند.

مثال ۵ تبدیل‌های خطی

به عنوان تفسیری از تبدیل محورهای مختصات صفحه، ماتریس‌های

$$\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}a&0\\0&1\end{bmatrix}$$

به ترتیب بازتاب در خط $x_1=x_2$، بازتاب در محور x_1، بازتاب در مبدأ مختصات و انبساط (اگر $a>1$) یا انقباض (اگر $0<a<1$) در جهت x_1 را نمایش می‌دهند ■

مثال ۶ تبدیل‌های خطی

بحثی که قبل از مثال (۵) ارائه دادیم، ممکن است در اولین نگاه ساده‌تر از

آنچه به نظر می رسد باشد. برای مشاهده این حالت، ماتریس A که نمایش دهنده آن تبدیل خطی است که (x_1, x_2) را به روی $(2x_1 - 5x_2 , 3x_1 + 4x_2)$ می نگارد، پیدا کنید.

حل) واضح است که تبدیل خطی به صورت

$$y_1 = 2x_1 - 5x_2$$
$$y_2 = 3x_1 + 4x_2$$

می باشد. از این معادلات می توانیم مستقیماً مشاهده کنیم که ماتریس A به صورت زیر است

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. تحقیق کنید که $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 - 5x_2 \\ 3x_1 + 4x_2 \end{bmatrix}.$

اگر ماتریس A در (۱۱) مربعی باشد، $n \times n$، در این صورت (۱۱) $\mathbb{R}^n$ را به $\mathbb{R}^n$ می نگارد. اگر A غیرتکین باشد، یعنی A^{-1} وجود داشته باشد (بخش ۸.۷ را ببینید)، آن گاه با ضرب A^{-1} در دو طرف (۱۱) از سمت چپ و به کار بردن $A^{-1}A = I$، معکوس تبدیل را به صورت

$$x = A^{-1}y \qquad (۱۴)$$

به دست می آوریم. این نگاشت هر $y = y_0$ را به آن x می نگارد، که توسط (۱۱) به y_0 نگاشته می شود. معکوس یک تبدیل خطی (در صورت وجود) خودش خطی است، زیرا همان طور که (۱۴) نشان می دهد، توسط یک ماتریس نمایش داده می شود.

ترکیب تبدیل های خطی

ما در این قسمت می خواهیم بحثی از چگونگی رفتار تبدیل های خطی را روی فضاهای برداری عمومی را توضیح دهیم. اگر مثال ۷ را به دقت بخوانید، متوجه خواهید شد که تعاریف و راستی آزمایی های آن به شدت از قواعد ارائه شده پیروی می کند و شما می توانید، با مروری آهسته و اصولی روی پیدا کردن راه حل خود از میان مطالب مربوط فکر کنید.

آخرین عملیاتی را که می خواهیم مورد بحث قرار دهیم، ترکیب تبدیل های خطی است.

فرض شود X، Y و W هر فضای برداری دلخواه هستند. مانند قبل، فرض شود F یک تبدیل خطی از X به Y و G نیز یک تبدیل خطی از W به X باشد. در اینصورت، ترکیب F و G را توسط H نمایش می دهیم، یعنی

$$H = F \circ G = FG = F(G)$$

که به معنای آن است که ابتدا تبدیل G را انجام می دهیم و سپس تبدیل F را به آن اعمال می کنیم (به همان ترتیب!، یعنی، از چپ به راست). حالا، برای آنکه به این ترکیب معنی خاصی بدهیم، اگر فرض کنیم w برداری در W است، آنگاه $G(w)$ برداری در X و $F(G(w))$ برداری در Y است. پس H فضای W را به Y می نگارد و می توانیم بنویسیم

$$H(w) = (F \circ G)(w) = (FG)(w) = F(G(w)) \qquad (15)$$

که تعریف ترکیب را در زمینه فضاهای برداری عمومی کامل می کند. اما، آیا ترکیب

واقعاً خطی است؟ برای پاسخ به این سؤال باید تحقیق کنیم که آیا H،
به صورتی که در (۱۵) تعریف شده است، از هر دو معادله (۱۰) تبعیت می‌کند.

مثال ۷ ترکیب تبدیل های خطی خودشان تبدیل خطی است.

برای اثبات اینکه H یک تبدیل خطی است باید نشان دهیم که H در هر دو
شرط (۱۰) صدق می‌کند. برای دو بردار w_1 و w_2 در W داریم

$$
\begin{aligned}
H(\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_2) &= (F\circ G)(\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_2)\\
&= F(G(\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_2))\\
&= F(G(\mathbf{w}_1)+G(\mathbf{w}_2)) && \text{(بنابر خطی بودن } G)\\
&= F(G(\mathbf{w}_1))+F(G(\mathbf{w}_2)) && \text{(بنابر خطی بودن } F)\\
&= (F\circ G)(\mathbf{w}_1)+(F\circ G)(\mathbf{w}_2) && \text{(بنابر (۱۵))}\\
&= H(\mathbf{w}_1)+H(\mathbf{w}_2) && \text{(بنابر تعریف } H)
\end{aligned}
$$

به طور مشابه

$$
\begin{aligned}
H(c\mathbf{w}_2) &= (F\circ G)(c\mathbf{w}_2) = F(G(c\mathbf{w}_2)) = F(c(G(\mathbf{w}_2))\\
&= cF(G(\mathbf{w}_2)) = c(F\circ G)(\mathbf{w}_2) = cH(\mathbf{w}_2).
\end{aligned}
$$

■

در بالا ترکیب را به صورت یک تبدیل خطی در مبحث فضای برداری عمومی
تعریف کردیم و نشان دادیم که ترکیب تبدیل های خطی در حقیقت خطی است.

در ادامه هدف ما ارتباط دادن ترکیب تبدیل های خطی به ضرب ماتریس ها است.

برای رسیدن به این هدف فرض شود $X=\mathbb{R}^n$، $Y=\mathbb{R}^m$ و $W=\mathbb{R}^p$. این
انتخاب از فضاهای برداری خاص به ما اجازه می‌دهد تا تبدیل های خطی را
توسط ماتریس ها نمایش، و معادلات ماتریسی را، به همان صورتی که در (۱۱)
انجام داده شده، تشکیل دهیم. پس F می‌تواند توسط یک ماتریس $m\times n$

عمومی شکل $A=[a_{jk}]$ و G توسط یک ماتریس $n\times p$ عمومی شکل $B=[b_{jk}]$
نمایش داده شود. سپس می توانیم برای F بنویسیم

$$y = Ax \qquad (16)$$

که در آن x برداری ستونی با n درایه و y، یعنی تصویر x تحت F، برداری
ستونی با m درایه است. به طور مشابه می توانیم برای G بنویسیم

$$x = Bw \qquad (17)$$

که در آن w برداری ستونی با p درایه است. با جایگذاری (۱۷) در (۱۶) داریم

$$y = Ax = A(Bw) = (AB)w = ABw = Cw \quad \text{که در آن} \quad C = AB. \qquad (18)$$

(۱۸) فرم ماتریسی (۱۵) است، یعنی می توانیم ترکیب تبدیل های خطی در فضاهای
اقلیدسی را به صورت ضرب ماتریس ها تعریف کنیم. در نتیجه ماتریس حقیقی
C که ماتریس $m\times p$ است تبدیل خطی H را نمایش می دهد که $\mathbb{R}^p$ را به $\mathbb{R}^n$
می نگارد، یعنی هر بردار w با p درایه را به برداری با n درایه نظیر می کند.

ملاحظات. بحثی که در بالا انجام دادیم مشابه با بحثی است که در بخش ۲.۷ انجام
دادیم، یعنی جایی که برای تعریف "غیرطبیعی" ضرب ماتریس ها ایجاد انگیزه کردیم.
برگردید و مشاهده کنید که بحث عمومی تر بالا، در بخش ۲.۷ برای حالت خاص با
ابعاد $m=2$، $n=2$ و $p=2$ انجام شد. (شما ممکن است که بخواهید تعمیم به دست
آمده در بالا را برای ابعاد مختلف و کوچک، مثل $m=2$، $n=3$ و $p=4$ نوشته
و ماتریس ها و بردارهای شرکت کننده در آن را شناسایی کنید. این ترفند تجارت

ریاضیدانان است، که در آن تمایل دارند نظریه خود را روی مثال‌های کوچک تر آزمایش کرده و گسترش دهند تا مشاهده کنند که آن نظریه واقعاً کار می کند.)

مثال ۸. تبدیل های خطی. ترکیب

در مثال ۵ از بخش ۷.۰۹، فرض شود که A اولین ماتریس و B چهارمین ماتریس با $a>1$ است. در این صورت اعمال B روی بردار $w=[w_1\ w_2]^T$، درایه w_1 را توسط a در جهت محور x_1ها منبسط می کند. سپس، وقتی A را روی بردار "انبساط یافته" اعمال کنیم، آن را در طول خط $x_1=x_2$ بازتاب می کنیم و در نتیجه آن بردار $y=[w_2\ \ aw_1]^T$ را به دست می آوریم. اما این دقیقاً نشان دهد، تعبیر هندسی ترکیب H از دو تبدیل خطی F و G است که به ترتیب توسط ماتریس های A و B نمایش داده می شوند. اکنون برای این مثال نشان می دهیم که نتیجه قبل را می توان با ضرب ساده ماتریسی به دست آورد، یعنی

$$\mathbf{AB}=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\a&0\end{bmatrix}$$

و مانند آنچه که در (۱۸) انجام شد، محاسبه زیر را انجام می دهیم:

$$\mathbf{ABw}=\begin{bmatrix}0&1\\a&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}w_1\\w_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}w_2\\aw_1\end{bmatrix},$$

که همان نتیجه ای است که قبلاً به دست آوردیم. این نشان می دهد که $AB=C$، و مشاهده می کنیم که ترکیب تبدیل های خطی می تواند توسط ضرب ماتریس ها نمایش داده شود. این مثال در ضمن نشان می دهد که ترتیب

ضرب ماتریس ها مهم است (!). شما ممکن است که سعی کنید تا اول A و سپس B را اعمال کنید و BA را نتیجه بگیرید. چه چیزی را مشاهده می کنید؟ آیا این نتیجه حس هندسی ایجاد می کند؟ آیا نتیجه آن با AB یکی است؟

در این فصل تاکنون چند مفهوم انتزاعی از قبیل فضای برداری، فضای ضرب داخلی و تبدیل خطی یاد گرفته ایم. معرفی این مفاهیم به مهندسین و دانشمندان اجازه می دهد تا با یکدیگر با یک زبان مشترک و مختصر ارتباط برقرار کنند. به عنوان مثال، مفهوم فضای برداری بسیاری از ایده ها را به شیوه ای بسیار مختصر پوشش می دهد. برای دانشجویانی که این مفاهیم را یاد می گیرند پایه ای را برای فراگیری دروس پیشرفته در مهندسی فراهم می آورد.

در اینجا فصل ۷ به پایان می رسد. موضوع اصلی در این فصل حذف گاوسی از بخش ۳.۷ بود که از آن بیشتر مفاهیم و نظریه های دیگر نتیجه شدند. فصل بعد نیز دارای یک موضوع اصلی، با عنوان مسائل مقدار ویژه می باشد. این موضوع شاخه ای از جبر خطی است که دارای کاربردهای فراوان در مهندسی، فیزیک مدرن و بسیاری از شاخه های مختلف علوم است.

مجموعه تمرین های ۹.۷

۱. پایه. سه پایه از $\mathbb{R}^3$ را پیدا کنید.

۲. یکتایی. نشان دهید که نمایش
$$V = c_1 a_{(1)} + \dots + c_n a_{(n)}$$
از هر بردار معلوم در یک فضای برداری n-بعدی برحسب پایه $a_{(1)}, \dots, a_{(n)}$ برای V یکتا است. راهنمایی. دو نمایش برای V را در نظر بگیرید و به تفاضل آن ها توجه کنید.

$\boxed{۱۰-۳}$ فضای برداری

(مسائل بیشتر در مجموعه تمرین های ۹.۴ ارائه خواهند شد.) آیا مجموعه های تعریف شده در تمرین های ۳-۱۰ همراه با جمع و ضرب معمول تشکیل یک فضای برداری می دهند؟ دلیل خود را بیان کنید. اگر جواب مثبت است، بعد و یک پایه برای آن فضا را مشخص کنید

۳. تمام بردارهای درون $\mathbb{R}^3$ که شرایط زیر را دارا هستند: $-v_1 + 2v_2 + 3v_3 = 0$ و
$-4v_1 + v_2 + v_3 = 0$

۴. تمام ماتریس های پادمتقارن 3×3

۵. تمام چندجمله ای های با متغیر x که مرتبه آن ها حداکثر ۴ است و دارای ضرایب نامنفی هستند.

۶. تمام توابع $y(x) = a\cos 2x + b\sin 2x$ با ضرایب دلخواه a و b

۷. تمام توابع $(ax+b)e^{-x}$ با ضرایب دلخواه a و b

۸. تمام ماتریس های $n\times n$ مانند A که در آن ها n ثابت است و $\det A = 0$

۹. تمام ماتریس های 2×2 مانند $A=[a_{jk}]$ با شرط $a_{11}+a_{22}=0$

۱۰. تمام ماتریس های 3×2 مانند $A=[a_{jk}]$ که ستون اول آن هر مضربی از $[3, 0, -5]^T$ است.

۱۱. $\boxed{۱۴-۱۱}$ در تمرین های ۱۱-۱۴ معکوس تبدیل خطی ارائه شده را پیدا کنید. جزئیات محاسبات را نشان دهید

11. $y_1 = 0.5x_1 - 0.5x_2$
$y_2 = 1.5x_1 - 2.5x_2$

12. $y_1 = 3x_1 + 2x_2$
$y_2 = 4x_1 + x_2$

13. $y_1 = 5x_1 + 3x_2 - 3x_3$
$y_2 = 3x_1 + 2x_2 - 2x_3$
$y_3 = 2x_1 - x_2 + 2x_3$

14. $y_1 = 0.2x_1 - 0.1x_2$
$y_2 = -0.2x_2 + 0.1x_3$
$y_3 = 0.1x_1 + 0.1x_3$

$\boxed{۲۰-۱۵}$ نرم اقلیدسی

در تمرین های ۱۵-۲۰ نرم اقلیدسی بردار را پیدا کنید:

15. $[3 \quad 1 \quad -4]^T$
16. $[\frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad -\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{3}]^T$
17. $[1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad -1 \quad 0 \quad -1 \quad 1]^T$
18. $[-4 \quad 8 \quad -1]^T$
19. $[\frac{2}{3} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{1}{3} \quad 0]^T$
20. $[\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}]^T$

$\boxed{۲۵-۲۱}$ ضرب داخلی. تعامد

۲۱. تعامد. برای چه مقادیری از k بردارهای $[5 \quad k \quad 0 \quad \frac{1}{4}]^T$ و $[2 \quad \frac{1}{2} \quad -4 \quad 0]^T$ بر هم عمود هستند؟

۲۲. تعامد. تمام بردارهایی که در $\mathbb{R}^3$ قرار دارند و بر بردار $[2, 0, 1]$ عمود هستند را پیدا کنید. آیا مجموعه آن ها یک فضای برداری است؟

۲۳. نامساوی مثلث. صحت رابطه (۴) را برای بردارهای مسائل ۱۵ و ۱۸ تحقیق کنید.

۲۴. نامساوی کشی-شوارتز. صحت رابطه (۳) را برای بردارهای مسائل ۱۶ و ۱۹ تحقیق کنید.

۲۵. اتحاد متوازی الاضلاع (رابطه متوازی الاضلاع)
صحت رابطه (۵) را برای اولین دو بردار ستونی ماتریس ضرایب در مسأله ۱۳ تحقیق کنید.

۱۲۹

سوالات و مسائل دوره‌ای فصل ۷

۱. کدام خواص ضرب ماتریسی با خواص ضرب اعداد متفاوت است.

۲. فرض شود که A یک ماتریس 100×100 و B یک ماتریس 100×50 است. آیا عبارات زیر دارای معنا هستند؟ $A+B$، A^2، B^2، AB، BA، AA^T، B^TA، B^TB، BB^T، B^TAB. دلایل خود را ارائه دهید.

۳. آیا دستگاه‌های خطی بدون جواب وجود دارند؟ تنها با یک جواب چطور؟ با بی‌نهایت جواب چطور؟ مثال‌های ساده‌ای ارائه دهید.

۴. فرض شود که C یک ماتریس 10×10 و a یک بردار ستونی با ۱۰ مؤلفه است. آیا عبارات زیر دارای معنا هستند یا نه؟

$\mathbf{Ca}$, $\mathbf{C^Ta}$, $\mathbf{Ca^T}$, $\mathbf{aC}$, $\mathbf{a^TC}$, $\mathbf{(Ca^T)^T}$.

۵. برای تعریف ضرب ماتریس‌ها ایجاد انگیزه کنید.

۶. کاربرد ماتریس‌ها در تبدیل‌های خطی را توضیح دهید.

۷. چطور می‌توانید رتبه یک ماتریس را برحسب بردارهای سطری بیان کنید؟ برحسب بردارهای ستونی؟ برحسب دترمینان‌ها؟

۸. نقش رتبه در ارتباط با حل دستگاه‌های خطی چیست؟

۹. ایده حذف گاوسی و جایگذاری بازگشتی چیست؟

۱۰. معکوس یک ماتریس چیست؟ چه موقع وجود دارد؟ چطور آن را به دست می‌آورید؟

۱۱-۲۰ محاسبات برداری و ماتریسی

در تمرین‌های ۱۱-۲۰ با نشان دادن جزئیات محاسبات، عبارت‌های مورد سؤال را که در آن‌ها

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 1 & 4 & 2 \\ -3 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ -4 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

محاسبه کنید یا توضیح دهید که چرا نمی‌توان آن‌ها را تعریف کرد.

11. $\mathbf{AB}$, $\mathbf{BA}$ **12.** $\mathbf{A}^T$, $\mathbf{B}^T$

13. $\mathbf{Au}$, $\mathbf{u}^T\mathbf{A}$ **14.** $\mathbf{u}^T\mathbf{v}$, $\mathbf{uv}^T$

15. $\mathbf{u}^T\mathbf{Au}$, $\mathbf{v}^T\mathbf{Bv}$ **16.** $\mathbf{A}^{-1}$, $\mathbf{B}^{-1}$

17. $\det \mathbf{A}$, $\det \mathbf{A}^2$, $(\det \mathbf{A})^2$, $\det \mathbf{B}$

18. $(\mathbf{A}^2)^{-1}$, $(\mathbf{A}^{-1})^2$ **19.** $\mathbf{AB} - \mathbf{BA}$

20. $(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)(\mathbf{B} - \mathbf{B}^T)$

۲۱-۲۸ دستگاه‌های خطی

در تمرین‌های ۲۱-۲۸ با نشان دادن جزئیات دستگاه خطی را حل کنید یا توضیح دهید که چرا جواب وجود ندارد.

21.
$$\begin{aligned} 4y + z &= 0 \\ 12x - 5y - 3z &= 34 \\ -6x \quad + 4z &= 8 \end{aligned}$$

22.
$$\begin{aligned} 5x - 3y + z &= 7 \\ 2x + 3y - z &= 0 \\ 8x + 9y - 3z &= 2 \end{aligned}$$

23.
$$\begin{aligned} 9x + 3y - 6z &= 60 \\ 2x - 4y + 8z &= 4 \end{aligned}$$

24.
$$\begin{aligned} -6x + 39y - 9z &= -12 \\ 2x - 13y + 3z &= 4 \end{aligned}$$

25.
$$\begin{aligned} 0.3x - 0.7y + 1.3z &= 3.24 \\ 0.9y - 0.8z &= -2.53 \\ 0.7z &= 1.19 \end{aligned}$$

26.
$$\begin{aligned} 2x + 3y - 7z &= 3 \\ -4x - 6y + 14z &= 7 \end{aligned}$$

27.
$$\begin{aligned} x + 2y &= 6 \\ 3x + 5y &= 20 \\ -4x + y &= -42 \end{aligned}$$

28.
$$\begin{aligned} -8x + 2z &= 1 \\ 6y + 4z &= 3 \\ 12x + 2y &= 2 \end{aligned}$$

رتبه $\boxed{۲۹-۳۲}$

در تمرین های ۲۹-۳۲ رتبه های ماتریس ضرایب و ماتریس افزوده را پیدا کنید و بیان کنید که دستگاه خطی چند جواب خواهد داشت.

۲۹. دستگاه تمرین ۲۳

۳۰. دستگاه تمرین ۲۴

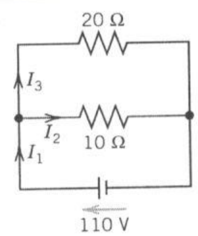
۳۱. دستگاه تمرین ۲۷

۳۲. دستگاه تمرین ۲۶

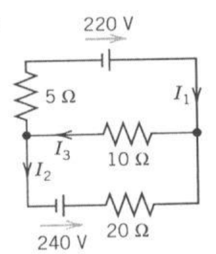
شبکه ها $\boxed{۳۳-۳۵}$

در تمرین های ۳۳ تا ۳۵ شدت جریان های درون شبکه های رسم شده را پیدا کنید.

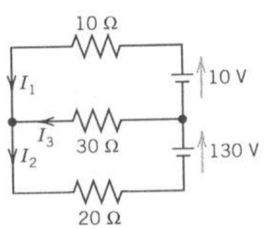
33.



34.



35.



خلاصه فصل ۷

جبر خطی: ماتریس ها، بردارها، دترمینان ها، دستگاه های خطی

یک ماتریس $n\times n$ مانند $A=[a_{jk}]$ آرایه ای است مستطیلی شکل از اعداد یا توابع («درایه‌ها»، «اعضا») که در m سطر افقی و n ستون عمودی مرتب شده اند. اگر $m=n$، ماتریس مربع نامیده می شود. ماتریس $1\times n$ بردار سطری و ماتریس $m\times 1$ بردار ستونی نامیده می شوند (بخش ۱.۷)

مجموع $A+B$ از ماتریس های هم بعد (یعنی هر دو $m\times n$ باشند) توسط جمع درایه های نظیر به دست می آید. ضرب ماتریس A در اسکالر c توسط ضرب c در هر درایه a_{jk} به دست می آید (بخش ۱.۷).

ضرب $C=AB$ از ماتریس A با بعد $m\times n$ در ماتریس $B=[b_{jl}]$ با بعد $r\times p$ تنها زمانی تعریف می شود که $r=n$، و برابر است با ماتریس $C=[c_{jl}]$ که بعد آن $m\times p$ است و درایه های آن عبارت هستند از

$$c_{jk} = a_{j1}b_{1k} + a_{j2}b_{2k} + \cdots + a_{jn}b_{nk} \qquad (1)$$

(سطر jام A ضرب در ستون kام B)

انگیزه ای که باعث ارائه این تعریف برای ضرب می شود، نتیجه ای است که از تعریف ترکیب های خطی به دست می آید (بخش های ۲.۷ و ۹.۷). این ضرب شرکت پذیر است اما جابجاپذیر نیست: اگر AB تعریف شود، ممکن است نتوان BA را تعریف کرد، اما حتی اگر BA تعریف شود، در حالت کلی $AB\neq BA$. همچنین از $AB=0$ نمی توان نتیجه گرفت که $A=0$ یا $B=0$ یا $BA=0$ (بخش های ۲.۷، ۸.۷). مثال ها:

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\ 4\end{bmatrix} = [11], \qquad \begin{bmatrix}3\\ 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & 6\\ 4 & 8\end{bmatrix}.$$

ترانهاده A^T از ماتریس $A=[a_{jk}]$ ماتریس $A^T=[a_{kj}]$ است؛ سطرها به ستون تبدیل می شوند و برعکس (بخش ۲.۷). در اینجا نیازی نیست که A مربع باشد. اگر A مربع باشد و $A=A^T$، آنگاه A متقارن و اگر $A=-A^T$، آنگاه A پادمتقارن نامیده می شود. برای ضرب $(AB)^T=B^TA^T$ (بخش ۲.۷).

کاربرد اصلی ماتریس ها مربوط به دستگاه های معادلات خطی

$$Ax = b \qquad (2)$$

(بخش ۳.۷)

است (که در آن m معادله و n مجهول $x_1, \ldots, x_n$ شرکت دارند و A و b معلوم هستند). مهمترین روش حل این دستگاه ها حذف گاوس (بخش ۳.۷) است، که دستگاه را توسط عملیات سطری مقدماتی به یک "دستگاه مثلثی" تبدیل می کند که جواب های آن با جواب های دستگاه اصلی یکی است. (جنبه های عددی و انواع آن ها، مانند روش های دولیتل و چولسکی در بخش های ۱.۲۰ و ۲.۲۰ مورد بحث قرار می گیرند.

قاعده کرامر (بخش های ۶.۷ و ۷.۷) مجهول های یک دستگاه (۲) از n معادله و n مجهول را برحسب خارج قسمت دترمینان ها بیان می کند؛ استفاده از این روش در محاسبات عددی، مگر در حالات خیلی خاص، غیرعملی است. هرچند که اهمیت دترمینان ها در محاسبات عددی کاهش یافته است (بخش ۷.۷) ولی در مسائل مقادیر ویژه، هندسه مقدماتی و غیره جایگاه اصلی خود را باز خواهد یافت.

معکوس A^{-1} از یک ماتریس مربع شرط $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ را برآورده می کند. معکوس یک ماتریس مربع تنها و تنها وقتی وجود دارد که $\det A \neq 0$. معکوس ماتریس می تواند توسط حذف گاوس-ژردان محاسبه شود (بخش ۸.۷).

رتبه r از ماتریس A ماکزیمم تعداد سطرها یا ستون های مستقل خطی ماتریس A می باشد. به طور معادل، رتبه A تعداد سطرهای بزرگترین زیر ماتریس مربع از A است که دترمینان آن ناصفر است (بخش های ۴.۷ و ۷.۷ را ببینید).

دستگاه (۲) دارای جواب است اگر و تنها اگر $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}[A \ b]$، که در آن $[A \ b]$ ماتریس افزوده مربوط به دستگاه (۲) است (قضیه اساسی، بخش ۵.۷

دستگاه همگن

$$Ax = 0 \qquad (۳)$$

دارای جواب $x \neq 0$ ("جواب نابدیهی") است اگر و تنها اگر $rank(A) < n$. در حالت $m=n$ به طور معادل دستگاه دارای جواب نابدیهی است اگر و تنها اگر $\det A = 0$ (بخش های ۶.۷ و ۷.۷)

فضاهای برداری ، فضاهای ضرب داخلی و تبدیل های خطی در بخش ۹.۷ مورد بحث قرار گرفتند . بخش ۴.۷ را نیز ببینید