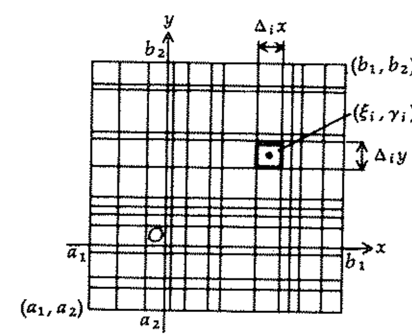
۲۰
انتگرالگیری چندگانه

۱۰۲۰ انتگرال چندگانه

انتگرال معین تابع یک متغیره را می‌توان به تابع چندمتغیره تعمیم داد. انتگرال تابع یک متغیره را برای تمایزش از ***انتگرال چندگانه***، که مستلزم یک تابع چند متغیره است، ***انتگرال منفرد*** می‌نامیم. انتگرالهای چندگانه کاربردهایی فیزیکی و هندسی دارند که با آنهایی که در فصول ۷ و ۱۱ برای انتگرالهای منفرد داده شده مشابهند.

در بحث انتگرال منفرد لازم است تابع بر بازهٔ بسته‌ای در R^1 تعریف شده باشد. در ***انتگرال مضاعف*** تابع دومتغیره باید تابع بر ناحیهٔ بسته‌ای در R^2 تعریف شده باشد. یک ناحیهٔ بسته‌ناحیه‌ای است که کرانهٔ خود را شامل است. در این فصل، وقتی می‌گوییم ناحیه، فرض کرده‌ایم بسته است. ساده‌ترین نوع ناحیهٔ بسته در R^2 مستطیل بسته است، که به تعریف آن می‌پردازیم. دو نقطهٔ متمایز $A(a_1, a_2)$ و $B(b_1, b_2)$ را درنظر می‌گیریم که $a_1 \le b_1$ و $a_2 \le b_2$. این دو نقطه یک مستطیل معین می‌کنند که اضلاعش موازی محورهای مختصات است. به شکل ۱۰۱۰۲۰ رجوع کنید. این دو نقطه همراه با نقاط (b_1, a_2) و (a_1, b_2) **رئوس** مستطیل نام دارند. پاره خطهای واصل بین رئوس متوالی ***اضلاع*** مستطیل



شکل ۱۰۱۰۲۰

نامیده می‌شوند. مجموعهٔ تمام نقاط درون مستطیل ***مستطیل باز*** نام دارد، و مجموعهٔ تمام نقاط مستطیل باز، همراه با نقاط روی اضلاع مستطیل، یک ***مستطیل بسته*** خوانده می‌شود.

فرض کنیم ناحیهٔ مستطیلی شکل بستهٔ شکل ۱۰۱۰۲۰ را با R نموده باشیم، و فرض کنیم تابع f بر R تعریف شده باشد. ناحیهٔ R را می‌توان یک ***ناحیهٔ انتگرالگیری*** گرفت. اولین قدم تعریف ***افراز*** Δ از R است. خطوطی موازی محورهای مختصات کشیده و شبکه‌ای از زیرناحیه‌های مستطیلی شکل که R را می‌پوشانند بدست می‌آوریم. **نرم** این افراز، که با $\|\Delta\|$ نموده می‌شود، به وسیلهٔ طول طویلترین قطر زیر ناحیهٔ مستطیلی شکل افراز معین می‌شود. زیر ناحیه‌ها را بدلخواه شماره داده و فرض کنیم کل شماره‌ها n باشد. پهنای زیرناحیهٔ i ام را با $\Delta_i x$ و ارتفاعش را با $\Delta_i y$ می‌نماییم. دراین صورت، اگر $\Delta_i A$ مساحت زیرناحیهٔ مستطیلی شکل i ام باشد،

$$\Delta_i A = \Delta_i x \, \Delta_i y$$

فرض کنیم (ξ_i, γ_i) نقطهٔ دلخواهی در زیر ناحیهٔ i ام بوده و $f(\xi_i, \gamma_i)$ مقدار تابع دراین نقطه باشد. حاصل ضرب $f(\xi_i, \gamma_i)\,\Delta_i A$ را درنظر می‌گیریم. به هریک از n زیر ناحیه چنین حاصل ضربی مربوط است، و مجموع آنها مساوی است با

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \gamma_i)\,\Delta_i A \qquad (1)$$

مجموعهایی به شکل (۱) بسیارند، زیرا نرم افراز می‌تواند هر عدد مثبت باشد و هر نقطهٔ (ξ_i, γ_i) می‌تواند هر نقطه در زیر ناحیهٔ i ام باشد. اگر همهٔ این مجموعها را بتوان با اختیار افرازها با نرمهای به قدر کافی کوچک بدلخواه به عددی مانند L نزدیک کرد، L را حد این مجموعها وقتی نرم افراز R به صفر نزدیک می‌شود تعریف می‌کنیم. لذا، تعریف زیر را خواهیم داشت.

۱۰۱۰۲۰ تعریف. فرض کنیم تابع f بر ناحیهٔ مستطیلی شکل بستهٔ R تعریف شده باشد. گوییم عدد L **حد** مجموعهایی به شکل $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \gamma_i)\,\Delta_i A$ است اگر L واجد این خاصیت باشد که به‌ازای هر $\epsilon > 0$، $\delta > 0$ ای باشد بطوری که به ازای هر افراز Δ که $\|\Delta\| < \delta$ و جمیع انتخابها برای نقطهٔ (ξ_i, γ_i) در مستطیل i ام، $i = 1, 2, \ldots, n$، داشته باشیم

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \gamma_i)\, \Delta_i A - L\right| < \epsilon$$

اگر این L موجود باشد، می‌نویسیم

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \gamma_i)\, \Delta_i A = L$$

هرگاه عددی مانند L صادق در تعریف ۱۰۱۰۲۰ موجود باشد، می‌توان نشان‌داد که منحصر بفرد است. برهان شبیه برهان قضیهٔ (۲۰۱۰۲) یکتایی حد تابع است.

۲۰۱۰۲۰ تعریف. تابع دومتغیرهٔ f را بر ناحیهٔ مستطیلی شکل R ***انتگرالپذیر*** نامیم اگر f بر R تعریف شده باشد و عدد L تعریف ۱۰۱۰۲۰ وجود داشته باشد. این L را ***انتگرال مضاعف*** f بر R نامیم، و می‌نویسیم

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \gamma_i)\, \Delta_i A = \iint_R f(x, y)\, dA \qquad (۲)$$

علامات دیگر انتگرال مضاعف (۲) عبارتند از

$$\iint_R f(x, y)\, dy\, dx \quad \text{و} \quad \iint_R f(x, y)\, dx\, dy$$

قضیهٔ زیر، که‌بدون‌اثبات بیان شده، شرطی کافی برای انتگرالپذیر بودن یک تابع دومتغیره بدست می‌دهد.

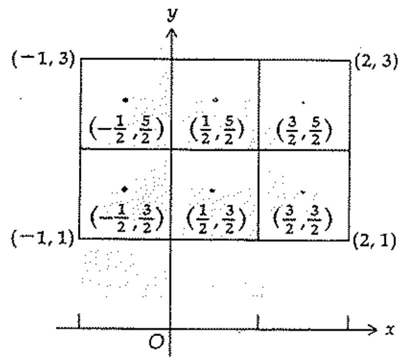
۳۰۱۰۲۰ قضیه. ***هرگاه‌تابع دومتغیره‌ای‌برناحیهٔ مستطیلی شکل بستهٔ R پیوسته‌باشد، آنگاه بر R انتگرالپذیر است.***

تقریب یک انتگرال مضاعف در مثال زیر نموده شده است.

مثال ۱. مقدار تقریبی انتگرال مضاعف $\iint_R (2x^2 - 3y)\, dA$ را درصورتی بیابید که

R ناحیه‌ای مستطیلی شکل به رئوس $(-1, 1)$ و $(2, 3)$ باشد. R را افراز تشکیل شده از خطوط $x = 0$، $x = 1$، و $y = 2$ گرفته، و (ξ_i, γ_i) را مرکز زیر ناحیهٔ i ام بگیرید.

حل. به شکل ۲۰۱۰۲۰ رجوع کنید، که ناحیهٔ R را نشان می‌دهد که به شش‌زیرناحیه



شکل ۲۰۱۰۲۰

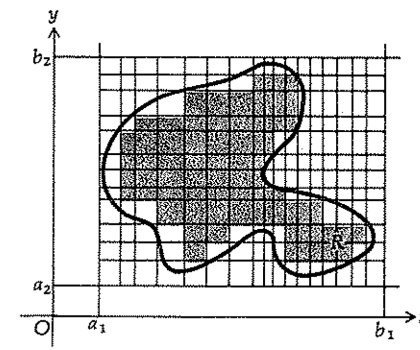
تقسیم شده که مربعهایی به ضلع واحد می‌باشند. درنتیجه، به‌ازای هر i، $\Delta_i A = 1$. درهر زیرناحیه نقطهٔ (ξ_i, γ_i) در مرکز مربع است. به‌ازای $f(x, y) = 2x^2 - 3y$، تقریبی به انتگرال مضاعف عبارت است از

$$\begin{aligned}
\iint_R (2x^2 - 3y)\, dA &\approx f(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}) \cdot 1 + f(\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}) \cdot 1 + f(\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}) \cdot 1 \\
&\quad + f(\tfrac{3}{2}, \tfrac{5}{2}) \cdot 1 + f(\tfrac{1}{2}, \tfrac{5}{2}) \cdot 1 + f(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{5}{2}) \cdot 1 \\
&= -4 \cdot 1 - 4 \cdot 1 + 0 \cdot 1 - 3 \cdot 1 - 7 \cdot 1 - 7 \cdot 1 \\
&= -25
\end{aligned}$$

همانطور که مثال ۱ از بخش ۲۰۲۰ نشان داده، مقدار دقیق انتگرال مضاعف مثال ۱ مساوی 24 ـ است.

حال انتگرال مضاعف یک تابع روی ناحیهٔ کلیتر را درنظر می‌گیریم. در تعریف ۲۰۶۰۷ تابع هموار تابعی تعریف شد که مشتق پیوسته دارد، و منحنی هموار نمودار یک تابع هموار است. فرض کنیم R یک ناحیهٔ بسته باشد که کرانه‌اش از تعدادی متناهی‌قوس از منحنیهای هموار تشکیل شده که بهم وصل شده‌اند و منحنی بسته‌ای تشکیل داده‌اند.

همانطور که با ناحیهٔ مستطیلی شکل کردیم ، خطوطی موازی محورهای مختصات می‌کشیم و یک افراز مستطیلی شکل ناحیهٔ R بدست می‌آوریم . زیر ناحیه‌هایی که شامل نقاطی غیر متعلق بـه R اند را حذف کرده و فقط آنهایی را درنظر می‌گیریم که کاملا" در R واقعند (اینها در شکل ۳۰۱۰۲۰ سایه دارند) . فرض کنیم تعداد زیر ناحیه‌های سایه‌دار n باشد و

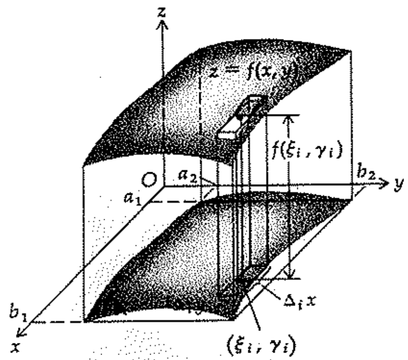


شکل ۳۰۱۰۲۰

به روشی شبیـه روش بـکار رفته برای یـک ناحیهٔ مستطیلی شکل عمل می‌کنیم . تعاریف ۱۰۱۰۲۰ و ۲۰۱۰۲۰ وقتی بـکار مـی‌روند کـه ناحیهٔ R ناحیهٔ کلیتر توصیف شده در بالاست . باید شهودا" درک کرده باشیم که وقتی نرم افراز به صفر نزدیک شود ، n بدون کران افزایش می‌یابد ، و مساحت ناحیهٔ حذف شده (یعنی ، مستطیلهای حذف شده) به صفر نزدیک می‌شود . درواقع ، می‌توان ثابت کرد که اگر تابعی بر ناحیهٔ R انتگرالپذیر باشد ، حد مجموعهای تقریب کن به شکل (۱) بی توجه به نحوهٔ تقسیم R ، تاجایی که زیرناحیه شکلی داشته باشد که بتوان به آن مساحت منتسب کرد ، یکی است .

همانطورکـه انتگرال تابع یک متغیره مساحت یک ناحیهٔ مسطح تعبیر شد ، انتگرال مضاعف را می‌توان حجم یک جسم سه‌بعدی تعبیر کرد . فرض کنیم تابع f بر ناحیهٔ بستهٔ R در R^2 پیـوسته بـاشد . بعلاوه ، برای راحتی در این بحث ، فرض کنیم $f(x, y)$ بر R نـامنفی بـاشد . همانطور که شکل ۴۰۱۰۲۰ نشان می‌دهد ، نمودار معادلهٔ $z = f(x, y)$ سطحی است که بالای صفحهٔ xy قرار دارد . این شکل یک زیر ناحیهٔ مستطیلی شکل خاص R را نشان می‌دهد به ابعاد $\Delta_i x$ و $\Delta_i y$. همچنین ، این شکل یک جسم مستطیلی شکل را نشان مـی‌دهد کـه این زیر ناحیه قاعده بوده و $f(\xi_i, \gamma_i)$ ارتفاع می‌باشد ، که (ξ_i, γ_i) نقطه‌ای در زیر ناحیهٔ i ام می‌باشد . حجم جسم مستطیلی شکل عبارت است از

$$\Delta_i V = f(\xi_i, \gamma_i)\,\Delta_i A_i = f(\xi_i, \gamma_i)\,\Delta_i x\,\Delta_i y \qquad (۳)$$



شکل ۴۰۱۰۲۰

عدد داده شـده با (۳) حجم جسم مستطیلی شکل نازک در شکل ۴۰۱۰۲۰ است ؛ لذا ، مجموع (۱) مجموع احجام n جسم از این نوع است . این مجموع حجم جسم سه بعدی در شکل ۴۰۱۰۲۰ را تقریب می‌کند . این جسم از بالا به نمودار f و از پایین به ناحیهٔ R در صفحهٔ xy کراندار است . مجموع (۱) تقریبی از انتگرال مضاعف

$$\iint_R f(x, y)\,dA$$

نیز هست . می‌توان ثابت کرد که حجم جسم سه بعدی شکل ۴۰۱۰۲۰ مقدار انتگرال مضاعف است . این امر در قضیهٔ زیر ، که برایش برهان صوری نیاورده‌ایم ، بیان شده است .

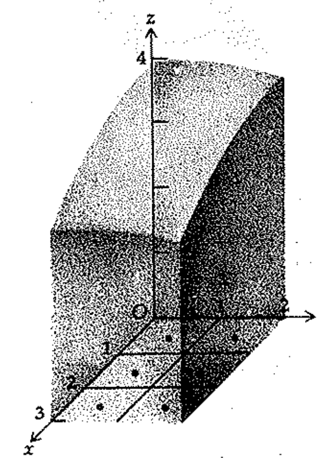
۴۰۱۰۲۰ قضیه . *فرض کنیم تابع دومتغیرهٔ f بر ناحیهٔ بستهٔ R در صفحهٔ xy پیوسته بوده و بـه‌ازای هـر (x, y) در R ، $f(x, y) \geq 0$. هرگاه $V(S)$ حجم جسم S باشد که ناحیهٔ R قاعده و ارتفاعش در نقطهٔ (x, y) در R مساوی $f(x, y)$ باشد ، آنگاه*

$$V(S) = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \gamma_i)\,\Delta_i A = \iint_R f(x, y)\,dA$$

مثال ۲ . حجم جسـم محدود به سطح $f(x, y) = 4 - \frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{16}y^2$ ، صفحات $x = 3$ و $y = 2$ ، و سه صفحهٔ مختصات را تقریب کنید . برای یافتن مقدار تقریبی انتگرال مضاعف ،

با رسم خطوط $x = 1$ ، $x = 2$ ، و $y = 1$ در صفحهٔ xy افرازی بدست می‌آوریم ، و (ξ_i, γ_i) را در مرکز زیرناحیهٔ i م می‌گیریم .

حل . جسم در شکل ۵.۱.۲۰ نموده شده است . ناحیهٔ مستطیلی شکل R مستطیلی است



شکل ۵.۱.۲۰

در صفحهٔ xy که به محورهای مختصات و خطوط $x = 3$ و $y = 2$ محدود شده است . بنابر قضیهٔ ۴.۱.۲۰ ، اگر حجم جسم V باشد ،

$$V = \iint_R \left(4 - \tfrac{1}{9}x^2 - \tfrac{1}{16}y^2\right) dA$$

شکل ۵.۱.۲۰ نشان می‌دهد که R به شش زیر ناحیه تقسیم شده که مربعهایی به طول ضلع واحد می‌باشند . بنابراین ، به‌ازای هر i ، $\Delta_i A = 1$. نقطهٔ (ξ_i, γ_i) در هر زیر ناحیه در مرکز مربع است . در این صورت ، تقریبی از انتگرال مضاعف تقریبی از V می‌باشد . بنابراین ،

$$\begin{aligned} V &\approx f(\tfrac12, \tfrac12)\cdot 1 + f(\tfrac32, \tfrac12)\cdot 1 + f(\tfrac52, \tfrac12)\cdot 1 + f(\tfrac12, \tfrac32)\cdot 1 + f(\tfrac32, \tfrac32)\cdot 1 + f(\tfrac52, \tfrac32)\cdot 1 \\ &= (4 - \tfrac{25}{576}) + (4 - \tfrac{17}{64}) + (4 - \tfrac{409}{576}) + (4 - \tfrac{97}{576}) + (4 - \tfrac{25}{64}) + (4 - \tfrac{481}{576}) \\ &= 24 - \tfrac{695}{288} \\ &\approx 21.59 \end{aligned}$$

لذا ، حجم تقریباً 21.59 واحد مکعب است .

در مثال ۲ از بخش ۲.۲۰ نشان داده شده که مقدار دقیق حجم در مثال ۲ مساوی 21.5 واحد مربع است .

چند خاصیت انتگرال مضاعف شبیه خواص انتگرال معین تابع یک متغیره است ، و مهمترین آنها در قضایای زیر آمده‌اند .

۵.۱.۲۰ قضیه . ***هرگاه c ثابت بوده و تابع f بر ناحیهٔ بستهٔ R انتگرالپذیر باشد ، آنگاه cf بر R انتگرالپذیر است و***

$$\iint_R cf(x, y)\, dA = c \iint_R f(x, y)\, dA$$

۶.۱.۲۰ قضیه . ***هرگاه توابع f و g بر ناحیهٔ بستهٔ R انتگرالپذیر باشند ، آنگاه تابع $f + g$ بر R انتگرالپذیر بوده و***

$$\iint_R [f(x, y) + g(x, y)]\, dA = \iint_R f(x, y)\, dA + \iint_R g(x, y)\, dA$$

قضیهٔ ۶.۱.۲۰ را می‌توان به‌هر تعداد متناهی تابع انتگرالپذیر تعمیم داد . اثبات قضایای ۵.۱.۲۰ و ۶.۱.۲۰ مستقیماً از تعریف انتگرال مضاعف بدست می‌آید . این‌کار را به‌عنوان تمرین می‌گذاریم (ر.ک. تمرینهای ۲۳ و ۲۴) .

۷.۱.۲۰ قضیه . ***هرگاه توابع f و g بر ناحیهٔ بستهٔ R انتگرالپذیر بوده و به‌ازای هر (x, y) در R ، $f(x, y) \geq g(x, y)$ ، آنگاه***

$$\iint_R f(x, y)\, dA \geq \iint_R g(x, y)\, dA$$

قضیهٔ ۷.۱.۲۰ شبیه قضیهٔ ۸.۳.۶ برای انتگرال معین تابع یک متغیره است . اثبات مشابه است و به‌عنوان تمرین گذارده می‌شود (ر.ک. تمرین ۲۵) .

۸.۱.۲۰ قضیه . ***فرض کنیم تابع f بر ناحیهٔ بستهٔ R انتگرالپذیر بوده ، و m و M***

دو عدد باشند بطوری که بهازای هر (x, y) در R ، $m \le f(x, y) \le M$. دراین صورت ، اگر A مساحت ناحیهٔ R باشد ،

$$mA \le \iint_R f(x, y)\, dA \le MA$$

اثبات قضیهٔ ۸.۱.۲۰ را بهعنوان تمرین میگذاریم (ر.ک. تمرین ۲۶) . اثبات مشابه اثبات قضیهٔ ۹.۳.۶ است و مبتنی بر قضیهٔ ۷.۱.۲۰ میباشد .

۹.۱.۲۰ قضیه. *فرضکنیم تابع f بر ناحیهٔ بستهٔ R پیوسته بوده و ناحیهٔ R از دو زیرناحیهٔ R_1 و R_2 بدون نقطهٔ مشترک جز نقاط بر قسمتهایی از کرانههایشان تشکیل شده باشد . دراین صورت ،*

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \iint_{R_1} f(x, y)\, dA + \iint_{R_2} f(x, y)\, dA$$

اثبات قضیهٔ ۹.۱.۲۰ را نیز بهعنوان تمرین میگذاریم و این اثبات به تعریف انتگرال مضاعف و قضایای حدی بستگی دارد (ر.ک. تمرین ۲۷) .

تمرینات ۱.۲۰

۱ . مقدار تقریبی انتگرال مضاعف $\iint_R (3x - 2y + 1)\, dA$ را درصورتی بیابیدکه R ناحیهٔ مستطیلی شکل به رئوس $(-2, 0)$ و $(3, 0)$ باشد . افراز R را متشکل از خطوط $x = 1$ ، $x = 2$ ، و $y = -1$ گرفته ، و (ξ_i, γ_i) را مرکز زیر ناحیهٔ i ام بگیرید .

۲ . مقدار تقریبی انتگرال مضاعف $\iint_R (y^2 - 4x)\, dA$ را درصورتی بیابید که R ناحیهٔ مستطیلیشکل بهرئوس $(-1, 0)$ و $(1, 3)$ باشد . ناحیهٔ R رامتشکل از خطوط $x = 0$ ، $y = 1$ ، و $y = 2$ گرفته ، و (ξ_i, γ_i) را مرکز زیر ناحیهٔ i ام بگیرید .

در تمرینهای ۳ تا ۸ ، مقدار تقریبی انتگرال مضاعف داده شده را درصورتی حساب کنید که ناحیهٔ مستطیلی شکل به راسهای P و Q بوده ، Δ یک افراز R باشد ، و (ξ_i, γ_i) نقطهٔ میانی هر زیر ناحیه باشد .

۳ . $\iint_R (x^2 + y)\, dA$; $P(0, 0)$; $Q(4, 2)$; Δ: $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2, x_4 = 3, y_1 = 0, y_2 = 1$

۴ . $\iint_R (2 - x - y)\, dA$; $P(0, 0)$; $Q(6, 4)$; Δ: $x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 4, y_1 = 0, y_2 = 2$

۵ . $\iint_R (xy + 3y^2)\, dA$; $P(-2, 0)$; $Q(4, 6)$; Δ: $x_1 = -2, x_2 = 0, x_3 = 2, y_1 = 0, y_2 = 2,$ $y_3 = 4$

۶ . $\iint_R (xy + 3y^2)\, dA$; $P(0, -2)$; $Q(6, 4)$; Δ: $x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 4, y_1 = -2, y_2 = 0,$ $y_3 = 2$

۷ . $\iint_R (x^2y - 2xy^2)\, dA$; $P(-3, -2)$; $Q(1, 6)$; Δ: $x_1 = -3, x_2 = -1, y_1 = -2, y_2 = 0,$ $y_3 = 2, y_4 = 4$

۸ . $\iint_R (x^2y - 2xy^2)\, dA$; $P(-3, -2)$; $Q(1, 6)$; Δ: $x_1 = -3, x_2 = -2, x_3 = -1,$ $x_4 = 0, y_1 = -2, y_2 = -1, y_3 = 0, y_4 = 1, y_5 = 2, y_6 = 3, y_7 = 4, y_8 = 5$

در تمرینهای ۹ تا ۱۲ ، مقدار تقریبی انتگرال مضاعف داده شده را درصورتی بیابید که R ناحیهٔ مستطیلی شکل به راسهای P و Q بوده ، Δ افرازی از R باشد ، و (ξ_i, γ_i) نقطهٔ دلخواهی در هر زیر ناحیه باشد .

۹ . انتگرال مضاعف ، P ، Q ، و Δ همانهای بوده درتمرین ۳ هستند؛ $(\xi_1, \gamma_1) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ ؛ $(\xi_2, \gamma_2) = (\frac{7}{4}, 0)$ ؛ $(\xi_3, \gamma_3) = (\frac{5}{2}, \frac{1}{4})$ ؛ $(\xi_4, \gamma_4) = (4, 1)$ ؛ $(\xi_5, \gamma_5) = (\frac{3}{4}, \frac{7}{4})$ ؛ $(\xi_6, \gamma_6) = (\frac{5}{4}, \frac{3}{2})$ ، $(\xi_7, \gamma_7) = (\frac{5}{2}, 2)$ ؛ $(\xi_8, \gamma_8) = (3, 1)$.

۱۰ . انتگرال مضاعف ، P ، Q ، و Δ همانهای بوده درتمرین ۴ هستند؛ $(\xi_1, \gamma_1) = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ ؛ $(\xi_2, \gamma_2) = (3, 1)$ ؛ $(\xi_3, \gamma_3) = (\frac{11}{2}, \frac{1}{2})$ ؛ $(\xi_4, \gamma_4) = (2, 2)$ ؛ $(\xi_5, \gamma_5) = (2, 2)$ ؛ $(\xi_6, \gamma_6) = (5, 3)$.

۱۱ . انتگرال مضاعف ، P ، Q ، و Δ همانهای بوده درتمرین ۵ هستند؛ $(\xi_1, \gamma_1) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ؛ $(\xi_2, \gamma_2) = (1, \frac{3}{2})$ ؛ $(\xi_3, \gamma_3) = (\frac{3}{2}, 2)$ ؛ $(\xi_4, \gamma_4) = (-\frac{3}{2}, \frac{7}{2})$ ؛ $(\xi_5, \gamma_5) = (0, 3)$ ؛ $(\xi_6, \gamma_6) = (4, 4)$ ؛ $(\xi_7, \gamma_7) = (-1, \frac{9}{2})$ ؛ $(\xi_8, \gamma_8) = (1, \frac{9}{2})$ ؛ $(\xi_9, \gamma_9) = (3, \frac{9}{2})$.

۱۲ . انتگرال مضاعف ، P ، Q ، و Δ همانهای بوده درتمرین ۵ هستند؛ $(\xi_1, \gamma_1) = (-2, 0)$ ؛ $(\xi_2, \gamma_2) = (0, 0)$ ؛ $(\xi_3, \gamma_3) = (2, 0)$ ؛ $(\xi_4, \gamma_4) = (-2, 2)$ ؛ $(\xi_5, \gamma_5) = (0, 2)$ ؛

$(\xi_6, \gamma_6) = (2, 2)$ ؛ $(\xi_7, \gamma_7) = (-2, 4)$ ؛ $(\xi_8, \gamma_8) = (0, 4)$ ؛ $(\xi_9, \gamma_9) = (2, 4)$.

۱۳ . حجم جسم در یکهشتم اول محدود به کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = 64$ ، صفحات $x = 3$ ، $y = 3$ ، و سه صفحهٔ مختصات را تقریب کنید . برای یافتن مقدار تقریبی انتگرال مضاعف ، افراز ناحیه در صفحهٔ xy را متشکل از خطوط $x = 1$ ، $x = 2$ ، $y = 1$ ، و $y = 2$ گرفته ، و (ξ_i, γ_i) را مرکز زیر ناحیهٔ i م بگیرید .

۱۴ . حجم جسم محدود به صفحات $z = 2x + y + 4$ ، $x = 2$ ، $y = 3$ ، و سه صفحهٔ مختصات را تقریب کنید . برای یافتن مقدار تقریبی انتگرال مضاعف ، افراز ناحیه در صفحهٔ xy را متشکل از خطوط $x = 1$ ، $y = 1$ ، و $y = 2$ گرفته ، و (ξ_i, γ_i) را مرکز زیرناحیهٔ i م بگیرید .

۱۵ . حجم جسم محدود به سطح $z = 10 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{16}y^2$ ، صفحات $x = 2, y = 2$ ، و سه صفحهٔ مختصات را تقریب کنید . برای یافتن مقدار تقریبی انتگرال مضاعف ، افراز ناحیه در صفحهٔ xy را متشکل از خطوط $x = 1$ و $y = 1$ گرفته ، و (ξ_i, γ_i) را مرکز زیرناحیهٔ i م بگیرید .

۱۶ . حجم جسم محدود به سطح $100z = 300 - 25x^2 - 4y^2$ ، صفحات $x = -1, x = 3, y = -3, y = 5$ ، وصفحهٔ xy را تقریب کنید . برای یافتن مقدار تقریبی انتگرال مضاعف ، افراز ناحیه در صفحهٔ xy را متشکل از خطوط $x = 1$ ، $y = -1$ ، $y = 1$ ، و $y = 3$ گرفته ، و (ξ_i, γ_i) را مرکز زیرناحیهٔ i م بگیرید .

در تمرینهای ۱۷ تا ۲۲ ، با اعمال قضیهٔ ۸.۱.۲۰ بازهٔ بسته‌ای شامل مقدار انتگرال مضاعف داده شده بیابید .

۱۷ . $\iint_R (2x + 5y)\, dA$ که در آن R ناحیهٔ مستطیلی شکل به راسهای $(0, 0)$ ، $(1, 0)$ ، $(1, 2)$ ، و $(0, 2)$ است .

۱۸ . $\iint_R (x^2 + y^2)\, dA$ که در آن R ناحیهٔ مستطیلی شکل به راسهای $(0, 0)$ ، $(1, 0)$ ، $(1, 1)$ ، و $(0, 1)$ است .

۱۹ . $\iint_R e^{xy}\, dA$ که درآن R ناحیهٔ مستطیلی شکل به راسهای $(0, 0)$ ، $(1, 0)$ ، $(1, 1)$ ، و $(0, 1)$ است .

۲۰ . $\iint_R (\sin x + \sin y)\, dA$ که‌درآن R ناحیهٔ مستطیلی شکل به رئوس $(0, 0)$ ، $(\pi, 0)$ ، (π, π) ، و $(0, \pi)$ است .

(**راهنمایی .** از تمرین ۱۰ در تمرینات ۳.۱۹ استفاده کنید .)

۲۱ . $\iint_R [\sin(x + y) + \sin x + \sin y]\, dA$ که درآن R ناحیهٔ مستطیلی شکل به راسهای $(0, 0)$ ؛ $(\pi, 0)$ ، (π, π) ، و $(0, \pi)$ است .

(**راهنمایی .** از تمرین ۱۱ در تمرینات ۳.۱۹ استفاده کنید .)

۲۲ . $\iint_R \frac{2x + 2y + 1}{x^2 + y^2 + 1} dA$ که در آن R ناحیهٔ مستطیلی شکل به راسهای $(-1, -1)$ ، $(1, -1)$ ، $(1, 1)$ ، و $(-1, 1)$ است .

(**راهنمایی .** از تمرین ۸ در تمرینات ۳.۱۹ استفاده کنید .)

۲۳ . قضیهٔ ۵.۱.۲۰ را ثابت کنید .

۲۴ . قضیهٔ ۶.۱.۲۰ را ثابت کنید .

۲۵ . قضیهٔ ۷.۱.۲۰ را ثابت کنید .

۲۶ . قضیهٔ ۸.۱.۲۰ را ثابت کنید .

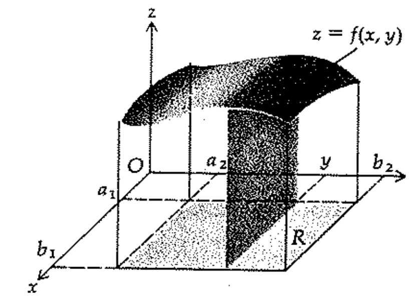
۲۷ . قضیهٔ ۹.۱.۲۰ را ثابت کنید .

۲.۲۰ محاسبهٔ انتگرالهای مضاعف و انتگرالهای مکرر

برای توابع یک متغیره ، قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال روشی برای محاسبهٔ انتگرال معین با یافتن یک پادمشتق (یا انتگرال نامعین) انتگرالده بدست می‌دهد . روش متناظری برای محاسبهٔ انتگرال مضاعف وجود دارد که مستلزم انتگرالگیری منفرد پیاپی است . بحث دقیق این روش متعلق به حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته است . بحث ما شهودی است ، و از تعبیر هندسی انتگرال مضاعف به‌عنوان حجم استفاده می‌کنیم . ابتدا روشی برای انتگرال مضاعف بریک ناحیهٔ مستطیلی شکل ارائه می‌دهیم .

فرض کنیم تابع f بر ناحیهٔ مستطیلی شکل بستهٔ R در صفحهٔ xy و محدود به خطوط $x = a_1$ ، $x = b_1$ ، $y = a_2$ ، و $y = b_2$ انتگرالپذیر باشد . همچنین ، بهازای هر (x, y) در R ، $f(x, y) \geq 0$. به شکل ۱.۲.۲۰ رجوع کنید ، که نمودار معادلهٔ $z = f(x, y)$ را وقتی (x, y) در R است را نشان‌می‌دهد . عددی که مقدار انتگرال مضاعف

$$\iint_R f(x, y)\, dA$$



شکل ۱۰۲۰۲۰

را نمایش می‌دهد حجم جسم بین سطح و ناحیهٔ R است. این عدد را می‌توان به روش مقاطع مسطح موازی ،که دربخش ۴۰۷ مطرح شد، به صورتی که اینک انجام می‌دهیم بدست آورد.

فرض کنیم y عددی در $[a_2, b_2]$ باشد. صفحهٔ موازی صفحهٔ xz ماربر نقطهٔ $(0, y, 0)$ را درنظر می‌گیریم. فرض کنیم $A(y)$ مساحت ناحیهٔ مسطح مقطع این صفحه با جسم باشد. بنا بر روش مقاطع مسطح موازی، حجم جسم با

$$\int_{a_2}^{b_2} A(y)\,dy$$

بیان می‌شود. چون حجم جسم نیز با انتگرال مضاعف معین می‌شود،

$$\iint_R f(x, y)\,dA = \int_{a_2}^{b_2} A(y)\,dy \qquad (۱)$$

با استفاده از (۱) می‌توان مقدار انتگرال مضاعف تابع f بر R را با محاسبهٔ انتگرال منفرد $A(y)$ یافت. حال باید $A(y)$ را وقتی y داده شده بیابیم. چون $A(y)$ مساحت یک ناحیهٔ مسطح است، می‌توان آن را با انتگرالگیری بدست آورد. در شکل ۱۰۲۰۲۰ می‌بینیم که کرانهٔ بالایی ناحیهٔ مسطح نمودار معادلهٔ $z = f(x, y)$ وقتی x در $[a_1, b_1]$ است می‌باشد. بنابراین، $A(y) = \int_{a_1}^{b_1} f(x, y)\,dx$. با گذاردن این معادله در (۱)، بدست می‌آوریم

$$\iint_R f(x, y)\,dA = \int_{a_2}^{b_2} \left[\int_{a_1}^{b_1} f(x, y)\,dx \right] dy \qquad (۲)$$

انتگرال سمت راست (۲) ***انتگرال مکرر*** نام دارد. معمولاً" در نوشتن انتگرال مکرر کروشه حذف می‌شود. درنتیجه، رابطهٔ (۲) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\iint_R f(x, y)\,dA = \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} f(x, y)\,dx\,dy \qquad (۳)$$

در محاسبهٔ "انتگرال داخلی" در (۳) به یاد داشته باشید که x متغیر انتگرالگیری‌است و y ثابت گرفته می‌شود. این را می‌توان مقایسه کرد با وقتی که در یافتن مشتق جزئی $f(x, y)$ نسبت به x ، y را ثابت می‌گیریم.

با توجه به مقاطع مسطح موازی صفحهٔ yz ، انتگرال مکرری بدست می‌آید که درآن ترتیب انتگرالگیری عوض شده است؛ داریم

$$\iint_R f(x, y)\,dA = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} f(x, y)\,dy\,dx \qquad (۴)$$

شرط‌کافی برای معتبر بودن (۳) و (۴) این است که تابع باید بر ناحیهٔ مستطیلی شکل R پیوسته باشد.

مثال ۱. انتگرال مضاعف $\iint_R (2x^2 - 3y)\,dA$ را درصورتی حساب کنید که R ناحیهٔ مرکب از جمیع نقاط (x, y) که $-1 \le x \le 2$ و $1 \le y \le 3$ باشد.

حل. $a_1 = -1$ ، $b_1 = 2$ ، $a_2 = 1$ ، و $b_2 = 3$. درنتیجه، از (۳) داریم

$$\begin{aligned}
\iint_R (2x^2 - 3y)\,dA &= \int_1^3 \int_{-1}^2 (2x^2 - 3y)\,dx\,dy \\
&= \int_1^3 \left[\int_{-1}^2 (2x^2 - 3y)\,dx \right] dy \\
&= \int_1^3 \left[\tfrac{2}{3}x^3 - 3xy \right]_{-1}^2 dy \\
&= \int_1^3 (6 - 9y)\,dy \\
&= -24
\end{aligned}$$

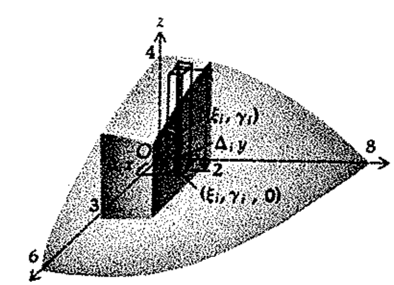
در مثـال ۱ از بخش ۱۰۲۰ دیدیم که مقدار تقریبی انتگرال مضاعف در مثال فوق مساوی 25– است.

مثال ۲. حجم جسم محدود به سطح $f(x, y) = 4 - \frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{16}y^2$ ، صفحـات $x = 3$ و $y = 2$ ، و سه صفحهٔ مختصات را بیابید.

حل. شکل ۲۰۲۰ نمـودار معادلهٔ $z = f(x, y)$ در یکهشتم اول و جسم داده شده را نشان می‌دهد. هرگاه حجم جسم V باشد، آنگاه از قضیهٔ ۴۰۱۰۲۰ داریم

$$
\begin{aligned}
V &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \gamma_i)\, \Delta_i A \\
&= \iint_R f(x, y)\, dA \\
&= \int_0^3 \int_0^2 \left(4 - \tfrac{1}{9}x^2 - \tfrac{1}{16}y^2\right) dy\, dx \\
&= \int_0^3 \left[4y - \tfrac{1}{9}x^2 y - \tfrac{1}{48}y^3\right]_0^2 dx \\
&= \int_0^3 \left(\tfrac{47}{6} - \tfrac{2}{9}x^2\right) dx \\
&= \tfrac{47}{6}x - \tfrac{2}{27}x^3 \Big]_0^3 \\
&= 21.5
\end{aligned}
$$

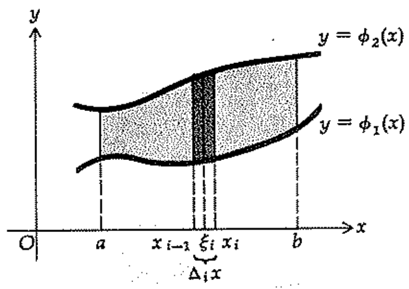
بنابراین، حجم 21.5 واحد مکعب است.



شکل ۲۰۲۰

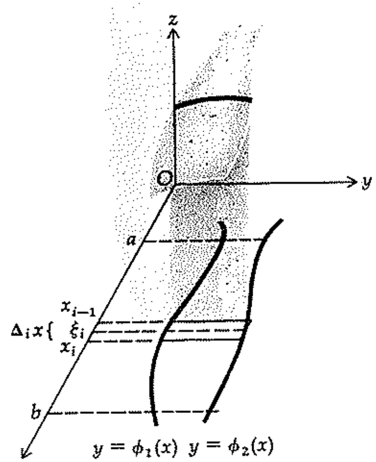
در مثال ۲ از بخش ۱۰۲۰ دیدیم که حجم مثال ۲ مساوی 21.59 واحد مکعب است.

حال فرض کنیم R ناحیه‌ای در صفحهٔ xy باشد که به خطوط $x = a$ و $x = b$ ، که $a < b$ ، و منحنیهای $y = \phi_1(x)$ و $y = \phi_2(x)$ که ϕ_1 و ϕ_2 دو تابع پیوسته بر بازهٔ بستهٔ $[a, b]$ محدود شده است؛ بعلاوه، هر وقت $a \le x \le b$ ، $\phi_1(x) \le \phi_2(x)$ (ر.ک. شکل ۳۰۲۰). فرض کنیم Δ افرازی از بازهٔ $[a, b]$ باشد که با $\Delta: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$



شکل ۳۰۲۰

تعریف شده است. ناحیهٔ R شکل ۳۰۲۰ را به نوارهای قائم به پهنای $\Delta_i x$ تقسیم می‌کنیم. در شکل یک نوار خاص نموده شده است. اشتراک سطح $z = f(x, y)$ و صفحهٔ $x = \xi_i$ ، که $x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$ ، یک منحنی است. قطعه‌ای از این منحنی روی نوار قائم i ام است. ناحیهٔ زیر این قطعه منحنی و بالای صفحهٔ xy در شکل ۴۰۲۰ نموده‌شده



شکل ۴۰۲۰

است، و مساحت این ناحیه عبارت است از

$$\int_{\phi_1(\xi_i)}^{\phi_2(\xi_i)} f(\xi_i, y)\, dy$$

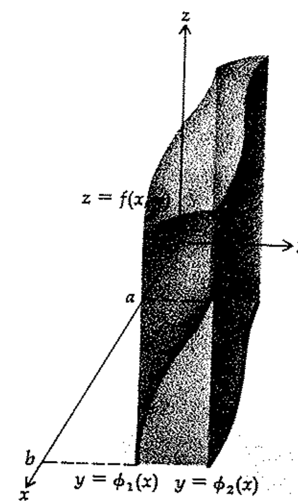
حجم جسم از بالا محدود به سطح $z = f(x, y)$ و زیر نوار قائم i م تقریباً" مساوی است با

$$\left[\int_{\phi_1(\xi_i)}^{\phi_2(\xi_i)} f(\xi_i, y)\, dy\right]\Delta_i x$$

اگر وقتی نـرم Δ به صفر نـزدیک می‌شود از مجموع احجام n نوار قائم R از $x = a$ تا $x = b$ حد بگیریم، حجم جسم از بالا محدود به سطح $z = f(x, y)$ و از پایین محدود به ناحیهٔ R درصفحهٔ xy بدست می‌آید. (ر.ک. شکل ۵.۲.۲۰) این انتگرال مضاعف f بر R است؛ یعنی،

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left[\int_{\phi_1(\xi_i)}^{\phi_2(\xi_i)} f(\xi_i, y)\, dy\right]\Delta_i x = \int_a^b\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx \qquad (۵)$$

$$= \iint_R f(x, y)\, dy\, dx$$



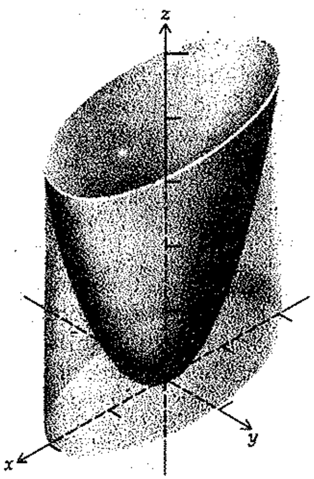
شکل ۵.۲.۲۰

شرایط کافـی برای معتبر بودن (۵) پیوستگی f بر ناحیهٔ بستهٔ R و هموار بودن توابع

ϕ_1 و ϕ_2 می‌باشند.

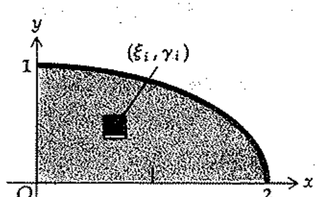
مثال ۳. حجم جسم بالای صفحهٔ xy و محدود به سهمی‌گون بیضوی $z = x^2 + 4y^2$ و استـوانهٔ $x^2 + 4y^2 = 4$ را بـه‌صورت انتگرال مضاعف و انتگرال مکرر بیان نمایید. با محاسبهٔ انتگرال مکرر، حجم جسم را پیدا کنید.

حل. جسم در شکل ۶.۲.۲۰ نموده شده است. حجم بخشی از جسم در یکهشتم اول،



شکل ۶.۲.۲۰

که برطبق خواص تقارن یکچهارم حجم مطلوب است، را پیدا می‌کنیم. ناحیهٔ R درصفحهٔ xy ناحیه‌ای است محـدود به محورهای x و y و بیضی $x^2 + 4y^2 = 4$. این ناحیه در شکل ۷.۲.۲۰ نموده شده است، که در آن زیرناحیهٔ i م یک افراز مستطیلی شکل R،



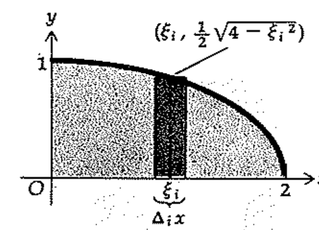
شکل ۷.۲.۲۰

که (ξ_i, γ_i) نقطه‌ای در این زیر ناحیهٔ i م است، را نیز نشان می‌دهد. هرگاه حجم جسم V باشد، آنگاه، طبق قضیهٔ ۴۰۱۰۲۰،

$$V = 4 \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} (\xi_i^2 + 4\gamma_i^2)\, \Delta_i A$$

$$= 4 \iint_R (x^2 + 4y^2)\, dA$$

برای بیان حجم به صورت انتگرال مکرر، ناحیهٔ R را به n نوار قائم تقسیم می‌کنیم. شکل ۸۰۲۰۲۰ ناحیهٔ R و نوار قائم i م به عرض $\Delta_i x$ و طول $\frac{1}{2}\sqrt{4 - \xi_i^2}$، که



شکل ۸۰۲۰۲۰

$x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$، را نشان می‌دهد. از (۵) داریم

$$V = 4 \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \left[\int_0^{\sqrt{4-\xi_i^2}/2} (\xi_i^2 + 4y^2)\, dy \right] \Delta_i x$$

$$= 4 \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}/2} (x^2 + 4y^2)\, dy\, dx$$

$$= 4 \int_0^2 \left[x^2 y + \tfrac{4}{3} y^3 \right]_0^{\sqrt{4-x^2}/2} dx$$

$$= 4 \int_0^2 [\tfrac{1}{2} x^2 \sqrt{4 - x^2} + \tfrac{1}{6}(4 - x^2)^{3/2}] dx$$

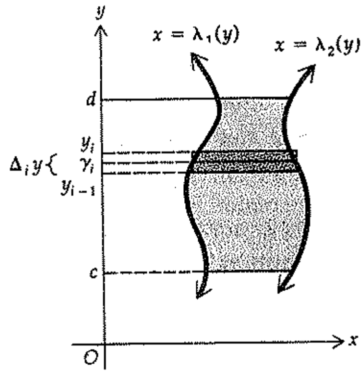
$$= \frac{4}{3} \int_0^2 (x^2 + 2)\sqrt{4 - x^2}\, dx$$

$$= -\tfrac{1}{3} x (4 - x^2)^{3/2} + 2x\sqrt{4 - x^2} + 8 \sin^{-1} \tfrac{1}{2} x \Big]_0^2$$

$$= 4\pi$$

بنابراین، حجم 4π واحد مکعب است.

فرض کنیم ناحیهٔ R محدود به منحنیهای $x = \lambda_1(y)$ و $x = \lambda_2(y)$ و خطوط $y = c$ و $y = d$، که $c < d$، بوده، و λ_1 و λ_2 دو تابع پیوسته بر بازهٔ بستهٔ $[c, d]$ باشند که وقتی $c \le y \le d$، $\lambda_1(y) \le \lambda_2(y)$. افراز Δ از بازهٔ $[c, d]$ را درنظر گرفته وناحیه‌را به نوارهای افقی تقسیم می‌کنیم که عرضهایشان $\Delta_i y$ باشند. ر.ک. شکل ۹۰۲۰۲۰،



شکل ۹۰۲۰۲۰

که نوار افقی i م را نشان می‌دهد. اشتراک سطح $z = f(x, y)$ و صفحهٔ $y = \gamma_i$، که $y_{i-1} \le \gamma_i \le y_i$، یک منحنی است، و بخشی از این منحنی روی نوارافقی i م است. در این صورت، همانند در اثبات (۵)، حجم جسم از بالا محدود به سطح $z = f(x, y)$ و از پایین محدود به نوار قائم i م تقریبا" مساوی است با

$$\left[\int_{\lambda_1(\gamma_i)}^{\lambda_2(\gamma_i)} f(x, \gamma_i)\, dx \right] \Delta_i y$$

با گرفتن حداز مجموع احجام n نوار افقی R از $y = c$ تا $y = d$، وقتی $\|\Delta\|$ به صفر نزدیک می‌شود، حجم جسم از بالا محدود به سطح $z = f(x, y)$ و از پایین به ناحیهٔ R در صفحهٔ xy بدست می‌آید. این حجم انتگرال مضاعف f بر R است. از اینرو،

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \left[\int_{\lambda_1(\gamma_i)}^{\lambda_2(\gamma_i)} f(x, \gamma_i)\, dx \right] \Delta_i y = \int_c^d \int_{\lambda_1(y)}^{\lambda_2(y)} f(x, y)\, dx\, dy \qquad (۶)$$

$$= \iint_R f(x, y)\, dx\, dy$$

شرایط کافی برای برقراری (۶) هموار بودن توابع λ_1 و λ_2 و پیوستگی f بر R اند. گاهی

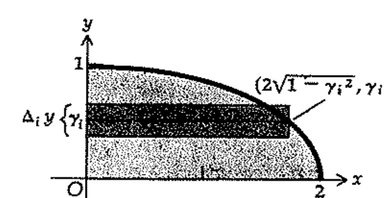
در بکاربردن هر دوی (۵) و (۶) ممکن است لازم باشد که ناحیهٔ R به زیرناحیه‌هایی تقسیم شود که این شرایط کافی بر آنها برقرار باشند.

مثال ۴. حجم جسم مثال ۳ را باانتگرال مکرری بیان کنید که در آن ترتیب انتگرالگیری عکس ترتیب در مثال ۳ باشد. حجم را محاسبه نمایید.

حل. مجدداً، حجم جسم در یکهشتم اول را یافته و نتیجه را در 4 ضرب می‌کنیم. شکل ۱۰۰۲۰۲۰ناحیهٔ R درصفحهٔ xy ونوارافقی i م به عرض $\Delta_i y$ و طول $2\sqrt{1-\gamma_i^2}$ را نشان می‌دهد. دراین صورت، بنابر (۶)،

$$
\begin{aligned}
V &= 4 \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \left[\int_0^{2\sqrt{1-\gamma_i^2}} (x^2 + 4\gamma_i^2)\, dx \right] \Delta_i y \\
&= 4 \int_0^1 \int_0^{2\sqrt{1-y^2}} (x^2 + 4y^2)\, dx\, dy \\
&= 4 \int_0^1 \left[\tfrac{1}{3}x^3 + 4y^2 x \right]_0^{2\sqrt{1-y^2}} dy \\
&= 4 \int_0^1 \left[\tfrac{8}{3}(1-y^2)^{3/2} + 8y^2\sqrt{1-y^2} \right] dy \\
&= \frac{32}{3} \int_0^1 (2y^2+1)\sqrt{1-y^2}\, dy \\
&= -\tfrac{16}{3} y(1-y^2)^{3/2} + 8y\sqrt{1-y^2} + 8\sin^{-1} y \Big]_0^1 \\
&= 4\pi
\end{aligned}
$$

از اینرو، حجم مساوی 4π است، که با جواب مثال ۳ یکی است.



شکل ۱۰۰۲۰۲۰

از حل مثالهای ۳ و ۴ معلوم می‌شود که انتگرال مضاعف $\iint_R (x^2 + 4y^2)\, dA$ را

می‌توان با یکی از انتگرالهای مکرر

$$
\int_0^1 \int_0^{2\sqrt{1-y^2}} (x^2 + 4y^2)\, dx\, dy \quad \text{یا} \quad \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}/2} (x^2 + 4y^2)\, dy\, dx
$$

حساب کرد.

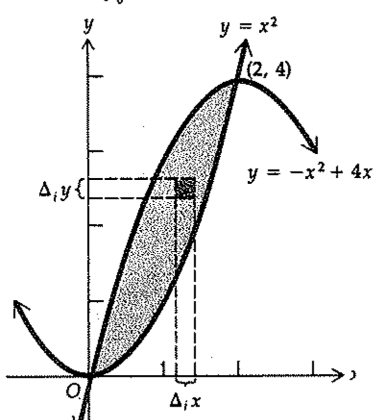
هرگاه در (۵) یا (۶) بهازای هر x و y، $f(x, y) = 1$، آنگاه A مساحت ناحیهٔ R به‌صورت انتگرال مضاعف بیان می‌شود. داریم

$$
A = \iint_R dy\, dx = \iint_R dx\, dy \tag{۷}
$$

مثال ۵. مساحت ناحیه در صفحهٔ xy محدود به منحنیهای $y = x^2$ و $y = 4x - x^2$ را با انتگرالگیری مضاعف بیابید.

حل. ناحیه در شکل ۱۱۰۲۰۲۰ نموده شده است. از (۷) داریم

$$
\begin{aligned}
A &= \iint_R dy\, dx \\
&= \int_0^2 \int_{x^2}^{4x-x^2} dy\, dx \\
&= \int_0^2 (4x - x^2 - x^2)\, dx
\end{aligned}
$$



شکل ۱۱۰۲۰۲۰

$$= 2x^2 - \tfrac{2}{3}x^3\Big]_0^2$$

$$= \tfrac{8}{3}$$

از اینرو، مساحت ناحیه $\frac{8}{3}$ واحد مربع است.

تمرینات ۲۰۲۰

در تمرینهای ۱ تا ۱۰، انتگرال مکرر را حساب کنید.

۱. $\int_1^2\int_0^{2x} xy^3\,dy\,dx$

۲. $\int_0^4\int_0^y dx\,dy$

۳. $\int_0^4\int_0^y \sqrt{9+y^2}\,dx\,dy$

۴. $\int_{-1}^1\int_1^{e^x} \frac{x}{y}\,dy\,dx$

۵. $\int_1^4\int_{y^2}^y \sqrt{\frac{y}{x}}\,dx\,dy$

۶. $\int_1^4\int_{x^2}^x \sqrt{\frac{y}{x}}\,dy\,dx$

۷. $\int_0^1\int_0^1 |x-y|\,dy\,dx$

۸. $\int_0^3\int_0^x x^2 e^{xy}\,dy\,dx$

۹. $\int_{\pi/2}^\pi\int_0^x \sin(4x-y)\,dy\,dx$

۱۰. $\int_{\pi/2}^\pi\int_0^{y^2} \sin\frac{x}{y}\,dx\,dy$

در تمرینهای ۱۱ تا ۱۸، مقدار دقیق انتگرال مضاعف را بیابید.

۱۱. انتگرال مضاعف همان بوده در تمرین ۱ در تمرینات ۱۰۲۰ است.

۱۲. انتگرال مضاعف همان بوده در تمرین ۲ در تمرینات ۱۰۲۰ است.

۱۳. انتگرال مضاعف همان بوده در تمرین ۳ در تمرینات ۱۰۲۰ است.

۱۴. انتگرال مضاعف همان بوده در تمرین ۶ در تمرینات ۱۰۲۰ است.

۱۵. $\iint_R \sin x\,dA$ ؛ R ناحیهٔ محدود به خطوط $y = 2x$ ، $y = \frac{1}{2}x$ ، و $x = \pi$ است.

۱۶. $\iint_R \cos(x+y)\,dA$ ؛ R ناحیهٔ محدود به خطوط $y = x$ و $x = \pi$ و محور x است.

۱۷. $\iint_R x^2\sqrt{9-y^2}\,dA$ ؛ R ناحیهٔ محدود به دایرهٔ $x^2 + y^2 = 9$ است.

۱۸. $\iint_R \frac{y^2}{x^2}\,dA$ ؛ R ناحیهٔ محدود به خطوط $y = x$ و $y = 2$ و هذلولی $xy = 1$ است.

۱۹. حجم جسم زیرصفحهٔ $z = 4x$ و بالای دایرهٔ $x^2 + y^2 = 16$ در صفحهٔ xy رابیابید. جسم را رسم کنید.

۲۰. حجم جسم در یکهشتم اول محدود به صفحات $x = y + 2z + 1$ ، $x = 0$ ، $y = 0$ ، $z = 0$ ، و $3y + z - 3 = 0$ را بیابید. جسم را رسم کنید.

۲۱. حجم جسم در یکهشتم اول محدود به دو استوانهٔ $x^2 + y^2 = 4$ و $x^2 + z^2 = 4$ را بیابید. جسم را رسم کنید.

۲۲. حجم جسم در یکهشتم اول محدود به سهمی‌گون $z = 9 - x^2 - 3y^2$ را بیابید. جسم را رسم کنید.

۲۳. حجم جسم در یکهشتم اول محدود به سطوح $x + z^2 = 1$ ، $x = y$ ، و $x = y^2$ را بیابید. جسم را رسم کنید.

۲۴. حجم بخشی از جسم محدود به کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ که در یکهشتم اول است را با انتگرالگیری مضاعف پیدا کنید. جسم را رسم نمایید.

در تمرینهای ۲۵ تا ۲۸، با استفاده از انتگرالهای مضاعف مساحت ناحیهٔ محدود به منحنیهای داده شده در صفحهٔ xy را بیابید. ناحیه را رسم نمایید.

۲۵. $y = x^3$ و $y = x^2$.

۲۶. $y^2 = 4x$ و $x^2 = 4y$.

۲۷. $y = x^2 - 9$ و $y = 9 - x^2$.

۲۸. $x^2 + y^2 = 16$ و $y^2 = 6x$.

۲۹. حجم جسم محدود به بیضی‌گون

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

را به‌صورت انتگرال مکرر بیان کنید.

۳۰. با استفاده از انتگرالگیری مضاعف، مساحت ناحیه در ربع اول محدود به سهمی $y^2 = 4x$ ، دایرهٔ $x^2 + y^2 = 5$ ، و محور x را به دو روش بیابید: (۱) ابتدا نسبت به x انتگرال بگیرید؛ (ب) ابتدا نسبت به y انتگرال بگیرید. دو روش حل را با هم مقایسه کنید.

۳۱. حجم جسم زیر صفحهٔ $3x + 8y + 6z = 24$ و بالای ناحیه در صفحهٔ xy محدود به سهمی $y^2 = 2x$ ، خط $2x + 3y = 10$ ، و محور x را به دو روش بیابید: (آ) ابتدا نسبت به x انتگرال بگیرید؛ (ب) ابتدا نسبت به y انتگرال بگیرید. دو روش حل را با هم مقایسه کنید.

۳۲. انتگرال مکرر $\int_0^a\int_0^x \sqrt{a^2 - x^2}\,dy\,dx$ داده شده است. (آ) جسمی را رسم کنید که

حجمش مساوی این انتگرال مکرر باشد؛ (ب) انتگرال مکرر را حساب کنید؛ (پ) انتگرال مکرری بنویسید که حجم همان جسم را بدهد ولی ترتیب انتگرالگیری درآن عکس باشد.

۳۳ . انتگرال مکرر $\frac{2}{3}\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}(2x+y)\,dy\,dx$ داده شده است. همان کارهای تمرین ۳۲ را انجام دهید.

۳۴ . با استفاده از انتگرالگیری مضاعف، حجم جسم مشترک بین دو استوانهٔ مستدیر قائم به شعاع r که محورهایشان در زاویهٔ قائمه متقاطعند را بیابید. (ر.ک. تمرین ۱۶ در تمرینات ۴.۷.)

در تمرینهای ۳۵ و ۳۶، انتگرال مکرر را نمی‌توان فقط برحسب توابع مقدماتی با ترتیب انتگرالگیری داده شده حساب کرد. ترتیب انتگرالگیری را عکس کرده و محاسبات را انجام دهید.

۳۵ . $\int_0^4\int_{\sqrt{x}}^2 \sin \pi y^3\,dy\,dx$

۳۶ . $\int_0^1\int_y^1 e^{x^2}\,dx\,dy$

۳.۲۰ مرکز جرم و گشتاورهای ماند

در فصل ۱۱ از انتگرالهای منفرد برای یافتن مرکز جرم یک ورقهٔ همگن استفاده شد. در استفاده از انتگرالهای منفرد می‌توان (جز در حالات خاص) فقط ورقه‌های با چگالی سطح ثابت درنظرگرفت؛ اما، با انتگرالهای مضاعف می‌توان مرکز جرم یک ورقهٔ همگن یا غیر همگن را پیدا کرد.

فرض‌کنیم یک‌ورقه به شکل ناحیهٔ بستهٔ R در صفحهٔ xy در دست باشد. همچنین، $\rho(x,y)$ چگالی سطح ورقه در نقطهٔ (x,y) از R بوده و ρ بر R پیوسته باشد. برای‌یافتن جرم کل ورقه به صورت زیر عمل می‌کنیم. فرض کنیم Δ افراز R به n مستطیل باشد. هرگاه (ξ_i, γ_i) نقطه‌ای در مستطیل i ام به مساحت $\Delta_i A$ باشد، آنگاه $\rho(\xi_i, \gamma_i)\,\Delta_i A$ تقریبی از جرم مستطیل i ام است، و جرم کل ورقه تقریباً" مساوی است با

$$\sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i, \gamma_i)\,\Delta_i A$$

از مجموع بالا وقتی نرم Δ به صفر نزدیک می‌شود حد می‌گیریم، و جرم M ورقه را به صورت زیر بیان می‌کنیم:

$$M = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i, \gamma_i)\,\Delta_i A = \iint_R \rho(x,y)\,dA \qquad (۱)$$

گشتاور جرم مستطیل i ام نسبت به محور x تقریباً" $\gamma_i\rho(\xi_i, \gamma_i)\,\Delta_i A$ است. پس مجموع گشتاورهای جرم n مستطیل نسبت به محور x با مجموع n جمله از این نوع تقریب می‌شود. گشتاور جرم M_x تمام ورقه نسبت به محور x عبارت است از

$$M_x = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \gamma_i\rho(\xi_i, \gamma_i)\,\Delta_i A = \iint_R y\rho(x,y)\,dA \qquad (۲)$$

بهمین نحو، گشتاور جرم M_y نسبت به محور y عبارت است از

$$M_y = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \xi_i\rho(\xi_i, \gamma_i)\,\Delta_i A = \iint_R x\rho(x,y)\,dA \qquad (۳)$$

مرکز جرم ورقه را با نقطهٔ $(\bar{x}, \bar{y})$ نشان می‌دهیم و

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} \quad \text{و} \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M}$$

مثال ۱ . یک‌ورقه‌به‌شکل مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی الساقین دارای چگالی سطحی است که با تغییر مربع فاصله از راس زاویهٔ قائمه تغییر می‌کند. اگر جرم به کیلوگرم و فاصله به متر باشد، جرم و مرکز جرم ورقه را پیدا کنید.

حل . محورهای مختصات را طوری می‌گیریم که راس‌زاویهٔ قائمه در مبداء و اضلاع آن به طول a متر بوده و در امتداد محورهای مختصات باشند (ر.ک. شکل ۱.۳.۲۰) فرض کنیم $\rho(x,y)$ چگالی‌سطح ورقه‌درنقطهٔ (x,y) به کیلوگرم برمتر مربع باشد. دراین‌صورت، $\rho(x,y) = k(x^2+y^2)$ که در آن k ثابت است. بنابراین، اگر جرم ورقه M kg باشد، از (۱) داریم

$$\begin{aligned} M &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} k(\xi_i^2 + \gamma_i^2)\,\Delta_i A \\ &= k\iint_R (x^2+y^2)\,dA \end{aligned}$$

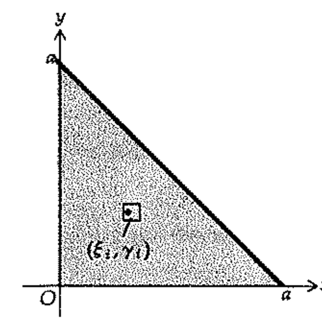
$$= \int_0^a \int_0^{a-x} (x^2 + y^2)\,dy\,dx$$

$$= k \int_0^a \Big[yx^2 + \tfrac{1}{3}y^3 \Big]_0^{a-x} dx$$

$$= k \int_0^a (\tfrac{1}{3}a^3 - a^2x + 2ax^2 - \tfrac{4}{3}x^3)\,dx$$

$$= k(\tfrac{1}{3}a^4 - \tfrac{1}{2}a^4 + \tfrac{2}{3}a^4 - \tfrac{1}{3}a^4)$$

$$= \tfrac{1}{6}ka^4$$



شکل ۱۰۳۰۲۰

برای یافتن مرکزجرم ،گوییم بخاطر تقارن باید بر خط $x = y$ واقع باشد . بنابراین اگر $\bar{x}$ را بیابیم ، $\bar{y}$ را نیز خواهیم داشت . از (۳) داریم

$$M_y = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} k\xi_i(\xi_i^2 + \gamma_i^2)\,\Delta_i A$$

$$= k \iint_R x(x^2 + y^2)\,dA$$

$$= k \int_0^a \int_0^{a-x} x(x^2 + y^2)\,dy\,dx$$

$$= k \int_0^a \Big[x^3y + \tfrac{1}{3}xy^3 \Big]_0^{a-x} dx$$

$$= k \int_0^a (\tfrac{1}{3}a^3x - a^2x^2 + 2ax^3 - \tfrac{4}{3}x^4)\,dx$$

$$= k(\tfrac{1}{6}a^5 - \tfrac{1}{3}a^5 + \tfrac{1}{2}a^5 - \tfrac{4}{15}a^5)$$

$$= \tfrac{1}{15}ka^5$$

چون $M\bar{x} = M_y$ ، $M\bar{x} = \frac{1}{15}ka^5$ ؛ و چـون $M = \frac{1}{6}ka^4$ ، بدست می‌آوریم $\bar{x} = \frac{2}{5}a$. بنابراین ، مرکز جرم در نقطهٔ $(\frac{2}{5}a, \frac{2}{5}a)$ است .

۱۰۳۰۲۰ تعریف. ***گشتاور ماند*** یک‌ذره‌به‌جرم m kg حول یک محور مساوی mr^2 kg-m² تعریف می‌شود ، که در آن فاصلهٔ عمودی ذره تا محور r متر است .

اگر دستگاهی از n ذره داشته باشیم ، گشتاور ماند دستگاه مجموع گشتاورهای ماند همهٔ ذرات تعریف می‌شود . یعنی ، هرگاه ذرهٔ i ام به جرم m_i kg در فاصلهٔ r_i متر از محورباشد ، آنگاه I kg-m² گشتاور ماند دستگاه است که

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \tag{۴}$$

با تعمیم ایـن مفهـوم گشتاور مـاند به توزیع پیوستهٔ جرم در یک صفحه نظیر میله‌ها یا ورقه‌ها با روشهایی شبیه آنهایی که پیشتر بکار رفتند ، تعریف زیر را خواهیم داشت .

۲۰۳۰۲۰ تعریف. فرض کنیم ناحیهٔ R درصفحهٔ xy توزیع جرم پیوسته‌ای داشته‌باشد ، و چگالی سطح این توزیع در نقطهٔ (x, y) مساوی $\rho(x, y)$ kg/m² باشد ، که در آن ρ بر R پیوسته است . دراین‌صورت ، ***گشتاور ماند حول محور*** x I_x kg-m² این جرم توزیع شده عبارت است از

$$I_x = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \gamma_i^2 \rho(\xi_i, \gamma_i)\,\Delta_i A = \iint_R y^2 \rho(x, y)\,dA \tag{۵}$$

بهمین‌نحو ، ***گشتاور ماند*** I_y ***حول محور*** y عبارت است از

$$I_y = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \rho(\xi_i, \gamma_i)\,\Delta_i A = \iint_R x^2 \rho(x, y)\,dA \tag{۶}$$

و ***گشتاور ماند*** I_0 ***حول مبداء*** ، یا محور z ، مساوی است با

$$I_0 = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} (\xi_i^2 + \gamma_i^2)\rho(\xi_i, \gamma_i)\,\Delta_i A = \iint_R (x^2 + y^2)\rho(x, y)\,dA \tag{۷}$$

عدد I_0 را ***گشتاور ماند قطبی*** می‌نامیم .

مثال ۲. یک سیم مستقیم همگن دارای چگالی خطی ثابت ρ kg/m است. گشتاور ماند سیم حول محور عمود بر سیم و مار بر یک انتهای آن را بیابید.

حل. فرض‌کنیم طول‌سیم a متر بوده، و در امتداد محور x از مبداء قرار داشته باشد. گشتاور ماند آن حول محور y را پیدا می‌کنیم. سیم را به n قطعه تقسیم می‌کنیم؛ طول قطعهٔ i ام $\Delta_i x$ متراست. پس جرم قطعهٔ i ام $\rho\,\Delta_i x$ kg می‌باشد. فرض کنیم جرم قطعهٔ i ام در نقطهٔ ξ_i، که $x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$. متمرکز شده بـاشد. گشتاور ماند قطعهٔ i ام حول محور y بین $\rho x_{i-1}^2\,\Delta_i x$ kg-m² و $\rho x_i^2\,\Delta_i x$ kg-m² بوده و با $\rho\xi_i^2\,\Delta_i x$ kg-m² تقریب می‌شود، که $x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$. هرگاه I_y kg-m² گشتاور ماند سیم حول محور y باشـد، آنگـاه

$$I_y = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho\xi_i^2\,\Delta_i x = \int_0^a \rho x^2\,dx = \tfrac{1}{3}\rho a^3$$

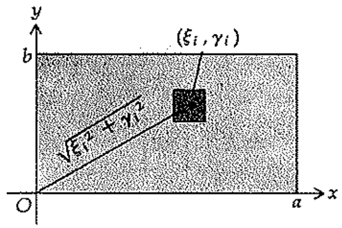
بنابراین، گشتاور ماند $\tfrac{1}{3}\rho a^3$ kg-m² است.

مثال ۳. یک ورقهٔ مستطیلـی شکـل همگـن دارای چـگالـی سطح ثابـت ρ اسلاگ بر فوت مربع است. گشتاور ماند ورقه حول یک گوشه را پیدا کنید.

حل. فرض‌کنیـم ورقه بـه خطوط $x = a$، $y = b$، محور x، و محور y محدود شده باشد. ر.ک. شکل ۲۰۳۰۲۰. هرگاه‌گشتاور ماند حول مبداء I_0 اسلاگ ـ فوت مربع باشد، آنگاه

$$\begin{aligned}
I_0 &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i^2 + \gamma_i^2)\,\Delta_i A \\
&= \iint_R \rho(x^2 + y^2)\,dA \\
&= \rho \int_0^b \int_0^a (x^2 + y^2)\,dx\,dy \\
&= \rho \int_0^b \Big[\tfrac{1}{3}x^3 + xy^2\Big]_0^a dy \\
&= \rho \int_0^b (\tfrac{1}{3}a^3 + ay^2)\,dy \\
&= \tfrac{1}{3}\rho ab(a^2 + b^2)
\end{aligned}$$

بنابراین، گشتاور ماند مساوی $\tfrac{1}{3}\rho ab(a^2 + b^2)$ اسلاگ ـ فوت مربع است.



شکل ۲۰۳۰۲۰

می‌توان فاصله‌ای از محور L یافت که تمرکز جرم ورقه در آنجا اثری بر گشتاور ماند ورقه حول L نداشته باشد. این فاصله، که با r نموده می‌شود، **شعاع چرخش** ورقه حول L نام‌دارد. یعنی، هرگاه جرم M kg یک ورقه در نقطهٔ r متر از L متمرکز شده‌باشد، گشتاور مـاند ورقه حول L همان‌گشتاور ماند ذره به جرم M kg در فاصلهٔ r متر از L می‌باشد؛ این گشتاور ماند Mr^2 kg-m² است. لذا، تعریف زیر را داریم.

۳۰۳۰۲۰ تعریف. هرگاه I گشتاور مـاند جرم توزیع شده‌ای در یک صفحه حول محـور L بوده و M جرم کـل توزیع باشد، آنگاه **شعاع چرخش** توزیع حول L مساوی r است، کـه

$$r^2 = \frac{I}{M}$$

مثال ۴. فرض‌کنیم ورقه‌ای به شکل نیمـدایره بـوده و چگالی سطح ورقه در یک نقطه با فاصلهٔ نقطـه تا قطر متناسب باشد. هرگاه جرم به کیلوگرم و فاصله به متر باشد، شعاع چرخش‌ورقه حول محور x را بیابید.

حل. محورهای x و y را طوری‌می‌گیریم که نیمدایره‌نیمهٔ بالایی دایرهٔ $x^2 + y^2 = a^2$ باشد. ر.ک. شکل ۲۰۳۰۲۰. پس چگالی سطح ورقه در نقطهٔ (x, y) مساوی ky kg/m² می‌باشد. درنتیجه، اگر جرم ورقه M kg باشد، خواهیم داشت

$$M = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} k\gamma_i\,\Delta_i A$$

$$= \iint_R ky\, dA$$

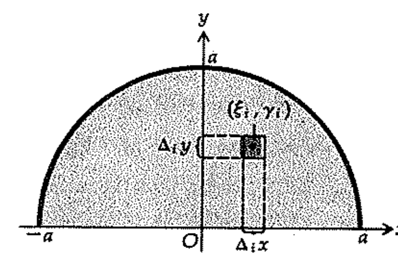
$$= \int_0^a \int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} ky\,dx\,dy$$

$$= k\int_0^a \Big[yx\Big]_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} dy$$

$$= 2k\int_0^a y\sqrt{a^2-y^2}\,dy$$

$$= -\tfrac{2}{3}k(a^2-y^2)^{3/2}\Big]_0^a$$

$$= \tfrac{2}{3}ka^3$$



شکل ۳.۳.۲۰

هرگاه I_x kg-m² گشتاور ماند ورقه حول محور x باشد، آنگاه

$$I_x = \lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} \gamma_i^2(k\gamma_i)\,\Delta_i A$$

$$= \iint_R ky^3\,dy\,dx$$

$$= \int_{-a}^{a}\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} ky^3\,dy\,dx$$

$$= k\int_{-a}^{a} \Big[\tfrac14 y^4\Big]_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dx$$

$$= \tfrac14 k\int_{-a}^{a} (a^4-2a^2x^2+x^4)\,dx$$

$$= \tfrac14 k(2a^5-\tfrac43 a^5+\tfrac25 a^5)$$

$$= \tfrac{4}{15}ka^5$$

بنابراین، اگر شعاع چرخش r متر باشد،

$$r^2 = \frac{\frac{4}{15}ka^5}{\frac23 ka^3} = \frac25 a^2$$

و درنتیجه، $r = \frac15\sqrt{10}a$. بنابراین، شعاع چرخش $\frac15\sqrt{10}a$ متر می‌باشد.

تمرینات ۳.۲۰

در تمرینهای ۱ تا ۱۲، جرم و مرکز جرم ورقه با چگالی سطح داده شده را بیابید. جرم به کیلوگرم و فاصله به متر سنجیده شده است.

۱. یک ورقه‌به‌شکل‌ناحیهٔ مستطیلی شکل به خطوط $x = 3$ و $y = 2$ و محورهای مختصات محدود شده است. چگالی سطح در هر نقطه xy^2 kg/m² است.

۲. یک ورقه به شکل ناحیهٔ مستطیلی شکل به خطوط $x = 4$ و $y = 5$ و محورهای‌مختصات محدود شده است. چگالی سطح در هر نقطه $(x^2 + y)$ kg/m² است.

۳. یک ورقه به شکل ناحیهٔ مستطیلی شکل‌است‌که‌اضلاعش قطعاتی از محورهای‌مختصات و خط $x + 2y = 6$ می‌باشند. چگالی سطح در هر نقطه y^2 kg/m² است.

۴. یک ورقه به شکل ناحیه در ربع اول و محدود به سهمی $y = x^2$ ، خط $y = 1$ ، و محور y است. چگالی سطح در هر نقطه $(x + y)$ kg/m² است.

۵. یک ورقه به شکل ناحیهٔ محدود به سهمی $x^2 = 8y$ ، خط $y = 2$ ، و محور y است. چگالی سطح با فاصله تا خط $y = -1$ تغییر می‌کند.

۶. یک‌ورقه‌به‌شکل ناحیهٔ محدودبه منحنی $y = e^x$ ، خط $x = 1$ ، و محورهای‌مختصات است. چگالی سطح با فاصله تا محور x تغییر می‌کند.

۷. یک ورقه به شکل ناحیه در ربع‌اول محدود به دایرهٔ $x^2 + y^2 = a^2$ و محورهای مختصات است. چگالی سطح با مجموع فواصل تا دو محور تغییر می‌کند.

۸. یک ورقه به شکل ناحیهٔ محدود به مثلثی است که اضلاعش قطعاتی از محورهای مختصات و خط $3x + 2y = 18$ می‌باشند. چگالی سطح با حاصل‌ضرب فواصل تا محورهای مختصات تغییر می‌کند.

۹. یک ورقه به شکل ناحیهٔ محدود به منحنی $y = \sin x$ و محور x از $x = 0$ تا $x = \pi$ است. چگالی سطح با فاصله تا محور x تغییر می‌کند.

۱۰. یک ورقه به شکل‌ناحیهٔ محدود به منحنی $y = \sqrt{x}$ و خط $y = x$ است. چگالی‌سطح با فاصله تا محور y تغییر می‌کند.

۱۱ . یک ورقه به‌شکل ناحیه در ربع اول و محدود به دایرهٔ $x^2+y^2=4$ و خط $x+y=2$ است . چگالی سطح در هر نقطه xy kg/m² است .

۱۲ . یک‌ورقه‌به‌شکل‌ناحیهٔ محدود به دایرهٔ $x^2+y^2=1$ و خطوط $x=1$ و $y=1$ است . چگالی سطح در هر نقطه xy kg/m² است .

در تمرینهای ۱۳ تا ۱۸ ، گشتاور ماندورقهٔ همگن راحول‌محور داده شده درصورتی بیابید که چگالی سطح $\rho\ kg/m^2$ بوده و فاصله به متر باشد .

۱۳ . یک ورقه‌به شکل‌ناحیهٔ محدود به $4y=3x$ ، $x=4$ ، و محور x ؛ حول محور x .

۱۴ . ورقهٔ تمرین ۱۳ ؛ حول خط $x=4$.

۱۵ . یک ورقه به شکل ناحیهٔ محدود به دایره‌ای به شعاع a ؛ حول مرکزش.

۱۶ . یک‌ورقه به شکل ناحیهٔ محدود به سهمی $x^2=4-4y$ و محور x ؛ حول محور x .

۱۷ . ورقهٔ تمرین ۱۶ ؛ حول مبداء .

۱۸ . یک ورقه بـــه شکل ناحیهٔ محدود به یک مثلث به طول اضلاع a ، b ، و c متر ؛ حول ضلع به طول a متر .

در تمرینهای ۱۹ تا ۲۲ ، برای ورقهٔ داده شده مقادیر زیر را بیابید : (آ) گشتاور ماند حول محور x ؛ (ب) گشتاور ماند حول محور y ؛ (پ) شعاع چرخش حول محور x ؛ (ت) گشتاور ماند قطبی .

۱۹ . ورقهٔ تمرین ۱ .　　۲۰ . ورقهٔ تمرین ۴ .

۲۱ . ورقهٔ تمرین ۹ .　　۲۲ . ورقهٔ تمرین ۱۰ .

۲۳ . یک ورقهٔ همگـــن به چگالی سطح ρ اسلاگ بر فوت مربع به شکل ناحیهٔ محدود به یک مثلث متساوی‌الساقین با قاعده به طول b ft و ارتفاع به طول h ft است . شعاع چرخش ورقه حول خط‌تقارن آن را بیابید .

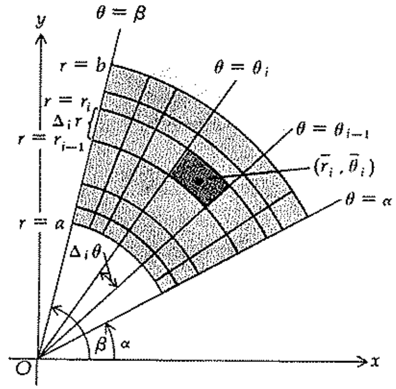
۲۴ . یک ورقهٔ همگـــن به چگالی سطح ρ اسلاگ بر فوت مربع به شکل ناحیهٔ محدود به منحنـــی $x=\sqrt{y}$ ، محور x ، و خـــط $x=a$ ، که $a>0$ ، می‌باشد . گشتاور ماند ورقه حول خط $x=a$ را بیابید .

۲۵ . یک ورقه‌به شکل ناحیهٔ محصور به سهمی $y=2x-x^2$ و محور x است . گشتاور ماند ورقه حول خط $y=4$ را در صورتی بیابید که چگالی سطح با فاصله‌اش تا خط $y=4$ تغییر کند . جرم به کیلوگرم و فاصله به متر است .

۴.۲۰ انتگرال مضاعف در مختصات قطبی

حال نحوهٔ تعـریف انتگرال مضاعف یک تابع بر یک ناحیهٔ بسته در مختصات قطبی در

صفحه را نشان مـی‌دهیم . بحث را با ساده‌ترین نوع ناحیه شروع می‌کنیم . فرض کنیم R ناحیهٔ محدود به شعاعهای $\theta=\alpha$ و $\theta=\beta$ و دوایر $r=a$ و $r=b$ باشد . همچنین، Δ افرازی از ایـن ناحیه باشد که با رسم اشعهٔ ماربر قطب و دوایر به مرکز قطب بدست می‌آید . ایـــن افـراز در شکل ۱.۴.۲۰ نموده شده است . شبکه‌ای از زیر ناحیه‌ها بدست می‌آید که ما آنـها را مستطیلهای "خمیده" می‌نامیم . نرم $\|\Delta\|$ افراز طول طویلترین قطر



شکل ۱.۴.۲۰

مستطیلهای "خمیـده" است . فـرض‌کنیم تعداد زیرناحیه‌ها n بوده، و $\Delta_i A$ مساحت مستطیل "خمیدهٔ" i م باشد . چون مساحت زیرناحیهٔ i م تفاضل مساحات دو قطاع مستدیر است ،

$$\Delta_i A=\tfrac{1}{2}r_i^2(\theta_i-\theta_{i-1})-\tfrac{1}{2}r_{i-1}^2(\theta_i-\theta_{i-1})$$
$$=\tfrac{1}{2}(r_i-r_{i-1})(r_i+r_{i-1})(\theta_i-\theta_{i-1})$$

فرض کنیم $\bar{r}_i=\frac{1}{2}(r_i+r_{i-1})$ ، $\Delta_i r=r_i-r_{i-1}$ ، و $\Delta_i\theta=\theta_i-\theta_{i-1}$. دراین‌صورت ،

$$\Delta_i A=\bar{r}_i\,\Delta_i r\,\Delta_i\theta$$

نقطهٔ $(\bar{r}_i,\bar{\theta}_i)$ در زیر ناحیهٔ i م است ، که $\theta_{i-1}\le\bar{\theta}_i\le\theta_i$ ، و مجموع

$$\sum_{i=1}^{n} f(\bar{r}_i,\bar{\theta}_i)\,\Delta_i A=\sum_{i=1}^{n} f(\bar{r}_i,\bar{\theta}_i)\bar{r}_i\,\Delta_i r\,\Delta_i\theta \qquad (1)$$

را تشکیل می‌دهیم . می‌توان نشان داد که اگر f بر ناحیهٔ R پیوسته باشد ، حد مجموع (۱) وقتی $\|\Delta\|$ به صفر نـزدیک می‌شود وجود دارد و این حد انتگرال مضاعف f بر R است . می‌نویسیم

(۲)
$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i)\, \Delta_i A = \iint_R f(r, \theta)\, dA$$

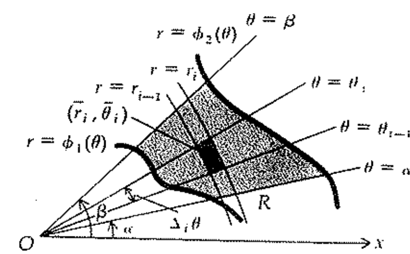
یا

(۳)
$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i)\bar{r}_i\, \Delta_i r\, \Delta_i \theta = \iint_R f(r, \theta) r\, dr\, d\theta$$

توجه کنید که در مختصات قطبی $dA = r\,dr\,d\theta$. می‌توان نشان داد که انتگرال مضاعف مساوی انتگرال مکرر با یکی از دو شکل زیراست:

(۴)
$$\iint_R f(r, \theta)\, dA = \int_\alpha^\beta \int_a^b f(r, \theta) r\, dr\, d\theta = \int_a^b \int_\alpha^\beta f(r, \theta)\, r\, d\theta\, dr$$

می‌توان انتگرال مضاعف تابع پیوسته و دو متغیرهٔ f را بر نواحی بسته درمختصات قطبی در صفحه غیر از آنکه قبلاً درنظر گرفتیم تعریف کرد. مثلاً، ناحیهٔ R محدود به $r = \phi_1(\theta)$ و $r = \phi_2(\theta)$، که در آنها ϕ_1 و ϕ_2 توابعی هموارند، و خطوط $\theta = \alpha$ و $\theta = \beta$ را درنظر می‌گیریم. ر.ک. شکل ۲۰۴۰۲۰ . دراین شکل، به‌ازای هر θ دربازهٔ



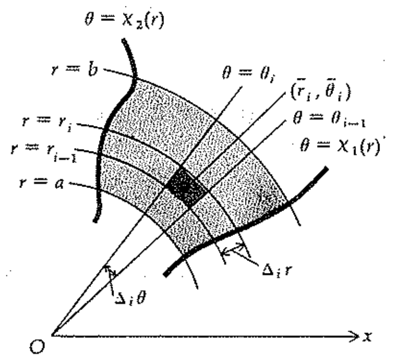
شکل ۲۰۴۰۲۰

بستهٔ $[\alpha, \beta]$، $\phi_1(\theta) \le \phi_2(\theta)$. پس می‌توان نشان داد که انتگرال مضاعف f بر R موجود و مساوی یک انتگرال مکرر است، و داریم

(۵)
$$\iint_R f(r, \theta)\, dA = \int_\alpha^\beta \int_{\phi_1(\theta)}^{\phi_2(\theta)} f(r, \theta) r\, dr\, d\theta$$

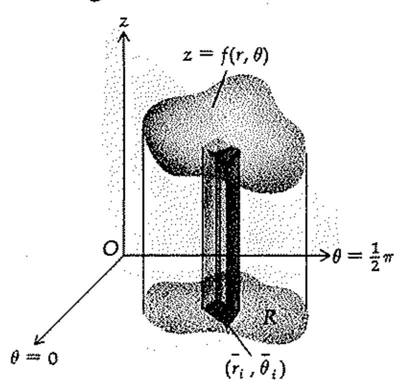
اگر ناحیهٔ R محدود به منحنیهای $\theta = \chi_1(r)$ و $\theta = \chi_2(r)$، که χ_1 و χ_2 توابعی هموارند، و دوایر $r = a$ و $r = b$، مثل شکل ۳۰۴۰۲۰، باشد، که به‌ازای هر r در بازهٔ بستهٔ $[a, b]$، $\chi_1(r) \le \chi_2(r)$، آنگاه

(۶)
$$\iint_R f(r, \theta)\, dA = \int_a^b \int_{\chi_1(r)}^{\chi_2(r)} f(r, \theta) r\, d\theta\, dr$$



شکل ۳۰۴۰۲۰

با استفاده از مختصات استوانه‌ای، می‌توان انتگرال مضاعف یک تابع بر یک ناحیهٔ بسته در مختصات قطبی در صفحه را حجم یک جسم تعبیر کرد. شکل ۴۰۴۰۲۰ جسمی را نشان می‌دهد که قاعده‌اش ناحیهٔ R در مختصات قطبی در صفحه بوده و از بالا به سطح



شکل ۴۰۴۰۲۰

$z = f(r, \theta)$ محدود است، که در آن f بر R پیوسته بوده و بر آن $f(x, y) \ge 0$. افراز R را اختیار می‌کنیم که شبکه‌ای مرکب از R مستطیل "خمیده" بدست می‌دهد. n جسم می‌سازیم که جسم i ام به قاعدهٔ مستطیل "خمیده" i ام بوده و ارتفاعش $f(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i)$ باشد،

که در آن $(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i)$ در زیر ناحیهٔ i م است. شکل ۴.۴.۲۰ جسم i م را نشان می‌دهد. حجم جسم i م عبارت است از

$$f(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i)\, \Delta_i A = f(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i)\bar{r}_i\, \Delta_i r\, \Delta_i \theta$$

مجموع احجام n جسم مساوی است با

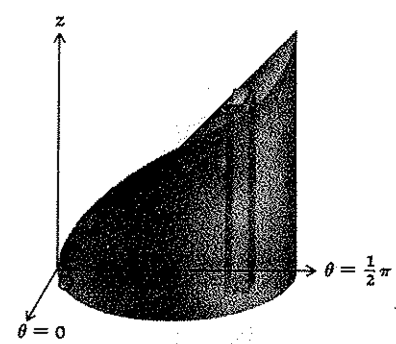
$$\sum_{i=1}^{n} f(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i)\bar{r}_i\, \Delta_i r\, \Delta_i \theta$$

هرگاه V حجم جسم داده شده باشد، آنگاه

$$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i)\bar{r}_i\, \Delta_i r\, \Delta_i \theta = \iint_R f(r, \theta) r\, dr\, d\theta \qquad (۷)$$

مثال ۱. حجم جسم محدود به مخروط $z = r$ و استوانهٔ $r = 3 \sin \theta$ در یکهشتم اول را بیابید.

حل. جسم و عنصر i م در شکل ۵.۴.۲۰ نموده شده‌اند. با استفاده از فرمول (۷)



شکل ۵.۴.۲۰

به‌ازای $f(r, \theta) = r$ ، اگر V حجم جسم داده شده باشد،

$$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \cdot \bar{r}_i\, \Delta_i r\, \Delta_i \theta$$

$$= \iint_R r^2\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \int_0^{3 \sin \theta} r^2\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left[\tfrac{1}{3} r^3 \right]_0^{3 \sin \theta} d\theta$$

$$= 9 \int_0^{\pi/2} \sin^3 \theta\, d\theta$$

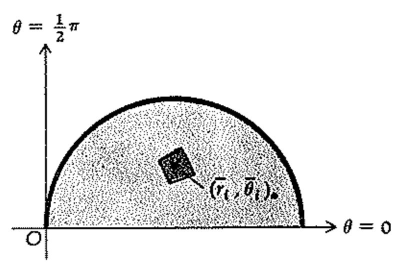
$$= -9 \cos \theta + 3 \cos^3 \theta \Big]_0^{\pi/2}$$

$$= 6$$

بنابراین، حجم 6 واحد مکعب است.

مثال ۲. جرم ورقه‌ای به شکل ناحیهٔ داخل نیمدایرهٔ $r = a \cos \theta, 0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}\pi$ را در صورتی بیابید که چگالی سطح در هر نقطه با فاصله‌اش تا قطب متناسب باشد. جرم به کیلوگرم و فاصله به متر است.

حل. شکل ۶.۴.۲۰ ورقه و مستطیل "خمیدهٔ" i م را نشان می‌دهد. چگالی سطح در



شکل ۶.۴.۲۰

نقطهٔ (r, θ) مساوی $kr\ \text{kg/m}^2$ است، که در آن k ثابت است. هرگاه $M\ \text{kg}$ جرم ورقه باشد، آنگاه

$$M = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} (k\bar{r}_i)\bar{r}_i\, \Delta_i r\, \Delta_i \theta$$

$$= \iint_R kr^2\, dr\, d\theta$$

$$= k \int_0^{\pi/2} \int_0^{a \cos \theta} r^2\, dr\, d\theta$$

$$= \tfrac{1}{3}ka^3 \int_0^{\pi/2} \cos^3\theta\, d\theta$$

$$= \tfrac{1}{3}ka^3\Big[\sin\theta - \tfrac{1}{3}\sin^3\theta\Big]_0^{\pi/2}$$

$$= \tfrac{2}{9}ka^3$$

بنابراین، جرم $\frac{2}{9}ka^3$ kg است.

مثال ۳. مرکز جرم ورقهٔ مثال ۲ را بیابید.

حل. فرض کنیم مختصات دکارتی مرکزجرم ورقه $\bar{x}$ و $\bar{y}$ باشند، که، همانطور که مرسوم است، محور x در امتداد محور قطبی و محور y در امتداد محور $\frac{1}{2}\pi$ است. فرض کنیم نمایش دکارتی نقطهٔ $(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i)$، $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ باشد. دراین‌صورت، اگر گشتاور جرم ورقه نسبت به‌محور x، M_x kg-m باشد،

$$M_x = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \bar{y}_i(k\bar{r}_i)\bar{r}_i\, \Delta_i r\, \Delta_i\theta$$

از تعویض $\bar{y}_i$ با $\bar{r}_i \sin\bar{\theta}_i$ بدست می‌آوریم

$$M_x = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} k\bar{r}_i^3 \sin\bar{\theta}_i\, \Delta_i r\, \Delta_i\theta$$

$$= \iint_R kr^3 \sin\theta\, dr\, d\theta$$

$$= k\int_0^{\pi/2}\int_0^{a\cos\theta} r^3 \sin\theta\, dr\, d\theta$$

$$= \tfrac{1}{4}ka^4 \int_0^{\pi/2} \cos^4\theta \sin\theta\, d\theta$$

$$= -\tfrac{1}{20}ka^4 \cos^5\theta\Big]_0^{\pi/2}$$

$$= \tfrac{1}{20}ka^4$$

هرگاه M_y kg-m گشتاور جرم ورقه نسبت به محور y باشد، آنگاه

$$M_y = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i(k\bar{r}_i)\bar{r}_i\, \Delta_i r\, \Delta_i\theta$$

از تعویض $\bar{x}_i$ با $\bar{r}_i \cos\bar{\theta}_i$ خواهیم داشت

$$M_y = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} k\bar{r}_i^3 \cos\bar{\theta}_i\, \Delta_i r\, \Delta_i\theta$$

$$= \iint_R kr^3 \cos\theta\, dr\, d\theta$$

$$= k\int_0^{\pi/2}\int_0^{a\cos\theta} r^3 \cos\theta\, dr\, d\theta$$

$$= \tfrac{1}{4}ka^4 \int_0^{\pi/2} \cos^5\theta\, d\theta$$

$$= \tfrac{1}{4}ka^4\Big[\sin\theta - \tfrac{2}{3}\sin^3\theta + \tfrac{1}{5}\sin^5\theta\Big]_0^{\pi/2}$$

$$= \tfrac{2}{15}ka^4$$

بنابراین،

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\frac{2}{15}ka^4}{\frac{2}{9}ka^3} = \frac{3}{5}a$$

و

$$\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\frac{1}{20}ka^4}{\frac{2}{9}ka^3} = \frac{9}{40}a$$

از اینرو، مرکز جرم در نقطهٔ $(\frac{3}{5}a, \frac{9}{40}a)$ است.

مساحت ناحیه در صفحهٔ قطبی را می‌توان با انتگرالگیری مضاعف بدست آورد. مثال زیر روش را توضیح می‌دهد.

مثال ۴. با انتگرالگیری مضاعف، مساحت ناحیهٔ محصور به یک پر رز $r = \sin 3\theta$ را بیابید.

حل. شکل ۷.۴.۲۰ ناحیه‌ومستطیل "خمیدهٔ" i ام را نشان می‌دهد. هرگاه A مساحت ناحیه باشد، آنگاه

$$A = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta_i A$$

$$= \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i\, \Delta_i r\, \Delta_i\theta$$

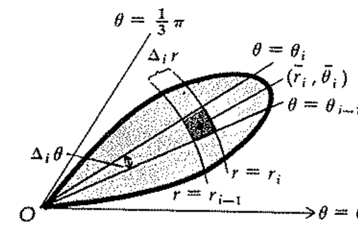
$$= \iint_R r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/3}\int_0^{\sin 3\theta} r\,dr\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} \sin^2 3\theta\,d\theta$$

$$= \tfrac{1}{4}\theta - \tfrac{1}{24}\sin 6\theta\Big]_0^{\pi/3}$$

$$= \tfrac{1}{12}\pi$$



شکل ۷.۴.۲۰

از اینرو، مساحت $\frac{1}{12}\pi$ واحد مربع است.

گاهی محاسبهٔ انتگرال مضاعف بـا مختصات قطبی به‌جای مختصات دکارتی آسانتر است. چنین وضع در مثال زیر نموده شده است.

مثال ۵. انتگرال مضاعف $\iint_R e^{-(x^2+y^2)}\,dA$ را درصورتی حساب کنید که ناحیهٔ R در ربع اول و محدود به دایرهٔ $x^2 + y^2 = a^2$ و محورهای مختصات باشد.

حل. چون $x^2 + y^2 = r^2$ و $dA = r\,dr\,d\theta$، داریم

$$\iint_R e^{-(x^2+y^2)}\,dA = \iint_R e^{-r^2}\,r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^{a} e^{-r^2}\,r\,dr\,d\theta$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\Big[e^{-r^2}\Big]_0^{a}\,d\theta$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(e^{-a^2} - 1)\,d\theta$$

$$= \tfrac{1}{4}\pi(1 - e^{-a^2})$$

تمرینات ۴.۲۰

در تمرینهای ۱ تـا ۶، با استفاده از انتگرالهای مضـاعف، مساحت ناحیهٔ داده شده را بیابیـد.

۱. ناحیهٔ داخل دلگون $r = 2(1 + \sin\theta)$.

۲. یک پر رز $r = a\cos 2\theta$.

۳. ناحیهٔ داخل دلگون $r = a(1 + \cos\theta)$ و خارج دایرهٔ $r = a$.

۴. ناحیهٔ داخل دایرهٔ $r = 1$ و خارج لمنیسکات $r^2 = \cos 2\theta$.

۵. ناحیهٔ داخل حلقهٔ بزرگ لیماسون $r = 2 - 4\sin\theta$ و خارج حلقهٔ کوچک.

۶. ناحیهٔ داخل لیماسون $r = 3 - \cos\theta$ و خارج دایرهٔ $r = 5\cos\theta$.

در تمرینهای ۷ تا ۱۲، حجم جسم داده شده را بیابید.

۷. جسم محدود به بیضی‌گون $z^2 + 9r^2 = 9$.

۸. جسم جدا شده از کرهٔ $z^2 + r^2 = 4$ توسط استوانهٔ $r = 1$.

۹. جسم جدا شده از کرهٔ $z^2 + r^2 = 16$ توسط استوانهٔ $r = 4\cos\theta$.

۱۰. جسم بالای صفحهٔ قطبی محدود به مخروط $z = 2r$ و استوانهٔ $r = 1 - \cos\theta$.

۱۱. جسم محدود به سهمی‌گون $z = 4 - r^2$، استوانهٔ $r = 1$، و صفحهٔ قطبی.

۱۲. جسم بالای سهمی‌گون $z = r^2$ و زیرصفحهٔ $z = 2r\sin\theta$.

در تمرینهای ۱۳ تـا ۱۹، جرم و مرکز جرم ورقهٔ داده شده را با چگالی سطح داده شده بیابید. جرم به کیلوگرم و فاصله به متر است.

۱۳. یک ورقه به شکل ناحیهٔ تمرین ۱ است. چگالی سطح با فاصله تا قطب تغییرمی‌کند.

۱۴. یک ورقه به شکل ناحیهٔ تمرین ۲ است. چگالی سطح با فاصله تا قطب تغییر می‌کند.

۱۵. یک ورقه به شکل ناحیهٔ داخل لیماسون $r = 2 - \cos\theta$ است. چگالی سطح بافاصله تا قطب تغییر می‌کند.

۱۶. یک ورقه بـه شکل نـاحیهٔ محدود به لیماسون $r = 2 + \cos\theta, 0 \le \theta \le \pi$ و محور قطبی است. چگالی سطح در هر نقطه $k\sin\theta\ \mathrm{kg/m^2}$ است.

۱۷. ورقهٔ تمرین ۱۶. چگالی سطح در هر نقطه $kr\sin\theta\ \mathrm{kg/m^2}$ است.

۱۸ . یک ورقه به شکل ناحیهٔ تمرین ۶. چگالی سطح با فاصله تا قطب تغییر می‌کند.

۱۹ . یک ورقه به شکل ناحیهٔ تمرین ۵. چگالی سطح با فاصله تا قطب تغییر می‌کند.

در تمرینهای ۲۰ تا ۲۴، گشتاور مانند ورقه حول محور یا نقطهٔ داده شده را با چگالی سطح ذکر شده بیابید. جرم به کیلوگرم و فاصله به متر است.

۲۰ . یک ورقه به شکل ناحیهٔ محصور به دایرهٔ $r = \sin\theta$ ؛ حول محور $\frac{1}{2}\pi$. چگالی سطح در هر نقطه k kg/m² است.

۲۱ . ورقهٔ تمرین ۲۰؛ حول محور قطبی. چگالی سطح درهر نقطه k kg/m² است.

۲۲ . یک ورقه به شکل ناحیهٔ محدود به دلگون $r = a(1 - \cos\theta)$ ؛ حول قطب. چگالی سطح درهر نقطه k kg/m² است.

۲۳ . یک ورقه به شکل ناحیهٔ محدود به دلگون $r = a(1 + \cos\theta)$ و دایرهٔ $r = 2a\cos\theta$ ؛ حول قطب. چگالی سطح در هر نقطه k kg/m² است.

۲۴ . یک ورقه به شکل ناحیهٔ محصور به لمنیسکات $r^2 = a^2\cos 2\theta$ ؛ حول محور قطبی. چگالی سطح در هر نقطه k kg/m² است.

۲۵ . یک ورقهٔ همگن به شکل ناحیهٔ محصور به یک حلقهٔ لمنیسکات $r^2 = \cos 2\theta$ است. شعاع چرخش ورقه حول محوری عمود بر صفحهٔ قطبی در قطب را بیابید.

۲۶ . یک ورقه به شکل ناحیهٔ محصور به دایرهٔ $r = 4$ است، و چگالی سطح با فاصله تا قطب تغییر می‌کند. شعاع چرخش ورقه حول محوری عمود بر صفحهٔ قطبی در قطب را بیابید.

۲۷ . انتگرال مضاعف $\iint_R e^{x^2+y^2}\,dA$ ، که در آن R ناحیهٔ محدود به دوایر $x^2 + y^2 = 1$ و $x^2 + y^2 = 9$ است، را با مختصات قطبی حساب کنید.

۲۸ . انتگرال مضاعف $\iint_R \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,dA$ ، که در آن R ناحیهٔ محدود به دوایر $x^2 + y^2 = 1$ و محورهای مختصات است، را با مختصات قطبی حساب کنید.

۲۰.۵ مساحت یک سطح

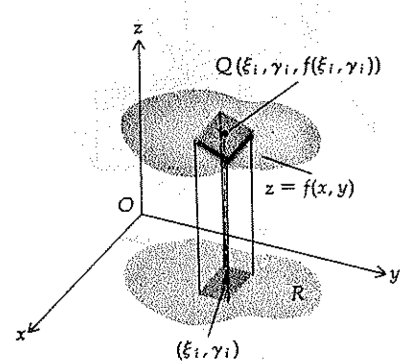
انتگرال مضاعف را می‌توان برای تعیین مساحت بخشی از سطح $z = f(x, y)$ که روی ناحیهٔ بستهٔ R در صفحهٔ xy است بکار برد. برای نشان دادن این امر ابتدا باید منظور خود از این مساحت را تعریف کرده و سپس فرمولی برای محاسبهٔ آن بدست آوریم. فرض کنیم

f و مشتقات جزئی اول آن بر R پیوسته بوده و بر R ، $f(x, y) > 0$. همچنین، Δ افرازی از R به n زیر ناحیهٔ مستطیلی شکل باشد. مستطیل i ام دارای ابعاد $\Delta_i x$ و $\Delta_i y$ و مساحت $\Delta_i A$ است. فرض کنیم (ξ_i, γ_i) نقطه‌ای در مستطیل i ام باشد، و درنقطهٔ $Q(\xi_i, \gamma_i, f(\xi_i, \gamma_i))$ بر سطح صفحهٔ مماس بر آن را درنظر می‌گیریم. مستطیل i ام را به‌طور قائم به بالا روی‌صفحهٔ مماس تصویر کرده و فرض می‌کنیم $\Delta_i\sigma$ مساحت این تصویر باشد. شکل ۲۰.۵.۱ ناحیهٔ R ، بخشی از سطح روی R ، و زیرناحیهٔ مستطیلی شکل i ام R ، و تصویرمستطیل i ام روی‌صفحهٔ مماس برسطح در Q را نشان می‌دهد. عدد $\Delta_i\sigma$ تقریبی است از مساحت آن‌قطعه از سطح که روی مستطیل i ام واقع است. چون تعداد این‌قطعات n است، مجموع

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta_i\sigma$$

تقریبی است از مساحت σ ی آن قسمت از سطح که روی R قرار دارد. این امر به تعریف σ به صورت زیر منجر می‌شود:

$$\sigma = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta_i\sigma \qquad (۱)$$



شکل ۲۰.۵.۱

حال لازم است فرمولی برای محاسبهٔ حدمعادلهٔ (۱) بدست آوریم. برای این‌کار فرمولی برای محاسبهٔ $\Delta_i\sigma$ به‌عنوان‌مساحت یک‌متوازی‌الاضلاع پیدامی‌کنیم. برای‌سادگی محاسبات، نقطهٔ (ξ_i, γ_i) را در مستطیل i ام در گوشهٔ (x_{i-1}, y_{i-1}) می‌گیریم. فرض کنیم **A** و **B** بردارهایی باشند که نمایشهایی از آنها پاره خطهای جهتداری هستند با نقاط

شروع Q که دو ضلع مجاور متوازی‌الاضلاع به مساحت $\Delta_i\sigma$ را تشکیل می‌دهند. ر.ک. شکل ۲۰۵۰۲۰. دراین صورت، $\Delta_i\sigma = |\mathbf{A}\times\mathbf{B}|$. چون

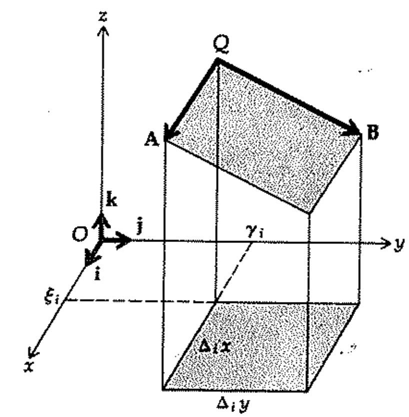
$$\mathbf{A} = \Delta_i x\mathbf{i} + f_x(\xi_i, \gamma_i)\,\Delta_i x\mathbf{k}$$

و

$$\mathbf{B} = \Delta_i y\mathbf{j} + f_y(\xi_i, \gamma_i)\,\Delta_i y\mathbf{k}$$

نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\times\mathbf{B} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \Delta_i x & 0 & f_x(\xi_i, \gamma_i)\,\Delta_i x \\ 0 & \Delta_i y & f_y(\xi_i, \gamma_i)\,\Delta_i y \end{vmatrix} \\ &= -\Delta_i x\,\Delta_i y f_x(\xi_i, \gamma_i)\mathbf{i} - \Delta_i x\,\Delta_i y f_y(\xi_i, \gamma_i)\mathbf{j} + \Delta_i x\,\Delta_i y\mathbf{k}\end{aligned}$$



شکل ۲۰۵۰۲۰

بنابراین،

$$\Delta_i\sigma = |\mathbf{A}\times\mathbf{B}| = \sqrt{f_x^2(\xi_i, \gamma_i) + f_y^2(\xi_i, \gamma_i) + 1}\,\Delta_i x\,\Delta_i y \qquad (۲)$$

با گذاردن (۲) در (۱)، بدست می‌آوریم

$$\sigma = \lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{f_x^2(\xi_i, \gamma_i) + f_y^2(\xi_i, \gamma_i) + 1}\,\Delta_i x\,\Delta_i y$$

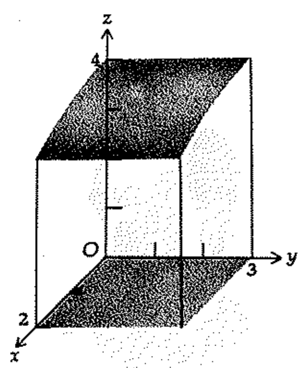
این حد انتگرال مضاعفی است که، بخاطر پیوستگی f_x و f_y بر R، وجود دارد. دراین صورت، قضیهٔ زیر را خواهیم داشت.

۱۰۵۰۲۰ قضیه. *فرض‌کنیم f و مشتقات جزئی اول آن بر ناحیهٔ بستهٔ R در صفحهٔ xy پیوسته‌اند. درایـن صورت، اگر مساحت سطح $z = f(x, y)$ که روی R است σ باشد،*

$$\sigma = \iint_R \sqrt{f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y) + 1}\,dx\,dy \qquad (۳)$$

مثال ۱. مساحت سطح‌جدا شده از استوانهٔ $x^2 + z^2 = 16$ به وسیلهٔ صفحات $x = 0$، $x = 2$، $y = 0$، و $y = 3$ را بیابید.

حل. سطح داده شده در شکل ۳۰۵۰۲۰ نموده شده است. ناحیهٔ R مستطیلی است‌در



شکل ۳۰۵۰۲۰

ربع اول صفحهٔ xy که به خطوط $x = 2$ و $y = 3$ محدود شده است. سطح به معادلهٔ $x^2 + z^2 = 16$ است. باحل‌آن نسبت به z بدست می‌آوریم $z = \sqrt{16 - x^2}$. ازاینرو، $f(x, y) = \sqrt{16 - x^2}$. درنتیجه، اگر σ مساحت سطح باشد، از قضیهٔ ۱۰۵۰۲۰ داریم

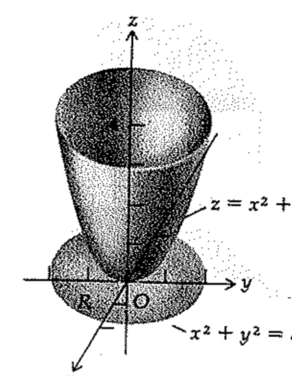
$$\begin{aligned}\sigma &= \iint_R \sqrt{f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y) + 1}\,dx\,dy \\ &= \int_0^3\int_0^2 \sqrt{\left(\frac{-x}{\sqrt{16 - x^2}}\right)^2 + 0 + 1}\,dx\,dy \\ &= \int_0^3\int_0^2 \frac{4}{\sqrt{16 - x^2}}\,dx\,dy\end{aligned}$$

$$= 4\int_0^3 \left[\sin^{-1}\tfrac{1}{4}x\right]_0^2 dy$$
$$= 4\int_0^3 \tfrac{1}{6}\pi\, dy$$
$$= 2\pi$$

بنابراین، مساحت سطح 2π واحد مربع است.

مثال ۲. مساحت سهمی‌گون $z = x^2 + y^2$ زیر صفحهٔ $z = 4$ را بیابید.

حل. شکل ۴۰۵۰۲۰ سطح داده شده را نشان می‌دهد. از معادلهٔ سهمی‌گون معلوم می‌شود که $f(x, y) = x^2 + y^2$. ناحیهٔ بسته در صفحهٔ xy محدود به دایرهٔ



شکل ۴۰۵۰۲۰

$x^2 + y^2 = 4$ ناحیهٔ R است. هرگاه σ مساحت سطح مطلوب باشد، از قضیهٔ ۱۰۵۰۲۰ داریم

$$\sigma = \iint_R \sqrt{f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y) + 1}\, dx\, dy$$
$$= \iint_R \sqrt{4(x^2 + y^2) + 1}\, dx\, dy$$

چون انتگرالده شامل جملات $4(x^2 + y^2)$ است، محاسبهٔ انتگرال مضاعف با استفاده از مختصات قطبی ساده می‌شود. پس $x^2 + y^2 = r^2$ و $dx\, dy = dA = r\, dr\, d\theta$. بعلاوه،

حدود r عبارتند از 0 تا 2 و حدود θ عبارتند از 0 تا 2π. بنابراین،

$$\sigma = \iint_R \sqrt{4r^2 + 1}\, r\, dr\, d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \sqrt{4r^2 + 1}\, r\, dr\, d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi}\left[\tfrac{1}{12}(4r^2 + 1)^{3/2}\right]_0^2 d\theta$$
$$= \tfrac{1}{6}\pi(17\sqrt{17} - 1)$$

از اینرو، مساحت سهمی‌گون زیر صفحهٔ داده شده $\frac{1}{6}\pi(17\sqrt{17} - 1)$ واحد مربع است.

مثال ۳. مساحت نیمهٔ بالایی کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ را بیابید.

حل. نیمکره در شکل ۵۰۵۰۲۰ نموده شده است. با حل معادلهٔ کره نسبت به z و مساوی $f(x, y)$ قرار دادن آن، بدست می‌آوریم

$$f(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$$

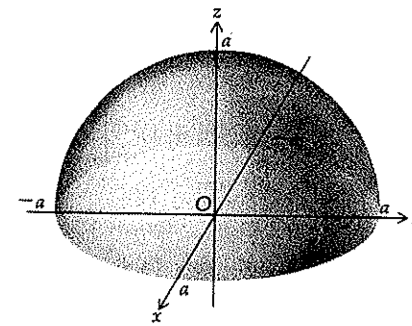
چون $f_x(x, y) = -x/\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ و $f_y(x, y) = -y/\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$، f_x و f_y بر دایرهٔ $x^2 + y^2 = a^2$، که کرانهٔ ناحیهٔ R در صفحهٔ xy است، تعریف نشده‌اند. بعلاوه، انتگرال مضاعف (۳) مساوی است با

$$\iint_R \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\, dx\, dy$$

که مجازی است، زیرا انتگرالده در هر نقطه از کرانهٔ R ناپیوستگی نامتناهی دارد. بهاین وضع می‌توان با گرفتن ناحیهٔ R' به‌عنوان ناحیهٔ محدود به دایرهٔ $x^2 + y^2 = b^2$، که $b < a$، و سپس گرفتن حد وقتی $b \to a^-$ پرداخت. بعلاوه، اگر انتگرال مضاعف با انتگرال مکرر در مختصات قطبی حساب شود، محاسبات ساده خواهد شد. دراین‌صورت،

$$\sigma = \lim_{b \to a^-}\int_0^b\int_0^{2\pi} \frac{a}{\sqrt{a^2 - r^2}}\, r\, d\theta\, dr$$
$$= 2\pi a \lim_{b \to a^-}\int_0^b \frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}}\, dr$$
$$= 2\pi a \lim_{b \to a^-}\left[-\sqrt{a^2 - r^2}\right]_0^b$$

$$= 2\pi a \lim_{b\to a^-} [-\sqrt{a^2-b^2}+a]$$
$$= 2\pi a^2$$



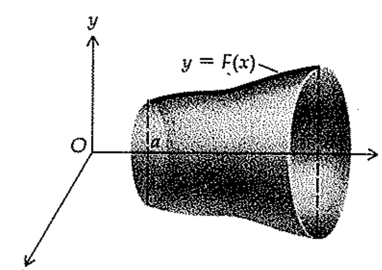
شکل ۵.۵.۲۰

بنابراین، مساحت نیمکره $2\pi a^2$ واحد مربع است.

حال منحنی $y = F(x)$ با $a \le x \le b$ را درنظر می‌گیریم بطوری که بر $[a, b]$، $F(x) > 0$ و F' بر $[a, b]$ پیوسته است. اگر این منحنی حول محور x بچرخد، یک سطح دوار بدست می‌آید. در بخش ۷.۱۷ دیدیم که معادلهٔ این سطح عبارت است از

$$y^2 + z^2 = [F(x)]^2 \qquad (۴)$$

شکل ۶.۵.۲۰ این سطح دوار را نشان می‌دهد. در این شکل صفحهٔ xy صفحهٔ کاغذ



شکل ۶.۵.۲۰

است؛ با اینحال، هنوز دستگاه راست دست داریم. می‌خواهیم، با استفاده از قضیهٔ ۱.۵.۲۰، فرمولی برای یافتن مساحت این سطح دوار بیابیم. از خواص تقارن معلوم

می‌شود که مساحت سطح بالای صفحهٔ xz و جلو صفحهٔ xy یکچهارم مساحت تمام سطح است. با حل (۴) نسبت به z (حذف ریشهٔ دوم منفی بدلیل $z \geqq 0$)، بدست می‌آوریم $f(x, y) = \sqrt{[F(x)]^2 - y^2}$. ناحیهٔ R درصفحهٔ xy ناحیه‌ای است محدود به محور x، منحنی $y = F(x)$، و خطوط $x = a$ و $x = b$. با محاسبهٔ مشتقات جزئی f، بدست می‌آوریم

$$f_x(x, y) = \frac{F(x)F'(x)}{\sqrt{[F(x)]^2 - y^2}} \qquad f_y(x, y) = \frac{-y}{\sqrt{[F(x)]^2 - y^2}}$$

می‌بینیم که $f_x(x, y)$ و $f_y(x, y)$ بر بخشی ازکرانهٔ R وجود ندارند (وقتی $y = -F(x)$ و وقتی $y = F(x)$). انتگرال مضاعف حاصل از (۳) عبارت است از

$$\iint_R \sqrt{\frac{[F(x)]^2[F'(x)]^2}{[F(x)]^2 - y^2} + \frac{y^2}{[F(x)]^2 - y^2} + 1}\; dy\, dx = \iint_R \frac{F(x)\sqrt{[F'(x)]^2 + 1}}{\sqrt{[F(x)]^2 - y^2}}\, dy\, dx$$

این انتگرال مضاعف مجازی است، زیرا انتگرالده در هر نقطه از کرانهٔ R که $y = -F(x)$ و $y = F(x)$ ناپیوستگی نامتناهی دارد. از اینرو، انتگرال مضاعف را با انتگرال مکرری که انتگرال داخلی آن مجازی است حساب می‌کنیم.

$$\sigma = 4\int_a^b \left[F(x)\sqrt{[F'(x)]^2 + 1} \int_0^{F(x)} \frac{dy}{\sqrt{[F(x)]^2 - y^2}} \right] dx \qquad (۵)$$

که در آن

$$\begin{aligned}\int_0^{F(x)} \frac{dy}{\sqrt{[F(x)]^2 - y^2}} &= \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_0^{F(x)-\epsilon} \frac{dy}{\sqrt{[F(x)]^2 - y^2}} \\ &= \lim_{\epsilon\to 0^+} \left[\sin^{-1} \frac{y}{F(x)} \right]_0^{F(x)-\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon\to 0^+} \sin^{-1}\left(1 - \frac{\epsilon}{F(x)}\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\pi\end{aligned}$$

بنابراین، از (۵) داریم

$$\sigma = 2\pi \int_a^b F(x)\sqrt{[F'(x)]^2 + 1}\, dx$$

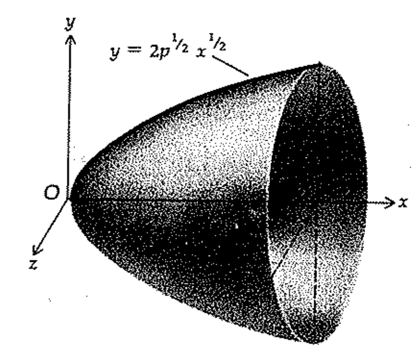
این نتیجه را به‌صورت قضیه بیان می‌کنیم، که در آن F با f عوض شده است.

۲۰.۵.۲۰ قضیه. فرض‌کنیم تابع f بر $[a, b]$ مثبت بوده و f' بر $[a, b]$ پیوسته‌باشد. هرگاه σ مساحت سطح دوار حاصل از دوران منحنی $y = f(x)$ ، با $a \le x \le b$ ، حول محور x باشد، آنگاه

$$\sigma = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{[f'(x)]^2 + 1}\, dx$$

مثال ۴. مساحت سهمی‌گون دوار حاصل از دوران نیمهٔ بالایی سهمی $y^2 = 4px$ ، با $0 \le x \le h$ ، حول محور x را بیابید.

حل. سهمی‌گون دوار در شکل ۷.۵.۲۰ نموده شده است. با حل معادلهٔ سهمی نسبت



شکل ۷.۵.۲۰

به y ($y \ge 0$) ، بدست می‌آوریم $y = 2p^{1/2}x^{1/2}$. درنتیجه، اگر σ مساحت سطح باشد، از قضیهٔ ۲۰.۵.۲۰ ، به‌ازای $f(x) = 2p^{1/2}x^{1/2}$ ، داریم

$$\begin{aligned}
\sigma &= 2\pi \int_0^h 2p^{1/2}x^{1/2}\sqrt{\frac{p}{x} + 1}\, dx \\
&= 4\pi p^{1/2} \int_0^h \sqrt{p + x}\, dx \\
&= \tfrac{8}{3}\pi p^{1/2}(p + x)^{3/2}\Big]_0^h \\
&= \tfrac{8}{3}\pi(\sqrt{p(p + h)^3} - p^2)
\end{aligned}$$

بنابراین، مساحت سهمی‌گون دوار $\frac{8}{3}\pi(\sqrt{p(p + h)^3} - p^2)$ است.

تمرینات ۵.۲۰

۱. مساحت سطح جدا شده از صفحهٔ $2x + y + z = 4$ با صفحات $x = 0$ ، $x = 1$ ، $y = 0$ ، و $y = 1$ را بیابید.

۲. مساحت سطح جدا شده از صفحهٔ $z - 2x - y = 5$ با صفحات $x = 0$ ، $x = 2$ ، $y = 0$ ، و $y = 4$ را بیابید.

۳. مساحت قسمتی از سطح صفحهٔ $36x + 16y + 9z = 144$ که توسط صفحات مختصات جدا می‌شود را بیابید.

۴. مساحت سطح جدا شده از صفحهٔ $z = ax + by$ به‌وسیلهٔ صفحات $x = 0$ ، $x = a$ ، $y = 0$ ، و $y = b$ ، که $a > 0$ و $b > 0$ ، را بیابید.

۵. مساحت سطح در یکهشتم اول که از استوانهٔ $x^2 + y^2 = 9$ به‌وسیلهٔ صفحهٔ $x = z$ جدا می‌شود را بیابید.

۶. مساحت سطح جدا شده از استوانهٔ $x^2 + y^2 = 25$ توسط صفحات $x = 0$ ، $x = 1$ ، $z = 1$ ، و $z = 3$ را بیابید.

۷. فرض کنید R ناحیهٔ مثلثی شکل در صفحهٔ xy به راسهای $(0, 0, 0)$ ، $(0, 4, 0)$ ، و $(2, 4, 0)$ باشد. مساحت سطح آن قسمت از نمودار $z - 5x - y^2 = 2$ که بالای R واقع است را بیابید.

۸. مساحت سطح در یکهشتم اول جدا شده از مخروط $x^2 + y^2 = z^2$ توسط صفحهٔ $x + y = 4$ را بیابید.

۹. مساحت آن قسمت از سطح کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = 4x$ که به‌وسیلهٔ یک پارچهٔ مخروط $y^2 + z^2 = x^2$ جدا می‌شود را بیابید.

۱۰. مساحت آن قسمت از سطح کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ که زیر استوانهٔ $x^2 + y^2 = 9$ قرار دارد را بیابید.

۱۱. مساحت آن قسمت از سطح کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ که زیر سهمی‌گون $x^2 + y^2 = 3z$ قرار دارد را بیابید.

۱۲. در کره و سهمی‌گون تمرین ۱۱، مساحت آن قسمت از سطح سهمی‌گون که زیر کره است را بیابید.

۱۳. پاره خط از مبداء تا نقطهٔ (a, b) حول محور x می‌گردد. مساحت سطح مخروط حاصل

را بیابید.

۱۴. با دوران یک نیمدایره حول قطرش، فرمولی برای مساحت سطح یک کره بدست آورید.

۱۵. با دوران قوسی از منحنی زنجیری $y = a\cosh(x/a)$ از $x = 0$ تا $x = a$ حول محور y، مساحت سطح دوار را بیابید.

۱۶. با دوران منحنی زنجیری تمرین ۱۵ حول محور x، مساحت سطح دوار حاصل را بیابید.

۱۷. حلقهٔ منحنی $18y^2 = x(6-x)^2$ حول محور x می‌گردد. مساحت سطح دوار حاصل را بیابید.

۱۸. مساحت سطح حاصل از دوران قوسی از منحنی $y = \ln x$ از $x = 1$ تا $x = 2$ حول محور y را بیابید.

۱۹. مساحت آن قسمت از صفحهٔ $x = z$ که بین صفحات $y = 0$ و $y = 6$ و زیر هذلولی $9x^2 - 4y^2 + 16z^2 = 144$ قرار دارد را بیابید.

۲۰. مساحت سطح جدا شده از سهمی‌گون هذلولوی $y^2 - x^2 = 6z$ به‌وسیلهٔ استوانهٔ $x^2 + y^2 = 36$ را بیابید.

۲۱. فرض کنید f و مشتقات جزئی اول آن بر ناحیهٔ بستهٔ R در صفحهٔ xy پیوسته باشند. نشان دهید که اگر σ مساحت آن قسمت از سطح $z = f(x, y)$ که روی R واقع است باشد،

$$\sigma = \int_R\int \left|\nabla g(x, y, z)\right| dx\,dy$$

که در آن $g(x, y, z) = z - f(x, y)$.

۶.۲۰ قضیهٔ گرین

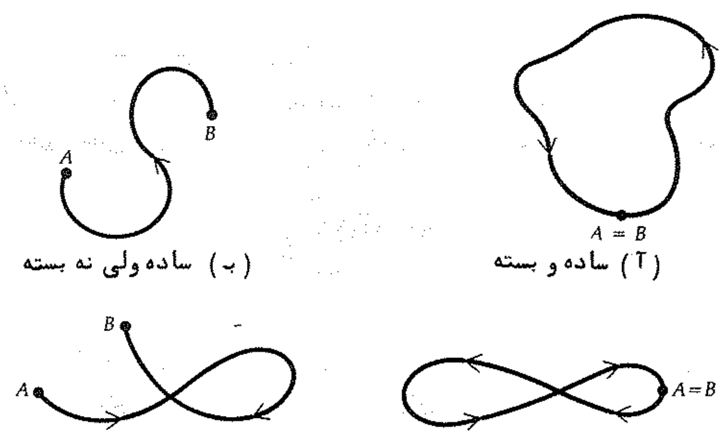
قضیه‌ای وجود دارد که یک انتگرال مضاعف روی یک ناحیهٔ مسطح مانند R را برحسب یک انتگرال خط حول یک منحنی که کرانهٔ R است بیان می‌کند. این قضیه به‌نام ریاضیدان و فیزیکدان انگلیسی، جرج گرین[1] (۱۷۹۳–۱۸۴۱)، که قضیه را در مقاله‌ای درکاربردهای ریاضیات در الکتریسیته و مغناطیس معرفی کرد، نامگذاری شده است. پیش از بیان قضیه، لازم است چند اصطلاح از منحنیهای مسطح را مرور و معرفی کنیم.

1. George Green

در بخش ۶.۱۹ گفتیم که اگر منحنی C با معادلات پارامتری

$$x = f(t) \qquad y = g(t) \qquad a \le t \le b \tag{1}$$

تعریف شده باشد، گوییم C بر بازهٔ بستهٔ $[a, b]$ هموار است اگر f' و g' بر $[a, b]$ پیوسته بوده و هردوی $f'(t)$ و $g'(t)$ در هر نقطه از بازهٔ باز (a, b) صفر نباشند. اگر درمنحنی C تعریف شده با معادلات پارامتری (۱)، نقطهٔ شروع $A(f(a), g(a))$ و نقطهٔ پایان $B(f(b), g(b))$ منطبق باشند، گوییم منحنی C **بسته** است. منحنی C را **ساده** گوییم اگرخودرا بین A و B قطع نکند؛ یعنی، اگر به‌ازای هر t_1 و t_2 دربازهٔ باز (a, b)، $(f(t_1), g(t_1)) \neq (f(t_2), g(t_2))$. دایره و بیضی نمونه‌هایی از منحنیهای بستهٔ ساده‌اند. در شکل ۱.۶.۲۰ (آ) – (ت) مثالهای دیگری از منحنیهای هموار وجود دارند که ممکن



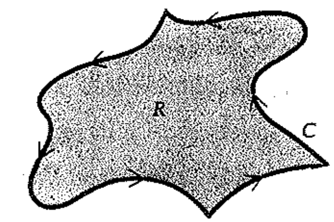
(آ) ساده و بسته (ب) ساده ولی نه بسته

(پ) بسته ولی نه ساده (ت) نه ساده نه بسته

شکل ۱.۶.۲۰

است ساده و بسته باشند ممکن است نباشند؛ در (پ) منحنی بسته است ولی ساده نیست؛ و در (ت) منحنی نه ساده است نه بسته.

از بخش ۶.۱۹ به‌یاد می‌آوریم که منحنی C را بر بازهٔ I به‌طور مقطعی هموار گوییم اگر I را بتوان به‌تعدادی متناهی زیربازه تقسیم کرد که C بر آنها هموار باشد. درصورت قضیهٔ گرین از انتگرال خط حول یک منحنی بستهٔ سادهٔ به‌طور مقطعی هموار C که کرانهٔ ناحیهٔ R در صفحه را می‌سازند و جهت در امتداد C خلاف حرکت عقربه‌های ساعت است صحبت می‌شود. در شکل ۲.۶.۲۰ چنین ناحیهٔ R با منحنی کرانهٔ مطلوب C نموده شده است. انتگرال خط حول C در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت با $\oint_C$



شکل ۲۰۶۰۲۰

نموده می‌شود.

۱۰۶۰۲۰ قضیه (قضیهٔ گرین). *فرض‌کنیم M و N توابعی از دو متغیر x و y بوده و بر قرص باز B در R^2 مشتقات جزئی اول پیوسته داشته باشند. هرگاه C یک منحنی بستهٔ سادهٔ به‌طور مقطعی هموار در B بوده، و R ناحیهٔ تعریف شده با C باشد، آنگاه*

$$\oint_C M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA \qquad (۲)$$

اثبات قضیهٔ گرین به‌ازای جمیع نواحی محدود به منحنیهای به‌طور مقطعی هموار، ساده، و بسته متعلق به حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته است. با اینحال، قضیه را برای ناحیه‌ای خاص، که در آن هر خط‌افقی و هر خط‌قائم آن را حداکثر در دو نقطه‌قطع می‌کنند ثابت خواهیم کرد. برهان به شرح زیر است.

برهان. فرض‌کنیم R ناحیه‌ای در صفحهٔ xy باشد که بتوان آن را با

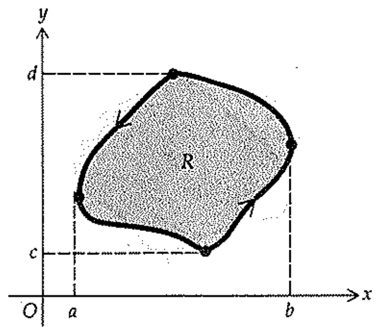
$$R = \{(x, y) |\, a \le x \le b, f_1(x) \le y \le f_2(x)\} \qquad (۳)$$

یا

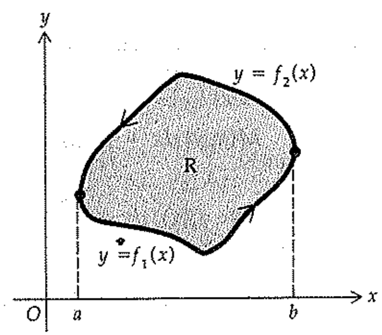
$$R = \{(x, y) |\, c \le y \le d, g_1(y) \le x \le g_2(y)\} \qquad (۴)$$

تعریف کرد، که در آنها توابع f_1 ، f_2 ، g_1 ، و g_2 هموارند. شکل ۳۰۶۰۲۰ چنین ناحیهٔ R را نشان می‌دهد. ناحیهٔ R در شکل ۴۰۶۰۲۰ با (۳) و در شکل ۵۰۶۰۲۰ با (۴) تعریف شده است.

برهان (۲) عبارت است از اثبات



شکل ۳۰۶۰۲۰

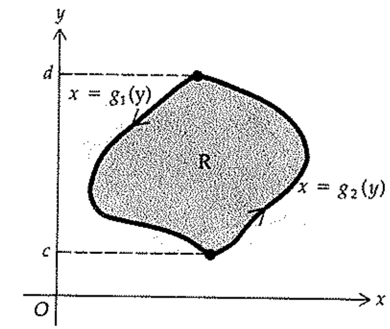


شکل ۴۰۶۰۲۰

$$\oint_C M(x, y)\, dx = -\iint_R \frac{\partial M}{\partial y}\, dA \qquad (۵)$$

$$\oint_C N(x, y)\, dy = \iint_R \frac{\partial N}{\partial x}\, dA \qquad (۶)$$

برای اثبات (۵)، R را ناحیهٔ تعریف شده با (۳) می‌گیریم. به شکل ۴۰۶۰۲۰ رجوع‌کنید. فرض کنیم C_1 نمودار $y = f_1(x)$ از $x = a$ تا $x = b$ باشد؛ یعنی، C_1 قسمت پایینی منحنی‌کرانهٔ C باشد که از چپ به راست می‌رود. همچنین، C_2 نمودار $y = f_2(x)$ از $x = b$ تا $x = a$ باشد؛ یعنی، C_2 قسمت بالایی منحنی کرانهٔ C باشد که از راست



شکل ۵.۶.۲۰

به چپ می‌رود. انتگرال خط $\oint_C M(x, y)\,dx$ را درنظر می‌گیریم.

$$\oint_C M(x, y)\,dx = \int_{C_1} M(x, y)\,dx + \int_{C_2} M(x, y)\,dx$$
$$= \int_a^b M(x, f_1(x))\,dx + \int_b^a M(x, f_2(x))\,dx$$
$$= \int_a^b M(x, f_1(x))\,dx - \int_a^b M(x, f_2(x))\,dx$$
$$= \int_a^b [M(x, f_1(x)) - M(x, f_2(x))]\,dx \qquad (۷)$$

حال به انتگرال مضاعف $\iint_R \frac{\partial M}{\partial y} dA$ می‌پردازیم، که در آن R هنوز با (۳) تعریف می‌شود. دراین صورت،

$$\iint_R \frac{\partial M}{\partial y} dA = \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial M}{\partial y}\,dy\,dx$$
$$= \int_a^b \left(\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial M}{\partial y}\,dy\right) dx$$
$$= \int_a^b M(x, y)\Big|_{f_1(x)}^{f_2(x)}\,dx$$
$$= \int_a^b [M(x, f_2(x)) - M(x, f_1(x))]\,dx$$

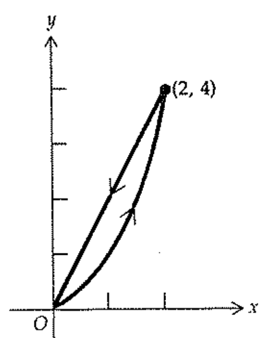
از مقایسهٔ (۷) و (۸) معلوم می‌شود که (۵) برقرار است.

برای اثبات (۶)، R را ناحیهٔ تعریف شده با (۴) مثل شکل ۵.۶.۲۰ می‌گیریم. جزئیات برهان را به‌عنوان تمرین می‌گذاریم (ر.ک. تمرین ۳۹).

با افزودن طرفهای نظیر معادلات (۵) و (۶) بهم، قضیهٔ گرین برای این ناحیهٔ R بدست می‌آید.

توضیح ۱. از قضیهٔ گرین برای محاسبهٔ انتگرال خط $\oint_C y^2\,dx + 4xy\,dy$، که در آن C ناحیهٔ بسته مرکب از قوس سهمی $y = x^2$ از مبداء تا نقطهٔ $(2, 4)$ و پاره خط از $(2, 4)$ تا مبداء است، استفاده می‌کنیم. ناحیهٔ R با کرانهٔ C در شکل ۶.۶.۲۰ نموده شده است. از قضیهٔ گرین داریم

$$\oint_C y^2\,dx + 4xy\,dy = \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x}(4xy) - \frac{\partial}{\partial y}(y^2)\right] dA$$
$$= \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (4y - 2y)\,dy\,dx$$
$$= \int_0^2 y^2\Big|_{x^2}^{2x} dx$$
$$= \int_0^2 (4x^2 - x^4)\,dx$$
$$= \tfrac{4}{3}x^3 - \tfrac{1}{5}x^5\Big|_0^2$$
$$= \tfrac{64}{15}$$



شکل ۶.۶.۲۰

برای آنکه مزیت استفاده از قضیهٔ گرین را نشان دهیم، همان انتگرال خط را به روش بخش ۶.۱۹ حساب می‌کنیم. هرگاه C_1 قوسی از سهمی $y = x^2$ از $(0,0)$ تا $(2,4)$ و C_2 پاره خط از $(2,4)$ تا $(0,0)$ باشد، آنگاه

$$\oint_C y^2\,dx + 4xy\,dy = \oint_{C_1} y^2\,dx + 4xy\,dy + \oint_{C_2} y^2\,dx + 4xy\,dy$$

معادلات پارامتری C_1 عبارتند از

$$x = t \qquad y = t^2 \qquad 0 \le t \le 2$$

بنابراین،

$$\begin{aligned}\oint_{C_1} y^2\,dx + 4xy\,dy &= \int_0^2 (t^2)^2\,dt + 4(t)(t^2)(2t\,dt)\\ &= \int_0^2 9t^4\,dt\\ &= \tfrac{9}{5}t^5\Big]_0^2\\ &= \tfrac{288}{5}\end{aligned}$$

قوس C_2 را می‌توان به صورت پارامتری نمایش داد:

$$x = t \qquad y = 2t \quad \text{از } t = 2 \text{ تا } t = 0$$

لذا،

$$\begin{aligned}\oint_{C_2} y^2\,dx + 4xy\,dy &= \int_2^0 (2t)^2\,dt + 4(t)(2t)(2\,dt)\\ &= \int_2^0 20t^2\,dt\\ &= \tfrac{20}{3}t^3\Big]_2^0\\ &= -\tfrac{160}{3}\end{aligned}$$

از اینرو،

$$\begin{aligned}\oint_C y^2\,dx + 4xy\,dy &= \tfrac{288}{5} - \tfrac{160}{3}\\ &= \tfrac{64}{15}\end{aligned}$$

که با نتیجهٔ حاصل از استفادهٔ قضیهٔ گرین یکی است.

مثال ۱. با استفاده از قضیهٔ گرین، کل کار انجام شده در حرکت یک شی در جهت

خلاف حرکت عقربه‌های ساعت یکبار دور دایرهٔ $x^2 + y^2 = a^2$ را درصورتی بیابید که حرکت از میدان نیروی $\mathbf{F}(x, y) = (\sin x - y)\mathbf{i} + (e^y - x^2)\mathbf{j}$ ناشی شده باشد. فرض‌کنیم قوس به متر و نیرو به نیوتن باشد.

حل. هرگاه کار انجام شده W ژول باشد، آنگاه

$$W = \oint_C (\sin x - y)\,dx + (e^y - x^2)\,dy$$

که درآن C دایرهٔ $x^2 + y^2 = a^2$ است. از قضیهٔ گرین داریم

$$\begin{aligned}W &= \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x}(e^y - x^2) - \frac{\partial}{\partial y}(\sin x - y)\right] dA\\ &= \iint_R (-2x + 1)\,dA\end{aligned}$$

با استفاده از مختصات قطبی، انتگرال مضاعف را به‌ازای $x = r\cos\theta$ و $dA = r\,dr\,d\theta$ حساب می‌کنیم. دراین صورت،

$$\begin{aligned}W &= \int_0^{2\pi}\int_0^a (-2r\cos\theta + 1)r\,dr\,d\theta\\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^a (-2r^2\cos\theta + r)\,dr\,d\theta\\ &= \int_0^{2\pi} -\frac{2}{3}r^3\cos\theta + \frac{r^2}{2}\Big]_0^a d\theta\\ &= \int_0^{2\pi}\left(-\frac{2}{3}a^3\cos\theta + \frac{a^2}{2}\right)d\theta\\ &= -\frac{2}{3}a^3\sin\theta + \frac{a^2}{2}\theta\Big]_0^{2\pi}\\ &= \pi a^2\end{aligned}$$

بنابراین، کار انجام شده πa^2 ژول است.

قضیهٔ زیر، که نتیجه‌ای است از قضیهٔ گرین، روش مفیدی برای محاسبهٔ مساحت ناحیهٔ محدود به یک منحنی بستهٔ سادهٔ به‌طور مقطعی هموار بدست می‌دهد.

۲۰.۶.۲ قضیه. *هرگاه منحنی بستهٔ سادهٔ به‌طور مقطعی هموار C کرانهٔ ناحیهٔ R*

بوده، و A مساحت R باشد، آنگاه

$$A = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx$$

برهان. درصورت قضیهٔ گرین، فرض کنیم $M(x, y) = -\frac{1}{2}y$ و $N(x, y) = \frac{1}{2}x$. دراین صورت،

$$\oint_C -\tfrac{1}{2}y\,dx + \tfrac{1}{2}x\,dy = \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x}(\tfrac{1}{2}x) - \frac{\partial}{\partial y}(-\tfrac{1}{2}y)\right] dA$$
$$= \iint_R (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2})\,dA$$
$$= \iint_R dA$$

چون $\iint_R dA$ مساحت R است،

$$\frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx = A$$

مثال ۲. با استفاده از قضیهٔ ۲.۶.۲۰، مساحت ناحیهٔ محصور به بیضی $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ را بیابید.

حل. معادلات پارامتری بیضی عبارتند از

$$x = a\cos t \qquad y = b\sin t \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

پس $dx = -a\sin t\,dt$ و $dy = b\cos t\,dt$. هرگاه C بیضی و A مساحت ناحیهٔ محصور به C باشد، آنگاه از قضیهٔ ۲.۶.۲۰ داریم

$$A = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [(a\cos t)(b\cos t\,dt) - (b\sin t)(-a\sin t\,dt)]$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab(\cos^2 t + \sin^2 t)\,dt$$

$$= \tfrac{1}{2}ab\int_0^{2\pi} dt$$
$$= \pi ab$$

بنابراین، مساحت πab واحد مربع است.

مثال ۳. با استفاده از قضیهٔ گرین، انتگرال خط $\oint_C (x^4 - 3y)\,dx + (2y^3 + 4x)\,dy$ را درصورتی بیابید که $9x^2 + 4y^2 = 36$.

حل. از قضیهٔ گرین داریم

$$\oint_C (x^4 - 3y)\,dx + (2y^3 + 4x)\,dy = \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x}(2y^3 + 4x) - \frac{\partial}{\partial y}(x^4 - 3y)\right] dA$$
$$= \iint_R (4 + 3)\,dA$$
$$= 7\iint_R dA$$

انتگرال مضاعف $\iint_R dA$ مساحت ناحیهٔ محصور به بیضی را می‌سنجد. معادلهٔ بیضی عبارت است از $x^2/4 + y^2/9 = 1$؛ و درنتیجه، از مثال ۲ به‌ازای $a = 2$ و $b = 3$ نتیجه می‌شود که مساحت ناحیهٔ محصور به بیضی 6π است. بنابراین،

$$\oint_C (x^4 - 3y)\,dx + (2y^3 + 4x)\,dy = 42\pi$$

قضیهٔ گرین دو شکل برداری دارد که آنها را بدست می‌آوریم. برای این‌کار به دو کمیت اسکالر در تعریف زیر نیاز داریم.

۳.۶.۲۰ تعریف. هرگاه $\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$ آنگاه ***کرل اسکالر*** $\mathbf{F}$ عبارت است از

$$\operatorname{curl} \mathbf{F} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}$$

و دیورژانس $\mathbf{F}$ عبارت است از

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}$$

فرض کنیم معادلهٔ برداری منحنی C

$$\mathbf{R}(s) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$$

بوده، و $x = f(s)$ و $y = g(s)$ ، که درآنها s طول قوس از نقطهٔ خاص P_0 بر C تا نقطهٔ P بر C باشد. دراین صورت،

$$D_s\mathbf{R}(s) = \frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j}$$

از قضیهٔ ۳۰۸۰۱۶ معلوم می‌شود که اگر $\mathbf{T}(s)$ بردار یکهٔ مماس C در P باشد،

$$\mathbf{T}(s) = \frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j} \tag{۹}$$

با نماد

$$d\mathbf{R} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}$$

رابطهٔ (۹) را به‌شکل زیر می‌نویسیم

$$\mathbf{T}(s)\,ds = d\mathbf{R} \tag{۱۰}$$

هرگاه

$$\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$$

آنگاه

$$\mathbf{F}(x, y)\cdot d\mathbf{R} = M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy \tag{۱۱}$$

با گذاردن (۱۰) در (۱۱)، داریم

$$\mathbf{F}(x, y)\cdot\mathbf{T}(s)\,ds = M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy \tag{۱۲}$$

لذا، به کمک رابطهٔ (۱۲) و تعریف ۳۰۶۰۲۰ می‌توان معادلهٔ (۲) قضیهٔ گرین را به صورت

$$\oint_C \mathbf{F}(x, y)\cdot T(s)\,ds = \iint_R \operatorname{curl}\mathbf{F}\,dA$$

نوشت. این شکل برداری قضیهٔ گرین به‌صورت‌صوری زیر به‌افتخار ریاضیدان و فیزیکدان

ایرلندی، جرج استوکس[1] (۱۹۰۳ – ۱۸۱۹)، نامگذاری شده است.

۴۰۶۰۲۰ قضیه (قضیهٔ استوکس در صفحه). فرض کنیم توابع M و N، منحنی C، و ناحیهٔ R همانهای تعریف‌شده در قضیهٔ گرین باشند. هرگاه $\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$ و $\mathbf{T}(s)$ بردار یکهٔ مماس C در P باشد که s طول قوس از نقطهٔ خاص P_0 بر C تا P باشد، آنگاه

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = \iint_R \operatorname{curl}\mathbf{F}\,dA$$

مثال ۴. قضیهٔ استوکس‌را در صفحه درصورتی تحقیق می‌کنیم که $\mathbf{F}(x, y) = 2y\mathbf{i} + 5x\mathbf{j}$ و R ناحیهٔ محدود به دایرهٔ $x^2 + y^2 = 1$ باشد.

حل. کرانهٔ R دایرهٔ یکه است که می‌توان آن را به‌صورت پارامتری نمایش داد:

$$x = \cos s \qquad y = \sin s \qquad 0 \le s \le 2\pi$$

که درآن s طول قوس از نقطه‌ای که $s = 0$ تا نقطهٔ P بر C است. پس معادلهٔ برداری C مساوی است با

$$\mathbf{R}(s) = \cos s\mathbf{i} + \sin s\mathbf{j}$$

و چون $\mathbf{T}(s) = D_s\mathbf{R}(s)$ ،

$$\mathbf{T}(s) = -\sin s\mathbf{i} + \cos s\mathbf{j}$$

در نقطهٔ $P(\cos s, \sin s)$ بر C ، $\mathbf{F}$ مساوی است با $2\sin s\mathbf{i} + 5\cos s\mathbf{j}$. بنابراین،

$$\begin{aligned}
\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds &= \int_0^{2\pi} (2\sin s\mathbf{i} + 5\cos s\mathbf{j})\cdot(-\sin s\mathbf{i} + \cos s\mathbf{j})\,ds \\
&= \int_0^{2\pi} (-2\sin^2 s + 5\cos^2 s)\,ds \\
&= -2\int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2s}{2}\,ds + 5\int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2s}{2}\,ds \\
&= -s + \tfrac{1}{2}\sin 2s + \tfrac{5}{2}s + \tfrac{5}{4}\sin 2s\Big]_0^{2\pi}
\end{aligned}$$

1. George Stokes

$$= \tfrac{3}{2}s + \tfrac{7}{4}\sin 2s\Big]_0^{2\pi}$$
$$= 3\pi$$

چون

$$\operatorname{curl} \mathbf{F} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}(5x) - \frac{\partial}{\partial y}(2y)$$
$$= 5 - 2$$
$$= 3$$

و $\iint_R dA = \pi$ ، پس

$$\iint_R \operatorname{curl} \mathbf{F}\, dA = \iint_R 3\, dA$$
$$= 3\pi$$

لذا، قضیهٔ استوکس در صفحه برای این $\mathbf{F}$ و R برقرار است.

برای بدست آوردن شکل برداری دوم قضیهٔ گرین معادلهٔ (۱۰) را درنظرمی‌گیریم، که $d\mathbf{R}$ را برحسب بردار یکهٔ مماس $\mathbf{T}(s)$ بیان می‌کند. اگر معادله را با $dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}$ به‌جای $d\mathbf{R}$ بنویسیم، خواهیم داشت

$$dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} = \mathbf{T}(s)\, ds$$

بردار $\mathbf{N}(s)$ تعریف شده با معادلهٔ

$$dy\mathbf{i} - dx\mathbf{j} = \mathbf{N}(s)\, ds$$

یک بردار یکهٔ قائم C در P است. برای تحقیق این امر، ملاحظه می‌کنیم که

$$(\mathbf{T}(s)\, ds)\cdot(\mathbf{N}(s)\, ds) = (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j})\cdot(dy\mathbf{i} - dx\mathbf{j})$$
$$= 0$$

و اندازه‌های $\mathbf{T}(s)\, ds$ و $\mathbf{N}(s)\, ds$ مساوی‌اند. چون

$$\mathbf{F}(x, y)\cdot\mathbf{N}(s)\, ds = [M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}]\cdot(dy\mathbf{i} - dx\mathbf{j})$$
$$= M(x, y)\, dy - N(x, y)\, dx$$

پس

$$\oint_C \mathbf{F}(x, y)\cdot\mathbf{N}(s)\, ds = \oint_C -N(x, y)\, dx + M(x, y)\, dy \qquad (۱۳)$$

قضیهٔ گرین را بر انتگرال خط سمت راست (۱۳) اعمال می‌کنیم و خواهیم داشت

$$\oint_C \mathbf{F}(x, y)\cdot\mathbf{N}(s)\, ds = \iint_R \left[\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}(-N)\right] dA$$
$$= \iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right) dA$$
$$= \iint_R \operatorname{div} \mathbf{F}\, dA$$

بنابراین، قضیهٔ زیر را داریم.

۵.۶.۲۰ قضیه (قضیهٔ دیورژانس در صفحه). *فرض کنیم توابع M و N، منحنی C، وناحیهٔ R همانهای تعریف‌شده درقضیهٔ گرین باشند. هرگاه $\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$ و $\mathbf{N}(s)$ بردار یکهٔ قائم C در P باشد که در آن s طول قوس از نقطهٔ خاص P_0 بر C تا P باشد، آنگاه*

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\, ds = \iint_R \operatorname{div} \mathbf{F}\, dA$$

مثال ۵. قضیهٔ دیورژانس درصفحه را برای $\mathbf{F}$ و R مثال ۴ تحقیق کنید.

حل. در مثال ۴،

$$\mathbf{F}(x, y) = 2y\mathbf{i} + 5x\mathbf{j}$$

بردار یکهٔ مماس C در P با

$$\mathbf{T}(s) = -\sin s\mathbf{i} + \cos s\mathbf{j}$$

تعریف شده است. هرگاه $\mathbf{N}(s)$ بردار یکهٔ قائم C در P باشد، آنگاه

$$\mathbf{N}(s) = \frac{D_s\mathbf{T}(s)}{|D_s\mathbf{T}(s)|}$$
$$= -\cos s\mathbf{i} - \sin s\mathbf{j}$$

پس

$$\begin{aligned}\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,ds &= \int_0^{2\pi} (2\sin s\,\mathbf{i} + 5\cos s\,\mathbf{j})\cdot(-\cos s\,\mathbf{i} - \sin s\,\mathbf{j})\,ds\\ &= \int_0^{2\pi} (-2\sin s\cos s - 5\sin s\cos s)\,ds\\ &= -7\int_0^{2\pi} \sin s\cos s\,ds\\ &= -\tfrac{7}{2}\sin^2 s\Big]_0^{2\pi}\\ &= 0\end{aligned}$$

چون

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\mathbf{F} &= \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\\ &= \frac{\partial}{\partial x}(2y) + \frac{\partial}{\partial y}(5x)\\ &= 0\end{aligned}$$

پس

$$\iint_R \operatorname{div}\mathbf{F}\,dA = 0$$

بنابراین، قضیهٔ دیورژانس در صفحه برای این $\mathbf{F}$ و R تحقیق می‌شود.

تمرینات ۶۰۲۰

در تمرینهای ۱ تا ۹ ، انتگرال خط‌را با قضیهٔ گرین حساب کنید . سپس نتیجه را به روش بخش ۶۰۱۹ تحقیق کنید .

۱ . $\oint_C 4y\,dx + 3x\,dy$ ، که در آن C مربع به راسهای $(0,0)$ ، $(1,0)$ ، $(1,1)$ ، و $(0,1)$ است .

۲ . $\oint_C y^2\,dx + x^2\,dy$ ، که در آن C مربع تمرین ۱ است .

۳ . $\oint_C 2xy\,dx - x^2y\,dy$ ، که در آن C مثلث به راسهای $(0,0)$ ، $(1,0)$ ، و $(0,1)$ است .

۴ . انتگرال خط تمرین ۳ ، که در آن C مثلث به راسهای $(0,0)$ ، $(1,0)$ ، و $(1,1)$ است .

۵ . انتگرال خط تمرین ۳ ، که در آن C مستطیل به راسهای $(0,0)$ ، $(1,0)$ ، $(1,2)$ ، و $(0,2)$ است .

۶ . $\oint_C (x^2 - y^2)\,dx + 2xy\,dy$ ، که در آن C دایرهٔ $x^2 + y^2 = 1$ است .

۷ . $\oint_C x^2y\,dx - y^2x\,dy$ ، که در آن C دایرهٔ $x^2 + y^2 = 1$ است .

۸ . انتگرال خط تمرین ۶ ، که در آن C منحنی بستهٔ مرکب از قوس $4y = x^3$ از $(0,0)$ تا $(2,2)$ و پاره خط از $(2,2)$ تا $(0,0)$ است .

۹ . انتگرال خط تمرین ۷ ، که در آن C منحنی بستهٔ تمرین ۸ است .

در تمرینهای ۱۰ تا ۲۲ ، انتگرال خط‌را با استفاده از قضیهٔ گرین حساب کنید .

۱۰ . $\oint_C \sqrt{y}\,dx + \sqrt{x}\,dy$ ، که در آن C منحنی بستهٔ حاصل از محور x ، خط $x = 1$ ، و منحنی $y = x^2$ است .

۱۱ . $\oint_C (x + y)\,dx + xy\,dy$ ، که‌در‌آن C منحنی بستهٔ حاصل از محور x ، خط $x = 2$ ، و منحنی $4y = x^3$ است .

۱۲ . $\oint_C (x^2 + y)\,dx$ ، که‌در‌ان C منحنی بستهٔ حاصل از محور x و سهمی $y = 4 - x^2$ است .

۱۳ . $\oint_C (-x^2 + x)\,dy$ ، که در آن C منحنی بستهٔ حاصل از خط $x - 2y = 0$ و سهمی $x = 2y^2$ است .

۱۴ . $\oint_C e^{x+y}\,dx + e^{x+y}\,dy$ ، که در آن C دایرهٔ $x^2 + y^2 = 4$ است .

۱۵ . $\oint_C \cos y\,dx + \cos x\,dy$ ، که در آن C مستطیل به راسهای $(0,0)$ ، $(\frac{1}{3}\pi, 0)$ ، $(\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{4}\pi)$ ، و $(0, \frac{1}{4}\pi)$ است .

۱۶ . $\oint_C x\sin y\,dx - y\cos x\,dy$ ، که در آن C مستطیل به راسهای $(0,0)$ ، $(\frac{1}{2}\pi, 0)$ ،

$(\frac{1}{2}\pi,\frac{1}{4}\pi)$ ، و $(0,\frac{1}{4}\pi)$ است.

۱۷. $\oint_C (\sin^4 x + e^{2x})\,dx + (\cos^3 y - e^y)\,dy$ ، کـه در آن C منحنی $x^4 + y^4 = 16$ است.

۱۸. $\oint_C e^y \cos x\,dx + e^y \sin x\,dy$ ، که در آن C منحنی $x^6 + y^4 = 10$ است.

۱۹. $\oint_C \frac{x^2y}{x^2+1}\,dx - \tan^{-1} x\,dy$ ، که در آن C بیضی $4x^2 + 25y^2 = 100$ است.

۲۰. $\oint_C \tan y\,dx + x\tan^2 y\,dy$ ، که در آن C بیضی $x^2 + 4y^2 = 1$ است.

۲۱. $\oint_C (e^x - x^2y)\,dx + 3x^2y\,dy$ ، که در آن C منحنی بستهٔ حاصل از $y = x^2$ و $x = y^2$ است.

۲۲. $\oint_C 2xy\,dx + 4x^2y\,dy$ ، که در آن C منحنی بستهٔ حاصل از محور x ، محور y ، و قوس دایرهٔ $x^2 + y^2 = 4$ در ربع اول است.

در تمرینهای ۲۳ تا ۳۰، با استفاده از قضیهٔ ۲۰.۶.۲ مساحت ناحیهٔ داده شده را بیابید.

۲۳. ناحیه‌ای که کرانه‌اش چهارضلعی به راسهای $(0,0)$ ، $(4,0)$ ، $(3,2)$ ، و $(1,1)$ است.

۲۴. ناحیه‌ای کـه کرانه‌اش مثلث به راسهای $(0,0)$ ، $(a,0)$ ، و $(0,b)$ که $a > 0$ و $b > 0$ است.

۲۵. ناحیه‌ای که کرانه‌اش دایرهٔ $x^2 + y^2 = a^2$ است.

۲۶. ناحیه‌ای که از پایین به محور x و از بالا به یک قوس چرخزاد به معادلات پارامتری

$$x = t - \sin t \qquad y = 1 - \cos t \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

محدود شده است.

۲۷. ناحیهٔ محدود به بتوچرخزاد با معادلات پارامتری

$$x = a\cos^3 t \qquad y = a\sin^3 t \qquad a > 0 \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

۲۸. ناحیهٔ محدود به سهمی $y = 2x^2$ و خط $y = 8x$.

۲۹. ناحیهٔ محدود به نمودارهای $y = x^2$ و $y = \sqrt{x}$.

۳۰. ناحیهٔ محدود به نمودارهای $y = x^3$ و $y = \sqrt{x}$.

در تمرینهای ۳۱ تـا ۳۴، با استفاده از قضیـهٔ گرین، کار کل انجام شده در حرکت یک جسم در جهت خـلاف حرکت عقربه‌های ساعت یکبار حول منحنی C را درصورتی بیابید

که حرکت از میدان نیروی $\mathbf{F}(x, y)$ ناشی شده باشد. فرض کنید قوس به متر و نیرو به‌نیوتن بـاشـد.

۳۱. C بیضی $x^2 + 4y^2 = 16$ است؛ $\mathbf{F}(x, y) = (3x + y)\mathbf{i} + (4x - 5y)\mathbf{j}$.

۳۲. C دایرهٔ $x^2 + y^2 = 25$ است؛ $\mathbf{F}(x, y) = (e^x + y^2)\mathbf{i} + (x^2y + \cos y)\mathbf{j}$.

۳۳. C مثلث‌به‌رئوس $(0, 0)$ ، $(2, 0)$ ، و $(0, 2)$ است؛ $\mathbf{F}(x, y) = (e^{x^2} + y^2)\mathbf{i} + (e^{y^2} + x^2)\mathbf{j}$.

۳۴. C از نیمهٔ بالای بیضی $9x^2 + 4y^2 = 36$ وبازهٔ $[-2, 2]$ برمحور x تشکیل‌شده‌است؛ $\mathbf{F}(x, y) = (xy + y^2)\mathbf{i} + xy\mathbf{j}$.

۳۵. قضیهٔ استوکس‌در صفحه‌را درحالتی تحقیق کنید که $\mathbf{F}(x, y) = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j}$ و R ناحیهٔ محدود به بیضی $4x^2 + 25y^2 = 100$ باشد.

۳۶. قضیهٔ استوکس‌در صفحه‌را درحالتی تحقیق کنید که $\mathbf{F}(x, y) = 3y\mathbf{i} - 2x\mathbf{j}$ و R ناحیهٔ محدود به $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ باشد.

۳۷. قضیهٔ دیورژانس در صفحه را برای $\mathbf{F}$ و R تمرین ۳۵ تحقیق کنید.

۳۸. قضیهٔ دیورژانس در صفحه را برای $\mathbf{F}$ و R تمرین ۳۶ تحقیق کنید.

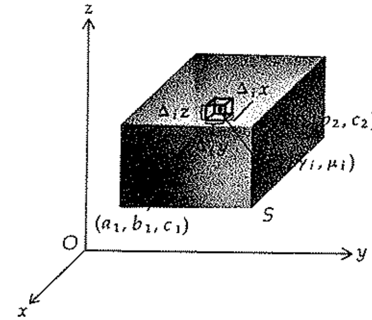
۳۹. ثابت‌کنید هرگاه R ناحیهٔ‌تعریف‌شده‌با $R = \{(x, y) \mid c \le y \le d, g_1(y) \le x \le g_2(y)\}$ باشد، که در آن g_1 و g_2 هموارند، آنگاه $\oint_C N(x, y)\,dy = \iint_R \frac{\partial N}{\partial x}\,dA$.

۷.۲۰ انتگرال سه‌گانه

تعمیم انتگرال مضـاعف به انتگرال سه‌گانه شبیه تعمیم انتگرال منفرد به انتگرال مضاعف است. ساده‌ترین‌نوع‌ناحیه در R^3 مکعب‌مستطیل‌است‌که‌به‌شش‌صفحهٔ $x = a_1$ ، $x = a_2$ ، $y = b_1$ ، $y = b_2$ ، $z = c_1$ ، و $z = c_2$ کـه $a_1 < a_2$ ، $b_1 < b_2$ ، و $c_1 < c_2$ محـدود شده‌است. فرض کنیم تابع سه متغیرهٔ f بر چنین ناحیهٔ S پیوسته باشد. افرازی ازاین ناحیه از تقسیم S با رسم صفحات موازی محورهای مختصات به جعبه‌های مستطیلی شکل بدست می‌آید. چنین افراز را با Δ نموده و فرض‌می‌کنیم‌تعداد‌جعبه‌ها n باشد. همچنین، $\Delta_i V$ حجم جعبهٔ i م باشد. نقطهٔ دلخواه (ξ_i, γ_i, μ_i) را در جعبهٔ i م می‌گیریم. مجموع

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \gamma_i, \mu_i)\,\Delta_i V \qquad (1)$$

را تشکیل مـی‌دهیم. به شکل ۱.۷.۲۰ رجوع کنید، که مکعب مستطیل را همراه با جعبهٔ i م نشان می‌دهد. نرم $\|\Delta\|$ افراز طول طویلترین قطر جعبه‌هاست. هرگاه مجموعها به



شکل ۱۰۷۰۲۰

شکل (۱) وقتی $\|\Delta\|$ به‌ازای هر انتخاب نقاط (ξ_i, γ_i, μ_i) به صفر نزدیک شود به‌حدی نزدیک گردد، آنگاه این حد را ***انتگرال سه‌گانهٔ*** f بر S نامیده و می‌نویسیم

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \gamma_i, \mu_i)\, \Delta_i V = \iiint_S f(x, y, z)\, dV$$

شرط کافی بـرای آنکه انتگرال سه‌گانهٔ f بر S موجود باشد آن است که f بر S پیوسته باشد.

مشابه تساوی انتگرال مضاعف با انتگرال دوبارمکرر، انتگرال سه‌گانه مساوی انتگرال سه‌بار مکرر است. وقتی S مکعب مستطیل فوق بوده، و f بر S پیوسته باشد،

$$\iiint_S f(x, y, z)\, dV = \int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} \int_{c_1}^{c_2} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$$

مثال ۱. انتگرال سه‌گانهٔ $\iiint_S xy \sin yz\, dV$ را درصورتی بیابید که S مکعب مستطیل محدود به صفحات $x = \pi$، $y = \frac{1}{2}\pi$، $z = \frac{1}{3}\pi$، و صفحات مختصات باشد.

حل

$$\iiint_S xy \sin yz\, dV = \int_0^{\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/3} xy \sin yz\, dz\, dy\, dx$$

$$= \int_0^{\pi} \int_0^{\pi/2} \Big[-x \cos yz\Big]_0^{\pi/3} dy\, dx$$

$$= \int_0^{\pi} \int_0^{\pi/2} x(1 - \cos \tfrac{1}{3}\pi y)\, dy\, dx$$

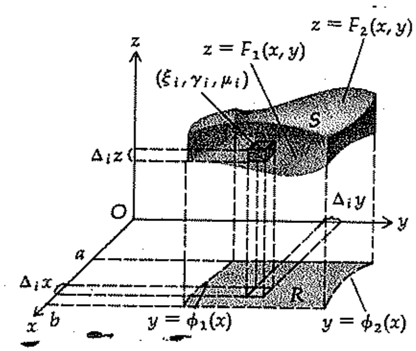
$$= \int_0^{\pi} x\left(y - \frac{3}{\pi} \sin \frac{1}{3}\pi y\right)\Bigg]_0^{\pi/2} dx$$

$$= \int_0^{\pi} x\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3}{\pi} \sin \frac{\pi^2}{6}\right) dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3}{\pi} \sin \frac{\pi^2}{6}\right)\Bigg]_0^{\pi}$$

$$= \frac{\pi}{4}\left(\pi^2 - 6 \sin \frac{\pi^2}{6}\right)$$

حال بـه تعریف انتگرال سه‌گانهٔ یک تابع پیوستهٔ سه متغیره بر یک ناحیه در R^3 غیر از مکعب‌مستطیل می‌پردازیم. فرض کنیم S ناحیهٔ سه‌بعدی بستهٔ محدود به صفحات $x = a$ و $x = b$، استوانه‌های $y = \phi_1(x)$ و $y = \phi_2(x)$، و سطوح $z = F_1(x, y)$ و $z = F_2(x, y)$، کـه در آنها توابع ϕ_1، ϕ_2، F_1، و F_2 هموارند (یعنی، مشتقات یا مشتقات جزئی‌پیوسته دارند). ر.ک. شکل ۲۰۷۰۲۰. با صفحاتی موازی صفحات‌مختصات،



شکل ۲۰۷۰۲۰

مجموعه‌ای از مکعب مستطیلها مـی‌سازیم که کاملاً S را می‌پوشانند. مکعب مستطیلهایی که کاملاً داخـل S اند یـا بر کرانهٔ S واقعند ***افراز*** Δ از S را می‌سازند. این مکعب مستطیلها را از 1 تا n شماره‌گذاری مـی‌کنیم. نـرم $\|\Delta\|$ این افـراز S طول طویلترین قطر مکعب‌مستطیلهای متعلق به این افراز است. فرض کنیم حجم مکعب مستطیل i م $\Delta_i V$

باشد. همچنین، تابع سه متغیرهٔ f بر S پیوسته بوده و (ξ_i, γ_i, μ_i) نقطهٔ دلخواهی در مکعب مستطیل i م باشد. مجموع

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \gamma_i, \mu_i)\, \Delta_i V \qquad (۲)$$

را تشکیل می‌دهیم. اگر مجموعهای (۲) وقتی $\|\Delta\|$ به صفر نزدیک شود حد داشته باشند، و این حد از صفحات افراز کننده و نقاط دلخواه (ξ_i, γ_i, μ_i) در مکعب مستطیلها مستقل باشد، این حد را ***انتگرال سه‌گانهٔ*** f بر S می‌نامیم، و می‌نویسیم

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \gamma_i, \mu_i)\, \Delta_i V = \iiint_S f(x, y, z)\, dV \qquad (۳)$$

در حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته میتوان ثابت کرد که شرط کافی برای وجود حد در (۳) پیوستگی f بر S است. بعلاوه، تحت شرط اعمال شده بر توابع ϕ_1 ، ϕ_2 ، F_1 ، و F_2 که باید هموار باشند، نیز می‌توان ثابت کرد که انتگرال سه‌گانه را می‌شود با انتگرال مکرر

$$\int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \int_{F_1(x,y)}^{F_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$$

حساب کرد.

همانطور که انتگرال مضاعف را می‌توان مساحت یک ناحیهٔ مسطح وقتی بر R^1 ، $f(x, y) = 1$ تعبیر کرد، انتگرال سه‌گانه را می‌توان حجم یک ناحیهٔ سه‌بعدی تعبیر نمود. هرگاه بر S ، $f(x, y, z) = 1$ ، آنگاه معادلهٔ (۳) خواهد شد

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta_i V = \iiint_S dV$$

و انتگرال سه‌گانه حجم ناحیهٔ S می‌باشد.

مثال ۲. حجم جسم مثال ۳ در بخش ۲۰.۲ را با انتگرالگیری سه‌گانه بیابید.

حل. جسم بالای صفحهٔ xy و محدود به سهمی‌گون بیضوی $z = x^2 + 4y^2$ و استوانهٔ $x^2 + 4y^2 = 4$ است. این جسم در شکل ۶.۲.۲۰ نموده شده است. هرگاه حجم جسم V باشد، آنگاه

$$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta_i V = \iiint_S dV \qquad (۴)$$

که در آن S ناحیهٔ محدود به جسم است. حدود z از 0 (مقدار z بر صفحهٔ xy) تا $x^2 + 4y^2$ (مقدار z بر سهمی‌گون بیضوی) است. حدود y برای یکچهارم حجم از 0 (مقدار y بر صفحهٔ xz) تا $\frac{1}{2}\sqrt{4 - x^2}$ (مقدار y بر استوانه) است. حدود x برای یکهشتم اول‌از 0 تا 2 اند. انتگرال سه‌گانهٔ (۴) را با انتگرال مکرر حساب کرده و بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned} V &= 4 \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}/2} \int_0^{x^2+4y^2} dz\, dy\, dx \\ &= 4 \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}/2} (x^2 + 4y^2)\, dy\, dx \end{aligned}$$

این همان انتگرال دوبار مکرر است که در مثال ۳ در بخش ۲۰.۲ بدست آوردیم؛ و درنتیجه، باقی حل مثل آن مثال است.

مثال ۳. حجم جسم محدود به استوانهٔ $x^2 + y^2 = 25$ ، صفحهٔ $x + y + z = 8$ ، و صفحهٔ xy را بیابید.

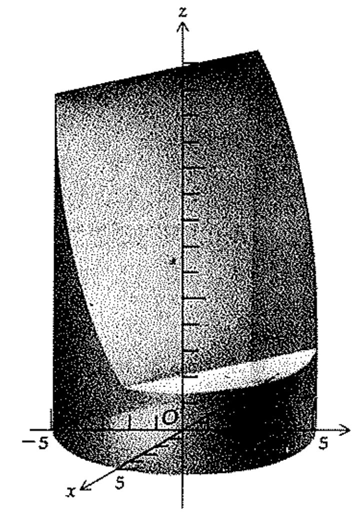
حل. جسم در شکل ۷.۲.۲۰ نموده شده است. حدود z انتگرال مکرر از 0 تا $8 - x - y$ (مقدار z بر صفحه) اند. حدود y از ناحیهٔ کرانه‌ای در صفحهٔ xy ، که دایرهٔ $x^2 + y^2 = 25$ است، بدست می‌آید. از اینرو، حدود y از $-\sqrt{25 - x^2}$ تا $\sqrt{25 - x^2}$ اند. حدود x از -5 تا 5 اند. اگر V حجم مطلوب باشد،

$$\begin{aligned} V &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta_i V \\ &= \iiint_S dV \\ &= \int_{-5}^{5} \int_{-\sqrt{25-x^2}}^{\sqrt{25-x^2}} \int_0^{8-x-y} dz\, dy\, dx \\ &= \int_{-5}^{5} \int_{-\sqrt{25-x^2}}^{\sqrt{25-x^2}} (8 - x - y)\, dy\, dx \\ &= \int_{-5}^{5} \left[(8 - x)y - \tfrac{1}{2}y^2 \right]_{-\sqrt{25-x^2}}^{\sqrt{25-x^2}} dx \\ &= 2 \int_{-5}^{5} (8 - x)\sqrt{25 - x^2}\, dx \end{aligned}$$

$$= 16\int_{-5}^{5}\sqrt{25-x^2}\,dx + \int_{-5}^{5}\sqrt{25-x^2}(-2x)\,dx$$

$$= 16(\tfrac12 x\sqrt{25-x^2} + \tfrac{25}{2}\sin^{-1}\tfrac15 x) + \tfrac23(25-x^2)^{3/2}\Big]_{-5}^{5}$$

$$= 200\pi$$



شکل ۳۰۷۰۲۰

بنابراین، حجم 200π واحد مکعب است.

مثال ۴. جرم جسم بالای صفحهٔ xy محدود به مخروط $9x^2 + z^2 = y^2$ و صفحهٔ $y = 9$ را درصورتی بیابید که چگالی حجم در هر نقطهٔ (x, y, z) جسم با فاصلهٔ نقطه تا صفحهٔ xy متناسب باشد.

حل. شکل ۴۰۷۰۲۰ جسم را نشان می‌دهد. فرض کنیم جرم جسم M kg بوده، وفاصله به متر باشد. دراین صورت، چگالی حجم درهر نقطهٔ (x, y, z) در جسم kz kg/m³ است، که درآن k ثابت است. دراین صورت، اگر (ξ_i, γ_i, μ_i) نقطهٔ دلخواهی در مکعب مستطیل i م افراز باشد،

$$M = \lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} k\mu_i\,\Delta_i V$$

$$= \iiint_S kz\,dV$$

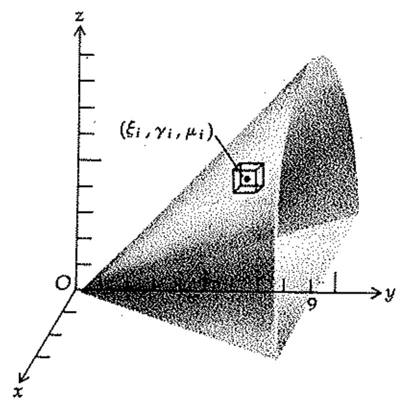
$$= 2k\int_0^9\int_0^{y/3}\int_0^{\sqrt{y^2-9x^2}} z\,dz\,dx\,dy$$

$$= 2k\int_0^9\int_0^{y/3}\left[\tfrac12 z^2\right]_0^{\sqrt{y^2-9x^2}} dx\,dy$$

$$= k\int_0^9\int_0^{y/3}(y^2-9x^2)\,dx\,dy$$

$$= \tfrac29 k\int_0^9 y^3\,dy$$

$$= \tfrac{729}{2}k$$



شکل ۴۰۷۰۲۰

بنابراین، جرم $\frac{729}{2}k$ kg است.

تمرینات ۷۰۲۰

در تمرینهای ۱ تا ۴، انتگرال مکرر را حساب کنید.

۱. $\int_0^1\int_0^{1-z}\int_{2y}^{1+y^2} x\,dz\,dy\,dx$

۲. $\int_1^2\int_y^{y^2}\int_0^{\ln z} ye^z\,dz\,dx\,dy$

۳. $\int_0^{\pi/2}\int_z^{\pi/2}\int_0^{xz}\cos\frac{y}{z}\,dy\,dx\,dz$

۴. $\int_0^2\int_0^y\int_0^{\sqrt3 z}\frac{z}{x^2+z^2}\,dx\,dz\,dy$

در تمرینهای ۵ تا ۱۰، انتگرال سه‌گانه را حساب کنید.

۵. $\iiint_S y\,dV$ در صورتی که S ناحیهٔ محدود به چهاروجهی متشکل از صفحهٔ $12x + 20y + 15z = 60$ و صفحات مختصات باشد.

۶. $\iiint_S (x^2 + z^2)\,dV$ در صورتی که S ناحیهٔ تمرین ۵ باشد.

۷. $\iiint_S z\,dV$ در صورتی که S ناحیهٔ محدود به چهار وجهی به رئوس $(0, 0, 0)$، $(1, 1, 0)$، $(1, 0, 0)$، و $(1, 0, 1)$ باشد.

۸. $\iiint_S yz\,dV$ در صورتی که S ناحیهٔ تمرین ۷ باشد.

۹. $\iiint_S (xz + 3z)\,dV$ درصورتی‌که S ناحیهٔ محدود به استوانهٔ $x^2 + z^2 = 9$ وصفحات $x + y = 3$، $z = 0$، و $y = 0$ بالای صفحهٔ xy باشد.

۱۰. $\iiint_S xyz\,dV$ درصورتی که S ناحیهٔ محدود به استوانه‌های $x^2 + y^2 = 4$ و $x^2 + z^2 = 4$ باشد.

در تمرینهای ۱۱ تا ۲۳، انتگرالگیری سه‌گانه بکار برید.

۱۱. حجم جسم واقع در یکهشتم اول از زیرمحدود به صفحهٔ xy، از بالا به صفحهٔ $z = y$، و از اطراف به استوانهٔ $x = y^2$ و صفحهٔ $x = 1$ را بیابید.

۱۲. حجم جسم واقع در یکهشتم اول محدود به استوانهٔ $x^2 + z^2 = 16$، صفحهٔ $x + y = 2$، و سه صفحهٔ مختصات را بیابید.

۱۳. حجم جسم واقع در یکهشتم اول محدود به استوانه‌های $x^2 + y^2 = 4$ و $x^2 + 2z = 4$ و سه صفحهٔ مختصات را بیابید.

۱۴. حجم جسم محدود به مخروط بیضوی $4x^2 + 9y^2 - 36z^2 = 0$ وصفحهٔ $z = 1$ رابیابید.

۱۵. حجم جسم بالای سهمی‌گون بیضوی $z = 3x^2 + y^2$ و زیر استوانهٔ $x^2 + z = 4$ رابیابید.

۱۶. حجم جسم محصور به کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ را بیابید.

۱۷. حجم جسم محصور به بیضی‌گون

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

را بیابید.

۱۸. حجم جسم محدود به استوانه‌های $z = 5x^2$ و $z = 3 - x^2$، صفحهٔ $y + z = 4$، و صفحهٔ xz را بیابید.

۱۹. جرم جسم همگن محدود به استوانهٔ $z = 4 - x^2$، صفحهٔ $y = 5$، وصفحات مختصات را درصورتی بیابید که چگالی حجم درهر نقطه ρ kg/m³ باشد.

۲۰. جرم جسم محصوربه چهاروجهی متشکل از صفحهٔ $100x + 25y + 16z = 400$ وصفحات مختصات را درصورتی بیابید که چگالی حجم با فاصله تا صفحهٔ yz تغییر کند. چگالی حجم به کیلوگرم بر متر مکعب است.

۲۱. جرم جسم محدود به استوانه‌های $x = z^2$ و $y = x^2$، و صفحات $x = 1$، $y = 0$، و $z = 0$ را بیابید. چگالی حجم با حاصل ضرب فواصل از سه صفحهٔ مختصات تغییر می‌کند، و به کیلوگرم بر متر مکعب است.

۲۲. جرم جسم محدود به سطح $z = 4 - 4x^2 - y^2$ و صفحهٔ xy را بیابید. چگالی حجم در هر نقطهٔ جسم $3z|x|$ kg/m³ است.

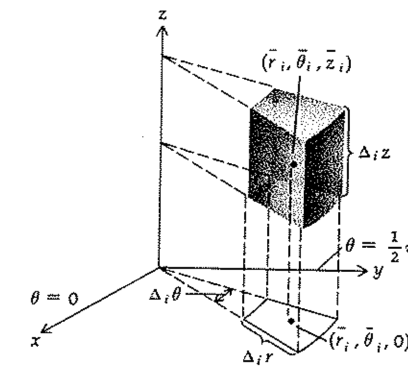
۲۳. جرم جسم محدود به سطح $z = xy$، و صفحات $x = 1$، $y = 1$، و $z = 0$ رابیابید. چگالی حجم در هر نقطهٔ جسم $3\sqrt{x^2 + y^2}$ kg/m³ است.

۲۴. جسمی به شکل استوانهٔ مستدیر قائمی است به شعاع قاعدهٔ r و ارتفاع h متر. جرم جسم را درصورتی بیابید که چگالی حجم با فاصله تا یکی از قاعده‌ها تغییر کند. چگالی حجم به کیلوگرم بر متر مکعب است.

۸.۲۰ انتگرال سه‌گانه در مختصات استوانه‌ای و کروی

اگر ناحیهٔ S در R^3 محور تقارن داشته باشد، انتگرالهای سه‌گانه بر S در مختصات استوانه‌ای آسانتر حساب می‌شوند. اگر تقارن نسبت به یک نقطه داشته باشیم، بهتر است نقطه را مبداء گرفته و از مختصات کروی استفاده کنیم. دراین بخش، انتگرال سه‌گانه در این مختصات را مطرح کرده و آنها را در مسائل فیزیکی بکار می‌بریم.

برای تعریف انتگرال سه‌گانه در مختصات استوانه‌ای، با رسم صفحات ماربر محور z، صفحات عمود بر محور z، و استوانه‌های مستدیر قائم که محور z محورشان است، یک افرازاز ناحیهٔ S می‌سازیم. یک زیر ناحیهٔ نوعی در شکل ۱۰.۸.۲۰ نموده شده‌است. عناصر افراز ساخته شده کاملا" در S واقعند. این افراز را یک **افراز استوانه‌ای** می‌نامیم. طول‌طویلترین "قطر" زیرناحیه‌ها **نرم**افراز است. فرض کنیم n تعداد زیرناحیه‌های افراز



شکل ۱・۸・۲۰

بوده و $\Delta_i V$ حجم زیرناحیهٔ i م باشد. مساحت قاعده $\bar r_i\,\Delta_i r\,\Delta_i\theta$ است، که در آن $\bar r_i = \frac{1}{2}(r_i + r_{i-1})$. از اینرو، اگر $\Delta_i z$ ارتفاع زیر ناحیهٔ i م باشد،

$$\Delta_i V = \bar r_i\,\Delta_i r\,\Delta_i\theta\,\Delta_i z$$

فرض کنیم f تابعی از r، θ، و z بوده، و f بر S پیوسته باشد. نقطهٔ $(\bar r_i, \bar\theta_i, \bar z_i)$ در زیرناحیهٔ i م را طوری می‌گیریم که $\theta_{i-1} \le \bar\theta_i \le \theta_i$، و $z_{i-1} \le \bar z_i \le z_i$. مجموع

$$\sum_{i=1}^{n} f(\bar r_i, \bar\theta_i, \bar z_i)\,\Delta_i V = \sum_{i=1}^{n} f(\bar r_i, \bar\theta_i, \bar z_i)\bar r_i\,\Delta_i r\,\Delta_i\theta\,\Delta_i z \qquad (۱)$$

را تشکیل می‌دهیم. وقتی نرم Δ به صفر نزدیک شود، می‌توان تحت شرایط مناسبی بر S نشان داد که حد مجموعها به شکل (۱) وجود دارند. این حد **انتگرال سه‌گانه در مختصات استوانه‌ای** تابع f بر S نام دارد، و می‌نویسیم

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar r_i, \bar\theta_i, \bar z_i)\,\Delta_i V = \iiint_S f(r, \theta, z)\,dV \qquad (۲)$$

یا

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar r_i, \bar\theta_i, \bar z_i)\bar r_i\,\Delta_i r\,\Delta_i\theta\,\Delta_i z = \iiint_S f(r, \theta, z)\,r\,dr\,d\theta\,dz \qquad (۳)$$

توجه کنید که، در مختصات استوانه‌ای، $dV = r\,dr\,d\theta\,dz$. انتگرال سه‌گانه (۲) و (۳) را می‌توان با انتگرال مکرر حساب کرد. به‌عنوان مثال، فرض کنیم ناحیهٔ S در R^3 به

صفحات $\theta = \alpha$ و $\theta = \beta$، که $\alpha < \beta$، به‌استوانه‌های $r = \lambda_1(\theta)$ و $r = \lambda_2(\theta)$، که λ_1 و λ_2 بر $[\alpha, \beta]$ هموارندو به‌ازای $\alpha \le \theta \le \beta$، $\lambda_1(\theta) \le \lambda_2(\theta)$، و به سطوح $z = F_1(r, \theta)$ و $z = F_2(r, \theta)$، که F_1 و F_2 توابعی دو متغیره‌اند که بر ناحیه‌ای مانند R در صفحهٔ قطبی محدود به منحنیهای $r = \lambda_1(\theta)$، $r = \lambda_2(\theta)$، $\theta = \alpha$، و $\theta = \beta$ هموارند محدود شده باشد. بعلاوه، فرض کنیم به‌ازای هر نقطهٔ (r, θ) در R، $F_1(r, \theta) \le F_2(r, \theta)$. در این صورت، انتگرال سه‌گانه را می‌توان با انتگرال مکرر به‌وسیلهٔ فرمول

$$\iiint_S f(r, \theta, z)\,r\,dr\,d\theta\,dz = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{\lambda_1(\theta)}^{\lambda_2(\theta)} \int_{F_1(r,\theta)}^{F_2(r,\theta)} f(r, \theta, z)\,r\,dz\,dr\,d\theta \qquad (۴)$$

حساب کرد. پنج انتگرال مکرر دیگر وجود دارد که می‌توان از آنها در محاسبهٔ انتگرال سه‌گانهٔ (۴) استفاده کرد، زیرا سه متغیر r، θ، و z دارای شش جایگشت می‌باشند.

انتگرالهای سه‌گانه و مختصات استوانه‌ای بخصوص در یافتن گشتاورهای ماند یک جسم نسبت به محور z مفیدند، زیرا فاصلهٔ محور z تا یک نقطه از جسم به وسیلهٔ مختص r معین می‌شود.

مثال ۱. یک جسم همگن به شکل یک استوانهٔ مستدیر قائم به شعاع 2 m و ارتفاع 4 m است. گشتاور ماند جسم نسبت به محورش را بیابید.

حل. صفحات مختصات را طوری می‌گیریم که صفحهٔ xy صفحهٔ قاعدهٔ جسم و محور z محور جسم باشد. شکل ۲・۸・۲۰ بخشی از جسم در یکهشتم اول همراه با زیرناحیهٔ i م یک افراز استوانه‌ای را نشان می‌دهد. با استفاده از مختصات استوانه‌ای و اختیار نقطهٔ $(\bar r_i, \bar\theta_i, \bar z_i)$ درزیرناحیهٔ i م با چگالی حجم k kg/m³ در هر نقطه، اگر I_z kg-m² گشتاور ماند جسم نسبت به محور z باشد،

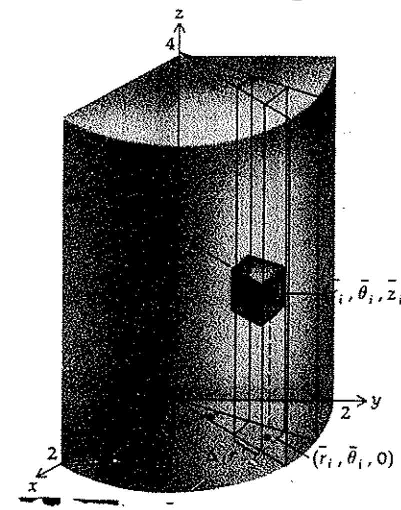
$$I_z = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \bar r_i^{\,2} k\,\Delta_i V$$

$$= \iiint_S kr^2\,dV$$

شش ترتیب مختلف انتگرالگیری وجود دارند. شکل ۲・۸・۲۰ ترتیب $dz\,dr\,d\theta$ را نشان می‌دهد. با استفاده از این ترتیب، داریم

$$I_z = \iiint_S kr^2\,dz\,r\,dr\,d\theta$$

$$= 4k \int_0^{\pi/2}\int_0^2\int_0^4 r^3\,dz\,dr\,d\theta$$



شکل ۲۰۸۰۲۰

در انتگرالگیری اول بلوکها از $z = 0$ تا $z = 4$ جمعبندی می شوند ؛ بلوکها یک ستون می‌شوند . در انتگرالگیری دوم ستونها از $r = 0$ تا $r = 2$ جمعبندی می‌شوند ؛ ستونها یک برش گوه مانند از استوانه می‌شوند . در انتگرالگیری سوم برش گوه شکل از $\theta = 0$ تا $\theta = \frac{1}{2}\pi$ می‌چرخد ؛ این چرخش گوه را حول تمام ناحیهٔ سه‌بعدی در یکهشتم اول جارو می‌کند . با ضرب در 4 تمام حجم بدست می‌آید . با انتگرالگیری خواهیم داشت

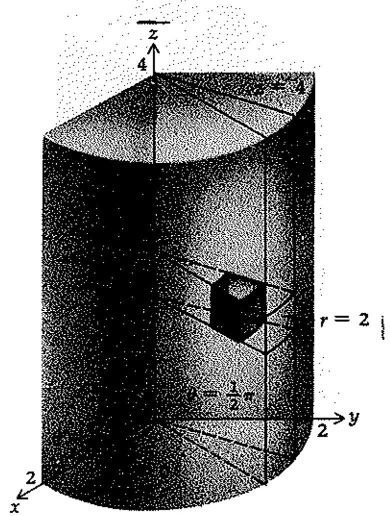
$$\begin{aligned} I_z &= 16k \int_0^{\pi/2}\int_0^2 r^3\,dr\,d\theta \\ &= 64k \int_0^{\pi/2} d\theta \\ &= 32k\pi \end{aligned}$$

از اینرو ، گشتاور ماند $32k\pi$ kg-m² است .

مثال ۲ . مثال ۱ را با اختیار ترتیب انتگرالگیری (آ) $dr\,dz\,d\theta$ ؛ (ب) $d\theta\,dr\,dz$ حل کنید .

حل

(آ) شکل ۳۰۸۰۲۰ ترتیب $dr\,dz\,d\theta$ را نمایش می‌دهد . این شکل نشان می‌دهد که‌بلوکها



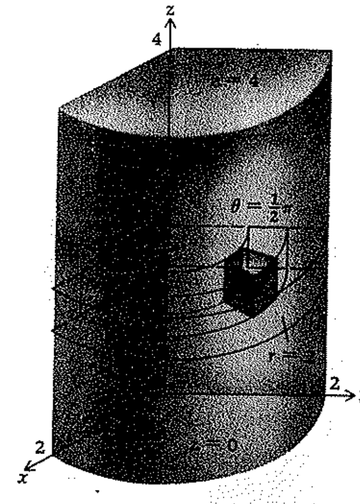
شکل ۳۰۸۰۲۰

از $r = 0$ تا $r = 2$ جمع شده یک قطاع گوه مانند می‌دهد . سپس از $z = 0$ تا $z = 4$ جمعبندی می‌کنیم تا برش گوه مانند بدست آید . این برش از $\theta = 0$ تا $\theta = \frac{1}{2}\pi$ می‌چرخد تا یکهشتم اول را بپوشاند . دراین صورت ،

$$\begin{aligned} I_z &= 4k \int_0^{\pi/2}\int_0^4\int_0^2 r^3 dr\,dz\,d\theta \\ &= 32k\pi \end{aligned}$$

(ب) شکل ۴۰۸۰۲۰ ترتیب $d\theta\,dr\,dz$ را نمایش می‌دهد . این‌شکل نشان می‌دهد که‌بلوکها از $\theta = 0$ تا $\theta = \frac{1}{2}\pi$ جمعبندی شده یک حلقهٔ توخالی داخل استوانه را می‌دهد . این حلقه‌های توخالی از $r = 0$ تا $r = 2$ جمعبندی شده یک برش افقی استوانه را می‌دهد . برشهای افقی از $z = 0$ تا $z = 4$ جمعبندی می‌شوند . بنابراین ،

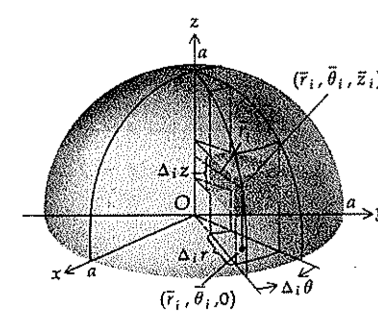
$$\begin{aligned} I_z &= 4k \int_0^4\int_0^2\int_0^{\pi/2} r^3\,d\theta\,dr\,dz \\ &= 32k\pi \end{aligned}$$



شکل ۴۰۸۰۲۰

مثال ۳. جرم یک نیمکرهٔ جامد به شعاع a متر را درصورتی بیابید که چگالی حجم در هر نقطه با فاصلهٔ نقطه تا محور جسم متناسب بوده و به کیلوگرم بر متر مکعب باشد.

حل. هرگاه صفحات مختصات را طوری بگیریم که مبداء در مرکز کره بوده و محور z محور جسم باشد، آنگاه معادلهٔ سطح نیمکره بالای صفحهٔ xy عبارت است از $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$. شکل ۵۰۸۰۲۰ ایـن سطح و جسم همراه با زیر ناحیهٔ i م یک افراز استوانه‌ای را نشان می‌دهد. معادلهٔ نیمکره درمختصات استوانه‌ای $z = \sqrt{a^2 - r^2}$ است. هرگاه $(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i, \bar{z}_i)$



شکل ۵۰۸۰۲۰

نقطه‌ای در زیر ناحیهٔ i م بوده، چگالی حجم دراین نقطه $k\bar{r}_i$ kg/m³ باشد، که در آن k ثابت است، و M kg جرم جسم باشد، آنگاه

$$
\begin{aligned}
M &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} k\bar{r}_i \Delta_i V \\
&= \iiint_S kr\, dV \\
&= k \int_0^{2\pi} \int_0^{a} \int_0^{\sqrt{a^2-r^2}} r^2\, dz\, dr\, d\theta \\
&= k \int_0^{2\pi} \int_0^{a} r^2 \sqrt{a^2 - r^2}\, dr\, d\theta \\
&= k \int_0^{2\pi} \left[-\tfrac{1}{4} r(a^2 - r^2)^{3/2} + \tfrac{1}{8} a^2 r \sqrt{a^2 - r^2} + \tfrac{1}{8} a^4 \sin^{-1} \frac{r}{a} \right]_0^a d\theta \\
&= \tfrac{1}{16} k a^4 \pi \int_0^{2\pi} d\theta \\
&= \tfrac{1}{8} k a^4 \pi^2
\end{aligned}
$$

بنابراین، جرم نیمکرهٔ جامد $\frac{1}{8} k a^4 \pi^2$ kg می‌باشد.

مثال ۴. مرکز جرم جسم مثال ۳ را بیابید.

حل. فرض کنیم نمایش دکارتی مرکز جرم $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ باشد. بخاطر تقارن، $\bar{x} = \bar{y} = 0$. باید $\bar{z}$ را حساب کنیم. هرگاه M_{xy} kg-m گشتاور جرم جسم نسبت به صفحهٔ xy باشد، آنگاه

$$
\begin{aligned}
M_{xy} &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \bar{z}_i (k\bar{r}_i)\, \Delta_i V \\
&= \iiint_S kzr\, dV \\
&= k \int_0^{2\pi} \int_0^{a} \int_0^{\sqrt{a^2-r^2}} zr^2\, dz\, dr\, d\theta \\
&= \tfrac{1}{2} k \int_0^{2\pi} \int_0^{a} (a^2 - r^2) r^2\, dr\, d\theta
\end{aligned}
$$

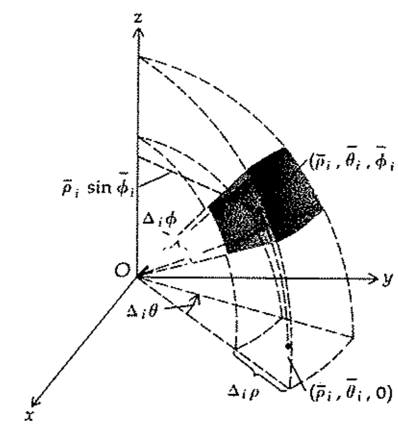
$$= \tfrac{1}{15}ka^5 \int_0^{2\pi} d\theta$$
$$= \tfrac{2}{15}ka^5\pi$$

چون $M\bar{z} = M_{xy}$ ، بدست می‌آوریم

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{\frac{2}{15}ka^5\pi}{\frac{1}{8}ka^4\pi^2} = \frac{16}{15\pi}a$$

بنابراین، مرکز جرم بر محور جسم و در فاصلهٔ $16a/15\pi$ متر تا صفحهٔ قاعده قرار دارد.

حال به‌تعریف انتگرال سه‌گانه در مختصات کروی می‌پردازیم. یک افراز کروی ناحیهٔ سه‌بعدی S از صفحات شامل محور z ، کرات به مرکز مبداء، و مخروطهای مستدیر به‌راس مبداء و محور z ساخته می‌شود. یک زیرناحیهٔ نوعی افراز در شکل ۶۰۸۰۲۰ نموده شده



شکل ۶۰۸۰۲۰

است. هرگاه $\Delta_i V$ حجم زیرناحیهٔ i م بوده، و $(\bar\rho_i, \bar\theta_i, \bar\phi_i)$ نقطه‌ای در آن باشد با تصور اینکه ناحیه مکعب مستطیل است و اختیار حاصل‌ضرب سه بعد، تقریبی برای $\Delta_i V$ بدست می‌آید. این سه بعد عبارتند از $\bar\rho_i \sin\bar\phi_i\, \Delta_i\theta$ ، $\bar\rho_i\, \Delta_i\phi$ ، و $\Delta_i\rho$. شکلهای ۷۰۸۰۲۰ و ۸۰۸۰۲۰ نحوهٔ بدست آمدن دو بعد اول را نشان می‌دهند، و شکل ۶۰۸۰۲۰ بعد $\Delta_i\rho$ را نشان می‌دهد. از اینرو،

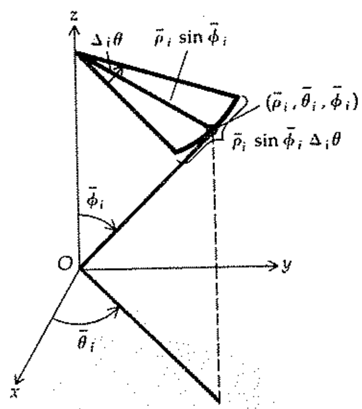
$$\Delta_i V = \bar\rho_i^2 \sin\bar\phi_i\, \Delta_i\rho\, \Delta_i\theta\, \Delta_i\phi$$

انتگرال سه‌گانه در مختصات کروی تابع f بر S عبارت است از

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\bar\rho_i, \bar\theta_i, \bar\phi_i)\, \Delta_i V = \iiint_S f(\rho, \theta, \phi)\, dV \qquad (۵)$$

یا

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\bar\rho_i, \bar\theta_i, \bar\phi_i)\bar\rho_i^2 \sin\bar\phi_i\, \Delta_i\rho\, \Delta_i\theta\, \Delta_i\phi = \iiint_S f(\rho, \theta, \phi)\rho^2 \sin\phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi \qquad (۶)$$



شکل ۷۰۸۰۲۰

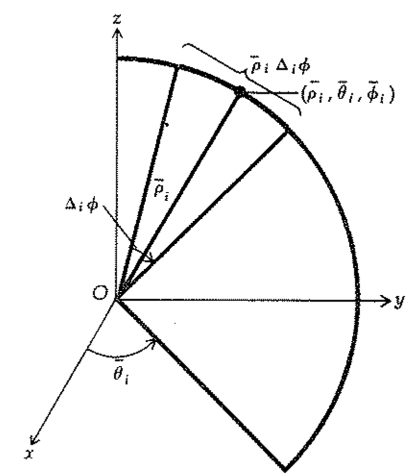
توجه‌کنید‌که در مختصات کروی، $dV = \rho^2 \sin\phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi$. انتگرالهای سه‌گانه در (۵) یا (۶) را می‌توان با انتگرال مکرر حساب کرد. همانطور که در مثال زیر نشان داده شده، مختصات کروی بخصوص در مسائلی در رابطه با کرات مفیدند.

مثال ۵. **جرم نیمکرهٔ جسامد مثال ۳ را درصورتی بیابید که چگالی حجم درهر نقطه با فاصلهٔ نقطه تا مرکز قاعده متناسب باشد.**

حل. هرگاه $(\bar\rho_i, \bar\theta_i, \bar\phi_i)$ نقطه‌ای در زیر ناحیهٔ i م یک افراز کروی باشد، چگالی حجم دراین نقطه $k\bar\rho_i$ kg/m³ است، که در آن k ثابت است. هرگاه M kg جرم جسم باشد،

آنگاه

$$\begin{aligned} M &= \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} k\bar{\rho}_i \, \Delta_i V \\ &= \iiint_S k\rho \, dV \\ &= 4k \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{a} \rho^3 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta \\ &= a^4 k \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} \sin\phi \, d\phi \, d\theta \\ &= a^4 k \int_0^{\pi/2} \Big[-\cos\phi \Big]_0^{\pi/2} d\theta \\ &= a^4 k \int_0^{\pi/2} d\theta \\ &= \tfrac{1}{2} a^4 k\pi \end{aligned}$$



شکل ۸۰۸۰۲۰

از اینرو، جرم نیمکرهٔ جامد $\frac{1}{2}a^4k\pi$ kg است.

مقایسهٔ حل مثال ۵، که از مختصات کروی استفاده می‌کند، با وقتی مختصات دکارتی

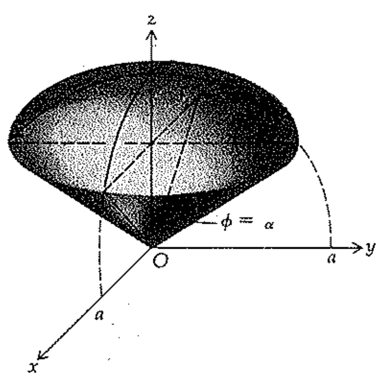
بکار می‌روند جالب است. به روش اخیر، افراز S از تقسیم S با صفحات موازی صفحات مختصات به جعبه‌های مستطیلی شکل بدست می‌آید. هرگاه (ξ_i, γ_i, μ_i) نقطه‌ای در زیر ناحیهٔ i ام باشد، چون $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$، داریم

$$\begin{aligned} M &= \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} k \sqrt{\xi_i^2 + \gamma_i^2 + \mu_i^2} \, \Delta_i V \\ &= \iiint_S k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dV \\ &= 4k \int_0^{a}\int_0^{\sqrt{a^2-z^2}}\int_0^{\sqrt{a^2-y^2-z^2}} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dx \, dy \, dz \end{aligned}$$

واضح است‌که محاسبهٔ این انتگرال خیلی از استفاده از مختصات کروی پیچیده‌تر است.

مثال ۶. یک جسم همگن از بالا به کرهٔ $\rho = a$ و از پایین به مخروط $\phi = \alpha$، که $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$، محدود شده است. گشتاور ماند جسم حول محور z را بیابید.

حل. جسم در شکل ۹۰۸۰۲۰ نموده شده است. فرض‌کنیم k kg/m³ چگالی حجم ثابت



شکل ۹۰۸۰۲۰

در هر نقطه از جسم باشد، یک افراز کروی جسم را تشکیل داده و فرض می‌کنیم $(\bar{\rho}_i, \bar{\theta}_i, \bar{\phi}_i)$ نقطه‌ای در زیرناحیهٔ i ام باشد. فاصلهٔ نقطهٔ $(\bar{\rho}_i, \bar{\theta}_i, \bar{\phi}_i)$ تا محور z مساوی $\bar{\rho}_i \sin\bar{\phi}_i$ است. از اینرو، اگر I_z kg-m² گشتاور ماند جسم داده شده حول محور z باشد،

$$I_z = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} (\bar{\rho}_i \sin\bar{\phi}_i)^2 k \, \Delta_i V$$

$$= \iiint\limits_S k\rho^2 \sin^2\phi \, dV$$

$$= k\int_0^{\alpha}\int_0^{2\pi}\int_0^{a} (\rho^2 \sin^2\phi)\rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi$$

$$= \tfrac{1}{5}ka^5 \int_0^{\alpha}\int_0^{2\pi} \sin^3\phi \, d\theta \, d\phi$$

$$= \tfrac{2}{5}ka^5\pi \int_0^{\alpha} \sin^3\phi \, d\phi$$

$$= \tfrac{2}{5}ka^5\pi\Big[-\cos\phi + \tfrac{1}{3}\cos^3\phi\Big]_0^{\alpha}$$

$$= \tfrac{2}{15}ka^5\pi(\cos^3\alpha - 3\cos\alpha + 2)$$

بنابراین، گشتاور ماند جسم حول محور z مساوی است با

$$\tfrac{2}{15}ka^5\pi(\cos^3\alpha - 3\cos\alpha + 2) \text{ kg-m}^2$$

تمرینات ۸۰۲۰

در تمرینهای ۱ تا ۶، انتگرال مکرر را حساب کنید.

۱. $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\int_0^{a}\int_0^{r\cos\theta} r\sec^3\theta \, dz \, dr \, d\theta$

۲. $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\int_{2\sin\theta}^{2\cos\theta}\int_0^{r\sin\theta} r^2\cos\theta \, dz \, dr \, d\theta$

۳. $\displaystyle\int_0^{\pi}\int_2^{4}\int_0^{1} re^z \, dz \, dr \, d\theta$

۴. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2} \rho^3\sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$

۵. $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\int_0^{2a\cos\phi}\int_0^{2\pi} \rho^2\sin\phi \, d\theta \, d\rho \, d\phi$

۶. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_{\pi/4}^{\phi}\int_0^{a\csc\theta} \rho^3\sin^2\theta\sin\phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi$

۷. حجم جسم محصور بـه کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ را با استفاده از (آ) مختصات استوانه‌ای و (ب) مختصات کروی بیابید.

۸. هرگاه S جسم دریکهشتم اول محدود به کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ و صفحات مختصات باشد، انتگرال سه‌گانهٔ $\iiint\limits_S xyz \, dV$ را به سه روش حساب کنید: (آ) با استفاده از مختصات کروی؛ (ب) با استفاده از مختصات قائم؛ (پ) با استفاده از مختصات استوانه‌ای.

در تمرینهای ۹ تا ۱۲، مختصات استوانه‌ای را بکار برید.

۹. جرم جسم محدود به کره‌ای به شعاع a متر را درصورتی بیابید که چگالی حجم با مربع فاصله تا مرکز تغییر کند. چگالی حجم به کیلوگرم بر متر مکعب است.

۱۰. جرم جسم در یکهشتم اول داخل استوانهٔ $x^2 + y^2 = 4x$ و زیر کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ را بیابید. چگالی حجم با فاصله تا صفحهٔ xy تغییر مـی‌کند، و به کیلوگرم برمتر مکعب است.

۱۱. گشتاور مـاند جسـم همگن محدود به استوانهٔ $r = 5$، مخروط $z = r$، و صفحهٔ xy حول محور z را بیابید. چگالی حجم در هر نقطه k اسلاگ بر فوت مکعب است.

۱۲. گشتاور ماند جسم محدود به یک استوانهٔ مستدیر قائم به ارتفاع h متر و شعاع a متر را نسبت به محور استوانه بیابید. چگالی حجم با فاصله تا محور استوانه تغییر می‌کند، و به کیلوگرم بر متر مکعب است.

در تمرینهای ۱۳ تا ۱۶، مختصات کروی بکار برید.

۱۳. مرکز جـرم جسم محدود به نیمکرهٔ مثال ۵ را بیابید. چگالی حجم همان بوده در مثال ۵ است.

۱۴. گشتاور ماند جسم همگن محدود به کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ حول محور z را بیابید. چگالی حجم در هر نقطه k اسلاگ بر فوت مکعب است.

۱۵. گشتاور ماند جسم همگن داخل استوانهٔ $x^2 + y^2 - 2x = 0$، زیر مخروط $x^2 + y^2 = z^2$، و بـالای صفحهٔ xy حول محـور z را بیابید. چگالی حجم در هر نقطه $k \text{ kg/m}^3$ اسـت.

۱۶. جرم یک جسم کروی به شعاع a متر را درصورتی بیابید که چگالی حجم در هرنقطه با فاصلهٔ نقطه تا مرکز کره متناسب باشد. چگالی حجم به کیلوگرم بر متر مکعب است.

در تمرینهای ۱۷ تا ۲۲، بهترین دستگاه مختصات برای مسئله را بکار برید.

۱۷. جرم یک نیمکرهٔ جامد به شعاع 2 m را درصورتی بیابید که چگالی حجم با فاصلهٔ مرکز قاعده تغییر کند و به کیلوگرم بر متر مکعب باشد.

۱۸. جرم جسم همگن داخل سهمی‌گون $3x^2 + 3y^2 = z$ و خارج مخروط $x^2 + y^2 = z^2$ را در صورتی بیابید که چگالی حجم ثابت $k \text{ kg/m}^3$ باشد.

۱۹. مرکز جرم جسم داخل سهمی‌گون $x^2 + y^2 = z$ و خارج مخروط $x^2 + y^2 = z^2$ را بیابید. چگالی حجم ثابت $k \text{ kg/m}^3$ است.

۲۰. گشتاور ماند جسم همگن تمرین ۱۹ نسبت به محور z را پیدا کنید.

۲۱. گشتاور ماند جسم بین دو کرهٔ متحدالمرکز به شعاعهای $a \text{ ft}$ و $2a \text{ ft}$ حول یک قطر

را بیابید. چگالی حجم با معکوس مربع فاصله تا مرکز تغییر می‌کند، و به اسلاگ بر فوت مکعب است.

۲۲. جرم جسم تمرین ۲۱ را بیابید. چگالی حجم همان بوده در تمرین ۲۱ است.

در تمرینهای ۲۳ تا ۲۶، انتگرال مکرر را با استفاده از مختصات استوانه‌ای یا کروی حساب کنید.

۲۳. $\int_0^4\int_0^3\int_0^{\sqrt{9-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\,dy\,dx\,dz$

۲۴. $\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-y^2}}\int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\,dz\,dx\,dy$

۲۵. $\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-y^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z^2\,dz\,dx\,dy$

۲۶. $\int_0^2\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dz\,dy\,dx$

تمرینات دوره‌ای برای فصل ۲۰

در تمرینهای ۱ تا ۸، انتگرال مکرر داده شده را حساب کنید.

۱. $\int_0^1\int_x^{\sqrt{x}} x^2y\,dy\,dx$

۲. $\int_{-2}^2\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} xy\,dx\,dy$

۳. $\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\sin\theta} r\cos^2\theta\,dr\,d\theta$

۴. $\int_0^{\pi}\int_0^{3(1+\cos\theta)} r^2\sin\theta\,dr\,d\theta$

۵. $\int_0^1\int_0^z\int_0^{y+z} e^xe^ye^z\,dx\,dy\,dz$

۶. $\int_1^2\int_3^x\int_0^{\sqrt{3}y} \frac{y}{y^2+z^2}\,dz\,dy\,dx$

۷. $\int_0^{\pi/2}\int_{\pi/6}^{\pi/2}\int_0^2 \rho^3\sin\phi\cos\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$

۸. $\int_0^a\int_0^{\pi/2}\int_0^{\sqrt{a^2-z^2}} zre^{-r^2}\,dr\,d\theta\,dz$

در تمرینهای ۹ تا ۱۲، انتگرال چندگانه را حساب کنید.

۹. $\iint_R xy\,dA$ ؛ R ناحیه در ربع اول و محدود به دایرهٔ $x^2+y^2=1$ و محورهای مختصات است.

۱۰. $\iint_R (x+y)\,dA$ ؛ R ناحیهٔ محدود به منحنی $y=\cos x$ و محور x از $x=-\frac{1}{2}\pi$ تا $x=\frac{1}{2}\pi$ است.

۱۱. $\iiint_S z^2\,dV$ ؛ S ناحیهٔ محدود به استوانه‌های $x^2+z=1$ و $y^2+z=1$ و صفحهٔ

xy است.

۱۲. $\iiint_S y\cos(x+z)\,dV$ ؛ S ناحیهٔ محدود به استوانهٔ $x=y^2$ و صفحات $x+z=\frac{1}{2}\pi$ ، $y=0$ ، و $z=0$ است.

۱۳. انتگرال مضاعف

$$\iint_R \frac{1}{x^2+y^2}\,dA$$

که در آن R ناحیه در ربع اول محدود به دو دایرهٔ $x^2+y^2=1$ و $x^2+y^2=4$ است، را با مختصات قطبی حساب کنید.

۱۴. انتگرال مکرر $\int_0^1\int_{\sqrt{3}y}^{\sqrt{4-y^2}} \ln(x^2+y^2)\,dx\,dy$ را با مختصات قطبی حساب کنید.

در تمرینهای ۱۵ و ۱۶، انتگرال مکرر را با عکس کردن ترتیب انتگرالگیری حساب کنید.

۱۵. $\int_0^1\int_x^1 \sin y^2\,dy\,dx$

۱۶. $\int_0^1\int_0^{\cos^{-1}y} e^{\sin x}\,dx\,dy$

در تمرینهای ۱۷ و ۱۸، انتگرال خط را با قضیهٔ گرین حساب کنید.

۱۷. $\oint_C (3x+2y)\,dx+(3x+y^2)\,dy$ ، که در آن C بیضی $16x^2+9y^2=144$ است.

۱۸. $\oint_C \ln(y+1)\,dx-\frac{xy}{y+1}\,dy$ ، که در آن C منحنی بستهٔ حاصل از منحنی $\sqrt{x}+\sqrt{y}=2$ و بازه‌های $[0,4]$ بر محورهای x و y است.

در تمرینهای ۱۹ و ۲۰ انتگرال مکرر را با تغییر به مختصات کروی یا استوانه‌ای حساب کنید.

۱۹. $\int_0^3\int_0^{\sqrt{9-x^2}}\int_0^2 \sqrt{x^2+y^2}\,dz\,dy\,dx$

۲۰. $\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}}\int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z\sqrt{4-x^2-y^2}\,dz\,dy\,dx$

۲۱. با استفاده از انتگرالگیری مضاعف، مساحت ناحیه در ربع اول محدود به سهمیهای $x^2=4y$ و $x^2=8-4y$ را به دو روش بیابید: (ا) ابتدا نسبت به x انتگرال بگیرید؛ (ب) ابتدا نسبت به y انتگرال بگیرید.

۲۲. با استفاده از انتگرالگیری مضاعف، مساحت ناحیه در صفحهٔ xy و محدود به

سهمیهای $x^2 - 9 = y$ و $y = x^2 + 1$ را بیابید .

۲۳ . با استفاده از قضیهٔ ۲۰.۶.۲۰ ، مساحت ناحیهٔ محصور به سهمی $y = x^2$ و خط $y = x + 2$ را بیابید .

۲۴ . با استفاده‌از انتگرالگیری مضاعف ، حجم جسم بالای صفحهٔ xy محدود به‌استوانهٔ $x^2 + y^2 = 16$ و صفحهٔ $z = 2y$ را به دو روش بیابید : (آ) ابتدا نسبت به x انتگرال بگیرید ؛ (ب) ابتدا نسبت به y انتگرال بگیرید .

۲۵ . حجم جسم محدود به سطوح $x^2 = 4y$ ، $y^2 = 4x$ ، و $x^2 = z - y$ را بیابید .

۲۶ . جرم ورقه‌ای به شکل ناحیهٔ محدود به سهمی $y = x^2$ و خط $x - y + 2 = 0$ را در صورتی بیابید که چگالی سطح در هر نقطه x^2y^2 kg/m² باشد .

۲۷ . مساحت سطح استوانهٔ $x^2 + y^2 = 9$ واقع در یکهشتم اول و بین صفحات $z = x$ و $z = 3x$ را بیابید .

۲۸ . مساحت سطح آن قسمت از استوانهٔ $x^2 + y^2 = a^2$ که داخل استوانهٔ $y^2 + z^2 = a^2$ واقع است را بیابید .

۲۹ . با استفاده از انتگرالگیری مضاعف ، مساحت ناحیهٔ داخل دایرهٔ $r = 1$ و سمت راست سهمی $r(1 + \cos\theta) = 1$ را بیابید .

۳۰ . جرم ورقه‌ای‌به شکل‌ناحیهٔ خارج‌لیماسون $r = 3 - \cos\theta$ و داخل دایرهٔ $r = 5\cos\theta$ را درصورتی بیابید که چگالی سطح در هر نقطه $2|\sin\theta|$ kg/m² باشد .

۳۱ . مرکزجرم ورقهٔ‌مستطیلی شکل محدود به خطوط $x = 3$ و $y = 2$ و محورهای مختصات را درصورتی بیابید که چگالی سطح xy^2 kg/m² باشد .

۳۲ . مرکز جرم ورقه‌ای به شکل ناحیهٔ محدود به سهمیهای $x^2 = 4 + 4y$ و $x^2 = 4 - 8y$ را در صورتی بیابید که چگالی سطح در هر نقطه kx^2 kg/m² باشد .

۳۳ . جرم ورقه‌ای‌به شکل ناحیهٔ محدود به محور قطبی و منحنی $r = \cos 2\theta$ ، که درآن $0 \le \theta \le \frac{1}{4}\pi$ ، را پیدا کنید . چگالی سطح در هر نقطه $r\theta$ kg/m² است .

۳۴ . گشتاور ماند ورقه‌ای به شکل ناحیهٔ محدود به دایرهٔ $x^2 + y^2 = a^2$ حول محور x را در صورتی بیابید که چگالی سطح در هر نقطه $k\sqrt{x^2 + y^2}$ kg/m² باشد .

۳۵ . با استفاده ازقضیهٔ گرین ، کارکل انجام شده در حرکت یکبار جسمی در جهت‌خلاف حرکت عقربه‌های ساعت حول بیضی $4x^2 + y^2 = 16$ را درصورتی بیابید که حرکت‌از میدان نیروی $\mathbf{F}(x, y) = (e^x + 2y)\mathbf{i} + (x^2 - \tan y)\mathbf{j}$ ناشی شده باشد . فرض کنید قوس به متر و نیرو به نیوتن باشد .

۳۶ . قضیهٔ استوکس در صفحه را درصورتی تحقیق کنید که $\mathbf{F}(x, y) = x^2\mathbf{i} - 2xy\mathbf{j}$ و R

ناحیهٔ محدود به دایرهٔ $x^2 + y^2 = 9$ باشد .

۳۷ . قضیهٔ دیورژانس در صفحه را برای $\mathbf{F}$ و R تمرین ۳۶ تحقیق کنید .

۳۸ . با استفاده از انتگرالگیری سه‌گانه ، حجم جسم در یکهشتم اول محدود به صفحهٔ $y + z = 8$ ، استوانهٔ $y = 2x^2$ ، صفحهٔ xy ، و صفحهٔ yz را بیابید .

۳۹ . گشتاور ماند ورقه‌ای به شکل ناحیهٔ محدود به منحنی $y = e^x$ ، خط $x = 2$ ، و محورهای مختصات حول محور x را در صورتی بیابید که چگالی سطح در هر نقطه xy kg/m² باشد .

۴۰ . گشتاور ماند ورقهٔ تمرین ۳۹ حول محور y را پیدا کنید .

۴۱ . گشتاورماند ورقه‌ای همگن به شکل ناحیهٔ محدود به منحنی $r^2 = 4\cos 2\theta$ حول‌محور $\frac{1}{2}\pi$ را درصورتی بیابید که چگالی سطح در هر نقطه k kg/m² باشد .

۴۲ . جرم ورقهٔ تمرین ۴۱ را پیدا کنید .

۴۳ . گشتاور ماند قطبی و شعاع چرخش ورقهٔ تمرین ۴۱ را بیابید .

۴۴ . گشتاور ماند ورقه‌ای به شکل ناحیهٔ محدود به سهمی $y = x - x^2$ و خط $x + y = 0$ حول محور y را درصورتی‌بیابیدکه چگالی سطح در هر نقطه $(x + y)$ kg/m² باشد .

۴۵ . جرم جسم محدودبه کرات $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ و $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ را درصورتی بیابید که چگالی حجم در هر نقطه $k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ kg/m³ باشد .

۴۶ . گشتاور ماند جسم تمرین ۴۵ را حول محور z پیدا کنید .

۴۷ . جسم همگن محدود به مخروط $z^2 = 4x^2 + 4y^2$ بین صفحات $z = 0$ و $z = 4$ دارای چگالی حجم k kg/m³ در هر نقطه است . گشتاور ماند این جسم را حول محور z پیدا کنید .

۴۸ . مرکز جرم جسم محدود به کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 - 6z = 0$ و مخروط $x^2 + y^2 = z^2$ ، و بالای مخروط ، را درصورتی بیابید که چگالی حجم در هر نقطه kz kg/m³ باشد .