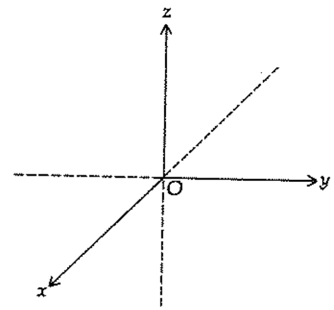
۱۷
بردارها در فضای سه‌بعدی و هندسهٔ تحلیلی فضایی

۱۰۱۷ R^3 ، فضای عددی سه‌بعدی

در فصل ۱ خط اعداد R^1 (فضای عددی یک‌بعدی) و صفحهٔ اعداد R^2 (فضای عددی دوبعدی) مطرح شدند. اعداد حقیقی در R^1 را با نقاط محور افقی و جفت اعداد حقیقی در R^2 را با نقاط صفحهٔ هندسی یکی می‌کنیم. حال، به همین نحو، مجموعهٔ تمام سه‌تاییهای مرتب از اعداد حقیقی را معرفی می‌کنیم.

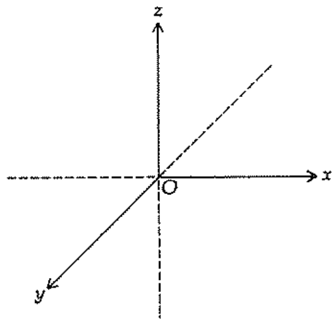
۱۰۱۰۱۷ تعریف. مجموعهٔ تمام سه‌تاییهای مرتب از اعداد حقیقی را **فضای عددی سه بعدی** نامیده و با R^3 نشان می‌دهیم. هر سه تایی مرتب (x, y, z) یک **نقطه** در فضای عددی سه‌بعدی نام دارد.

برای نمایش R^3 در فضای سه‌بعدی هندسی، فواصل جهتدار یک نقطه از سه صفحهٔ دوبدو متعامد را درنظر می‌گیریم. این صفحات از سه خط دوبدو متعامد که در نقطه‌ای متقاطع‌اند تشکیل می‌شوند، و ما این نقطه را **مبدأ** نامیده و با حرف O نشان می‌دهیم. این خطوط، به‌نام محورهای مختصات، را محور x ، محور y ، و محور z می‌خوانیم.



شکل ۱۰۱۰۱۷

معمولاً" محور x و محور y را دریک صفحهٔ افقی، و محور z را قائم می‌گیرند. بر هر محور جهت مثبتی اختیار می‌کنند. اگر جهات مثبت مثل شکل ۱۰۱۰۱۷ گرفته شوند، دستگاه مختصات یک **دستگاه راست‌دست** نام دارد. این اصطلاح ناشی از این است که اگر دست راست طوری قرار گیرد که انگشت شست در جهت مثبت محور x و انگشت سبابه در جهت مثبت محور y باشد، انگشت میانی در جهت مثبت محور z است. اگر انگشت میانی درجهت منفی محور z باشد، دستگاه مختصات را **چپ‌دست** می‌نامند. در شکل ۲۰۱۰۱۷ یک دستگاه چپ‌دست نموده شده است. درحالت کلی، یک دستگاه راست‌دست



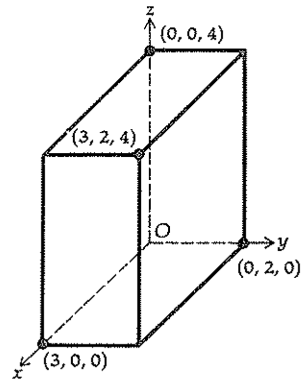
شکل ۲۰۱۰۱۷

بکار می‌بریم. سه محور سه صفحهٔ مختصات معین می‌کنند: صفحهٔ xy شامل محورهای x و y ، صفحهٔ xz شامل محورهای x و z ، و صفحهٔ yz شامل محورهای y و z .

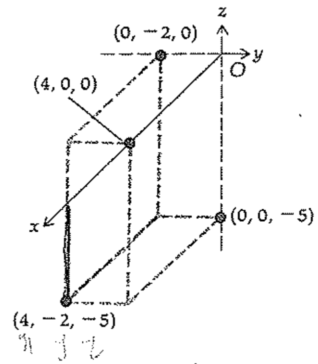
به‌هر نقطهٔ P در فضای سه‌بعدی هندسی یک سه‌تایی مرتب از اعداد حقیقی مانند (x, y, z) مربوط می‌شود. فاصلهٔ جهتدار P از صفحهٔ yz **مختص** x ، فاصلهٔ جهتدار P از صفحهٔ xz **مختص** y ، و فاصلهٔ جهتدار P از صفحهٔ xy **مختص** z است. این سه مختص **مختصات دکارتی قائم** نقطه نام دارند، و تناظر یک به‌یکی (به‌نام **دستگاه مختصات دکارتی قائم**) بین تمام این سه‌تاییهای مرتب از اعداد حقیقی و نقاط در یک فضای سه بعدی هندسی وجود دارد. از اینرو، ما R^3 را با فضای سه‌بعدی هندسی یکی می‌کنیم، و سه‌تایی مرتب (x, y, z) را یک نقطه می‌نامیم. نقطهٔ $(3, 2, 4)$ در شکل ۳۰۱۰۱۷ و نقطهٔ $(4, -2, -5)$ در شکل ۴۰۱۰۱۷ نموده شده است. سه صفحهٔ مختصات فضا را به‌هشت قسمت تقسیم می‌کنند، به‌نام **یکهشتم**. یکهشتم اول قسمتی است که درآن هرسه مختصات مثبت‌اند.

یک خط موازای یک صفحه است اگر و فقط اگر فاصلهٔ هر نقطه از خط تا صفحه یکی

باشد.

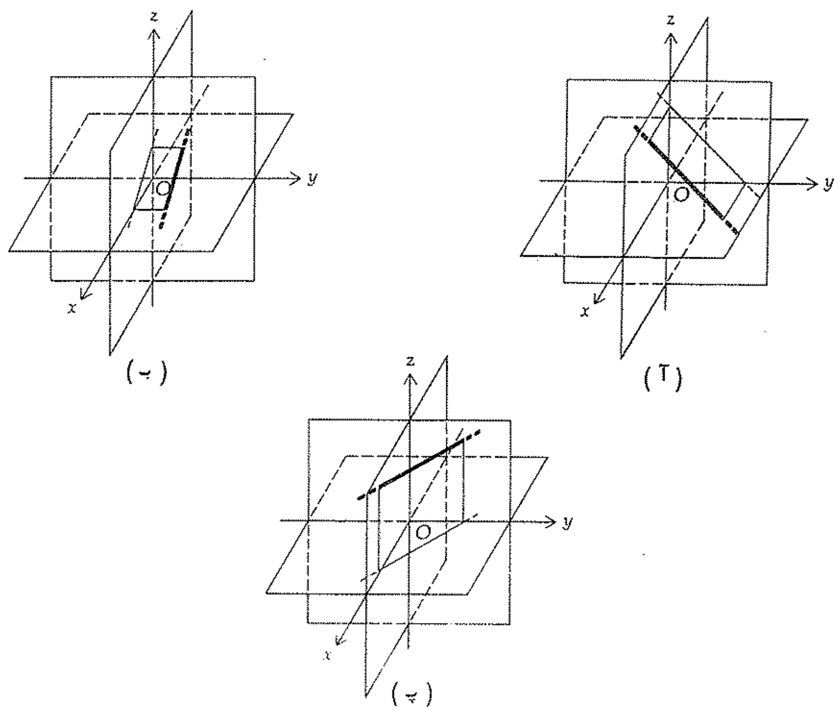


شکل ۳۰۱۰۱۷



شکل ۴۰۱۰۱۷

توضیح ۱. در شکل ۵۰۱۰۱۷ (آ)، (ب)، و (پ) بترتیب یک خط موازی صفحهٔ yz ،



شکل ۵۰۱۰۱۷

یک خط موازی صفحهٔ xz ، و یک خط موازی صفحهٔ xy نموده شده است.

ما تمام خطوط واقع در یک صفحه را موازی آن صفحه می‌گیریم، که در این حالت فاصلهٔ هر نقطه از خط تا صفحه صفر است. قضیهٔ زیر فوراً بدست می‌آید.

۲۰۱۰۱۷ قضیه. (یک) *یک خط موازی صفحهٔ yz است اگر و فقط اگر تمام نقاط واقع برآن مختص x مساوی داشته باشند.*

(دو) *یک خط موازی صفحهٔ xz است اگر و فقط اگر تمام نقاط واقع بر آن مختص y مساوی داشته باشند.*

(سه) *یک خط موازی صفحهٔ xy است اگر و فقط اگر تمام نقاط واقع برآن مختص z مساوی داشته باشند.*

در فضای سه‌بعدی، اگر خطی موازی دو صفحهٔ متقاطع باشد، موازی فصل مشترک دو صفحه است. همچنین، اگر خطی موازی خط دیگری باشد، خط اول موازی هر صفحهٔ شامل خط دوم است. قضیهٔ ۳۰۱۰۱۷ از این دو مطلب در هندسهٔ فضایی و قضیهٔ ۲۰۱۰۱۷ بدست می‌آید.

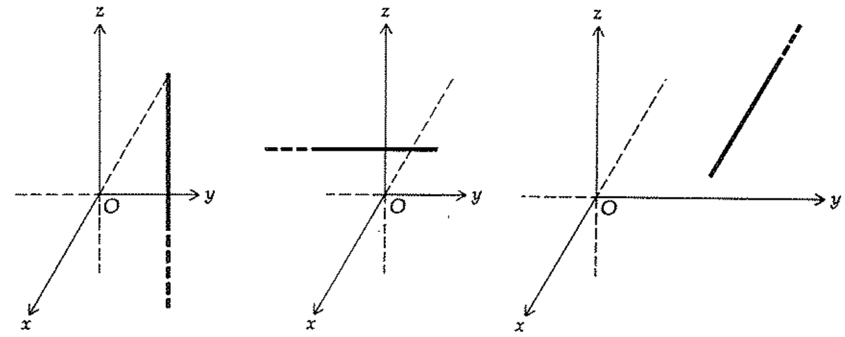
۳۰۱۰۱۷ قضیه. (یک) *یک خط موازی محور x است اگر و فقط اگر تمام نقاط آن مختص y و مختص z مساوی داشته باشند.*

(دو) *یک خط موازی محور y است اگر و فقط اگر تمام نقاط آن مختص x و مختص z مساوی داشته باشند.*

(سه) *یک خط موازی محور z است اگر و فقط اگر تمام نقاط آن مختص x و مختص y مساوی داشته باشند.*

توضیح ۲. در شکل ۶۰۱۰۱۷ (آ)، (ب)، و (پ) بترتیب خطی موازی محور x ، خطی موازی محور y ، و خطی موازی محور z نموده شده است.

فرمولهای فاصلهٔ جهتدار یک نقطه تا نقطهٔ دیگر بر خطی موازی یک محور مختصات از تعریف فاصلهٔ جهتدار که در بخش ۳۰۱ داده شد بدست می‌آیند و در قضیهٔ زیر بیان شده‌اند.



(پ) (ب) (آ)

شکل ۶۰۱۰۱۷

۴۰۱۰۱۷ قضیه. (یک) *هرگاه $A(x_1, y, z)$ و $B(x_2, y, z)$ دو نقطه برخطی موازی محور x باشند، فاصلهٔ جهتدار A تا B، که با $\overline{AB}$ نموده می‌شود، عبارت است از*

$$\overline{AB} = x_2 - x_1$$

(دو) *هرگاه $C(x, y_1, z)$ و $D(x, y_2, z)$ دو نقطه برخطی موازی محور y باشند، فاصلهٔ جهتدار C تا D، که با $\overline{CD}$ نموده می‌شود، عبارت است از*

$$\overline{CD} = y_2 - y_1$$

(سه) *هرگاه $E(x, y, z_1)$ و $F(x, y, z_2)$ دو نقطه برخطی موازی محور z باشند، فاصلهٔ جهتدار E تا F، که با نموده می‌شود، عبارت است از*

$$\overline{EF} = z_2 - z_1$$

توضیح ۳. فاصلهٔ جهتدار $\overline{PQ}$ از نقطهٔ $P(2, -5, -4)$ تا نقطهٔ $Q(2, -3, -4)$ از قضیهٔ ۴۰۱۰۱۷ (دو) بدست می‌آید.

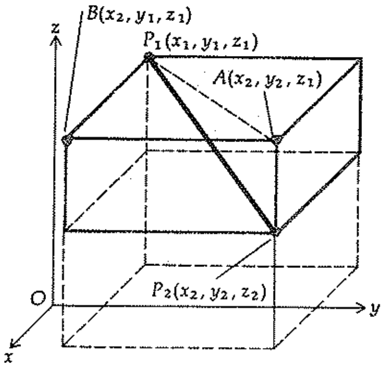
$$\overline{PQ} = (-3) - (-5) = 2$$

قضیهٔ زیر فرمولی برای فاصلهٔ بدون‌جهت بین دو نقطه در فضای سه‌بعدی بدست می‌دهد.

۵۰۱۰۱۷ قضیه. *فاصلهٔ بدون جهت بین دو نقطهٔ $P_1(x_1, y_1, z_1)$ و $P_2(x_2, y_2, z_2)$ عبارت است از*

$$|\overline{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

برهان. مکعب مستطیلی می‌سازیم که P_1 و P_2 دو راس مقابل آن بوده و وجوهش موازی محورهای مختصات باشند (ر.ک. شکل ۷۰۱۰۱۷).



شکل ۷۰۱۰۱۷

بنابر قضیهٔ فیثاغورس،

$$|\overline{P_1P_2}|^2 = |\overline{P_1A}|^2 + |\overline{AP_2}|^2 \tag{۱}$$

چون

$$|\overline{P_1A}|^2 = |\overline{P_1B}|^2 + |\overline{BA}|^2 \tag{۲}$$

با گذاردن (۲) در (۱)، بدست می‌آید

$$|\overline{P_1P_2}|^2 = |\overline{P_1B}|^2 + |\overline{BA}|^2 + |\overline{AP_2}|^2 \tag{۳}$$

با اعمال قضیهٔ ۴۰۱۰۱۷ (یک)، (دو)، و (سه) برطرف راست (۳)، خواهیم داشت

$$|\overline{P_1P_2}|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

درنتیجه،

$$|\overline{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

و قضیه ثابت می‌شود.

مثال ۱. فاصلهٔ بدون جهت بین نقاط $P(-3, 4, -1)$ و $Q(2, 5, -4)$ را بیابید.

حل. از قضیهٔ ۵.۱.۱۷ داریم

$$|\overline{PQ}| = \sqrt{(2+3)^2 + (5-4)^2 + (-4+1)^2} = \sqrt{25+1+9} = \sqrt{35}$$

فرمول فاصلهٔ بین دو نقطه در R^3 صرفاً تعمیمی است از فرمول نظیر فاصلهٔ دو نقطه در R^2 که در قضیهٔ ۱.۳.۱ داده شد. لازم است بگوییم که فاصلهٔ بدون جهت بین دو نقطهٔ x_2 و x_1 در R^1 عبارت است از

$$|x_2 - x_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2}$$

فرمولهای مختصات نقطهٔ میانی یک پاره‌خط از تشکیل مثلثهای متشابه و استدلال مشابه حالت دوبعدی بدست می‌آیند. این فرمولها در قضیهٔ ۶.۱.۱۷ داده شده‌اند، و اثبات آن به‌عنوان تمرین گذارده می‌شود (ر.ک. تمرین ۱۸).

۶.۱.۱۷ قضیه. ***مختصات نقطهٔ میانی پاره خط به نقاط انتهایی $P_1(x_1, y_1, z_1)$ و $P_2(x_2, y_2, z_2)$ عبارتند از***

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad \bar{y} = \frac{y_1 + y_2}{2} \qquad \bar{z} = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

۷.۱.۱۷ تعریف. ***نمودار یک معادله*** در R^3 مجموعهٔ تمام نقاطی مانند (x, y, z) است که مختصاتشان در معادله صدق می‌کنند.

نمودار یک معادله در R^3 یک **سطح** نامیده می‌شود. یک سطح خاص کِره است، که اینک تعریف می‌شود.

۸.۱.۱۷ تعریف. یک کره مجموعهٔ جمیع نقاطی درفضای سه‌بعدی است که از یک نقطهٔ ثابت هم‌فاصله‌اند. نقطهٔ ثابت را **مرکز** کره و فاصلهٔ ثابت را **شعاع** کره می‌نامند.

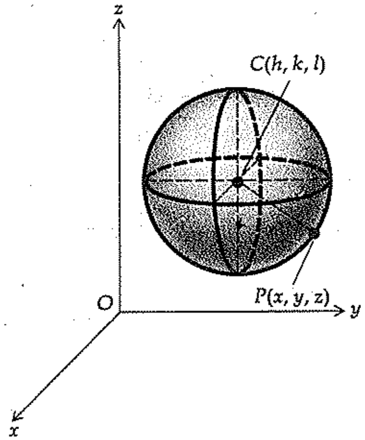
۹.۱.۱۷ قضیه. ***معادلهٔ کره به شعاع r و مرکز (h, k, l) عبارت است از***

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 + (z-l)^2 = r^2 \qquad (۴)$$

برهان. نقطهٔ (h, k, l) را با C نشان می‌دهیم (ر.ک. شکل ۸.۱.۱۷). نقطهٔ $P(x, y, z)$

نقطه‌ای است بر کره اگر و فقط اگر

$$|\overline{CP}| = r$$



شکل ۸.۱.۱۷

یا، معادلاً،

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2 + (z-l)^2} = r$$

نتیجهٔ مطلوب از مجذور کردن طرفین معادلهٔ فوق بدست می‌آید.

اگر مرکز کره مبداء باشد، $h = k = l = 0$؛ درنتیجه، معادلهٔ این کره عبارت است از

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

اگر جملات (۴) را بسط داده و آنها را دسته‌بندی کنیم، خواهیم داشت

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2hx - 2ky - 2lz + (h^2 + k^2 + l^2 - r^2) = 0$$

این معادله به شکل

$$x^2 + y^2 + z^2 + Gx + Hy + Iz + J = 0 \qquad (۵)$$

است، که درآن G، H، I، و J ثابت‌اند. معادلهٔ (۵) **شکل کلی** معادلهٔ کره‌نامیده می‌شود، حال آنکه (۴) **شکل مرکز ــ شعاع** نام دارد. چون هر کره یک مرکز و یک شعاع دارد، معادله‌اش را می‌توان به‌شکل مرکز ــ شعاع و درنتیجه به شکل کلی درآورد.

می‌توان نشان داد که هر معادله به‌شکل (۵) به‌صورت زیر در می‌آید:

$$(x-h)^2+(y-k)^2+(z-l)^2=K \qquad (۵)$$

که درآن

$$h=-\tfrac{1}{2}G \qquad k=-\tfrac{1}{2}H \qquad l=-\tfrac{1}{2}I \qquad K=\tfrac{1}{4}(G^2+H^2+I^2-4J)$$

اثبات این امر را به‌عنوان تمرین می‌گذاریم (ر.ک. تمرین ۱۹).

هرگاه $K>0$ ، رابطهٔ (۶) به شکل معادلهٔ (۴) است؛ درنتیجه، نمودار معادله کره‌ای است به مرکز (h, k, l) و شعاع $\sqrt{K}$. اگر $K=0$ ، نمودار معادله نقطهٔ (h, k, l) است. این را یک *نقطه ـ کره* می‌نامیم. اگر $K<0$ ، نمودار مجموعه‌ای تهی است، زیرا مجموع مربعات سه عدد حقیقی نامنفی است. این نتیجه را به‌صورت قضیه بیان می‌کنیم.

۱۰.۱.۱۷ قضیه. *نمودار یک معادلهٔ درجهٔ دوم از x ، y ، و z به شکل*

$$x^2+y^2+z^2+Gx+Hy+Iz+J=0$$

یک کره، یک نقطه ـ کره، یا مجموعهٔ تهی است.

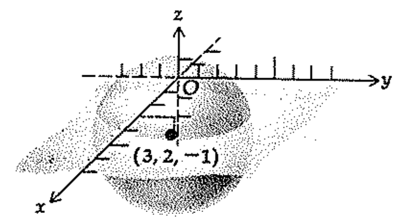
مثال ۲. نمودار معادلهٔ $x^2+y^2+z^2-6x-4y+2z=2$ را رسم کنید.

حل. با دسته‌بندی جملات و کامل کردن مربعها، خواهیم داشت

$$x^2-6x+9+y^2-4y+4+z^2+2z+1=2+9+4+1$$

$$(x-3)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=16$$

لذا، نمودار یک کره است به مرکز $(3, 2, -1)$ و شعاع 4 . نمودار در شکل ۹.۱.۱۷ نموده شده است.



شکل ۹.۱.۱۷

مثال ۳. معادلهٔ کره‌ای را بیابید که نقاط $A(-5, 6, -2)$ و $B(9, -4, 0)$ نقاط انتهایی یک قطر باشند.

حل. مرکز کره نقطهٔ میانی پاره خط AB است. فرض کنیم این نقطه $C(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ باشد. طبق قضیهٔ ۶.۱.۱۷ ، داریم

$$\bar{x}=\frac{9-5}{2}=2 \qquad \bar{y}=\frac{-4+6}{2}=1 \qquad \bar{z}=\frac{0-2}{2}=-1$$

درنتیجه، C نقطهٔ $(2, 1, -1)$ است. شعاع کره عبارت است از

$$r=|\overline{CB}|=\sqrt{(9-2)^2+(-4-1)^2+(0+1)^2}=\sqrt{75}$$

لذا، از قضیهٔ ۹.۱.۱۷ معلوم می‌شود که معادلهٔ کره عبارت است از

$$(x-2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=75$$

یا، معادلاً،

$$x^2+y^2+z^2-4x-2y+2z-69=0$$

تمرینات ۱.۱۷

در تمرینهای ۱ تا ۵، نقاط A و B رئوس متقابل یک مکعب مستطیل‌اند که وجوهش موازی صفحات مختصات‌اند. درهر تمرین، (آ) شکل را بکشید، (ب) مختصات شش راس دیگر را بیابید، (پ) طول قطر AB را بیابید.

۱. $A(0, 0, 0); B(7, 2, 3)$

۲. $A(1, 1, 1); B(3, 4, 2)$

۳. $A(-1, 1, 2); B(2, 3, 5)$

۴. $A(2, -1, -3); B(4, 0, -1)$

۵. $A(1, -1, 0); B(3, 3, 5)$

۶. راس متقابل یک گوشهٔ اطاقی 18 ft شرق، 15 ft جنوب، و 12 ft بالای گوشهٔ اولی است. (آ) شکل را بکشید؛ (ب) طول قطر واصل بین دو راس مخالف را معین کنید؛ (پ) مختصات هر هشت راس اطاق را بیابید.

در تمرینهای ۷ تا ۱۱، (آ) فاصلهٔ بدون‌جهت بین نقاط A و B را بیابید، و (ب) نقطهٔ میانی پاره‌خط بین A و B را پیدا کنید.

۷. $A(3, 4, 2); B(1, 6, 3)$

۸. $A(4, -3, 2); B(-2, 3, -5)$

۹. $A(2, -4, 1); B(\tfrac{1}{2}, 2, 3)$

۱۰. $A(-2, -\tfrac{1}{2}, 5); B(5, 1, -4)$

۱۱. $A(-5, 2, 1); B(3, 7, -2)$

۱۲. ثابت کنید سه نقطهٔ $(1, -1, 3)$ ، $(2, 1, 7)$ ، و $(4, 2, 6)$ رئوس یک مثلث قائم‌الزاویه‌اند، و مساحت آن را پیدا کنید.

۱۳. خطی از نقطهٔ $(6, 4, 2)$ عمود بر صفحهٔ yz رسم شده است. مختصات نقاط واقع

براین خط در فاصلهٔ 10 واحد از نقطهٔ $(0, 4, 0)$ را بیابید .

۱۴ . تمرین ۱۳ را درصورتی حل کنید که خطبر صفحهٔ xy عمود باشد .

۱۵ . با استفاده ازفرمول فاصله ، ثابت کنید سه نقطهٔ $(-3, 2, 4)$ ، $(6, 1, 2)$ ، و $(-12, 3, 6)$ همخط هستند .

۱۶ . رئوس مثلثی را بیابید که اوساط اضلاعش $(3, 2, 3)$ ، $(-1, 1, 5)$ ، و $(0, 3, 4)$ باشند .

۱۷ . درمثلثی به‌رئوس $A(2, -5, 3)$ ، $B(-1, 7, 0)$ ، و $C(-4, 9, 7)$ ، (آ) طول هرضلع ، و (ب) نقطهٔ میانی هر ضلع را پیدا کنید .

۱۸ . قضیهٔ ۶۰۱۰۱۷ را ثابت کنید .

۱۹ . نشان دهید که هر معادله به‌شکل $x^2 + y^2 + z^2 + Gx + Hy + Iz + J = 0$ را می‌توان به‌صورت $(x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - l)^2 = K$ درآورد .

در تمرینهای ۲۰ تا ۲۵ ، نمودار معادلهٔ داده شده را مشخص کنید .

۲۰ . $x^2 + y^2 + z^2 - 8y + 6z - 25 = 0$

۲۱ . $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 4y + 2z - 4 = 0$

۲۲ . $x^2 + y^2 + z^2 - x - y - 3z + 2 = 0$

۲۳ . $x^2 + y^2 + z^2 - 6z + 9 = 0$

۲۴ . $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 10y - 4z + 13 = 0$

۲۵ . $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 4z + 19 = 0$

در تمرینهای ۲۶ تا ۲۸، معادلهٔ کره‌ای را بیابید که در شرایط داده شده صدق نماید .

۲۶ . یک قطر آن پاره‌خطی است با نقاط انتهایی $(6, 2, -5)$ و $(-4, 0, 7)$.

۲۷ . با کره به معادلهٔ $x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 8z - 9 = 0$ متحدالمرکز بوده و شعاعش 3 می‌باشد .

۲۸ . شامل نقاط $(0, 0, 4)$ ، $(2, 1, 3)$ ، و $(0, 2, 6)$ بوده و مرکزش در صفحهٔ yz است .

۲۹ . به‌طور تحلیلی ، ثابت کنید چهار قطر واصل بین رئوس متقابل یک مکعب مستطیل همدیگر را نصف می‌کنند .

۳۰ . هرگاه P ، Q ، R ، و S چهار نقطه در فضای سه‌بعدی بوده و A ، B ، C ، و D بترتیب اوساط PQ ، QR ، RS ، و SP باشند ، به‌طور تحلیلی ثابت کنید که $ABCD$ یک متوازی‌الاضلاع است .

۳۱ . به‌طور تحلیلی ، ثابت کنید چهار قطر یک مکعب یک طول دارند .

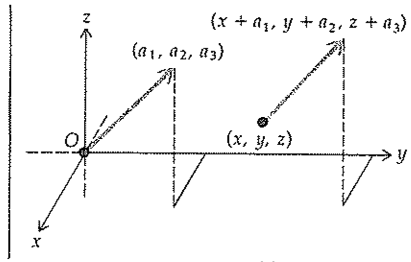
۲۰۱۷ بردارها در فضای سه‌بعدی

مطالب هندسهٔ تحلیلی فضایی با استفاده ازبردارها در فضای سه‌بعدی ساده می‌شوند . تعاریف و قضایای بخشهای ۱۰۱۶ و ۲۰۱۶ برای بردارها درصفحه به‌آسانی قابل‌تعمیم‌اند.

۱۰۲۰۱۷ تعریف . یک ***بردار در فضای سه‌بعدی*** یک سه‌تایی مرتب از اعداد حقیقی‌مانند $\langle x, y, z\rangle$ است . اعداد x ، y ، و z را ***مولفه‌های*** بردار $\langle x, y, z\rangle$ می‌نامیم .

فرض کنیم V_3 مجموعهٔ تمام سه‌تاییهای مرتب $\langle x, y, z\rangle$ باشد که در آن x ، y ، و z اعدادی حقیقی‌اند . دراین فصل یک بردار همیشه در V_3 است مگر آنکه خلافش گفته شود .

همانند بردارها در V_2 ، یک بردار در V_3 را می‌توان با یک پاره خط‌جهتدار نمایش داد . هرگاه $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ ، آنگاه پاره‌خط‌جهتدار با نقطهٔ شروع در مبداء و نقطهٔ پایان در (a_1, a_2, a_3) ***نمایش موضعی*** $\mathbf{A}$ نام دارد . یک پاره‌خط‌جهتدار با نقطهٔ شروع (x, y, z) و نقطهٔ پایان $(x + a_1, y + a_2, z + a_3)$ نیز یک نمایش بردار $\mathbf{A}$ است . ر. ک . شکل ۱۰۲۰۱۷ .



شکل ۱۰۲۰۱۷

بردار صفر بردار $\langle 0, 0, 0\rangle$ است و بـا $\mathbf{0}$ نموده می‌شود . هر نقطه نمایش یک بردار صفر است .

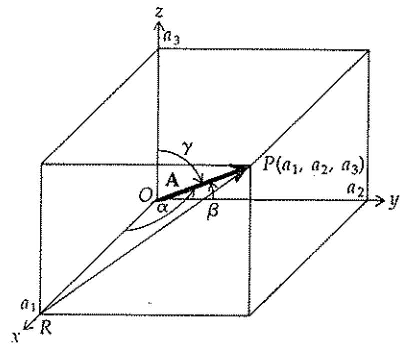
اندازهٔ یک بردار طول یکی از نمایشهای آن است . اگر $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ ، اندازهٔ $\mathbf{A}$ با $|\mathbf{A}|$ نموده می‌شود ، و داریم

$$|\mathbf{A}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

جهت یک بردار ناصفر در V_3 با سه زاویه داده می‌شود ، به‌نام ***زوایای هادی*** بردار .

۲۰۲۰۱۷ تعریف. ***زوایای هادی*** یک بردار ناصفر سه زاویه هستند که عبارتند از کوچکترین زوایای نامنفی α ، β ، و γ بترتیب از محورهای مثبت x ، y ، و z به نمایش موضعی بردار.

هر زاویهٔ هادی یک بردار بزرگتر یا مساوی 0 است و کوچکتر یا مساوی π . زوایای هادی α ، β ، و γ ی بردار $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ در شکل ۲۰۲۰۱۷ نموده شده‌اند. در این شکل، مولفه‌های $\mathbf{A}$ همه اعدادی مثبت، و زوایای هادی این بردار همه مثبت و کوچکتر



شکل ۲۰۲۰۱۷

از $\frac{1}{2}\pi$ اند. از این شکل معلوم می‌شود که مثلث POR یک مثلث قائم‌الزاویه است و

$$\cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{OR}|}{|\overrightarrow{OP}|} = \frac{a_1}{|\mathbf{A}|}$$

می‌توان نشان داد که همین فرمول در صورت $\frac{1}{2}\pi \le \alpha \le \pi$ برقرار است. فرمولهای مشابهی برای $\cos\beta$ و $\cos\gamma$ بدست می‌آیند، و داریم

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{|\mathbf{A}|} \qquad \cos\beta = \frac{a_2}{|\mathbf{A}|} \qquad \cos\gamma = \frac{a_3}{|\mathbf{A}|} \tag{۱}$$

سه عدد $\cos\alpha$ ، $\cos\beta$ ، و $\cos\gamma$ را ***کسینوسهای هادی*** بردار $\mathbf{A}$ می‌نامند. بردار صفر زوایای هادی و درنتیجه کسینوس هادی ندارد.

توضیح ۱. اندازه و کسینوسهای هادی بردار $\mathbf{A} = \langle 3, 2, -6 \rangle$ را پیدا می‌کنیم.

$$|\mathbf{A}| = \sqrt{(3)^2 + (2)^2 + (-6)^2} = \sqrt{9 + 4 + 36} = \sqrt{49} = 7$$

از معادلات (۱) داریم

$$\cos\alpha = \tfrac{3}{7} \qquad \cos\beta = \tfrac{2}{7} \qquad \cos\gamma = -\tfrac{6}{7}$$

اگر اندازهٔ یک بردار و کسینوسهای هادی آن معلوم باشند، بردار به‌طور منحصر بفرد معین است زیرا از (۱) نتیجه می‌شود که

$$a_1 = |\mathbf{A}| \cos\alpha \qquad a_2 = |\mathbf{A}| \cos\beta \qquad a_3 = |\mathbf{A}| \cos\gamma \tag{۲}$$

همانطور که در قضیهٔ زیر می‌بینیم، سه کسینوس هادی یک بردار از هم مستقل نیستند.

۳۰۲۰۱۷ قضیه. ***هرگاه $\cos\alpha$ ، $\cos\beta$ ، و $\cos\gamma$ کسینوسهای هادی یک بردار باشند، آنگاه***

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

برهان. هرگاه $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ ، کسینوسهای هادی $\mathbf{A}$ از (۱) بدست می‌آیند و

$$\begin{aligned}
\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma &= \frac{{a_1}^2}{|\mathbf{A}|^2} + \frac{{a_2}^2}{|\mathbf{A}|^2} + \frac{{a_3}^2}{|\mathbf{A}|^2} \\
&= \frac{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2}{|\mathbf{A}|^2} \\
&= \frac{|\mathbf{A}|^2}{|\mathbf{A}|^2} \\
&= 1
\end{aligned}$$

توضیح ۲. قضیهٔ ۳۰۲۰۱۷ را برای بردار توضیح ۱ تحقیق می‌کنیم.

$$\begin{aligned}
\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma &= (\tfrac{3}{7})^2 + (\tfrac{2}{7})^2 + (-\tfrac{6}{7})^2 \\
&= \tfrac{9}{49} + \tfrac{4}{49} + \tfrac{36}{49} \\
&= \tfrac{49}{49} \\
&= 1
\end{aligned}$$

بردار $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ یک‌بردار یکه‌است اگر $|\mathbf{A}| = 1$ ، و از معادلات (۱) معلوم می‌شود که مولفه‌های یک بردار یکه کسینوسهای هادی آنند.

اعمال جمع ، تفریق ،و ضرب اسکالر بردارها در V_3 به‌نحو مشابه تعاریف نظیر برای بردارها در V_2 تعریف می‌شوند.

۴۰۲۰۱۷ تعریف. هرگاه $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ و $\mathbf{B} = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$ ، آنگاه مجموع این بردارها عبارت است از

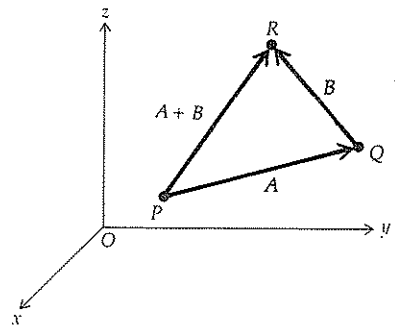
$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3\rangle$$

مثال ۱. به فرض آنکه $\mathbf{A} = \langle 5, -2, 6\rangle$ و $\mathbf{B} = \langle 8, -5, -4\rangle$ ، $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ را بیابید.

حل

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \langle 5 + 8, (-2) + (-5), 6 + (-4)\rangle = \langle 13, -7, 2\rangle$$

تعبیر هندسی مجموع دو بردار در V_3 مشابه تعبیر هندسی آن برای بردارها در V_2 است. ر.ک. شکل ۳۰۲۰۱۷. هرگاه P نقطهٔ (x, y, z) باشد، $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ ،



شکل ۳۰۲۰۱۷

و $\overrightarrow{PQ}$ یک نمایش $\mathbf{A}$ باشد، آنگاه Q نقطهٔ $(x + a_1, y + a_2, z + a_3)$ است. فرض کنیم $\mathbf{B} = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$ و $\overrightarrow{QR}$ یک نمایش $\mathbf{B}$ باشد. دراین صورت، R نقطهٔ $(x + (a_1 + b_1), y + (a_2 + b_2), z + (a_3 + b_3))$ است. لذا، $\overrightarrow{PR}$ یک نمایش بردار $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ بوده، و قانون متوازی‌الاضلاع برقرار است.

۵۰۲۰۱۷ تعریف. هرگاه $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ ، آنگاه بردار $\langle -a_1, -a_2, -a_3\rangle$ **قرینهٔ** $\mathbf{A}$ تعریف و با $-\mathbf{A}$ نموده می‌شود.

۶۰۲۰۱۷ تعریف. **تفاضل** دو بردار $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ ، که با $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ نموده می‌شود، به‌وسیلهٔ

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B})$$

تعریف می‌گردد.

از تعاریف ۵۰۲۰۱۷ و ۶۰۲۰۱۷ معلوم می‌شود که هرگاه $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ و $\mathbf{B} = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$ ، آنگاه $-\mathbf{B} = \langle -b_1, -b_2, -b_3\rangle$ و

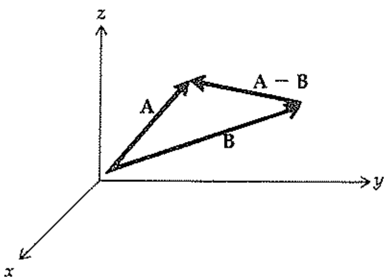
$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3\rangle$$

مثال ۲. $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ را برای بردارهای $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ مثال ۱ بیابید.

حل

$$\begin{aligned} \mathbf{A} - \mathbf{B} &= \langle 5, -2, 6\rangle - \langle 8, -5, -4\rangle \\ &= \langle 5, -2, 6\rangle + \langle -8, 5, 4\rangle \\ &= \langle -3, 3, 10\rangle \end{aligned}$$

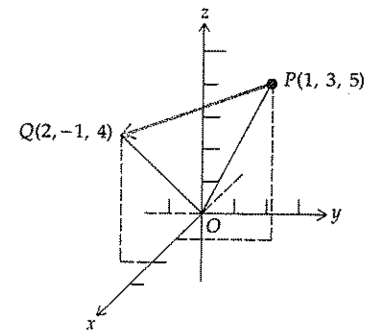
تفاضل دو بردار در V_3 نیز همانند در V_2 تعبیر هندسی می‌شود. ر.ک. شکل ۴۰۲۰۱۷. یک نمایش بردار $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ را می‌توان با اختیار نمایشهای $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ که یک‌نقطهٔ شروع دارند بدست‌آورد. دراین صورت، یک نمایش بردار $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ پاره خط‌جهتدار از نقطهٔ پایان نمایش $\mathbf{B}$ به نقطهٔ پایان نمایش $\mathbf{A}$ است.



شکل ۴۰۲۰۱۷

توضیح ۳. نقاط $P(1, 3, 5)$ و $Q(2, -1, 4)$ داده شده‌اند. شکل ۵۰۲۰۱۷ $\overrightarrow{PQ}$ و نیز $\overrightarrow{OP}$ و $\overrightarrow{OQ}$ را نشان می‌دهد. دراین شکل می‌بینیم که $\mathbf{V}(\overrightarrow{PQ}) = \mathbf{V}(\overrightarrow{OQ}) - \mathbf{V}(\overrightarrow{OP})$. بنابراین،

$$\mathbf{V}(\overrightarrow{PQ}) = \langle 2, -1, 4\rangle - \langle 1, 3, 5\rangle = \langle 1, -4, -1\rangle$$



شکل ۵۰۲۰۱۷

۷۰۲۰۱۷ تعریف. هرگاه c یک اسکالر و $\mathbf{A}$ بردار $\langle a_1, a_2, a_3\rangle$ باشد، حاصل‌ضرب c و $\mathbf{A}$، که با $c\mathbf{A}$ نموده می‌شود، یک بردار است که با

$$c\mathbf{A} = c\langle a_1, a_2, a_3\rangle = \langle ca_1, ca_2, ca_3\rangle$$

داده می‌شود.

مثال ۳. به فرض آنکه $\mathbf{A} = \langle -4, 7, -2\rangle$، $3\mathbf{A}$ و $-5\mathbf{A}$ را بیابید.

حل

$$3\mathbf{A} = 3\langle -4, 7, -2\rangle = \langle -12, 21, -6\rangle \qquad -5\mathbf{A} = (-5)\langle -4, 7, -2\rangle = \langle 20, -35, 10\rangle$$

فرض کنیم $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ بردار ناصفری با کسینوسهای هادی $\cos\alpha$، $\cos\beta$، و $\cos\gamma$ بوده، و c اسکالر ناصفری باشد. دراین صورت، $c\mathbf{A} = \langle ca_1, ca_2, ca_3\rangle$؛ و اگر $\cos\alpha_1$، $\cos\beta_1$، و $\cos\gamma_1$ کسینوسهای هادی $c\mathbf{A}$ باشند، از معادلات (۱) داریم

$$\cos\alpha_1 = \frac{ca_1}{|c\mathbf{A}|} \qquad \cos\beta_1 = \frac{ca_2}{|c\mathbf{A}|} \qquad \cos\gamma_1 = \frac{ca_3}{|c\mathbf{A}|}$$

یا، معادلاً،

$$\cos\alpha_1 = \frac{c}{|c|}\frac{a_1}{|\mathbf{A}|} \qquad \cos\beta_1 = \frac{c}{|c|}\frac{a_2}{|\mathbf{A}|} \qquad \cos\gamma_1 = \frac{c}{|c|}\frac{a_3}{|\mathbf{A}|}$$

که از آنها داریم

$$(۳) \qquad \cos\alpha_1 = \frac{c}{|c|}\cos\alpha \qquad \cos\beta_1 = \frac{c}{|c|}\cos\beta \qquad \cos\gamma_1 = \frac{c}{|c|}\cos\gamma$$

درنتیجه، اگر $c > 0$، از معادلات (۳) نتیجه می‌شود که کسینوسهای هادی بردار $c\mathbf{A}$ با کسینوسهای هادی $\mathbf{A}$ یکی‌اند. و اگر $c > 0$، کسینوسهای هادی $c\mathbf{A}$ قرینهٔ کسینوسهای هادی $\mathbf{A}$ می‌باشند. بنابراین، هرگاه c اسکالر ناصفری باشد، آنگاه بردار $c\mathbf{A}$ برداری است که اندازه‌اش $|c|$ برابر اندازهٔ $\mathbf{A}$ است. اگر $c > 0$، $c\mathbf{A}$ همجهت $\mathbf{A}$ است، حال آنکه اگر $c < 0$، جهت $c\mathbf{A}$ مخالف جهت $\mathbf{A}$ می‌باشد.

اعمال جمع برداری و ضرب اسکالر بردارها در V_3 از همان خواص مذکور در قضیهٔ ۱۰۲۰۱۶ برخوردارند. این خواص در قضیهٔ زیر داده شده‌اند، و اثبات آنها را به‌عنوان تمرین می‌گذاریم (ر.ک. تمرینهای ۱۵ تا ۲۰).

۸۰۲۰۱۷ قضیه. *هرگاه $\mathbf{A}$، $\mathbf{B}$، و $\mathbf{C}$ بردارهایی در V_3 بوده و c و d اسکالرهایی باشند، آنگاه جمع برداری و ضرب اسکالر در خواص زیر صدق می‌کنند:*

(یک) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$ *(قانون تعویضپذیری)*

(دو) $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$ *(قانون شرکتپذیری)*

(سه) *برداری مانند* $\mathbf{0}$ *در* V_3 *هست که به‌ازای آن*

$\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$ *(وجود همانی جمعی)*

(چهار) *برداری مانند* $-\mathbf{A}$ *در* V_3 *هست بطوری که*

$\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{0}$ *(وجود قرینه)*

(پنج) $(cd)\mathbf{A} = c(d\mathbf{A})$ *(قانون شرکتپذیری)*

(شش) $c(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = c\mathbf{A} + c\mathbf{B}$ *(قانون پخشپذیری)*

(هفت) $(c + d)\mathbf{A} = c\mathbf{A} + d\mathbf{A}$ *(قانون پخشپذیری)*

(هشت) $1(\mathbf{A}) = \mathbf{A}$ *(وجود همانی ضربی اسکالر)*

از تعریف ۲۰۲۰۱۶ و قضیهٔ ۸۰۲۰۱۷ معلوم می‌شود که V_3 یک فضای برداری‌حقیقی است. سه بردار یکهٔ

$$\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0\rangle \qquad \mathbf{j} = \langle 0, 1, 0\rangle \qquad \mathbf{k} = \langle 0, 0, 1\rangle$$

یک پایه برای فضای برداری V_3 تشکیل می‌دهند، زیرا هر بردار $\langle a_1, a_2, a_3\rangle$ را می‌توان برحسب آنها به‌صورت زیر نوشت:

$$\langle a_1, a_2, a_3\rangle = a_1\langle 1, 0, 0\rangle + a_2\langle 0, 1, 0\rangle + a_3\langle 0, 0, 1\rangle$$

لذا، اگر $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$، نیز می‌توان نوشت

$$\mathbf{A} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k} \tag{۴}$$

چون در یک پایه سه عنصر وجود دارند، V_3 یک فضای برداری سه‌بعدی است.

با گذاردن (۲) در (۴)، داریم

$$\mathbf{A} = |\mathbf{A}|\cos\alpha\mathbf{i} + |\mathbf{A}|\cos\beta\mathbf{j} + |\mathbf{A}|\cos\gamma\mathbf{k}$$

یا، معادلاً،

$$\mathbf{A} = |\mathbf{A}|(\cos\alpha\mathbf{i} + \cos\beta\mathbf{j} + \cos\gamma\mathbf{k}) \tag{۵}$$

معادلهٔ (۵) به‌ما توان بیان یک بردار ناصفر را برحسب اندازه و کسینوسهای هادیش می‌دهد.

مثال ۴. بردار توضیح ۱ را برحسب اندازه و کسینوسهای هادیش بیان کنید.

حل. در توضیح ۱، $\mathbf{A} = \langle 3, 2, -6\rangle$، $|\mathbf{A}| = 7$، $\cos\alpha = \frac{3}{7}$، $\cos\beta = \frac{2}{7}$، و $\cos\gamma = -\frac{6}{7}$. لذا، از (۵) داریم

$$\mathbf{A} = 7(\tfrac{3}{7}\mathbf{i} + \tfrac{2}{7}\mathbf{j} - \tfrac{6}{7}\mathbf{k})$$

۹.۲.۱۷ قضیه. *هرگاه $\mathbf{A} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ بردار ناصفری باشد، آنگاه بردار یکهٔ $\mathbf{U}$ و همجهت $\mathbf{A}$ عبارت است از*

$$\mathbf{U} = \frac{a_1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{i} + \frac{a_2}{|\mathbf{A}|}\mathbf{j} + \frac{a_3}{|\mathbf{A}|}\mathbf{k}$$

اثبات قضیهٔ ۹.۲.۱۷ شبیه اثبات قضیهٔ ۳.۲.۱۶ برای یک بردار در V_2 است و به‌عنوان تمرین گذارده می‌شود (ر.ک. تمرین ۳۸).

مثال ۵. نقاط $R(2, -1, 3)$ و $S(3, 4, 6)$ داده شده‌اند. بردار یکهٔ همجهت $\mathbf{V}(\overrightarrow{RS})$ را بیابید.

حل

$$\mathbf{V}(\overrightarrow{RS}) = \langle 3, 4, 6\rangle - \langle 2, -1, 3\rangle = \langle 1, 5, 3\rangle$$
$$= \mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$

درنتیجه،

$$|\mathbf{V}(\overrightarrow{RS})| = \sqrt{1^2 + 5^2 + 3^2} = \sqrt{35}$$

لذا، طبق قضیهٔ ۹.۲.۱۷، بردار یکهٔ مطلوب عبارت است از

$$\mathbf{U} = \frac{1}{\sqrt{35}}\mathbf{i} + \frac{5}{\sqrt{35}}\mathbf{j} + \frac{3}{\sqrt{35}}\mathbf{k}$$

تمرینات ۲.۱۷

در تمرینهای ۱ تا ۱۴، فرض کنید $\mathbf{A} = \langle 1, 2, 3\rangle$، $\mathbf{B} = \langle 4, -3, -1\rangle$، $\mathbf{C} = \langle -5, -3, 5\rangle$، و $\mathbf{D} = \langle -2, 1, 6\rangle$.

۱. $\mathbf{A} + 5\mathbf{B}$ را بیابید.

۲. $2\mathbf{A} - \mathbf{C}$ را بیابید.

۳. $7\mathbf{C} - 5\mathbf{D}$ را بیابید.

۴. $|2\mathbf{A}| - |\mathbf{C}|$ را بیابید.

۵. $|7\mathbf{C}| - |5\mathbf{D}|$ را بیابید.

۶. $4\mathbf{B} + 6\mathbf{C} - 2\mathbf{D}$ را بیابید.

۷. $|7\mathbf{C} - 5\mathbf{D}|$ را بیابید.

۸. $|4\mathbf{B}| + |6\mathbf{C}| - |2\mathbf{D}|$ را بیابید.

۹. $\mathbf{C} + 3\mathbf{D} - 8\mathbf{A}$ را بیابید.

۱۰. $3\mathbf{A} - 2\mathbf{B} + \mathbf{C} - 12\mathbf{D}$ را بیابید.

۱۱. $|\mathbf{A}||\mathbf{B}|(\mathbf{C} - \mathbf{D})$ را بیابید.

۱۲. $|\mathbf{A}|\mathbf{C} - |\mathbf{B}|\mathbf{D}$ را بیابید.

۱۳. اسکالرهای a و b را طوری بیابید که $a(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + b(\mathbf{C} + \mathbf{D}) = \mathbf{0}$.

۱۴. اسکالرهای a، b، و c را طوری بیابید که $a\mathbf{A} + b\mathbf{B} + c\mathbf{C} = \mathbf{D}$.

۱۵. قضیهٔ ۸.۲.۱۷ (یک) را ثابت کنید.

۱۶. قضیهٔ ۸.۲.۱۷ (دو) را ثابت کنید.

۱۷. قضیهٔ ۸.۲.۱۷ (سه)، (چهار)، و (هشت) را ثابت کنید.

۱۸. قضیهٔ ۸.۲.۱۷ (پنج) را ثابت کنید.

۱۹. قضیهٔ ۸.۲.۱۷ (شش) را ثابت کنید.

۲۰. قضیهٔ ۸.۲.۱۷ (هفت) را ثابت کنید.

در تمرینهای ۲۱ تا ۲۴، کسینوسهای هادی بردار $\mathbf{V}(\overrightarrow{P_1P_2})$ را یافته و جوابها را با تحقیق اینکه مجموع مربعات آنها 1 است امتحان کنید.

۲۱. $P_1(3, -1, -4); P_2(7, 2, 4)$

۲۲. $P_1(1, 3, 5); P_2(2, -1, 4)$

۲۳. $P_1(4, -3, -1); P_2(-2, -4, -8)$ ۲۴. $P_1(-2, 6, 5); P_2(2, 4, 1)$

۲۵. با استفاده از نقاط P_1 و P_2 تمرین ۲۱، نقطهٔ Q را طوری بیابید که $\mathbf{V}(\overrightarrow{P_1P_2}) = 3\mathbf{V}(\overrightarrow{P_1Q})$.

۲۶. با استفاده از نقاط P_1 و P_2 تمرین ۲۲، نقطهٔ R را طوری بیابید که $\mathbf{V}(\overrightarrow{P_1R}) = -2\mathbf{V}(\overrightarrow{P_2R})$.

۲۷. نقاط $P_1(3, 2, -4)$ و $P_2(-5, 4, 2)$ داده شده‌اند. نقطهٔ P_3 را طوری بیابید که $4\mathbf{V}(\overrightarrow{P_1P_2}) = -3\mathbf{V}(\overrightarrow{P_2P_3})$.

۲۸. نقاط $P_1(7, 0, -2)$ و $P_2(2, -3, 5)$ داده شده‌اند. نقطهٔ P_3 را طوری بیابید که $\mathbf{V}(\overrightarrow{P_1P_3}) = 5\mathbf{V}(\overrightarrow{P_2P_3})$.

در تمرینهای ۲۹ تا ۳۲، بردار داده شده را برحسب اندازه و کسینوسهای هادی آن بیان کنید.

۲۹. $-6\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ ۳۰. $2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$

۳۱. $-2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ ۳۲. $3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$

در تمرینهای ۳۳ تا ۳۶، بردار یکهٔ همجهت $\mathbf{V}(\overrightarrow{P_1P_2})$ را بیابید.

۳۳. $P_1(4, -1, -6); P_2(5, 7, -2)$ ۳۴. $P_1(3, 0, -1); P_2(-3, 8, -1)$

۳۵. $P_1(-2, 5, 3); P_2(-4, 7, 5)$ ۳۶. $P_1(-8, -5, 2); P_2(-3, -9, 4)$

۳۷. اگر زوایای هادی یک بردار یکی باشند، این بردار چیست؟

۳۸. قضیهٔ ۹.۲.۱۷ را ثابت کنید.

۳۹. سه بردار در V_3 را **مستقل** گویند اگر وفقط اگر نمایشهای موضعی آنها در یک صفحه نباشند، وگویند سه بردار $\mathbf{E}_1$، $\mathbf{E}_2$، و $\mathbf{E}_3$ یک **پایه** برای فضای برداری V_3 تشکیل می‌دهند اگـر و فقط‌اگر هر بردار در V_3 را بتوان به صورت ترکیبی خطی از $\mathbf{E}_1$، $\mathbf{E}_2$، و $\mathbf{E}_3$ نوشت. قضیه‌ای هست که می‌گوید سه بردار درصورتی یک پایه برای فضای برداری V_3 تشکیل می‌دهند که مستقل باشند. با اعمال زیر نشان دهید که این‌قضیه برای سه بردار $\langle 1, 0, 0\rangle$، $\langle 1, 1, 0\rangle$، و $\langle 1, 1, 1\rangle$ برقرار است: (آ) با نشان دادن اینکه نمایشهای موضعی بردارها همصفحه نیستند، تحقیق کنید که بردارها مستقل می‌باشند؛ (ب) با نشان دادن اینکه هر بردار $\mathbf{A}$ را می‌توان به‌صورت

$$\mathbf{A} = r\langle 1, 0, 0\rangle + s\langle 1, 1, 0\rangle + t\langle 1, 1, 1\rangle$$

نوشت، که درآن r، s، و t اسکالرند، تحقیق کنید که بردارها یک پایه‌تشکیل می‌دهند؛ (پ) اگر $\mathbf{A} = \langle 6, -2, 5\rangle$، مقادیرخاص r، s، و t را طوری‌بیابید که (۶) برقرار باشد.

۴۰. با نشان دادن اینکه هر بردار $\mathbf{A}$ را می‌توان به صورت

$$\mathbf{A} = r\langle 2, 0, 1\rangle + s\langle 0, -1, 0\rangle + t\langle 1, -1, 0\rangle$$

نوشت، که درآن r، s، و t اسکالرند، تحقیق کنید که بردارهای $\langle 2, 0, 1\rangle$، $\langle 0, -1, 0\rangle$، و $\langle 1, -1, 0\rangle$ یک پایه برای V_3 تشکیل می‌دهند. (ب) هرگاه $\mathbf{A} = \langle -2, 3, 5\rangle$، مقادیرخاص r، s، و t را طوری‌بیابید که (۷) برقرارباشد.

۴۱. به اولین‌جملهٔ تمرین ۳۹رجوع کنید. قضیه‌ای هست که می‌گوید سه بردار فقط‌وقتی یک پایه برای فضای برداری V_3 تشکیل می‌دهند که مستقل باشند. با اعمال زیر نشان دهید که این قضیه برای سه بردار $\mathbf{F}_1 = \langle 1, 0, 1\rangle$، $\mathbf{F}_2 = \langle 1, 1, 1\rangle$، و $\mathbf{F}_3 = \langle 2, 1, 2\rangle$ برقرار است: (آ) با نشان دادن اینکه نمایشهای موضعی بردارها همصفحه‌اند، تحقیق کنید که $\mathbf{F}_1$، $\mathbf{F}_2$، و $\mathbf{F}_3$ مستقل نیستند؛ (ب) با نشان دادن اینکه هر بردار در V_3 را نمی‌توان به‌صورت ترکیبی خطی از $\mathbf{F}_1$، $\mathbf{F}_2$، و $\mathbf{F}_3$ نوشت، تحقیق کنید که بردارها یک‌پایه تشکیل نمی‌دهند.

۳.۱۷ حاصل‌ضرب نقطه‌ای در V_3

تعریف حاصل‌ضرب نقطه‌ای دو بردار در V_3 تعمیمی است از این تعریف برای بردارها در V_2.

۱.۳.۱۷ تعریف. هرگاه $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ و $\mathbf{B} = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$، آنگاه **حاصل ضرب نقطه‌ای** $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$، که با $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ نموده می‌شود، عبارت است از

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle\cdot\langle b_1, b_2, b_3\rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

توضیح ۱. هرگاه $\mathbf{A} = \langle 4, 2, -6\rangle$ و $\mathbf{B} = \langle -5, 3, -2\rangle$، آنگاه

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} &= \langle 4, 2, -6\rangle\cdot\langle -5, 3, -2\rangle \\ &= 4(-5) + 2(3) + (-6)(-2) \\ &= -20 + 6 + 12 \\ &= -2\end{aligned}$$

در مورد بردارهای یکهٔ $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$، و $\mathbf{k}$،

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = 1$$

و

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{i}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = 0$$

قوانین ضرب نقطه‌ای داده شده در قضیهٔ ۲۰۳۰۱۷ همانهای آمده در قضایای ۲۰۳۰۱۶ و ۳۰۳۰۱۶ برای بردارها در V_2 اند. اثباتها را به‌عنوان تمرین می‌گذاریم (ر.ک. تمرینهای ۱۵ تا ۱۸).

۲۰۳۰۱۷ قضیه. *هرگاه **A**، **B**، و **C** بردارهایی در V_3 بوده و c یک اسکالر باشد، آنگاه*

(یک) $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$ *(قانون تعویضپذیری)*

(دو) $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$ *(قانون پخشپذیری)*

(سه) $c(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = (c\mathbf{A})\cdot\mathbf{B}$

(چهار) $\mathbf{0}\cdot\mathbf{A} = 0$

(پنج) $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = |\mathbf{A}|^2$

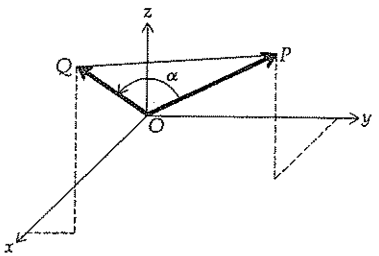
پیش از آنکه نمایش هندسی حاصل‌ضرب نقطه‌ای بردارها در V_3 را عرضه کنیم، همانطور که برای بردارها در V_2 شد عمل می‌کنیم. زاویهٔ بین دو بردار را تعریف کرده‌و سپس حاصل‌ضرب نقطه‌ای را برحسب کسینوس این زاویه بیان می‌کنیم.

۳۰۳۰۱۷ تعریف. فرض‌کنیم **A** و **B** دو بردار ناصفر در V_3 باشند بطوری که **A** مضرب اسکالری‌از **B** نباشد. هرگاه $\overrightarrow{OP}$ نمایش موضعی **A** و $\overrightarrow{OQ}$ نمایش موضعی **B** باشد، ***زاویهٔ بین بردارهای A و B*** مساوی زاویهٔ مثبت بین $\overrightarrow{OP}$ و $\overrightarrow{OQ}$ درون مثلث POQ تعریف می‌شود. هرگاه $\mathbf{A} = c\mathbf{B}$، که در آن c یک اسکالر است، آنگاه اگر $c > 0$، زاویهٔ بین بردارها 0 است، و اگر $c < 0$، زاویهٔ بین بردارها π می‌باشد.

شکل ۱۰۳۰۱۷ زاویهٔ θ بین دو بردار را وقتی **A** مضرب اسکالری از **B** نیست نشان می‌دهد.

۴۰۳۰۱۷ قضیه. *هرگاه θ زاویهٔ بین دو بردار ناصفر **A** و **B** در V_3 باشند، آنگاه*

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\cos\theta \qquad (۱)$$



شکل ۱۰۳۰۱۷

اثبات قضیهٔ ۴۰۳۰۱۷ شبیه اثبات قضیهٔ ۵۰۳۰۱۶ برای بردارها در V_2 است و به عنوان تمرین گذارده می‌شود (ر.ک. تمرین ۱۹).

هرگاه **U** یک بردار یکه در جهت **A** باشد، آنگاه از (۱) داریم

$$\mathbf{U}\cdot\mathbf{B} = |\mathbf{U}||\mathbf{B}|\cos\theta = |\mathbf{B}|\cos\theta$$

همانندبردارها در V_2، $|\mathbf{B}|\cos\theta$ ***تصویر اسکالر B*** روی **A** است و ***مولفهٔ B*** در جهت **A** می‌باشد. از قضیهٔ ۴۰۳۰۱۷ معلوم می‌شود که حاصل‌ضرب نقطه‌ای دو بردار **A** و **B** حاصل ضرب اندازهٔ یکی از بردارها، مثلاً $|\mathbf{A}|$، در تصویر اسکالر بردار دوم روی اولی، یعنی $|\mathbf{B}|\cos\theta$، است.

مثال ۱. بردارهای $\mathbf{A} = 6\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ و $\mathbf{B} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ مفروضند. (آ) مولفهٔ **B** درجهت **A**؛ (ب) تصویربرداری **B** روی **A**؛ و (پ) $\cos\theta$ درصورتی‌که θ زاویهٔ بین **A** و **B** است را بیابید.

حل

(آ) $|\mathbf{A}| = \sqrt{6^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{36+9+4} = 7$. لذا، یک بردار یکه در جهت **A** عبارت است از

$$\mathbf{U} = \tfrac{6}{7}\mathbf{i} - \tfrac{3}{7}\mathbf{j} + \tfrac{2}{7}\mathbf{k}$$

چون $\mathbf{U}\cdot\mathbf{B} = |\mathbf{B}|\cos\theta$، مولفهٔ **B** در جهت **A** عبارت است از

$$\mathbf{U}\cdot\mathbf{B} = (\tfrac{6}{7}\mathbf{i} - \tfrac{3}{7}\mathbf{j} + \tfrac{2}{7}\mathbf{k})\cdot(2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k})$$
$$= \tfrac{12}{7} - \tfrac{3}{7} - \tfrac{6}{7}$$

$$= \tfrac{3}{7}$$

(ب) تصویر برداری $\mathbf{B}$ روی $\mathbf{A}$ مساوی است با

$$\tfrac{3}{7}\mathbf{U} = \tfrac{18}{49}\mathbf{i} - \tfrac{9}{49}\mathbf{j} + \tfrac{6}{49}\mathbf{k}$$

(پ) از (۱) داریم

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{|\mathbf{A}||\mathbf{B}|} = \frac{\mathbf{U}\cdot\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|}$$

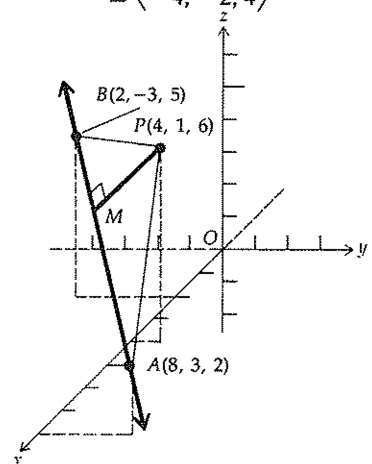
چون $\mathbf{U}\cdot\mathbf{B} = \tfrac{3}{7}$ و $|\mathbf{B}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-3)^2} = \sqrt{14}$ ،

$$\cos\theta = \frac{3}{7\sqrt{14}} = \frac{3\sqrt{14}}{98}$$

مثال ۲. فاصلهٔ نقطهٔ $P(4, 1, 6)$ تا خط مار بر نقاط $A(8, 3, 2)$ و $B(2, -3, 5)$ را بیابید.

حل. شکل ۲۰۳۰۱۷ نقطهٔ P و خط مار بر A و B را نشان می‌دهد. نقطهٔ M پای عمود وارد از P بر خط مار بر A و B است. فرض کنیم d فاصلهٔ $|\overline{PM}|$ باشد. برای یافتن d ، $|\overline{AM}|$ و $|\overline{AP}|$ را یافته و از قضیهٔ فیثاغورس استفاده می‌کنیم. $|\overline{AP}|$ اندازهٔ بردار $\mathbf{V}(\overrightarrow{AP})$ است.

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(\overrightarrow{AP}) &= \mathbf{V}(\overrightarrow{OP}) - \mathbf{V}(\overrightarrow{OA})\\ &= \langle 4, 1, 6\rangle - \langle 8, 3, 2\rangle\\ &= \langle -4, -2, 4\rangle\end{aligned}$$



شکل ۲۰۳۰۱۷

لذا،

$$|\overline{AP}| = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{36} = 6$$

برای یافتن $|\overline{AM}|$ ، تصویر اسکالر $\mathbf{V}(\overrightarrow{AP})$ روی $\mathbf{V}(\overrightarrow{AB})$ را پیدا می‌کنیم.

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(\overrightarrow{AB}) &= \mathbf{V}(\overrightarrow{OB}) - \mathbf{V}(\overrightarrow{OA})\\ &= \langle 2, -3, 5\rangle - \langle 8, 3, 2\rangle\\ &= \langle -6, -6, 3\rangle\end{aligned}$$

پس تصویر اسکالر $\mathbf{V}(\overrightarrow{AP})$ روی $\mathbf{V}(\overrightarrow{AB})$ عبارت است از

$$\begin{aligned}\frac{\mathbf{V}(\overrightarrow{AP})\cdot\mathbf{V}(\overrightarrow{AB})}{|\mathbf{V}(\overrightarrow{AB})|} &= \frac{\langle -4, -2, 4\rangle\cdot\langle -6, -6, 3\rangle}{\sqrt{36 + 36 + 9}}\\ &= \frac{24 + 12 + 12}{\sqrt{81}}\\ &= \tfrac{48}{9}\end{aligned}$$

لذا، $|\overline{AM}| = \tfrac{48}{9}$ ؛ در نتیجه،

$$\begin{aligned}d &= \sqrt{|\overline{AP}|^2 - |\overline{AM}|^2}\\ &= \sqrt{36 - (\tfrac{48}{9})^2}\\ &= 6\sqrt{1 - \tfrac{64}{81}}\\ &= \tfrac{2}{3}\sqrt{17}\end{aligned}$$

تعریف بردارهای موازی در V_3 شبیه تعریف ۶۰۳۰۱۶ برای بردارها در V_2 است.

۵۰۳۰۱۷ تعریف. دو بردار در V_3 را ***موازی*** گوییم اگر و فقط اگر یکی از بردارها مضرب اسکالری از دیگری باشد.

قضیهٔ زیر از تعریف ۵۰۳۰۱۷ و قضیهٔ ۴۰۳۰۱۷ بدست می‌آید. اثباتش را به‌عنوان تمرین می‌گذاریم (ر.ک. تمرین ۲۰).

۶۰۳۰۱۷ قضیه. *دو بردار ناصفر در V_3 موازی‌اند اگر و فقط اگر زاویهٔ بین آنها 0 یا π باشد.*

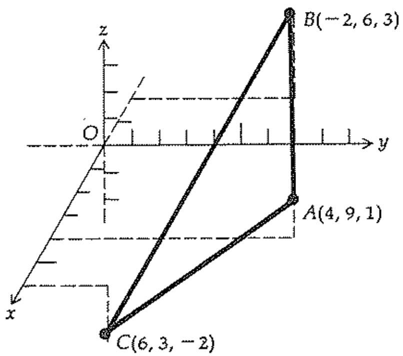
تعریف زیر از بردارهای متعامد در V_3 نظیر به تعریف ۷۰۳۰۱۶ برای بردارها در

V_2 است.

۷۰۳۰۱۷ تعریف. هرگاه $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ دو بردار در V_3 باشند، $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ را **متعامد** گوییم اگر و فقط اگر $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = 0$.

مثال ۳. با استفاده از بردارها، ثابت کنید نقاط $A(4, 9, 1)$، $B(-2, 6, 3)$، و $C(6, 3, -2)$ رئوس یک مثلث قائم‌الزاویه‌اند.

حل. مثلث CAB در شکل ۳۰۳۰۱۷ نموده شده است. از شکل معلوم می‌شود که گویی



شکل ۳۰۳۰۱۷

زاویهٔ A قائمه است. $\mathbf{V}(\overrightarrow{AB})$ و $\mathbf{V}(\overrightarrow{AC})$ را پیدا می‌کنیم، و اگر حاصل ضرب نقطه‌ای این دو بردار صفر باشد، زاویه قائمه خواهد بود.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{V}(\overrightarrow{AB}) &= \mathbf{V}(\overrightarrow{OB}) - \mathbf{V}(\overrightarrow{OA})\\
&= \langle -2, 6, 3\rangle - \langle 4, 9, 1\rangle\\
&= \langle -6, -3, 2\rangle\\
\mathbf{V}(\overrightarrow{AC}) &= \mathbf{V}(\overrightarrow{OC}) - \mathbf{V}(\overrightarrow{OA})\\
&= \langle 6, 3, -2\rangle - \langle 4, 9, 1\rangle\\
&= \langle 2, -6, -3\rangle
\end{aligned}
$$

$$\mathbf{V}(\overrightarrow{AB})\cdot\mathbf{V}(\overrightarrow{AC}) = \langle -6, -3, 2\rangle\cdot\langle 2, -6, -3\rangle = -12 + 18 - 6 = 0$$

بنابراین، $\mathbf{V}(\overrightarrow{AB})$ و $\mathbf{V}(\overrightarrow{AC})$ متعامدند؛ درنتیجه، زاویهٔ A در مثلث CAB قائمه است.

تمرینات ۳۰۱۷

در تمرینهای ۱ تا ۱۴، فرض‌کنید $\mathbf{A} = \langle -4, -2, 4\rangle$، $\mathbf{B} = \langle 2, 7, -1\rangle$، $\mathbf{C} = \langle 6, -3, 0\rangle$، و $\mathbf{D} = \langle 5, 4, -3\rangle$.

۱ . $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B} + \mathbf{C})$ را بیابید.

۲ . $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$ را بیابید.

۳ . $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})(\mathbf{C}\cdot\mathbf{D})$ را بیابید.

۴ . $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{D})(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})$ را بیابید.

۵ . $\mathbf{A}\cdot\mathbf{D} - \mathbf{B}\cdot\mathbf{C}$ را بیابید.

۶ . $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{C} + (\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})\mathbf{D}$ را بیابید.

۷ . $(\mathbf{B}\cdot\mathbf{D})\mathbf{A} - (\mathbf{D}\cdot\mathbf{A})\mathbf{B}$ را بیابید.

۸ . $(2\mathbf{A} + 3\mathbf{B})\cdot(4\mathbf{C} - \mathbf{D})$ را بیابید.

۹ . کسینوس زاویهٔ بین $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ را بیابید.

۱۰ . کسینوس زاویهٔ بین $\mathbf{C}$ و $\mathbf{D}$ را بیابید.

۱۱ . (آ) مولفهٔ $\mathbf{C}$ در جهت $\mathbf{A}$ و (ب) تصویر برداری $\mathbf{C}$ روی $\mathbf{A}$ را بیابید.

۱۲ . (آ) مولفهٔ $\mathbf{B}$ در جهت $\mathbf{D}$ و (ب) تصویر برداری $\mathbf{B}$ روی $\mathbf{D}$ را بیابید.

۱۳ . (آ) مولفهٔ $\mathbf{A}$ در جهت $\mathbf{B}$ و (ب) تصویر برداری $\mathbf{A}$ روی $\mathbf{B}$ را بیابید.

۱۴ . (آ) مولفهٔ $\mathbf{D}$ در جهت $\mathbf{C}$ و (ب) تصویر برداری $\mathbf{D}$ روی $\mathbf{C}$ را بیابید.

۱۵ . قضیهٔ ۲۰۳۰۱۷ (یک) را ثابت کنید.

۱۶ . قضیهٔ ۲۰۳۰۱۷ (دو) را ثابت کنید.

۱۷ . قضیهٔ ۲۰۳۰۱۷ (سه) را ثابت کنید.

۱۸ . قضیهٔ ۲۰۳۰۱۷ (چهار) و (پنج) را ثابت کنید.

۱۹ . قضیهٔ ۴۰۳۰۱۷ را ثابت کنید.

۲۰ . قضیهٔ ۶۰۳۰۱۷ را ثابت کنید.

۲۱ . فاصلهٔ نقطهٔ $(2, -1, -4)$ تا خط مار بر نقاط $(3, -2, 2)$ و $(-9, -6, 6)$ را بیابید.

۲۲ . فاصلهٔ نقطهٔ $(3, 2, 1)$ تا خط مار بر نقاط $(1, 2, 9)$ و $(-3, -6, -3)$ را بیابید.

۲۳ . با استفاده از بردارها، ثابت کنید نقاط $(2, 2, 2)$، $(2, 0, 1)$، $(4, 1, -1)$، و $(4, 3, 0)$ رئوس یک مستطیل‌اند.

۲۴ . با استفاده از بردارها، ثابت کنید نقاط $(2, 2, 2)$، $(0, 1, 2)$، $(-1, 3, 3)$، و $(3, 0, 1)$ رئوس یک متوازی‌الاضلاع‌اند.

۲۵ . مساحت مثلث به رئوس $(-2, 3, 1)$، $(1, 2, 3)$، و $(3, -1, 2)$ را بیابید.

۲۶ . با استفاده از بردارها، ثابت کنید نقاط $(-2, 1, 6)$، $(2, 4, 5)$، و $(-1, -2, 1)$ **رئوس**

یک مثلث قائم‌الزاویه است، و مساحت این مثلث را پیدا کنید.

۲۷. هرگاه $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$، $\mathbf{B} = -\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ و $\mathbf{C} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$، مولفهٔ $\mathbf{B}$ در جهت $2\mathbf{C} - \mathbf{A}$ را بیابید.

۲۸. کسینوس‌زوایای مثلث به رئوس $A(0, 0, 0)$، $B(4, -1, 3)$ و $C(1, 2, 3)$ را پیدا کنید.

۲۹. هرگاه نیرویی به نمایش برداری $\mathbf{F} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ باشد، کار انجام شده توسط این نیرو در حرکت یک جسم از نقطهٔ $P_1(-2, 4, 3)$ در امتداد خطی مستقیم تا نقطهٔ $P_2(1, -3, 5)$ را بیابید. اندازهٔ نیرو به پوند و فاصله به فوت است.
(**راهنمایی.** بخش ۳۰۱۶ را مرور کنید.)

۳۰. هرگاه نیرویی به نمایش برداری $\mathbf{F} = 5\mathbf{i} - 3\mathbf{k}$ باشد، کار انجام شده توسط این نیرو در حرکت جسمی از نقطهٔ $P_1(4, 1, 3)$ در امتداد خطی مستقیم تا نقطهٔ $P_2(-5, 6, 2)$ را بیابید. اندازهٔ نیرو به پوند و فاصله به فوت است. (ر.ک. راهنمایی تمرین ۲۹.)

۳۱. نیرویی با بردار $\mathbf{F}$ نموده شده است، اندازه‌اش 10 lb است، و کسینوسهای هادی $\mathbf{F}$ عبارتند از $\cos \alpha = \frac{1}{6}\sqrt{6}$ و $\cos \beta = \frac{1}{3}\sqrt{6}$. اگر نیرو جسمی را از مبداء در امتداد خطی مستقیم تا نقطهٔ $(7, -4, 2)$ حرکت دهد، کار انجام شده را پیدا کنید. فاصله به فوت است. (ر.ک. راهنمایی تمرین ۲۹.)

۳۲. هرگاه $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ بردارهای ناصفری باشند، ثابت کنید بردار $\mathbf{A} - c\mathbf{B}$ بر $\mathbf{B}$ عمود است اگر $c = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}/|\mathbf{B}|^2$.

۳۳. هرگاه $\mathbf{A} = 12\mathbf{i} + 9\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ و $\mathbf{B} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$، با استفاده از تمرین ۳۲، اسکالر c را طوری بیابید که بردار $\mathbf{B} - c\mathbf{A}$ بر $\mathbf{A}$ عمود باشد.

۳۴. در مورد بردارهای تمرین ۳۳، با استفاده از تمرین ۳۲، اسکالر d را طوری بیابید که بردار $\mathbf{A} - d\mathbf{B}$ بر $\mathbf{B}$ عمود باشد.

۳۵. ثابت کنید هرگاه $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ دو بردار باشند، بردارهای $|\mathbf{A}|\mathbf{B} + |\mathbf{B}|\mathbf{A}$ و $|\mathbf{A}|\mathbf{B} - |\mathbf{B}|\mathbf{A}$ متعامدند.

۳۶. ثابت کنید هرگاه $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ بردارهای ناصفری بوده و $\mathbf{C} = |\mathbf{A}|\mathbf{B} + |\mathbf{B}|\mathbf{A}$، آنگاه زاویهٔ بین $\mathbf{A}$ و $\mathbf{C}$ مساوی زاویهٔ بین $\mathbf{B}$ و $\mathbf{C}$ است.

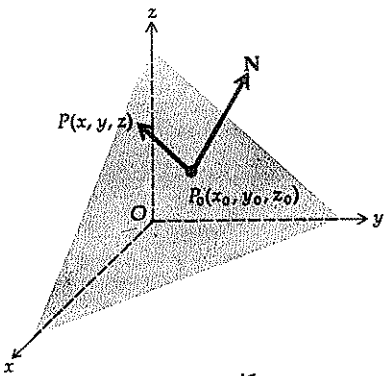
۴۰۱۷ صفحات

نمودار یک معادله از دو متغیر x و y یک منحنی در صفحهٔ xy است. ساده‌ترین نوع منحنی در فضای دو بعدی خط مستقیم است، و معادلهٔ کلی یک خط مستقیم به شکل

$Ax + By + C = 0$ است، که معادله‌ای است از درجهٔ اول. در فضای سه‌بعدی، نمودار یک معادله از سه متغیر x، y و z یک سطح است. ساده‌ترین نوع سطح **صفحه** است، و خواهیم دید که معادلهٔ یک صفحه معادله‌ای است که نسبت به سه متغیر از درجهٔ اول است.

۱۰۴۰۱۷ تعریف. هرگاه $\mathbf{N}$ بردار ناصفری بوده و P_0 یک نقطه باشد، مجموعهٔ تمام نقاط P که $\mathbf{V}(\overrightarrow{P_0P})$ و $\mathbf{N}$ متعامدند **صفحهٔ** مار بر P_0 به **بردار قائم** $\mathbf{N}$ تعریف می‌شود.

شکل ۱۰۴۰۱۷ بخشی از یک صفحهٔ مار بر نقطهٔ $P_0(x_0, y_0, z_0)$ و نمایش بردار قائم $\mathbf{N}$ با نقطهٔ شروع P_0 را نشان می‌دهد.



شکل ۱۰۴۰۱۷

در هندسهٔ تحلیلی مسطحه، معادلهٔ یک خط را می‌توان با داشتن یک نقطه از آن و جهتش (شیبش) بدست آورد. به‌نحو مشابه، در هندسهٔ تحلیلی فضایی، معادلهٔ یک صفحه را می‌توان با داشتن یک نقطه در صفحه و جهت یک بردار قائم تعیین کرد.

۲۰۴۰۱۷ قضیه. ***هرگاه $P_0(x_0, y_0, z_0)$ نقطه‌ای در صفحه بوده و بردار قائم به صفحه $\mathbf{N} = \langle a, b, c\rangle$ باشد، آنگاه معادلهٔ صفحه عبارت است از***

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \qquad (1)$$

برهان. به شکل ۱۰۴۰۱۷ رجوع می‌کنیم. فرض کنیم $P(x, y, z)$ نقطه‌ای در صفحه باشد.

$\mathbf{V}(\overrightarrow{P_0P})$ برداری است با نمایش $\overrightarrow{P_0P}$ ؛ درنتیجه،

$$\mathbf{V}(\overrightarrow{P_0P}) = \langle x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0\rangle. \qquad (۲)$$

از تعاریف ۱۰۴۰۱۷ و ۷۰۳۰۱۷ داریم

$$\mathbf{V}(\overrightarrow{P_0P})\cdot\mathbf{N}=0$$

چون $\mathbf{N}=\langle a,b,c\rangle$ ، از (۲) و معادلهٔ بالا خواهیم داشت

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0 \qquad (۳)$$

که معادلهٔ مطلوب است.

مثال ۱. معادلهٔ صفحه‌ای را بیابید شامل نقطهٔ $(2, 1, 3)$ که $3\mathbf{i}-4\mathbf{j}+\mathbf{k}$ یک بردار قائم آن باشد.

حل. با استفاده از (۱) با نقطهٔ $(x_0, y_0, z_0)=(2, 1, 3)$ و بردار $\langle a, b, c\rangle=\langle 3, -4, 1\rangle$، معادلهٔ صفحهٔ مطلوب خواهد بود

$$3(x-2)-4(y-1)+(z-3)=0$$

یا، معادلاً،

$$3x-4y+z-5=0$$

۳۰۴۰۱۷ قضیه. *هرگاه a ، b ، و c همه صفر نباشند، نمودار معادله به شکل*

$$ax+by+cz+d=0 \qquad (۴)$$

یک صفحه بوده و $\langle a, b. c\rangle$ یک بردار قائم به صفحه است.

برهان. فرض کنیم $b\neq 0$. پس نقطهٔ $(0, -d/b, 0)$ بر نمودار معادله است، زیرا مختصاتش در معادله صدق می‌کند. معادلهٔ داده شده را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$a(x-0)+b\left(y+\frac{d}{b}\right)+c(z-0)=0$$

که، طبق قضیهٔ ۲۰۴۰۱۷ ، معادلهٔ صفحه‌ای است مار بر نقطهٔ $(0, -d/b, 0)$ که $\langle a, b, c\rangle$ یک بردار قائم آن است. این قضیه را درصورت $b\neq 0$ ثابت می‌کند. استدلال مشابهی برای $b=0$ و $a\neq 0$ یا $c\neq 0$ برقرار است.

معادلات (۱) و (۴) را ***معادلات دکارتی*** صفحه می‌نامند. معادلهٔ (۱) شبیه شکل

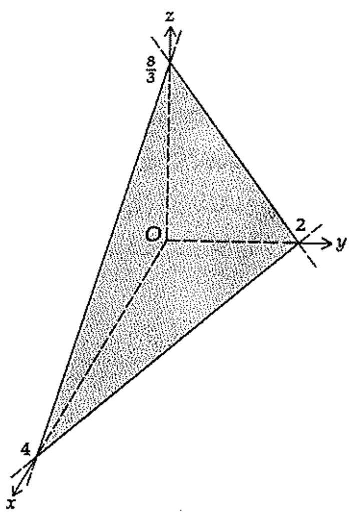
نقطه ـ شیب معادلهٔ خط در فضای دوبعدی است. معادلهٔ (۴) معادلهٔ درجهٔ اول کلی سه متغیره است و یک ***معادلهٔ خطی*** نام دارد.

یک صفحه با سه نقطهٔ ناهمخط، با یک خط و یک نقطهٔ غیر واقع بر خط، با دو خط متقاطع، یا دو خط موازی معین می‌شود. برای رسم یک صفحه از معادله‌اش شایسته است نقاطی یافت شود که در آنها صفحه محورهای مختصات را قطع می‌کنند. مختص x نقطه که در آن صفحه محور x را قطع می‌کند ***قطع*** x صفحه نام دارد؛ مختص y نقطهٔ تقاطع صفحه با محور y ***قطع*** y صفحه نامیده می‌شود، و ***قطع*** z صفحه مختص z نقطهٔ تقاطع صفحه با محور z است.

توضیح ۱. می‌خواهیم صفحه به معادلهٔ

$$2x+4y+3z=8$$

را رسم کنیم. با گذاردن صفر به‌جای y و z ، بدست می‌آوریم $x=4$ ؛ درنتیجه، قطع x صفحه 4 است. قطع y و قطع z به‌نحو مشابه بدست می‌آیند؛ اینها بترتیب عبارتند از 2 و $\frac{8}{3}$. با رسم نقاط نظیر این قطعها و خطوط واصل بین آنها، صفحهٔ شکل ۲۰۴۰۱۷ بدست می‌آید. توجه کنید که فقط بخشی از صفحه در شکل نموده شده است.

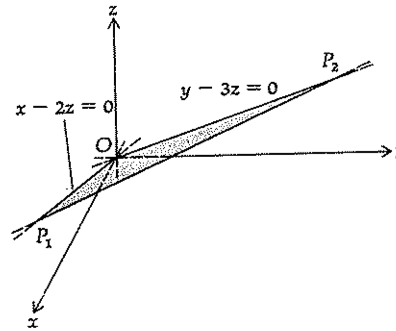


شکل ۲۰۴۰۱۷

توضیح ۲. برای رسم صفحه به معادلهٔ

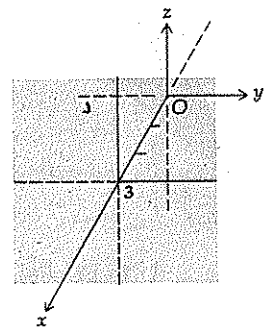
$$3x + 2y - 6z = 0$$

ابتدا توجه می‌کنیم که چون معادله وقتی x ، y ، و z همه صفرند برقرار است، صفحه تمام محورها را در مبداء قطع می‌کند. اگر در معادلهٔ داده شده $x = 0$ ، بدست می‌آید $y - 3z = 0$ ، که خطی در صفحهٔ yz است؛ این خط فصل مشترک صفحهٔ yz با صفحهٔ داده شده است. بهمین نحو، فصل مشترک صفحهٔ xz با صفحهٔ داده شده است که با فرض $y = 0$ بدست می‌آید، و خواهیم داشت $x - 2z = 0$. با رسم این دو خط و پاره خط از یک نقطه روی یکی از خطوط تا نقطه‌ای بر خط دیگر، شکل ۳۰۴۰۱۷ بدست می‌آید.



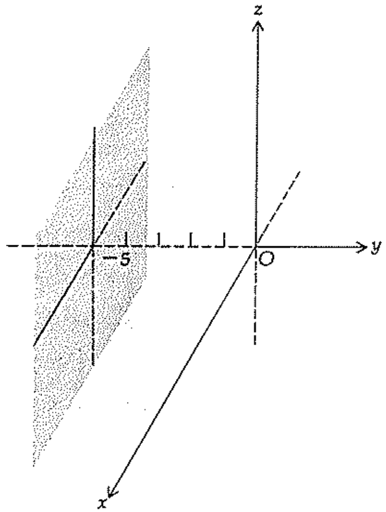
شکل ۳۰۴۰۱۷

در توضیح ۲ خط در صفحهٔ yz و خط در صفحهٔ xz که در رسم صفحه استفاده شد **اثرهای** صفحهٔ داده شده بترتیب در صفحهٔ yz و صفحهٔ xz نام دارند. معادلهٔ $x = 0$ معادلهٔ صفحهٔ yz است، زیرا نقطهٔ (x, y, z) در صفحهٔ yz است اگر و فقط اگر $x = 0$. بهمین نحو، معادلات $y = 0$ و $z = 0$ بترتیب معادلات صفحهٔ xz و صفحهٔ xy می‌باشند.



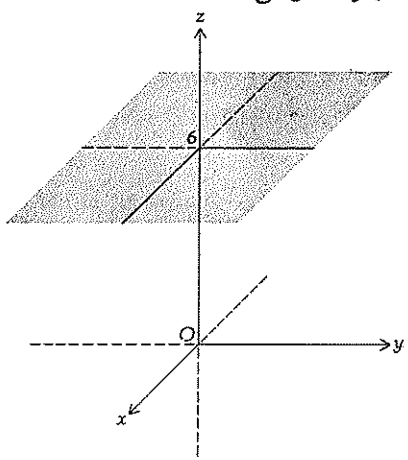
شکل ۴۰۴۰۱۷

هر صفحه موازی صفحهٔ yz معادله‌ای به شکل $x = k$ دارد، که در آن k ثابت است. شکل ۴۰۴۰۱۷ نشان می‌دهد که صفحه دارای معادلهٔ $x = 3$ است. هر صفحهٔ موازی



شکل ۵۰۴۰۱۷

صفحهٔ xz دارای معادله‌ای به شکل $y = k$ است، و هر صفحه موازی صفحهٔ xy دارای معادله‌ای به شکل $z = k$ می‌باشد. شکلهای ۵۰۴۰۱۷ و ۶۰۴۰۱۷ بترتیب صفحات به معادلات $y = -5$ و $z = 6$ را نشان می‌دهند.



شکل ۶۰۴۰۱۷

۴.۴.۱۷ تعریف. **زاویهٔ بین دو صفحه** زاویهٔ بین بردارهای قائم دو صفحه تعریف می‌شود.

مثال ۲. زاویهٔ بین دو صفحهٔ $5x - 2y + 5z - 12 = 0$ و $2x + y - 7z + 11 = 0$ را بیابید.

حل. فرض‌کنیم $\mathbf{N}_1$ بردار قائم به صفحهٔ اول بوده و $\mathbf{N}_1 = 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$. همچنین، $\mathbf{N}_2$ بردار قائم به صفحهٔ دوم بوده و $\mathbf{N}_2 = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 7\mathbf{k}$.

طبق تعریف ۴.۴.۱۷، زاویهٔ بین دو صفحه زاویهٔ بین $\mathbf{N}_1$ و $\mathbf{N}_2$ است؛ و درنتیجه، طبق قضیهٔ ۴.۳.۱۷، اگر θ این زاویه به رادیان باشد،

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{N}_1 \cdot \mathbf{N}_2}{|\mathbf{N}_1||\mathbf{N}_2|} = \frac{(5\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}) \cdot (2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 7\mathbf{k})}{\sqrt{25 + 4 + 25}\,\sqrt{4 + 1 + 49}} = \frac{-27}{54} = -\frac{1}{2}$$

بنابراین،

$$\theta = \tfrac{2}{3}\pi$$

۵.۴.۱۷ تعریف. دو صفحه **موازی**‌اند اگر و فقط اگر بردارهای قائم آنها موازی باشند.

از تعاریف ۵.۴.۱۷ و ۵.۳.۱۷ معلوم می‌شود که هرگاه دو صفحه به معادلات

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \qquad (۵)$$

و

$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \qquad (۶)$$

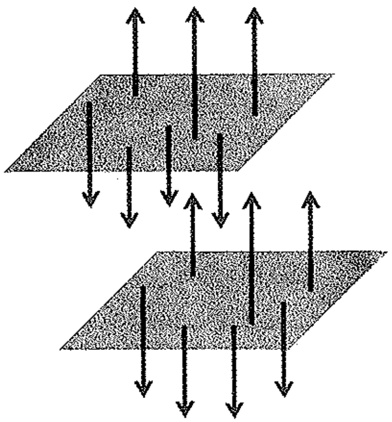
و بردارهای قائم $\mathbf{N}_1 = \langle a_1, b_1, c_1 \rangle$ و $\mathbf{N}_2 = \langle a_2, b_2, c_2 \rangle$ داشته باشیم، آنگاه دو صفحه موازی‌اند اگر و فقط اگر

$\mathbf{N}_1 = k\mathbf{N}_2$، که درآن k ثابت است.

شکل ۷.۴.۱۷ دو صفحهٔ موازی و نمایشهای بردارهای قائمی از آنها را نشان می‌دهد.

۶.۴.۱۷ تعریف. دو صفحه **برهم عمود**اند اگر و فقط اگر بردارهای قائم آنها متعامد باشند.

از تعاریف ۶.۴.۱۷ و ۷.۳.۱۷ معلوم می‌شود که دو صفحه به بردارهای قائم $\mathbf{N}_1$



شکل ۷.۴.۱۷

و $\mathbf{N}_2$ برهم عمودند اگر و فقط اگر

$$\mathbf{N}_1 \cdot \mathbf{N}_2 = 0 \qquad (۷)$$

مثال ۳. معادلهٔ صفحهٔ قائم بر هریک از صفحات $x - y + z = 0$ و $2x + y - 4z - 5 = 0$ و شامل نقطهٔ $(4, 0, -2)$ را پیدا کنید.

حل. فرض‌کنیم M صفحهٔ مطلوب و $\langle a, b, c \rangle$ یک بردار قائم M باشد. همچنین، M_1 صفحه‌ای به معادلهٔ $x - y + z = 0$ باشد. طبق قضیهٔ ۳.۴.۱۷، یک بردار قائم M_1 عبارت است از $\langle 1, -1, 1 \rangle$. چون M و M_1 برهم عمودند، از (۷) نتیجه می‌شود که

$$\langle a, b, c \rangle \cdot \langle 1, -1, 1 \rangle = 0$$

یا، معادلاً،

$$a - b + c = 0 \qquad (۸)$$

فرض‌کنیم M_2 صفحه به معادلهٔ $2x + y - 4z - 5 = 0$ باشد. یک بردار قائم M_2 عبارت است از $\langle 2, 1, -4 \rangle$. چون M و M_2 برهم عمودند،

$$\langle a, b, c \rangle \cdot \langle 2, 1, -4 \rangle = 0$$

یا، معادلاً،

$$2a + b - 4c = 0 \qquad (۹)$$

با حل (۸) و (۹) باهم نسبت به b و c برحسب a، بدست می‌آوریم $b = 2a$ و $c = a$.

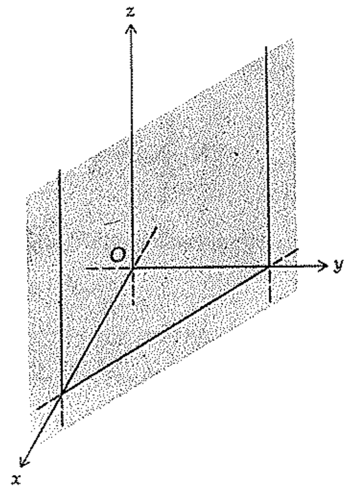
لذا، یک بردار قائم M عبارت است از $\langle a, 2a, a\rangle$. چون $(4, 0, -2)$ یک نقطه در M است، از قضیهٔ ۲۰۴۰۱۷ نتیجه می‌شود که معادلهٔ M عبارت است از

$$a(x-4) + 2a(y-0) + a(z+2) = 0$$

یا، معادلاً"،

$$x + 2y + z - 2 = 0$$

حال صفحه به معادلهٔ $ax + by + d = 0$ و صفحهٔ xy که معادله‌اش $z = 0$ است را درنظر می‌گیریم. بردارهای قائم این صفحات بترتیب عبارتند از $\langle a, b, 0\rangle$ و $\langle 0, 0, 1\rangle$. چون $\langle a, b, 0\rangle \cdot \langle 0, 0, 1\rangle = 0$ ، دو صفحه برهم عمودند. این یعنی هر صفحه با معادله‌ای بدون جملهٔ z بر صفحهٔ xy عمود است. شکل ۸۰۴۰۱۷ این امر را توضیح می‌دهد.

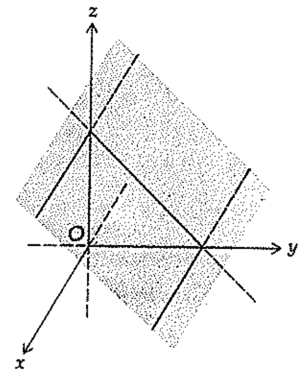


شکل ۸۰۴۰۱۷

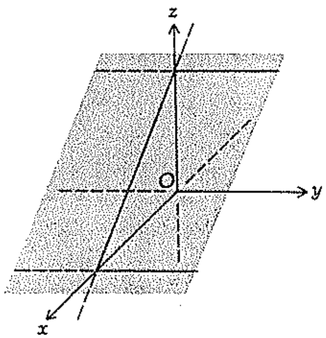
بهمین‌نحو، می‌توان نتیجه گرفت که هر صفحه با معادله‌ای بدون جملهٔ x بر صفحهٔ yz عمود است (ر.ک. شکل ۹۰۴۰۱۷) و هر صفحه با معادله‌ای بدون جملهٔ y بر صفحهٔ xz عمود می‌باشد (ر.ک. شکل ۱۰۰۴۰۱۷).

کاربردمهمی از بردارها یافتن فاصلهٔ بدون جهت یک صفحه تا یک نقطه است. مثال زیر این امر را توضیح می‌دهد.

مثال ۴. فاصلهٔ صفحهٔ $2x - y + 2z + 10 = 0$ تا نقطهٔ $(1, 4, 6)$ را بیابید.



شکل ۹۰۴۰۱۷



شکل ۱۰۰۴۰۱۷

حل. فرض‌کنیم P نقطهٔ $(1, 4, 6)$ بوده و نقطهٔ دلخواه Q در صفحه را اختیار می‌کنیم. برای سادگی، نقطهٔ Q را نقطهٔ برخورد صفحه با محور x ، یعنی نقطهٔ $(-5, 0, 0)$ ، می‌گیریم. بردار به نمایش $\overrightarrow{QP}$ عبارت است از

$$\mathbf{V}(\overrightarrow{QP}) = 6\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$$

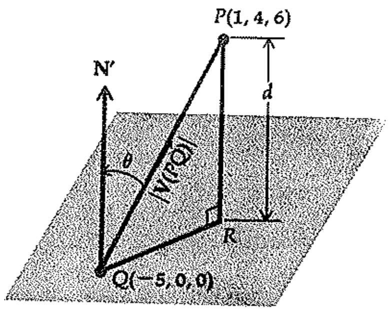
یک بردار قائم به صفحهٔ داده شده عبارت است از

$$\mathbf{N} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

قرینهٔ $\mathbf{N}$ نیز یک بردار قائم به صفحهٔ داده شده است و

$$-\mathbf{N} = -2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$$

نمی‌دانیم کدامیک از بردارهای $\mathbf{N}$ و $-\mathbf{N}$ زاویهٔ کوچکتری با $\mathbf{V}(\overrightarrow{QP})$ می‌سازد. فرض‌کنیم $\mathbf{N}'$ یکی از دو بردار $\mathbf{N}$ یا $-\mathbf{N}$ باشد که زاویهٔ $\theta < \frac{1}{2}\pi$ با $\mathbf{V}(\overrightarrow{QP})$ می‌سازد. در شکل ۱۱۰۴۰۱۷ بخشی از صفحهٔ داده شده شامل نقطهٔ $Q(-5, 0, 0,)$ ، نمایش بردار $\mathbf{N}'$ با



شکل ۱۱۰۴۰۱۷

نقطهٔ شروع Q ، نقطهٔ $P(1, 4, 6)$ ، پاره خط جهتدار $\overrightarrow{QP}$ ، و نقطهٔ R ، که پای عمود وارد از P به صفحه است نموده شده است . برای سادگی ، محورهای مختصات در این شکل رسم نشده‌اند . فاصلهٔ $|\overrightarrow{RP}|$ فاصلهٔ مطلوب است ، که آن‌را d می‌نامیم . از شکل ۱۱۰۴۰۱۷ معلوم می‌شود که

$$d = |\mathbf{V}(\overrightarrow{QP})| \cos\theta \qquad (۱۰)$$

چون θ زاویهٔ بین $\mathbf{N}'$ و $\mathbf{V}(\overrightarrow{QP})$ است ،

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{N}'\cdot\mathbf{V}(\overrightarrow{QP})}{|\mathbf{N}||\mathbf{V}(\overrightarrow{QP})|} \qquad (۱۱)$$

با گذاردن (۱۱) در (۱۰) و تعویض $|\mathbf{N}'|$ با $|\mathbf{N}|$ ، بدست می‌آوریم

$$d = \frac{|\mathbf{V}(\overrightarrow{QP})|(\mathbf{N}'\cdot\mathbf{V}(\overrightarrow{QP}))}{|\mathbf{N}||\mathbf{V}(\overrightarrow{QP})|} = \frac{\mathbf{N}'\cdot\mathbf{V}(\overrightarrow{QP})}{|\mathbf{N}|}$$

چون d یک فاصلهٔ بدون جهت است ، پس نامنفی است ؛ لذا ، می‌توان صورت رابطهٔ فوق را با قدر مطلق حاصلضرب نقطه‌ای $\mathbf{N}$ و $\mathbf{V}(\overrightarrow{QP})$ عوض کرد . بنابراین ،

$$d = \frac{|\mathbf{N}\cdot\mathbf{V}(\overrightarrow{QP})|}{|\mathbf{N}|} = \frac{|(2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k})\cdot(6\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k})|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{20}{3}$$

تمرینات ۴۰۱۷

در تمرینهای ۱ تا ۶ ، معادلهٔ صفحهٔ شامل نقطهٔ p و بردار قائم $\mathbf{N}$ را بیابید .

۱ . $P(3, 1, 2); \mathbf{N} = \langle 1, 2, -3\rangle$

۲ . $P(-3, 2, 5); \mathbf{N} = \langle 6, -3, -2\rangle$

۳ . $P(0, -1, 2); \mathbf{N} = \langle 0, 1, -1\rangle$

۴ . $P(-1, 8, 3); \mathbf{N} = \langle -7, -1, 1\rangle$

۵ . $P(2, 1, -1); \mathbf{N} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

۶ . $P(1, 0, 0); \mathbf{N} = \mathbf{i} + \mathbf{k}$

در تمرینهای ۷ و ۸ ، معادلهٔ صفحهٔ شامل سه نقطهٔ داده شده را بیابید .

۷ . $(3, 4, 1), (1, 7, 1), (-1, -2, 5)$

۸ . $(0, 0, 2), (2, 4, 1), (-2, 3, 3)$

در تمرینهای ۹ تا ۱۴ ، صفحهٔ داده شده‌را رسم کرده و دو بردار یکه که قائم به صفحه‌اند را بیابید .

۹ . $2x - y + 2z - 6 = 0$

۱۰ . $4x - 4y + 2z - 9 = 0$

۱۱ . $4x + 3y - 12z = 0$

۱۲ . $y + 2z - 4 = 0$

۱۳ . $3x + 2z - 6 = 0$

۱۴ . $z = 5$

در تمرینهای ۱۵ تا ۲۰ ، معادلهٔ صفحهٔ صادق در شرایط داده شده را بیابید .

۱۵ . عمود برخط ماربر نقاط $(2, 2, -4)$ و $(7, -1, 3)$ و شامل نقطهٔ $(-5, 1, 2)$.

۱۶ . موازی صفحهٔ $4x - 2y + z - 1 = 0$ و شامل نقطهٔ $(2, 6, -1)$.

۱۷ . عمود بر صفحهٔ $x + 3y - z - 7 = 0$ و شامل نقاط $(2, 0, 5)$ و $(0, 2, -1)$.

۱۸ . عمود برهریک از صفحات $x - y + z = 0$ و $2x + y - 4z - 5 = 0$ و شامل نقطهٔ $(4, 0, -2)$.

۱۹ . عمود بر صفحهٔ yz ، شامل نقطهٔ $(2, 1, 1)$ ، که با صفحهٔ $2x - y + 2z - 3 = 0$ زاویه‌ای مساوی $\cos^{-1}(\frac{2}{3})$ رادیان می‌سازد .

۲۰ . شامل نقطهٔ $P(-3, 5, -2)$ و عمود بر نمایش بردار $\mathbf{V}(\overrightarrow{OP})$.

در تمرینهای ۲۱ تا ۲۳ ، کسینوس زاویهٔ بین دو صفحهٔ دادهٔ شده را بیابید .

۲۱ . $2x - y - 2z - 5 = 0$ و $6x - 2y + 3z + 8 = 0$.

۲۲ . $2x - 5y + 3z - 1 = 0$ و $y - 5z + 3 = 0$.

۲۳ . $3x + 4y = 0$ و $4x - 7y + 4z - 6 = 0$.

۲۴ . فاصلهٔ صفحهٔ $2x + 2y - z - 6 = 0$ تا نقطهٔ $(2, 2, -4)$ را بیابید .

۲۵ . فاصلهٔ صفحهٔ $5x + 11y + 2z - 30 = 0$ تا نقطهٔ $(-2, 6, 3)$.

۲۶ . فاصلهٔ عمودی صفحات موازی $4x - 8y - z + 9 = 0$ و $4x - 8y - z - 6 = 0$ را بیابید .

۲۷ . فاصلهٔ عمودی صفحات موازی $4y - 3z - 6 = 0$ و $8y - 6z - 27 = 0$ را بیابید .

۲۸ . ثابت کنید فاصلهٔ بدون جهت صفحهٔ $ax + by + cz + d = 0$ تا نقطهٔ (x_0, y_0, z_0) مساوی است با

$$\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

۲۹ . ثابت کنید فاصلهٔ عمودی بین صفحات موازی $ax + by + cz + d_1 = 0$ و $ax + by + cz + d_2 = 0$ مساوی است با

$$\frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

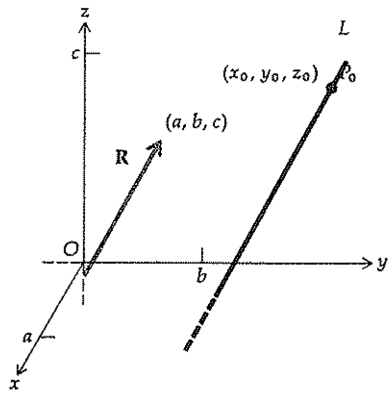
۳۰ . هرگاه a ، b ، و c ناصفر بوده و بترتیب قطع x ، قطع y ، و قطع z یک صفحه باشند ، ثابت کنید معادلهٔ صفحه عبارت است از

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

این را **شکل قطعی** معادلهٔ یک صفحه می‌نامند .

۵.۱۷ خطوط در R^3

فرض کنیم L خطی در R^3 شامل نقطهٔ $P_0(x_0, y_0, z_0)$ و موازی نمایشهای بردار $\mathbf{R} = \langle a, b, c\rangle$ باشد. شکل ۱.۵.۱۷ خط L و نمایش موضعی بردار $\mathbf{R}$ را نشان می‌دهد.



شکل ۱.۵.۱۷

خط L مجموعهٔ نقاط $P(x, y, z)$ است بطوری که $\mathbf{V}(\overrightarrow{P_0P})$ موازی بردار $\mathbf{R}$ است. درنتیجه، P برخط L است اگر و فقط اگر اسکالر ناصفری چون t باشد بطوری که

$$\mathbf{V}(\overrightarrow{P_0P}) = t\mathbf{R} \qquad (۱)$$

چون $\mathbf{V}(\overrightarrow{P_0P}) = \langle x - x_0, y - y_0, z - z_0\rangle$، از (۱) بدست می‌آوریم

$$\langle x - x_0, y - y_0, z - z_0\rangle = t\langle a, b, c\rangle$$

که از آن نتیجه می‌شود که

$$x - x_0 = ta \qquad y - y_0 = tb \qquad z - z_0 = tc$$

یا، معادلاً،

$$x = x_0 + ta \qquad y = y_0 + tb \qquad z = z_0 + tc \qquad (۲)$$

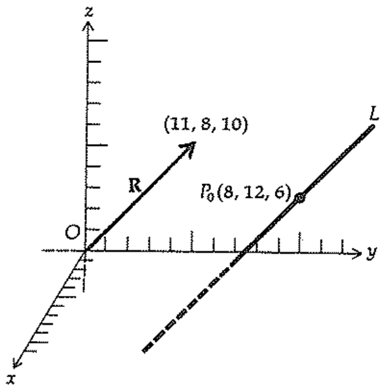
اگر پارامتر t عدد حقیقی دلخواهی باشد (یعنی، t همهٔ مقادیر در بازهٔ $(-\infty, +\infty)$ را بگیرد)، نقطهٔ P می‌تواند هر نقطه برخط L باشد. لذا، معادلات (۲) خط L را نمایش می‌دهند؛ این معادلات را ***معادلات پارامتری*** خط می‌نامند.

توضیح ۱. از معادلات (۲) معلوم می‌شود که خط موازی نمایشهای بردار $\mathbf{R} = \langle 11, 8, 10\rangle$

و شامل نقطهٔ $(8, 12, 6)$ عبارتند از

$$x = 8 + 11t \qquad y = 12 + 8t \qquad z = 6 + 10t$$

شکل ۲.۵.۱۷ خط و نمایش موضعی $\mathbf{R}$ را نشان می‌دهد.



شکل ۲.۵.۱۷

اگر هیچیک از اعداد a، b، یا c صفر نباشد، t را می‌توان از معادلات (۲) حذف کرد و بدست آورد

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \qquad (۳)$$

این معادلات ***معادلات متقارن*** خط است.

بردار $\mathbf{R} = \langle a, b, c\rangle$ جهت خط را مشخص می‌کند، واعداد a، b، و c **پارامترهای هادی** خط نام دارند. هر بردار موازی $\mathbf{R}$ با آن همجهت یا مختلف‌الجهت است؛ لذا، چنین بردار را می‌توان به‌جای $\mathbf{R}$ در بحث بالا بکار برد. چون مولفه‌های هر بردار موازی $\mathbf{R}$ با مولفه‌های $\mathbf{R}$ متناسب‌اند، هر مجموعه از سه عدد متناسب با a، b، و c را نیز می‌توان به‌عنوان مجموعه‌ای از پارامترهای هادی خط بکار برد. درنتیجه، مجموعهٔ پارامترهای هادی یک خط نامحدود است. یک مجموعه از پارامترهای هادی یک خط به‌صورت $[a, b, c]$ نوشته می‌شود.

توضیح ۲. هرگاه $[2, 3, -4]$ نمایش مجموعه‌ای از پارامترهای هادی یک خط باشد، مجموعه‌های دیگری از پارامترهای هادی همین خط را می‌توان به‌صورت $[4, 6, -8]$،

$[1, \frac{3}{2}, -2]$ ، و $[2/\sqrt{29}, 3/\sqrt{29}, -4/\sqrt{29}]$ نمایش داد .

توضیح ۳. یک مجموعه از پارامترهای هادی خط توضیح ۱ عبارت است از $[11, 8, 10]$ ، و خط شامل نقطهٔ $(8, 12, 6)$ می‌باشد . لذا ، از (۳) معلوم می‌شود که معادلات متقارن این خط عبارتند از

$$\frac{x-8}{11} = \frac{y-12}{8} = \frac{z-6}{10}$$

مثال ۱. دو مجموعه از معادلات متقارن خط مار بر دو نقطهٔ $(-3, 2, 4)$ و $(6, 1, 2)$ را پیدا کنید .

حل. فرض کنیم P_1 نقطهٔ $(-3, 2, 4)$ و P_2 نقطهٔ $(6, 1, 2)$ باشد . در این صورت ، خط مطلوب موازی نمایشهای بردار $\mathbf{V}(\overrightarrow{P_1P_2})$ است ؛ و در نتیجه ، مولفه‌های این بردار یک مجموعه از پارامترهای هادی خط را می‌سازند . $\mathbf{V}(\overrightarrow{P_1P_2}) = \langle 9, -1, -2 \rangle$. اگر P_0 را نقطهٔ $(-3, 2, 4)$ بگیریم ، از (۳) معادلات

$$\frac{x+3}{9} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-4}{-2}$$

را داریم . مجموعهٔ دیگری از معادلات متقارن این خط ، که با گرفتن P_0 به عنوان نقطهٔ $(6, 1, 2)$ بدست می‌آید ، عبارت است از

$$\frac{x-6}{9} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{-2}$$

معادلات (۳) معادلند با دستگاه سه معادلهٔ

$$\begin{aligned} b(x-x_0) &= a(y-y_0) \\ c(x-x_0) &= a(z-z_0) \qquad (۴) \\ c(y-y_0) &= b(z-z_0) \end{aligned}$$

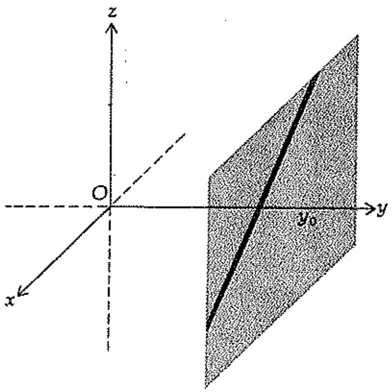
در واقع ، سه معادلهٔ (۴) مستقل نیستند ، زیرا هریک از آنها را می‌توان از دوتای دیگر بدست آورد . هریک از معادلات (۴) معادلهٔ صفحه‌ای است شامل خط L که با معادلات (۳) نموده می‌شود . هر دو صفحه از اینها خط L را به‌عنوان فصل مشترک دارد ؛ لذا ، هر دو معادله از معادلات (۴) معرف یک خط است . با اینحال ، بی‌نهایت صفحه **شامل**

یک خط وجود دارد ، و چون هردو تا از آنها یک خط مشخص می‌کنند ، بی‌نهایت جفت معادله وجود دارند که نمایش یک خط می‌باشند .

اگر یکی از اعداد a ، b ، یا c صفر باشد ، از معادلات متقارن (۳) استفاده نمی‌کنیم . مثلاً ، فرض کنیم $b = 0$ و a و c صفر نباشند . در این صورت ، معادلات خط عبارتند از

$$y = y_0 \quad \text{و} \quad \frac{x-x_0}{a} = \frac{z-z_0}{c} \qquad (۵)$$

هر خط به معادلات متقارن (۵) در صفحهٔ $y = y_0$ واقع است ؛ و در نتیجه ، موازی صفحهٔ xz است . شکل ۳۰۵۰۱۷ چنین خط را نشان می‌دهد .



شکل ۳۰۵۰۱۷

مثال ۲. دو صفحهٔ $x + 3y - z - 9 = 0$ و $2x - 3y + 4z + 3 = 0$ داده شده‌اند . برای فصل مشترک دو صفحه ، (آ) مجموعه‌ای از معادلات متقارن و (ب) مجموعه‌ای از معادلات پارامتری را بیابید .

حل. هرگاه دو معادله را نسبت به x و y و برحسب z حل کنیم ، بدست می‌آوریم

$$x = -z + 2 \qquad y = \tfrac{2}{3}z + \tfrac{7}{3}$$

که از آنها خواهیم داشت

$$\frac{x-2}{-1} = \frac{y-\frac{7}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{z-0}{1}$$

یا ، معادلاً ،

$$\frac{x-2}{-3}=\frac{y-\frac{7}{3}}{2}=\frac{z-0}{3}$$

که یک مجموعه از معادلات متقارن خط است. یک مجموعه از معادلات پارامتری را می‌توان با گرفتن هریک از نسبتهای فوق مساوی t بدست آورد، و خواهیم داشت

$$x=2-3t \qquad y=\frac{7}{3}+2t \qquad z=3t$$

مثال ۳. کسینوسهای هادی یک بردار که نمایشهایش موازی خط مثال ۲ اند را پیدا کنید.

حل. از معادلات متقارن خط مثال ۲ معلوم می‌شود که یک مجموعه از پارامترهای هادی خط $[-3, 2, 3]$ است. لذا، بردار $\langle -3, 2, 3\rangle$ برداری است که نمایشهایش موازی خط می‌باشند. کسینوسهای هادی این بردار عبارتند از

$$\cos\ \alpha=-3/\sqrt{22},\ \cos\beta=2/\sqrt{22},\ \cos\gamma=3/\sqrt{22}$$

مثال ۴. معادلات خط ماربر نقطهٔ $(1,-1,1)$، عمود بر خط $3x=2y=z$، و موازی صفحهٔ $x+y-z=0$ را پیدا کنید.

حل. فرض کنیم $[a, b, c]$ یک مجموعه از پارامترهای هادی خط مطلوب باشد. معادلات $3x=2y=z$ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\frac{x-0}{\frac{1}{3}}=\frac{y-0}{\frac{1}{2}}=\frac{z-0}{1}$$

که معادلات متقارن یک خط‌اند. یک مجموعه از پارامترهای هادی این خط $[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1]$ است. چون خط مطلوب براین خط عمود است، بردارهای $\langle a, b, c\rangle$ و $\langle \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\rangle$ متعامد می‌باشند. درنتیجه،

$$\langle a, b, c\rangle\cdot\langle \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{2}, 1\rangle=0$$

یا، معادلاً،

(۶) $$\frac{1}{3}a+\frac{1}{2}b+c=0$$

یک بردار قائم به صفحهٔ $x+y-z=0$ عبارت است از $\langle 1, 1, -1\rangle$. چون خط مطلوب موازی این صفحه است، بر نمایشهای بردار قائم عمود است. از اینرو، بردارهای $\langle a, b, c\rangle$ و $\langle 1, 1, -1\rangle$ متعامدند؛ و درنتیجه،

$$\langle a, b, c\rangle\cdot\langle 1, 1, -1\rangle=0$$

یا، معادلاً،

(۷) $$a+b-c=0$$

با حل همزمان (۶) و (۷) نسبت به a و b و برحسب c، بدست می‌آوریم $a=9c$ و $b=-8c$. دراین صورت، خط مطلوب دارای مجموعهٔ $[9c, -8c, c]$ از پارامترهای هادی است و شامل نقطهٔ $(1, -1, 1)$ می‌باشد. لذا، معادلات متقارن خط عبارتند از

$$\frac{x-1}{9c}=\frac{y+1}{-8c}=\frac{z-1}{c}$$

یا، معادلاً،

$$\frac{x-1}{9}=\frac{y+1}{-8}=\frac{z-1}{1}$$

مثال ۵. هرگاه l_1 خط ماربر $A(1, 2, 7)$ و $B(-2, 3, -4)$ بوده و l_2 خط ماربر $C(2, -1, 4)$ و $D(5, 7, -3)$ باشد، ثابت کنید l_1 و l_2 خطوطی متنافر هستند (یعنی، دریک صفحه قرار ندارند).

حل. برای نشان دادن اینکه دو خط در یک صفحه نیستند، ثابت می‌کنیم متقاطع و موازی نیستند. معادلات پارامتری یک خط عبارتند از

$$x=x_0+ta \qquad y=y_0+tb \qquad z=z_0+tc$$

که درآنها $[a, b, c]$ یک مجموعه از پارامترهای هادی خط بوده و (x_0, y_0, z_0) نقطهٔ دلخواهی برخط می‌باشد. چون $\mathbf{V}(\overrightarrow{AB})=\langle -3, 1, -11\rangle$، یک مجموعه از پارامترهای هادی l_1 عبارت است از $[-3, 1, -11]$. چنانچه A را نقطهٔ P_0 بگیریم، معادلات پارامتری l_1 خواهند بود

(۸) $$x=1-3t \qquad y=2+t \qquad z=7-11t$$

چون $\mathbf{V}(\overrightarrow{CD})=\langle 3, 8, -7\rangle$ و l_2 شامل نقطهٔ C است، معادلات پارامتری l_2 عبارتنداز

(۹) $$x=2+3s \qquad y=-1+8s \qquad z=4-7s$$

چون مجموعه‌های پارامترهای هادی متناسب نیستند، l_1 و l_2 موازی نخواهند بود. برای آنکه خطوط متقاطع باشند، باید مقادیری از t و s باشند که در هر دو دسته معادلات (۸) و (۹) یک نقطهٔ (x_1, y_1, z_1) را بدهند. لذا، طرفهای راست معادلات مربوطه را متحد قرار داده و بدست می‌آوریم

$$1-3t=2+3s$$

$$2 + t = -1 + 8s$$
$$7 - 11t = 4 - 7s$$

با حل همزمان دو معادلهٔ اول، خواهیم داشت $s = \frac{8}{27}$ و $t = -\frac{17}{27}$. این مجموعه‌مقادیر در معادلهٔ سوم صدق نمی‌کند؛ لذا، دو خط متقاطع نیستند. بنابراین، l_1 و l_2 متنافر می‌باشند.

تمرینات ۵۰۱۷

در تمرینهای ۱ تا ۸، معادلات پارامتری و متقارن خط صادق در شرایط داده شده را بیابید.

۱. ماربر دو نقطهٔ $(1, 2, 1)$ و $(5, -1, 1)$.

۲. ماربر نقطهٔ $(5, 3, 2)$ به پارامترهای هادی $[4, 1, -1]$.

۳. ماربر مبداء و عمود بر خط $\frac{1}{4}(x - 10) = \frac{1}{3}y = \frac{1}{2}z$ در نقطهٔ برخوردشان.

۴. ماربر مبداء و عمود بر خطوط به پارامترهای هادی $[4, 2, 1]$ و $[-3, -2, 1]$.

۵. عمود بر خطوط به پارامترهای هادی $[-5, 1, 2]$ و $[2, -3, -4]$ در نقطهٔ $(-2, 0, 3)$.

۶. ماربر نقطهٔ $(-3, 1, -5)$ و عمود بر صفحهٔ $4x - 2y + z - 7 = 0$.

۷. ماربر نقطهٔ $(4, -5, 20)$ و عمود بر صفحهٔ $x + 3y - 6z - 8 = 0$.

۸. ماربر نقطهٔ $(2, 0, -4)$ و موازی هریک از صفحات $2x + y - z = 0$ و $x + 3y + 5z = 0$.

۹. برای خط

$$\begin{cases} 4x - 3y + z - 2 = 0 \\ 2x + 5y - 3z + 4 = 0 \end{cases}$$

مجموعه‌ای از معادلات متقارن پیدا کنید.

۱۰. نشان دهید که خطوط

$$\frac{x-3}{-2} = \frac{y+14}{5} = \frac{z-8}{-3} \quad \text{و} \quad \frac{x+1}{2} = \frac{y+4}{-5} = \frac{z-2}{3}$$

برهم منطبق‌اند.

۱۱. ثابت کنید خط $\frac{1}{2}(x - 3) = \frac{1}{3}(y + 2) = \frac{1}{4}(z + 1)$ در صفحهٔ $x - 2y + z = 6$ واقع است.

۱۲. ثابت کنید خط $x + 1 = -\frac{1}{2}(y - 6) = z$ در صفحهٔ $3x + y - z = 3$ واقع است.

صفحات ماربر یک خط که بر صفحات مختصات عمودند **صفحات تصویر کنندهٔ** خط نام دارند.

در تمرینهای ۱۳ تا ۱۶، معادلات صفحات تصویر کنندهٔ خط داده شده را یافته و خط را

رسم نمایید.

۱۳. $\begin{cases} 3x - 2y + 5z - 30 = 0 \\ 2x + 3y - 10z - 6 = 0 \end{cases}$

۱۴. $\begin{cases} x + y - 3z + 1 = 0 \\ 2x - y - 3z + 14 = 0 \end{cases}$

۱۵. $\begin{cases} x - 2y - 3z + 6 = 0 \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$

۱۶. $\begin{cases} 2x - y + z - 7 = 0 \\ 4x - y + 3z - 13 = 0 \end{cases}$

۱۷. کسینوس کوچکترین زاویه بین دو خط $x = 2y + 4, z = -y + 4$ و $x = y + 7,\ 2z = y + 2$ را بیابید.

۱۸. معادلهٔ صفحهٔ شامل نقطهٔ $(6, 2, 4)$ و خط $\frac{1}{5}(x - 1) = \frac{1}{6}(y + 2) = \frac{1}{7}(z - 3)$ را پیدا کنید.

در تمرینهای ۱۹ و ۲۰، معادلهٔ صفحهٔ شامل خطوط متقاطع داده شده را پیدا کنید.

۱۹. $\frac{x-2}{4} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z+2}{3}$ و $\begin{cases} 3x + 2y + z + 2 = 0 \\ x - y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$

۲۰. $\frac{x}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{1}$ و $\frac{x}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{1}$

۲۱. نشان دهید که خطوط

$$\begin{cases} 3x - y - z = 0 \\ 8x - 2y - 3z + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x - 3y + z + 3 = 0 \\ 3x - y - z + 5 = 0 \end{cases}$$

موازی‌اند، و معادلهٔ صفحهٔ معین شده به‌وسیلهٔ این خطوط را بیابید.

۲۲. نشان دهید که خطوط

$$\frac{x+2}{5} = \frac{y-1}{-2} = z + 4$$

و

$$\frac{x-3}{-5} = \frac{y+4}{2} = \frac{z-3}{-1}$$

موازی‌اند، و معادلهٔ صفحهٔ معین شده به‌وسیلهٔ این خطوط را پیدا کنید.

۲۳. مختصات نقطهٔ برخورد صفحهٔ $5x - y + 2z - 12 = 0$ و خط $\frac{1}{4}(x - 2) = -\frac{1}{2}(y + 3) = \frac{1}{7}(z - 1)$ را پیدا کنید.

۲۴. معادلات خط ماربر نقطهٔ $(1, -1, 1)$، عمود بر خط $3x = 2y = z$، و موازی صفحهٔ $x + y - z = 0$ را بیابید.

۲۵. معادلات خط ماربر نقطهٔ $(3, 6, 4)$، متقاطع با محور z، و موازی صفحهٔ

$x - 3y + 5z - 6 = 0$ را بیابید.

۲۶. فاصلهٔ عمودی مبداء تا خط

$$x = -2 + \tfrac{6}{7}t \qquad y = 7 - \tfrac{2}{7}t \qquad z = 4 + \tfrac{3}{7}t$$

را پیدا کنید.

۲۷. فاصلهٔ عمودی نقطهٔ $(-1, 3, -1)$ تا خط $x - 2z = 7, y = 1$ را بیابید.

۲۸. معادلات خط ماربر مبداء، عمود بر خط $x = y - 5, z = 2y - 3$، و متقاطع با خط $y = 2x + 1, z = x + 2$ را بیابید.

۲۹. ثابت کنید خطوط

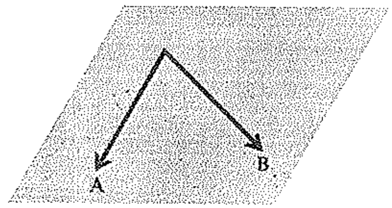
$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z+3}{2} \quad \text{و} \quad \frac{x-1}{5} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{-3}$$

متنافرند.

۳۰. معادلات خط ماربر نقطهٔ $(3, -4, -5)$ و متقاطع با هریک از خطوط متنافر تمرین ۲۹ را بیابید.

۶.۱۷ حاصل‌ضرب خارجی

فرض کنیم $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ دو بردار ناموازی باشند. همانطور که شکل ۱.۶.۱۷ نشان داده،



شکل ۱.۶.۱۷

نمایشهای این دو بردار که یک نقطهٔ شروع دارند یک صفحه معین می‌کنند. نشان می‌دهیم که هربردار که نمایشهایش براین صفحه عمودند با عملی برداری به‌نام **حاصل‌ضرب‌خارجی** دو بردار $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ بدست‌می‌آید. ضرب خارجی یک عمل برداری بر بردارهای در V_3 است که درمورد بردارهای V_2 وجود ندارد. ابتدا این عمل راتعریف کرده و سپس به خواص جبری و هندسی آن می‌پردازیم.

۱.۶.۱۷ تعریف. هرگاه $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ و $\mathbf{B} = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$، آنگاه ***حاصل ضرب خارجی*** $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$، که با $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ نموده می‌شود، عبارت است از

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \langle a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1\rangle \qquad (1)$$

چون حاصل ضرب خارجی دو بردار یک بردار است، حاصل ضرب خارجی ***حاصل ضرب برداری*** نیز نامیده می‌شود. عملی که از آن حاصل ضرب خارجی بدست می‌آید ***ضرب برداری*** نام دارد.

توضیح ۱. هرگاه $\mathbf{A} = \langle 2, 1, -3\rangle$ و $\mathbf{B} = \langle 3, -1, 4\rangle$، آنگاه از تعریف ۱.۶.۱۷ داریم

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} \times \mathbf{B} &= \langle 2, 1, -3\rangle \times \langle 3, -1, 4\rangle \\
&= \langle (1)(4) - (-3)(-1), (-3)(3) - (2)(4), (2)(-1) - (1)(3)\rangle \\
&= \langle 4 - 3, -9 - 8, -2 - 3\rangle \\
&= \langle 1, -17, -5\rangle \\
&= \mathbf{i} - 17\mathbf{j} - 5\mathbf{k}
\end{aligned}$$

برای‌به‌یادآوردن فرمول (۱) روشی حفظی وجود دارد که در آن از نماد دترمینان استفاده می‌شود. یک دترمینان مرتبهٔ دوم با معادلهٔ

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

تعریف می‌شود، که در آن a، b، و c اعدادی حقیقی‌اند. مثلاً،

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 3(5) - (6)(-2) = 27$$

لذا، فرمول (۱) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

طرف راست عبارت فوق را می‌توان با علامات نوشت:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

که نمادی است برای یک دترمینان مرتبهٔ سوم. با اینحال، توجه کنید که سطر اول شامل بردارست نه اعداد حقیقی که در دترمینان وجود دارند.

توضیح ۲. برای استفاده از نماد دترمینان در یافتن حاصل‌ضرب خارجی بردارهای توضیح ۱، از روش حفظی زیر استفاده می‌کنیم.

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} \times \mathbf{B} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}\mathbf{k} \\
&= [(1)(4) - (-3)(-1)]\mathbf{i} - [(2)(4) - (-3)(3)]\mathbf{j} \\
&\qquad + [(2)(-1) - (1)(3)]\mathbf{k} \\
&= \mathbf{i} - 17\mathbf{j} - 5\mathbf{k}
\end{aligned}$$

۲.۶.۱۷ قضیه. ***هرگاه A برداری در V_3 باشد، آنگاه***

(یک) $\mathbf{A} \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$

(دو) $\mathbf{0} \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$

(سه) $\mathbf{A} \times \mathbf{0} = \mathbf{0}$

برهان (یک). هرگاه $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$، آنگاه طبق تعریف ۱.۶.۱۷،

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} \times \mathbf{A} &= \langle a_2a_3 - a_3a_2, a_3a_1 - a_1a_3, a_1a_2 - a_2a_1 \rangle \\
&= \langle 0, 0, 0 \rangle \\
&= \mathbf{0}
\end{aligned}$$

اثباتهای (دو) و (سه) را به‌عنوان تمرین می‌گذاریم (ر.ک. تمرین ۱۳).

با اعمال تعریف ۱.۶.۱۷ بر جفتی از بردارهای یکهٔ $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$، و $\mathbf{k}$، بدست می‌آوریم

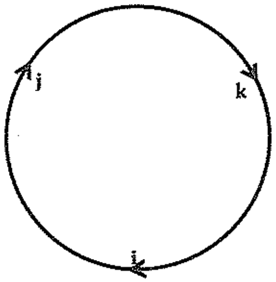
$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \qquad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} \qquad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$$

$$\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k} \qquad \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i} \qquad \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$$

به‌عنوان کمک در به‌یاد آوردن حاصل‌ضربهای خارجی فوق، ابتدا توجه می‌کنیم که

حاصل‌ضرب خارجی هریک از بردارهای یکهٔ $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$، یا $\mathbf{k}$ در خودش بردار صفر است. شش حاصل ضرب خارجی دیگر را می‌توان از شکل ۲.۶.۱۷ با اعمال قاعدهٔ زیر بدست آورد: حاصل ضرب خارجی دو بردار متوالی در جهت حرکت عقربه‌های ساعت بردار



شکل ۲.۶.۱۷

بعدی است؛ و حاصل ضرب خارجی دو بردار متوالی درجهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت قرینهٔ بردار بعدی می‌باشد.

به‌آسانی می‌توان دید که ضرب خارجی دو بردار تعویض‌پذیر نیست، زیرا درحالت خاص $\mathbf{i} \times \mathbf{j} \neq \mathbf{j} \times \mathbf{i}$. لیکن، $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$ و $\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$؛ درنتیجه، $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = -(\mathbf{j} \times \mathbf{i})$. بطور کلی، رابطهٔ $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -(\mathbf{B} \times \mathbf{A})$ درست است، که آن را به‌صورت قضیه بیان و ثابت می‌کنیم.

۳.۶.۱۷ قضیه. ***هرگاه A و B بردارهایی در V_3 باشند،***

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -(\mathbf{B} \times \mathbf{A})$$

برهان. هرگاه $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ و $\mathbf{B} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$، آنگاه، طبق تعریف ۱.۶.۱۷،

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} \times \mathbf{B} &= \langle a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1 \rangle \\
&= -1\langle a_3b_2 - a_2b_3, a_1b_3 - a_3b_1, a_2b_1 - a_1b_2 \rangle \\
&= -(\mathbf{B} \times \mathbf{A})
\end{aligned}$$

ضرب خارجی بردارها شرکتپذیر نیست. این امر را با مثال زیر نشان می‌دهیم.

$$\mathbf{i} \times (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) = \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$$

$$(\mathbf{i}\times\mathbf{i})\times\mathbf{j}=\mathbf{0}\times\mathbf{j}=\mathbf{0}$$

درنتیجه،

$$\mathbf{i}\times(\mathbf{i}\times\mathbf{j})\neq(\mathbf{i}\times\mathbf{i})\times\mathbf{j}$$

همانطور که قضیهٔ زیر نشان می‌دهد، ضرب خارجی بردارها نسبت به جمع برداری پخشپذیر است.

۴.۶.۱۷ قضیه. *هرگاه $\mathbf{A}$ ، $\mathbf{B}$ ، و $\mathbf{C}$ بردارهایی در V_3 باشند، آنگاه*

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{A}\times\mathbf{B}+\mathbf{A}\times\mathbf{C} \qquad (۲)$$

قضیهٔ ۴.۶.۱۷ را می‌توان با فرض $\mathbf{A}=\langle a_1, a_2, a_3\rangle$، $\mathbf{B}=\langle b_1, b_2, b_3\rangle$، و $\mathbf{C}=\langle c_1, c_2, c_3\rangle$ و نشان دادن اینکه مولفه‌های بردار طرف چپ (۲) همان مولفه‌های بردار سمت راست (۲) اند ثابت کرد. ذکر جزئیات را به‌عنوان تمرین می‌گذاریم (ر.ک. تمرین ۱۴).

۵.۶.۱۷ قضیه. *هرگاه $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ دو بردار در V_3 بوده و c یک اسکالر باشد، آنگاه*
(یک) $(c\mathbf{A})\times\mathbf{B}=\mathbf{A}\times(c\mathbf{B})$ ؛
(دو) $(c\mathbf{A})\times\mathbf{B}=c(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$.

اثبات قضیهٔ ۵.۶.۱۷ را به‌عنوان تمرین می‌گذاریم (ر.ک. تمرینهای ۱۵ و ۱۶).
با بکاربردن مکرر قضایای ۴.۶.۱۷ و ۵.۶.۱۷ می‌توان حاصلضرب خارجی دوبردار را به‌کمک قوانین جبر حساب کرد، مشروط براینکه ترتیب بردارها در ضرب خارجی تغییر نکند، زیرا این کار توسط قضیهٔ ۳.۶.۱۷ منع شده است. توضیح زیر این روند را شرح می‌دهد.

توضیح ۳. حاصل ضرب خارجی بردارهای توضیح ۱ را با اعمال قضایای ۴.۶.۱۷ و ۵.۶.۱۷ پیدا می‌کنیم.

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\times\mathbf{B}&=(2\mathbf{i}+\mathbf{j}-3\mathbf{k})\times(3\mathbf{i}-\mathbf{j}+4\mathbf{k})\\&=6(\mathbf{i}\times\mathbf{i})-2(\mathbf{i}\times\mathbf{j})+8(\mathbf{i}\times\mathbf{k})+3(\mathbf{j}\times\mathbf{i})-1(\mathbf{j}\times\mathbf{j})\\&\quad+4(\mathbf{j}\times\mathbf{k})-9(\mathbf{k}\times\mathbf{i})+3(\mathbf{k}\times\mathbf{j})-12(\mathbf{k}\times\mathbf{k})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&=6(\mathbf{0})-2(\mathbf{k})+8(-\mathbf{j})+3(-\mathbf{k})-1(\mathbf{0})\\&\qquad+4(\mathbf{i})-9(\mathbf{j})+3(-\mathbf{i})-12(\mathbf{0})\\&=-2\mathbf{k}-8\mathbf{j}-3\mathbf{k}+4\mathbf{i}-9\mathbf{j}-3\mathbf{i}\\&=\mathbf{i}-17\mathbf{j}-5\mathbf{k}\end{aligned}$$

روش بکارزفته درتوضیح ۳ راه یافتن حاصل ضرب خارجی است بی‌آنکه مجبورباشیم فرمول (۱) را بخاطر بیاوریم یا از نماد دترمینان استفاده کنیم. درواقع، لازم نیست همهٔ مراحل حل ذکر شوند، چرا که حاصلضربهای خارجی مختلف بردارهای یکه رامی‌توان بی‌درنگ با استفاده از شکل ۲.۶.۱۷ و قاعدهٔ نظیر بدست آورد.
قضیهٔ زیر فرمولی بدست می‌دهد که در اثبات قضیهٔ ۷.۶.۱۷ مفید است، که از آن تعبیر هندسی حاصل ضرب خارجی بدست می‌آید.

۶.۶.۱۷ قضیه. *هرگاه $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ دو بردار در V_3 باشند، آنگاه*

$$|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|^2=|\mathbf{A}|^2|\mathbf{B}|^2-(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^2$$

برهان. فرض کنیم $\mathbf{A}=\langle a_1, a_2, a_3\rangle$ و $\mathbf{B}=\langle b_1, b_2, b_3\rangle$. دراین صورت،

$$\begin{aligned}|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|^2&=(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2\\&=a_2{}^2b_3{}^2-2a_2a_3b_2b_3+a_3{}^2b_2{}^2+a_3{}^2b_1{}^2-2a_1a_3b_1b_3\\&\qquad+a_1{}^2b_3{}^2+a_1{}^2b_2{}^2-2a_1a_2b_1b_2+a_2{}^2b_1{}^2\\|\mathbf{A}|^2|\mathbf{B}|^2-(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^2&=(a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2)(b_1{}^2+b_2{}^2+b_3{}^2)\\&\qquad-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2\\&=a_1{}^2b_2{}^2+a_1{}^2b_3{}^2+a_2{}^2b_1{}^2+a_2{}^2b_3{}^2+a_3{}^2b_1{}^2\\&\qquad+a_3{}^2b_2{}^2-2a_1a_3b_1b_3-2a_2a_3b_2b_3-2a_1a_2b_1b_2\end{aligned}$$

از این دو عبارت داریم

$$|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|^2=|\mathbf{A}|^2|\mathbf{B}|^2-(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^2$$

۷.۶.۱۷ قضیه. *هرگاه $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ دوبرداردر V_3 بوده و θ زاویهٔ بین $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ به‌رادیان باشد، آنگاه*

$$|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|=|\mathbf{A}||\mathbf{B}|\sin\theta \qquad (۳)$$

برهان. از قضیهٔ ۶.۶.۱۷ داریم

$$|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|^2 = |\mathbf{A}|^2|\mathbf{B}|^2 - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^2 \qquad (۴)$$

از قضیهٔ ۴۰۳۰۱۷ معلوم می‌شود که اگر θ زاویهٔ بین $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ باشد،

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\cos\theta \qquad (۵)$$

با گذاردن (۵) در (۴)، بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned}|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|^2 &= |\mathbf{A}|^2|\mathbf{B}|^2 - |\mathbf{A}|^2|\mathbf{B}|^2\cos^2\theta\\ &= |\mathbf{A}|^2|\mathbf{B}|^2(1-\cos^2\theta)\end{aligned}$$

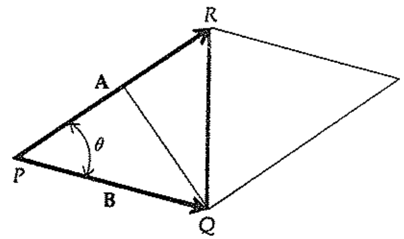
درنتیجه،

$$|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|^2 = |\mathbf{A}|^2|\mathbf{B}|^2\sin^2\theta \qquad (۶)$$

چون $0\le\theta\le\pi$ ، $\sin\theta\ge 0$. لذا، از (۶) داریم

$$|\mathbf{A}\times\mathbf{B}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\sin\theta$$

حال تعبیر هندسی $|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|$ را درنظر می‌گیریم. فرض کنیم $\overrightarrow{PR}$ نمایشی از $\mathbf{A}$ و $\overrightarrow{PQ}$ نمایشی از $\mathbf{B}$ باشد. در این صورت، زاویهٔ بین بردارهای $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ زاویهٔ راس P در مثلث RPQ است (ر.ک. شکل ۳۰۶۰۱۷). فرض کنیم این زاویه θ باشد. لذا،



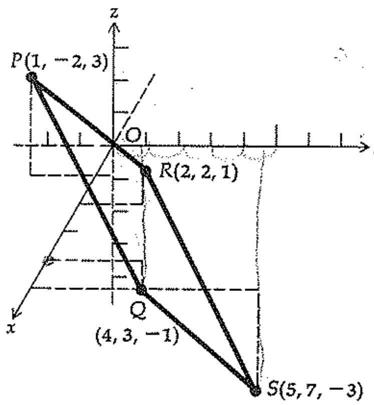
شکل ۳۰۶۰۱۷

مساحت متوازی‌الاضلاع به‌اضلاع مجاور $\overrightarrow{PR}$ و $\overrightarrow{PQ}$ مساوی $|\mathbf{A}||\mathbf{B}|\sin\theta$ است، زیرا ارتفاع متوازی‌الاضلاع به‌طول $|\mathbf{B}|\sin\theta$ بوده و طول قاعده $|\mathbf{A}|$ می‌باشد. درنتیجه، از (۳) معلوم می‌شود که $|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|$ مساحت این متوازی‌الاضلاع است.

مثال ۱. نشان دهید که چهارضلعی به‌راسهای $P(1,-2,3)$ ، $Q(4,3,-1)$ ، $R(2,2,1)$ ، و $S(5,7,-3)$ یک متوازی‌الاضلاع است، و مساحت آن را پیدا کنید.

حل. شکل ۴۰۶۰۱۷ چهارضلعی $PQSR$ را نشان می‌دهد.

$$\mathbf{V}(\overrightarrow{PQ}) = \langle 4-1, 3-(-2), (-1)-3\rangle = \langle 3,5,-4\rangle$$
$$\mathbf{V}(\overrightarrow{PR}) = \langle 2-1, 2-(-2), 1-3\rangle = \langle 1,4,-2\rangle$$
$$\mathbf{V}(\overrightarrow{RS}) = \langle 5-2, 7-2, -3-1\rangle = \langle 3,5,-4\rangle$$
$$\mathbf{V}(\overrightarrow{QS}) = \langle 5-4, 7-3, -3-(-1)\rangle = \langle 1,4,-2\rangle$$



شکل ۴۰۶۰۱۷

چون $\mathbf{V}(\overrightarrow{PQ}) = \mathbf{V}(\overrightarrow{RS})$ و $\mathbf{V}(\overrightarrow{PR}) = \mathbf{V}(\overrightarrow{QS})$ ، پس $\overrightarrow{PQ}$ با $\overrightarrow{RS}$ و $\overrightarrow{PR}$ با $\overrightarrow{QS}$ موازی است. بنابراین، $PQSR$ یک متوازی‌الاضلاع است.

فرض کنیم $\mathbf{A} = \mathbf{V}(\overrightarrow{PR})$ و $\mathbf{B} = \mathbf{V}(\overrightarrow{PQ})$ ؛ دراین صورت،

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\times\mathbf{B} &= (\mathbf{i}+4\mathbf{j}-2\mathbf{k})\times(3\mathbf{i}+5\mathbf{j}-4\mathbf{k})\\ &= 3(\mathbf{i}\times\mathbf{i}) + 5(\mathbf{i}\times\mathbf{j}) - 4(\mathbf{i}\times\mathbf{k}) + 12(\mathbf{j}\times\mathbf{i}) + 20(\mathbf{j}\times\mathbf{j})\\ &\qquad - 16(\mathbf{j}\times\mathbf{k}) - 6(\mathbf{k}\times\mathbf{i}) - 10(\mathbf{k}\times\mathbf{j}) + 8(\mathbf{k}\times\mathbf{k})\\ &= 3(\mathbf{0}) + 5(\mathbf{k}) - 4(-\mathbf{j}) + 12(-\mathbf{k}) + 20(\mathbf{0}) - 16(\mathbf{i})\\ &\qquad - 6(\mathbf{j}) - 10(-\mathbf{i}) + 8(\mathbf{0})\\ &= -6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 7\mathbf{k}\end{aligned}$$

از اینرو،

$$|\mathbf{A}\times\mathbf{B}| = \sqrt{36+4+49} = \sqrt{89}$$

بنابراین، مساحت متوازی‌الاضلاع $\sqrt{89}$ می‌باشد.

قضیهٔ زیر، که روشی برای تعیین توازی دو بردار در V_3 بدست می‌دهد، از قضیهٔ ۷.۶.۱۷ نتیجه می‌شود.

۸.۶.۱۷ قضیه. ***هرگاه $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ دو بردار در V_3 باشند، $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ موازی‌اند اگر و فقط اگر*** $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$.

برهان. هرگاه $\mathbf{A}$ یا $\mathbf{B}$ بردار صفر باشد، از قضیهٔ ۲.۶.۱۷ معلوم می‌شود که $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$. چون بردار صفر موازی هر بردار است، قضیه برقرار می‌باشد.

اگر هیچیک از $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ بردار صفر نباشد، $|\mathbf{A}| \neq 0$ و $|\mathbf{B}| \neq 0$. پس از (۳) معلوم می‌شود که $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = 0$ اگر و فقط اگر $\sin\theta = 0$. چون $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = 0$ اگر و فقط اگر $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$ و $\sin\theta = 0$ $(0 \leq \theta \leq \pi)$ اگر و فقط اگر $\theta = 0$ یا π، می‌توان نتیجه گرفت که

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{0} \text{ اگر و فقط اگر } \theta = 0 \text{ یا } \pi$$

با اینحال، از قضیهٔ ۶.۳.۱۷ معلوم می‌شود که دو بردار ناصفر موازی‌اند اگر و فقط اگر زاویهٔ بین دو بردار 0 یا π باشد. لذا، قضیه نتیجه خواهد شد.

حاصل‌ضرب $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ ***حاصل‌ضرب اسکالر سه‌تایی*** بردارهای $\mathbf{A}$، $\mathbf{B}$، و $\mathbf{C}$ نام دارد. درواقع، پرانتز لازم نیست زیرا $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ اسکالر است، و لذا $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C}$ فقط یک تعبیر بیشتر ندارد.

۹.۶.۱۷ قضیه. ***هرگاه $\mathbf{A}$، $\mathbf{B}$، و $\mathbf{C}$ بردارهایی در V_3 باشند، آنگاه***

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \qquad (۷)$$

قضیهٔ ۹.۶.۱۷ را می‌توان با فرض $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$، $\mathbf{B} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$، و $\mathbf{C} = \langle c_1, c_2, c_3 \rangle$ و نشان دادن اینکه سمت چپ (۷) مساوی سمت راست آن است ثابت کرد. ذکر جزئیات را به‌عنوان تمرین می‌گذاریم (ر.ک. تمرین ۱۷).

توضیح ۴. قضیهٔ ۹.۶.۱۷ را درصورتی که $\mathbf{A} = \langle 1, -1, 2 \rangle$، $\mathbf{B} = \langle 3, 4, -2 \rangle$، و $\mathbf{C} = \langle -5, 1, -4 \rangle$ تحقیق می‌کنیم.

$$\begin{aligned}
\mathbf{B} \times \mathbf{C} &= (3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}) \times (-5\mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\mathbf{k}) \\
&= 3\mathbf{k} - 12(-\mathbf{j}) - 20(-\mathbf{k}) - 16\mathbf{i} + 10\mathbf{j} - 2(-\mathbf{i}) \\
&= -14\mathbf{i} + 22\mathbf{j} + 23\mathbf{k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) &= \langle 1, -1, 2 \rangle \cdot \langle -14, 22, 23 \rangle \\
&= -14 - 22 + 46 \\
&= 10
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}) \times (3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}) \\
&= 4\mathbf{k} - 2(-\mathbf{j}) - 3(-\mathbf{k}) + 2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 8(-\mathbf{i}) \\
&= -6\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 7\mathbf{k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} &= \langle -6, 8, 7 \rangle \cdot \langle -5, 1, -4 \rangle \\
&= 30 + 8 - 28 \\
&= 10
\end{aligned}$$

با این قضیه برای این سه بردار تحقیق می‌شود.

۱۰.۶.۱۷ قضیه. ***هرگاه $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ دو بردار در V_3 باشند، آنگاه بردار $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ بر هر دوی $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ عمود است.***

برهان. از قضیهٔ ۹.۶.۱۷ داریم

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{A} \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$$

از قضیهٔ ۲.۶.۱۷ (یک) داریم $\mathbf{A} \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$. لذا، از معادلهٔ فوق خواهیم داشت

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{0} \cdot \mathbf{B} = 0$$

چون حاصل‌ضرب نقطه‌ای $\mathbf{A}$ و $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ صفر است، از تعریف ۷.۳.۱۷ نتیجه می‌شود که $\mathbf{A}$ و $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ متعامد می‌باشند.

همچنین، از قضیهٔ ۹.۶.۱۷ معلوم می‌شود که

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{B}$$

مجدداً، با اعمال قضیهٔ ۲.۶.۱۷ (یک) بدست می‌آوریم $\mathbf{B} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$؛ و درنتیجه، از معادلهٔ فوق خواهیم داشت

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{0} = 0$$

لذا، چون حاصل‌ضرب نقطه‌ای $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ و $\mathbf{B}$ صفر است، $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ و $\mathbf{B}$ متعامد بوده وقضیه اثبات می‌شود.

از قضیهٔ ۱۰.۶.۱۷ نتیجه می‌شود که اگر نمایشهای بردارهای $\mathbf{A}$، $\mathbf{B}$، و $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ یک نقطهٔ شروع داشته باشند، نمایش $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ بر صفحهٔ تشکیل شده از نمایشهای $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ عمود است.

مثال ۲. نقاط $P(-1,-2,-3)$، $Q(-2,1,0)$، و $R(0,5,1)$ داده‌شده‌اند. برداری یکه‌ای بیابید که نمایشهایش بر صفحهٔ ماربر نقاط P، Q، و R عمود باشند.

حل. فرض کنیم $\mathbf{A}=\mathbf{V}(\overrightarrow{PQ})$ و $\mathbf{B}=\mathbf{V}(\overrightarrow{PR})$. دراین صورت،

$$\mathbf{A}=\langle -2-(-1), 1-(-2), 0-(-3)\rangle=\langle -1,3,3\rangle$$
$$\mathbf{B}=\langle 0-(-1), 5-(-2), 1-(-3)\rangle=\langle 1,7,4\rangle$$

صفحهٔ ماربر P، Q، و R صفحهٔ تشکیل شده از $\overrightarrow{PQ}$ و $\overrightarrow{PR}$ است، که بترتیب نمایشهای بردارهای $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ اند. لذا، هر نمایش بردار $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ بر این صفحه عمود است.

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=(-\mathbf{i}+3\mathbf{j}+3\mathbf{k})\times(\mathbf{i}+7\mathbf{j}+4\mathbf{k})=-9\mathbf{i}+7\mathbf{j}-10\mathbf{k}$$

بردار مطلوب یک بردار یکه موازی $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ است. برای یافتن این بردار یکه، قضیهٔ ۹.۲.۱۷ را بکار برده و $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ را بر $|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|$ تقسیم می‌کنیم و بدست می‌آوریم

$$\frac{\mathbf{A}\times\mathbf{B}}{|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|}=-\frac{9}{\sqrt{230}}\mathbf{i}+\frac{7}{\sqrt{230}}\mathbf{j}-\frac{10}{\sqrt{230}}\mathbf{k}$$

مثال ۳. معادلهٔ صفحهٔ ماربر نقاط $P(1,3,2)$، $Q(3,-2,2)$، و $R(2,1,3)$ رابیابید.

حل. $\mathbf{V}(\overrightarrow{QR})=-\mathbf{i}+3\mathbf{j}+\mathbf{k}$ و $\mathbf{V}(\overrightarrow{PR})=\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k}$. یک بردار قائم به صفحهٔ مطلوب حاصل‌ضرب خارجی $\mathbf{V}(\overrightarrow{QR})\times\mathbf{V}(\overrightarrow{PR})$ است، که عبارت است از

$$(-\mathbf{i}+3\mathbf{j}+\mathbf{k})\times(\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k})=5\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}$$

درنتیجه، اگر $P_0=(1,3,2)$ و $\mathbf{N}=\langle 5,2,-1\rangle$، از قضیهٔ ۲.۴.۱۷ معلوم می‌شود که صفحهٔ مطلوب عبارت است از

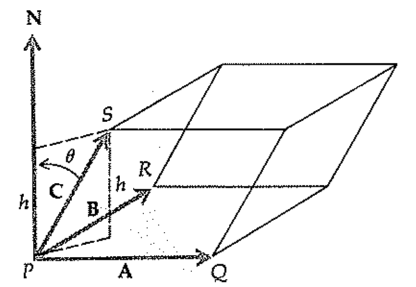
$$5(x-1)+2(y-3)-(z-2)=0$$

یا، معادلاً،

$$5x+2y-z-9=0$$

یک تعبیر هندسی حاصل‌ضرب اسکالر سه‌گانه با توجه به متوازی‌السطوح به اضلاع

$\overrightarrow{PQ}$، $\overrightarrow{PR}$، و $\overrightarrow{PS}$ و فرض $\mathbf{A}=\mathbf{V}(\overrightarrow{PQ})$، $\mathbf{B}=\mathbf{V}(\overrightarrow{PR})$، و $\mathbf{C}=\mathbf{V}(\overrightarrow{PS})$ بدست می‌آید. ر.ک. شکل ۵.۶.۱۷. بردار $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ یک بردار قائم به صفحهٔ $\overrightarrow{PQ}$ و $\overrightarrow{PR}$



شکل ۵.۶.۱۷

است. بردار $-(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$ نیز یک بردار قائم به این صفحه است. مطمئن نیستیم کدامیک از دو بردار $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$ یا $-(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$ زاویهٔ کوچکتری با $\mathbf{C}$ می‌سازد. فرض‌کنیم $\mathbf{N}$ آن بردار از $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$ و $-(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$ باشد که با $\mathbf{C}$ زاویهٔ $\theta<\frac{1}{2}\pi$ می‌سازد. دراین صورت، همانطور که در شکل ۵.۶.۱۷ نشان داده، نمایشهای $\mathbf{N}$ و $\mathbf{C}$ با نقطهٔ شروع P در یک طرف صفحهٔ $\overrightarrow{PQ}$ و $\overrightarrow{PR}$ واقعند. مساحت قاعدهٔ متوازی‌السطوح $|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|$ است. هرگاه h طول ارتفاع متوازی‌السطوح بوده، و V حجم متوازی‌السطوح باشد، آنگاه

$$V=|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|h \tag{۸}$$

حال حاصل ضرب نقطه‌ای $\mathbf{N}\cdot\mathbf{C}$ را درنظر می‌گیریم. طبق قضیهٔ ۴.۳.۱۷، $\mathbf{N}\cdot\mathbf{C}=|\mathbf{N}||\mathbf{C}|\cos\theta$. اما $h=|\mathbf{C}|\cos\theta$؛ و درنتیجه، $\mathbf{N}\cdot\mathbf{C}=|\mathbf{N}|h$. چون $\mathbf{N}$ مساوی $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$ یا $-(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$ است، نتیجه می‌شود که $|\mathbf{N}|=|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|$. لذا،

$$\mathbf{N}\cdot\mathbf{C}=|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|h \tag{۹}$$

از مقایسهٔ (۸) و (۹) داریم

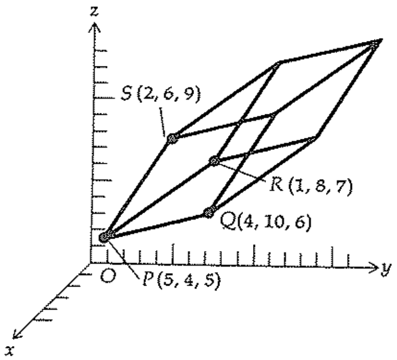
$$\mathbf{N}\cdot\mathbf{C}=V$$

پس نتیجه می‌شود که حجم متوازی‌السطوح مساوی $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}$ یا $-(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}$ است؛ یعنی، حجم متوازی‌السطوح قدر مطلق حاصل‌ضرب اسکالر سه‌گانهٔ $\mathbf{A}\times\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}$ است.

مثال ۴. حجم متوازی‌السطوح به راسهای $P(5,4,5)$، $Q(4,10,6)$، $R(1,8,7)$، و $S(2,6,9)$ و اضلاع $\overrightarrow{PQ}$، $\overrightarrow{PR}$، و $\overrightarrow{PS}$ را بیابید.

حل. شکل ۶.۶.۱۷ متوازی‌السطوح را نشان میدهد. فرض کنیم $\mathbf{A} = \mathbf{V}(\overrightarrow{PQ}) = \langle -1, 6, 1\rangle$ ، $\mathbf{B} = \mathbf{V}(\overrightarrow{PR}) = \langle -4, 4, 2\rangle$ ، و $\mathbf{C} = \mathbf{V}(\overrightarrow{PS}) = \langle -3, 2, 4\rangle$. در این صورت ،

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = (-\mathbf{i}+6\mathbf{j}+\mathbf{k})\times(-4\mathbf{i}+4\mathbf{j}+2\mathbf{k}) = 8\mathbf{i}-2\mathbf{j}+20\mathbf{k}$$



شکل ۶.۶.۱۷

بنابراین ،

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{C} = \langle 8,-2,20\rangle\cdot\langle -3,2,4\rangle = -24-4+80 = 52$$

لذا ، حجم 52 واحد مکعب است .

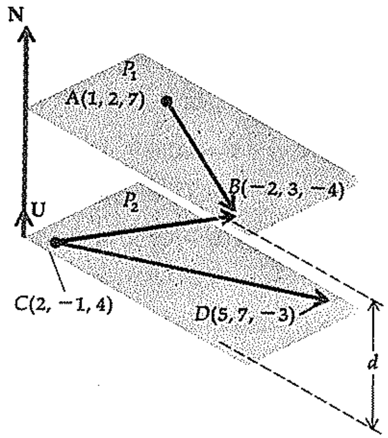
مثال ۵. فاصلهٔ بین دو خط متنافر l_1 و l_2 مثال ۵ در بخش ۵.۱۷ را بیابید .

حل. چون l_1 و l_2 متنافرند ، صفحاتی موازی مانند P_1 و P_2 وجود دارند که بترتیب l_1 و l_2 را شاملند . ر.ک. شکل ۷.۶.۱۷ . فرض کنیم d فاصلهٔ بین صفحات P_1 و P_2 باشد . فاصلهٔ بین l_1 و l_2 نیز d است . یک بردار قائم به دو صفحه عبارت است از $\mathbf{N} = \mathbf{V}(\overrightarrow{AB})\times\mathbf{V}(\overrightarrow{CD})$. فرض کنیم $\mathbf{U}$ یک بردار یکهٔ قائم در جهت $\mathbf{N}$ باشد . در این صورت ،

$$\mathbf{U} = \frac{\mathbf{V}(\overrightarrow{AB})\times\mathbf{V}(\overrightarrow{CB})}{|\mathbf{V}(\overrightarrow{AB})\times\mathbf{V}(\overrightarrow{CD})|}$$

حال در هر صفحه یک نقطه اختیار می‌کنیم (مثلاً B و C) . در این صورت ، تصویر اسکالر $\mathbf{V}(\overrightarrow{CB})$ بر $\mathbf{N}$ عبارت است از $\mathbf{V}(\overrightarrow{CB})\cdot\mathbf{U}$ ، و

$$d = |\mathbf{V}(\overrightarrow{CB})\cdot\mathbf{U}| = \left|\mathbf{V}(\overrightarrow{CB})\cdot\frac{\mathbf{V}(\overrightarrow{AB})\times\mathbf{V}(\overrightarrow{CD})}{|\mathbf{V}(\overrightarrow{AB})\times\mathbf{V}(\overrightarrow{CD})|}\right|$$



شکل ۷.۶.۱۷

با انجام محاسبات لازم ، داریم

$$\mathbf{V}(\overrightarrow{AB}) = -3\mathbf{i}+\mathbf{j}-11\mathbf{k} \qquad \mathbf{V}(\overrightarrow{CD}) = 3\mathbf{i}+8\mathbf{j}-7\mathbf{k}$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{V}(\overrightarrow{AB})\times\mathbf{V}(\overrightarrow{CD}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & 1 & -11 \\ 3 & 8 & -7 \end{vmatrix} = 27(3\mathbf{i}-2\mathbf{j}-\mathbf{k})$$

$$\mathbf{U} = \frac{27(3\mathbf{i}-2\mathbf{j}-\mathbf{k})}{\sqrt{27^2(3^2+2^2+1^2)}} = \frac{3\mathbf{i}-2\mathbf{j}-\mathbf{k}}{\sqrt{14}}$$

بالاخره ، $\mathbf{V}(\overrightarrow{CB}) = -4\mathbf{i}+4\mathbf{j}-8\mathbf{k}$ ؛ و درنتیجه ،

$$d = |\mathbf{V}(\overrightarrow{CB})\cdot\mathbf{U}| = \frac{1}{\sqrt{14}}|-12-8+8| = \frac{12}{\sqrt{14}} = \frac{6}{7}\sqrt{14}$$

۳ +۱۴ −۲ −۴ −۱

تمرینات ۶.۱۷

در تمرینهای ۱ تا ۱۲ ، فرض کنید $\mathbf{A} = \langle 1, 2, 3\rangle$ ، $\mathbf{B} = \langle 4, -3, -1\rangle$ ، $\mathbf{C} = \langle -5, -3, 5\rangle$ ، $\mathbf{D} = \langle -2, 1, 6\rangle$ ، $\mathbf{E} = \langle 4, 0, -7\rangle$ ، و $\mathbf{F} = \langle 0, 2, 1\rangle$.

۱. $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ را بیابید. ۲. $\mathbf{D}\times\mathbf{E}$ را بیابید.

۳. $(\mathbf{C}\times\mathbf{D})\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{F})$ را بیابید. ۴. $(\mathbf{C}\times\mathbf{E})\cdot(\mathbf{D}\times\mathbf{F})$ را بیابید.

۵. قضیهٔ ۳.۶.۱۷ را برای بردارهای $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ تحقیق کنید.

۶. قضیهٔ ۴.۶.۱۷ را برای بردارهای $\mathbf{A}$، $\mathbf{B}$، و $\mathbf{C}$ تحقیق کنید.

۷. قضیهٔ ۵.۶.۱۷ (یک) را برای بردارهای $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ و $c = 3$ تحقیق کنید.

۸. قضیهٔ ۵.۶.۱۷ (دو) را برای بردارهای $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ و $c = 3$ تحقیق کنید.

۹. قضیهٔ ۹.۶.۱۷ را برای بردارهای $\mathbf{A}$، $\mathbf{B}$، و $\mathbf{C}$ تحقیق کنید.

۱۰. $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C}$ و $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ را پیدا کنید.

۱۱. $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\times(\mathbf{C}-\mathbf{D})$ و $(\mathbf{D}-\mathbf{C})\times(\mathbf{A}+\mathbf{B})$ یافته و تساوی آنها را تحقیق نمایید.

۱۲. $|\mathbf{A}\times\mathbf{B}||\mathbf{C}\times\mathbf{D}|$ را پیدا کنید.

۱۳. قضیهٔ ۲.۶.۱۷ (دو) و (سه) را ثابت کنید.

۱۴. قضیهٔ ۴.۶.۱۷ را ثابت کنید.

۱۵. قضیهٔ ۵.۶.۱۷ (یک) را ثابت کنید.

۱۶. قضیهٔ ۵.۶.۱۷ (دو) را ثابت کنید.

۱۷. قضیهٔ ۹.۶.۱۷ را ثابت کنید.

۱۸. دو بردار یکهٔ $\mathbf{A} = \frac{4}{9}\mathbf{i} + \frac{7}{9}\mathbf{j} - \frac{4}{9}\mathbf{k}$ و $\mathbf{B} = -\frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{1}{3}\mathbf{k}$ داده‌شده‌اند. هرگاه θ زاویهٔ بین $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ باشد، $\sin\theta$ را به‌دوراه بیابید: (آ) با استفاده از حاصل‌ضرب خارجی (فرمول (۳) در این بخش)؛ (ب) با استفاده از حاصل‌ضرب نقطه‌ای و یک اتحاد مثلثاتی.

۱۹. تمرین ۱۸ را برای دو بردار یکهٔ زیر حل کنید:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{3\sqrt{3}}\mathbf{i} + \frac{5}{3\sqrt{3}}\mathbf{j} + \frac{1}{3\sqrt{3}}\mathbf{k} \quad \text{و} \quad \mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{k}$$

۲۰. نشان دهید که چهارضلعی به راسهای $(1, 1, 3)$، $(-2, 1, -1)$، $(-5, 4, 0)$، و $(-8, 4, -4)$ یک متوازی‌الاضلاع است، و مساحتش را بیابید.

۲۱. نشان دهید که چهارضلعی به راسهای $(1, -2, 3)$، $(4, 3, -1)$، $(2, 2, 1)$، و $(5, 7, -3)$ یک متوازی‌الاضلاع است، و مساحتش را بیابید.

۲۲. مساحت متوازی‌الاضلاع $PQRS$ را درصورتی بیابید که $\mathbf{V}(\overrightarrow{PQ}) = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ و $\mathbf{V}(\overrightarrow{PS}) = 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$.

۲۳. مساحت مثلث به راسهای $(0, 2, 2)$، $(8, 8, -2)$، و $(9, 12, 6)$ را پیدا کنید.

۲۴. مساحت مثلث به راسهای $(4, 5, 6)$، $(4, 4, 5)$، و $(3, 5, 5)$ را پیدا کنید.

در تمرینهای ۲۵ و ۲۶، با استفاده از حاصل‌ضرب خارجی، معادلهٔ صفحهٔ شامل سه‌نقطهٔ

داده شده را بیابید.

۲۵. $(-2, 2, 2), (-8, 1, 6), (3, 4, -1)$ ۲۶. $(a, b, 0), (a, 0, c)\ (0, b, c)$

۲۷. فرض کنید $\overrightarrow{OP}$ نمایش موضعی بردار $\mathbf{A}$، $\overrightarrow{OQ}$ نمایش موضعی بردار $\mathbf{B}$، و $\overrightarrow{OR}$ نمایش موضعی بردار $\mathbf{C}$ باشد. ثابت کنید مساحت مثلث PQR مساوی $\frac{1}{2}|(\mathbf{B}-\mathbf{A})\times(\mathbf{C}-\mathbf{A})|$ است.

۲۸. بردار یکه‌ای بیابید که نمایشهایش بر صفحهٔ شامل $\overrightarrow{PQ}$ و $\overrightarrow{PR}$ که بترتیب نمایش بردار $\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ و بردار $2\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$ اند عمود باشد.

در تمرینهای ۲۹ تا ۳۱، برداریکه‌ای‌بیابید که نمایشهایش بر صفحهٔ ماربر نقاط P، Q، و R عمود باشند.

۲۹. $P(5, 2, -1), Q(2, 4, -2), R(11, 1, 4)$ ۳۰. $P(-2, 1, 0), Q(2, -2, -1), R(-5, 0, 2)$

۳۱. $P(1, 4, 2), Q(3, 2, 4), R(4, 3, 1)$

۳۲. حجم متوازی‌السطوح به‌اضلاع $\overrightarrow{PQ}$، $\overrightarrow{PR}$، و $\overrightarrow{PS}$ را درصورتی بیابید که نقاط P، Q، R، و S مساوی $(1, 3, 4)$، $(3, 5, 3)$، $(2, 1, 6)$، و $(2, 2, 5)$ باشند.

۳۳. حجم متوازی‌السطوح $PQRS$ را درصورتی بیابید که بردارهای $\mathbf{V}(\overrightarrow{PQ})$، $\mathbf{V}(\overrightarrow{PR})$، و $\mathbf{V}(\overrightarrow{PS})$ بترتیب $\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$، $2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$، و $\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ باشند.

۳۴. هرگاه $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ دوبردار در V_3 باشند، ثابت کنید $(\mathbf{A}-\mathbf{B})\times(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = 2(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$.

در تمرینهای ۳۵ و ۳۶، فاصلهٔ عمودی بین دو خط متنافر داده شده را بیابید.

۳۵. $$\frac{x-1}{5} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{2} \quad \text{و} \quad \frac{x+2}{4} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-3}$$

۳۶. $$\frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-1}{-3} \quad \text{و} \quad \frac{x-1}{5} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{2}$$

۳۷. فرض کنید P، Q، و R سه نقطهٔ ناهمخط در R^3 بوده و $\overrightarrow{OP}$، $\overrightarrow{OQ}$، و $\overrightarrow{OR}$ بترتیب نمایشهای موضعی بردارهای $\mathbf{A}$، $\mathbf{B}$، و $\mathbf{C}$ باشند. ثابت کنید نمایشهای بردار $\mathbf{A}\times\mathbf{B} + \mathbf{B}\times\mathbf{C} + \mathbf{C}\times\mathbf{A}$ بر صفحهٔ شامل نقاط P، Q، و R عمودند.

۳۸. معادلهٔ صفحهٔ شامل نقاط انتهایی نمایشهای موضعی بردارهای $2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$، $-\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$، و $5\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ را بیابید.

۷.۱۷ استوانه‌ها و سطوح دوار

همانطور که پیشتر گفتیم، نمودار هر معادلهٔ سه متغیره یک سطح است. اگر مختصات هر

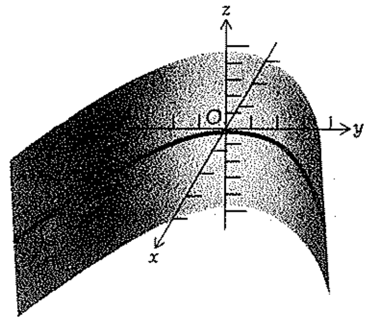
نقطهٔ یک سطح در یک معادله صدق کرده و هر نقطه که مختصاتش دراین معادله صدق **می‌کنند** روی سطح باشد، سطح با این معادله نمایش داده می‌شود. ما قبلاً" دو نوع سطح را مطرح کرده‌ایم، صفحه و کره. نوع دیگر سطح که نسبتاً" ساده است استوانه است. شما احتمالاً" از قبل با استوانه‌های مستدیر قائم آشنایید. حال سطح استوانه‌ای کلیتری را در نظر می‌گیریم.

۱۰۷۰۱۷ تعریف. یک ***استوانه*** سطحی است که توسط یک خط متحرک در امتداد یک منحنی مسطح تولید می‌شود به این نحو که خط همواره موازی خط ثابتی که در صفحهٔ منحنی نیست باقی می‌ماند. خط متحرک **مولد** استوانه و منحنی مسطح ***هادی*** استوانه نام دارد. هرموضع مولد یک ***خط جاری*** استوانه نامیده می‌شود.

این بحث به استوانه‌هایی محدود می‌شود که یک هادی در صفحهٔ مختصات دارند و خطوط جاری آنها براین صفحه عمودند. اگر خطوط جاری یک استوانه بر صفحهٔ هادی عمود باشند، گوییم استوانه براین صفحه عمود است.

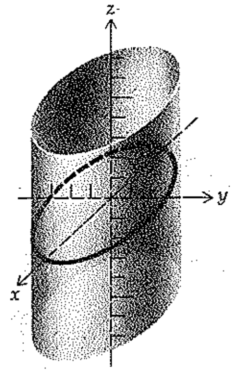
استوانهٔ مستدیر قائم آشنا استوانه‌ای است که در آن هادی دایره‌ای است در یک صفحهٔ عمود بر استوانه.

توضیح ۱. در شکل ۱۰۷۰۱۷ استوانه‌ای وجود دارد که هادیش سهمی $y^2 = 8x$ درصفحهٔ xy است و خطوط جاریش موازی محور z. استوانه یک ***استوانهٔ سهموی*** نامیده می‌شود.



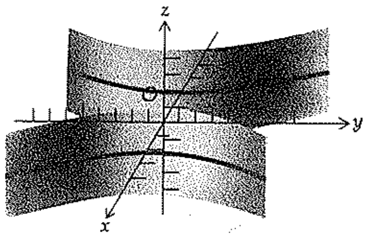
شکل ۱۰۷۰۱۷

درشکل ۲۰۷۰۱۷، یک ***استوانهٔ بیضوی*** نموده شده است؛ هادیش بیضی $9x^2 + 16y^2 = 144$



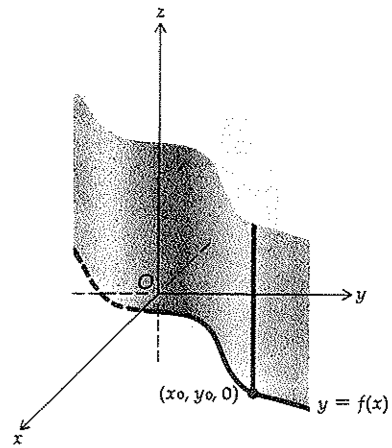
شکل ۲۰۷۰۱۷

در صفحهٔ xy بوده و خطوط جاریش موازی محور z اند. شکل ۳۰۷۰۱۷ یک ***استوانهٔ هذلولوی*** نشان می‌دهد که هادیش هذلولی $25x^2 - 4y^2 = 100$ در صفحهٔ xy است و خطوط جاریش موازی محور z می‌باشند.



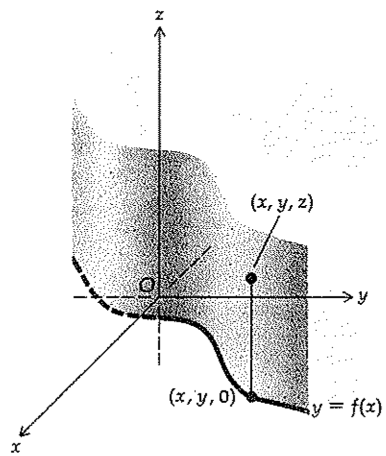
شکل ۳۰۷۰۱۷

می‌پردازیم به یافتن معادلهٔ استوانه‌ای که هادیش در یک صفحهٔ مختصات بوده و خطوط جاریش موازی محور مختصاتی باشد که در آن صفحه نیست. برای مشخص بودن وضع، هادی را درصفحهٔ xy گرفته و خطوط جاری را موازی محور z می‌گیریم. به شکل ۴۰۷۰۱۷ رجوع کنید. فرض کنیم معادلهٔ هادی در صفحهٔ xy مساوی $y = f(x)$ باشد. اگر نقطهٔ $(x_0, y_0, 0)$ در صفحهٔ xy در این معادله صدق کند، هر نقطهٔ (x_0, y_0, z) در فضای سه بعدی، که در آن z عدد حقیقی دلخواهی است، در همان معادله صدق خواهد کرد، زیرا z در معادله ظاهر نمی‌شود. نقاط به نمایشهای (x_0, y_0, z) همه بر خط موازی محور z و ماربر نقطهٔ $(x_0, y_0, 0)$ قرار دارند. این خط یک خط جاری استوانه است. **لذا، هر**



شکل ۴.۷.۱۷

نقطه که مختصات x و y آن در معادلهٔ $y = f(x)$ صدق کنند بر استوانه واقع است. بعکس، اگر نقطهٔ $P(x, y, z)$ بر استوانه باشد (ر.ک. شکل ۵.۷.۱۷)، نقطهٔ $(x, y, 0)$



شکل ۵.۷.۱۷

بر هادی استوانه در صفحهٔ xy قرار دارد؛ و درنتیجه، مختصات x و y نقطهٔ P در معادلهٔ $y = f(x)$ صدق می‌کنند. لذا، اگر $y = f(x)$ را معادلهٔ یک نمودار در فضای سه

بعدی بگیریم، نمودار یک استوانه است که خطوط‌جاری آن موازی محور z بوده و هادی آن منحنی $y = f(x)$ در صفحهٔ $z = 0$ است. بحث مشابهی داریم وقتی هادی در یکی از صفحات مختصات دیگر باشد. نتایج در قضیهٔ زیر خلاصه شده‌اند.

۲.۷.۱۷ قضیه. ***در فضای سه بعدی، نمودار یک معادلهٔ دو متغیره از سه متغیر x، y، و z یک استوانه است که خطوط جاریش موازی محور مربوط به متغیر مفقود بوده و هادی آن منحنیی است در صفحهٔ مربوط به دو متغیر معادله.***

توضیح ۲. از قضیهٔ ۲.۷.۱۷ معلوم می‌شود که معادلهٔ استوانهٔ سهموی شکل ۱.۷.۱۷ به‌عنوان معادله‌ای در R^3، $y^2 = 8x$ است. به‌همین نحو، معادلات استوانهٔ بیضوی شکل ۲.۷.۱۷ و استوانهٔ هذلولوی شکل ۳.۷.۱۷، هر دو به‌عنوان معادلاتی در R^3، بترتیب $9x^2 + 16y^2 = 144$ و $25x^2 - 4y^2 = 100$ می‌باشند.

مقطع عرضی یک سطح در یک صفحه عبارت است از جمیع نقاطی از سطح که در آن صفحه قرار دارند. اگر صفحه موازی صفحهٔ هادی یک استوانه باشد، مقطع عرضی استوانه همان‌هادی است. مثلا"، مقطع عرضی استوانهٔ بیضوی شکل ۲.۷.۱۷ در صفحه‌ای‌موازی صفحهٔ xy یک بیضی است.

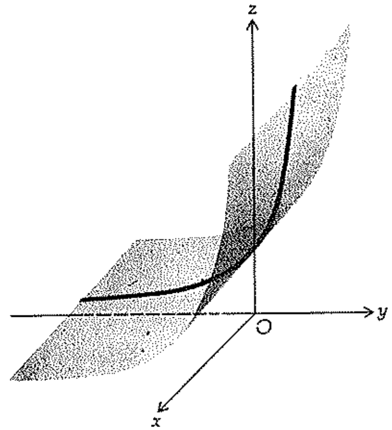
مثال ۱. نمودارهریک‌ازمعادلات‌زیررا رسم کنید: (آ) $y = \ln z$ ؛ (ب) $z^2 = x^3$.

حل

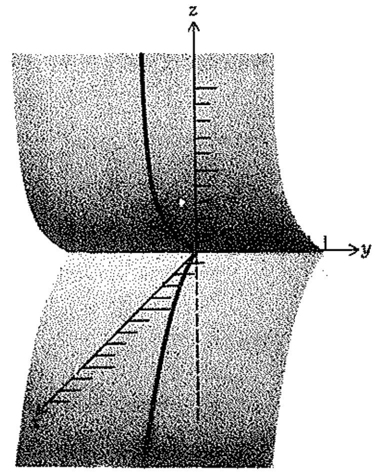
(آ) نمودار استوانه‌ای است که هادیش در صفحهٔ yz منحنی $y = \ln z$ بوده و خطوط جاریش موازی محور x است. نمودار در شکل ۶.۷.۱۷ نموده شده است.

(ب) نمودار استوانه‌ای است که هادیش در صفحهٔ xz بوده‌و خطوط جاریش موازی محور y اند. معادلهٔ هادی منحنی $z^2 = x^3$ در صفحهٔ xz است. نمودار در شکل ۷.۷.۱۷ نموده شده است.

۳.۷.۱۷ تعریف. اگریک‌منحنی مسطح‌حول خط‌ثابتی در صفحهٔ منحنی بگردد، سطح تولید شده یک **سطح دوار** نام دارد. خط‌ثابت **محور** سطح دوار، و منحنی مسطح**منحنی مولد** نامیده می‌شود.



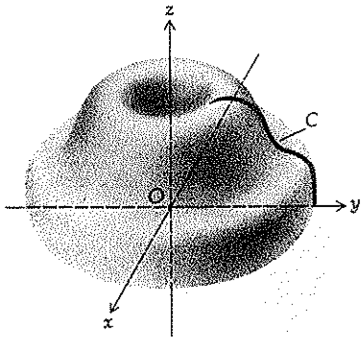
شکل ۶۰۷۰۱۷



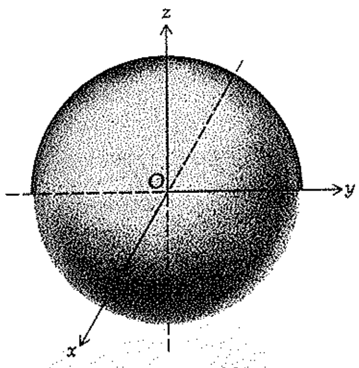
شکل ۷۰۷۰۱۷

شکل ۸۰۷۰۱۷ سطح‌دواری‌را نشان می‌دهد که منحنی مولدش منحنی C در صفحهٔ yz بوده و محــورش محــور z است. کره نمونهٔ خاصی از سطوح دوار است، زیرا کره را می‌توان از دوران یک نیمدایره حول یک قطر تولید کرد.

توضیح ۳. شکل ۹۰۷۰۱۷ کره‌ای را نشان می‌دهد که از دوران نیمدایرهٔ



شکل ۸۰۷۰۱۷



شکل ۹۰۷۰۱۷

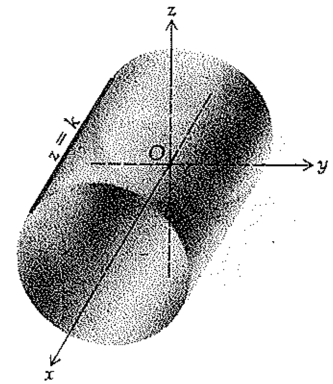
$y^2 + z^2 = r^2, z \geq 0$ حول محــور y تولید می‌شود. مثال دیگری از سطوح دوار استوانهٔ مستدیر قــائم است که منحنی مولد و محور آن خطوط مستقیمی موازی هم می‌باشند. اگر منحنی مولد خط $z = k$ در صفحهٔ xz بوده و محور محور x باشد، استوانهٔ مستدیرقائم شکل ۱۰۰۷۰۱۷ بدست می‌آید.

حال معادلهٔ سطح حاصل از دوران یک منحنی در صفحهٔ yz به معادلهٔ دوبعدی

$$z = f(y) \qquad (۱)$$

حول محور y را بدست می‌آوریم.

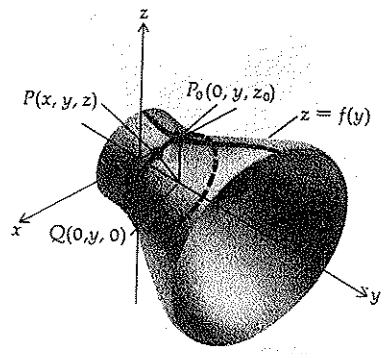
به‌شکل ۱۱۰۷۰۱۷ رجوع می‌کنیم. فرض کنیم $P(x, y, z)$ نقطه‌ای بر سطح دوار باشد. از نقطهٔ P صفحه‌ای عمود بر محور y می‌گذرانیم. نقطهٔ برخورد این صفحه با محور y را با $Q(0, y, 0)$ نشان می‌دهیم، و فــرض مــی‌کنیم $P_0(0, y, z_0)$ نقطهٔ برخورد صفحه با



شکل ۱۰۰۷۰۱۷

منحنی مولد باشد. چون مقطع عرضی سطح با صفحهٔ ماربر P یک دایره است، P برسطح واقع است اگر و فقط اگر

$$|\overline{QP}|^2 = |\overline{QP_0}|^2 \qquad (۲)$$



شکل ۱۱۰۷۰۱۷

چون $|\overline{QP}| = \sqrt{x^2 + z^2}$ و $|\overline{QP_0}| = z_0$، از (۲) خواهیم داشت

$$x^2 + z^2 = z_0{}^2 \qquad (۳)$$

نقطهٔ P_0 بر منحنی مولد واقع است؛ درنتیجه، مختصاتش باید در (۱) صدق کنند. بنابراین،

$$z_0 = f(y) \qquad (۴)$$

از (۳) و (۴) معلوم می‌شود که نقطهٔ P بر سطح دوار است اگر و فقط اگر

$$x^2 + z^2 = [f(y)]^2 \qquad (۵)$$

معادلهٔ (۵) معادلهٔ مطلوب سطح دوار است. چون (۵) معادل است با

$$\pm\sqrt{x^2 + z^2} = f(y)$$

معادلهٔ (۵) را می‌توان از (۱) با تعویض z به $\pm\sqrt{x^2 + z^2}$ بدست آورد.

بهمین نحو، می‌توان نشان داد که اگر منحنی در صفحهٔ yz به معادلهٔ دوبعدی

$$y = g(z) \qquad (۶)$$

حول محور z بگردد، معادلهٔ سطح دوار حاصل از تعویض y در (۶) با $\pm\sqrt{x^2 + y^2}$ بدست می‌آید. وقتی یک منحنی در یک صفحهٔ مختصات حول یکی از محورهای مختصات در آن صفحه می‌گردد نکات مشابهی قابل بیان است. به‌طور خلاصه، نمودار هریک از معادلات زیر سطوح دوار با محور ذکر شده می‌باشد:

$y^2 + z^2 = [F(x)]^2$—محور x؛ $x^2 + z^2 = [F(y)]^2$—محور y؛ $x^2 + y^2 = [F(z)]^2$—محور z

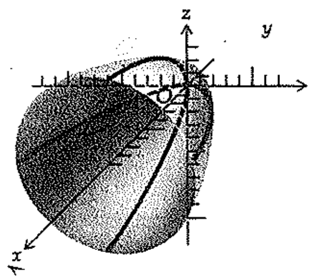
در هرحالت، مقاطع مخروطی سطح در صفحات عمود بر محور دوایری هستند که مراکزشان بر محور واقعند.

مثال ۲. معادلهٔ سطح حاصل از دوران سهمی $y^2 = 4x$ در صفحهٔ xy حول محور x را بیابید. نمودار سطح را بکشید.

حل. در معادلهٔ سهمی، y را با $\pm\sqrt{y^2 + z^2}$ عوض کرده بدست می‌آوریم

$$y^2 + z^2 = 4x$$

نمودار در شکل ۱۲۰۷۰۱۷ نموده شده است. همین سطح از دوران سهمی $z^2 = 4x$ در



شکل ۱۲۰۷۰۱۷

صفحهٔ xz حول محور x تولید می‌شود.

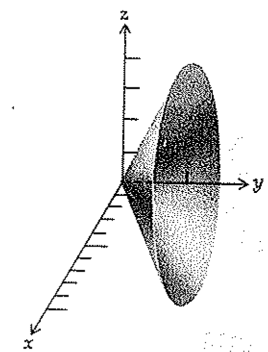
سطح حاصل در مثال ۲ یک **سهمی‌گون دوار** نام دارد. اگر یک بیضی حول یکی از محورهایش بگردد، سطح حاصل یک **بیضی‌گون دوار** نامیده می‌شود. یک **هذلولی‌گون دوار** وقتی حاصل می‌شود که یک هذلولی حول یک محور دوران نماید.

مثال ۳. سطح $x^2 + z^2 - 4y^2 = 0$ را درصورتی که $y \geq 0$ رسم کنید.

حل. معادلهٔ داده‌شده به شکل $x^2 + z^2 = [F(y)]^2$ است؛ در نتیجه، نمودارش سطح دواری است که محور y محورش می‌باشد. معادلهٔ داده شده را نسبت به y حل کرده و بدست می‌آوریم

$$2y = \pm\sqrt{x^2 + z^2}$$

از اینرو، منحنی مولد می‌تواند خط مستقیم $2y = x$ در صفحهٔ xy یا خط مستقیم $2y = z$ در صفحهٔ yz باشد. با رسم دو منحنی مولد ممکن و استفاده از این امر که مقاطع عرضی سطح در صفحات عمود بر محور y دوایری هستند که مراکزشان بر محور y است، سطح شکل ۱۳.۷.۱۷ بدست می‌آید (توجه کنید که چون $y \geq 0$، فقط یک پارچه از مخروط را داریم).



شکل ۱۳.۷.۱۷

سطح حاصل در مثال ۳ یک **مخروط مستدیر قائم** نام دارد.

تمرینات ۷.۱۷

در تمرینهای ۱ تا ۳، مقطع عرضی استوانه در صفحهٔ داده شده را رسم کنید.

۱. $4z^2 - y^2 = 4$; صفحهٔ yz

۲. $x = |y|$; صفحهٔ xy

۳. $z = e^x$; صفحهٔ xz

در تمرینهای ۴ تا ۱۱، استوانه به معادلهٔ داده شده را رسم کنید.

۴. $x^2 - z^2 = 4$

۵. $4x^2 + 9y^2 = 36$

۶. $z = \sin y$

۷. $y = |z|$

۸. $x^2 = y^3$

۹. $z = 2x^2$

۱۰. $z^2 = 4y^2$

۱۱. $y = \cosh x$

در تمرینهای ۱۲ تا ۱۸، معادلهٔ سطح حاصل از دوران منحنی مسطح حول محور ذکر شده را بیابید، و سطح را رسم نمایید.

۱۲. $x^2 = 4y$ در صفحهٔ xy، حول محور x.

۱۳. $x^2 = 4y$ در صفحهٔ xy، حول محور y.

۱۴. $x^2 + 4z^2 = 16$ در صفحهٔ xz، حول محور z.

۱۵. $x^2 + 4z^2 = 16$ در صفحهٔ xz، حول محور x.

۱۶. $y^2 = z^3$ در صفحهٔ yz، حول محور z.

۱۷. $y = \sin x$ در صفحهٔ xy، حول محور x.

۱۸. $9y^2 - 4z^2 = 144$ در صفحهٔ yz، حول محور z.

در تمرینهای ۱۹ تا ۲۴، برای سطح دوار داده شده منحنی مولد و محور بیابید، و سطح را رسم نمایید.

۱۹. $x^2 + y^2 - z^2 = 4$

۲۰. $y^2 + z^2 = e^{2x}$

۲۱. $x^2 + z^2 = |y|$

۲۲. $4x^2 + 9y^2 + 4z^2 = 36$

۲۳. $9x^2 - y^2 + 9z^2 = 0$

۲۴. $4x^2 + 4y^2 - z = 9$

۲۵. کشانندهٔ

$$x = t - a\tanh\frac{t}{a} \qquad y = a\,\mathrm{sech}\,\frac{t}{a}$$

از $x = -a$ تا $x = 2a$ حول محور x می‌گردد. سطح دوار را رسم نمایید.

۸.۱۷ سطوح درجهٔ دو

نمودار یک معادلهٔ درجهٔ دوم از سه متغیر x، y، و z یک **سطح درجهٔ دو** نام دارد.

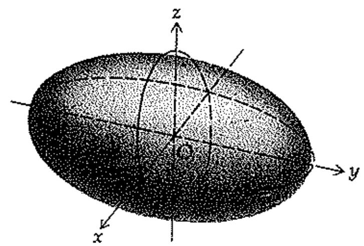
این سطوح نظیر مخروطیها در صفحه‌اند.

ساده‌ترین نوع سطوح درجهٔ دو استوانه‌های سهموی، بیضوی، و هذلولوی‌اند، که در بخش قبل مطرح شدند. شش نوع دیگر از سطوح درجهٔ دو وجود دارند، که اینک مورد بحث قرار می‌گیرند. محورهای مختصات را طوری می‌گیریم که معادلات به ساده‌ترین شکل خود باشند. در بحث هریک از این سطوح به مقاطع عرضی سطوح در صفحاتی نظر داریم که موازی صفحات مختصات می‌باشند. این مقاطع عرضی در تجسم سطح یاری دهنده‌اند.

بیضی‌گون

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (1)$$

که در آن a، b، و c مثبت‌اند (ر.ک. شکل ۱۰۸۰۱۷).



شکل ۱۰۸۰۱۷

اگر در (۱) z را با صفر عوض کنیم، مقطع عرضی بیضی‌گون در صفحهٔ xy بدست می‌آید، که بیضی $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ است. برای بدست آوردن مقاطع عرضی سطح با صفحات $z=k$، z را در معادلهٔ بیضی‌گون با k عوض کرده بدست می‌آوریم

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{k^2}{c^2}$$

اگر $|k|<c$، مقطع عرضی یک بیضی است و طول نیمه محورها با افزایش $|k|$ به c به صفر کاهش می‌یابد. اگر $|k|=c$، اشتراک صفحهٔ $z=k$ با بیضی‌گون نقطهٔ منفرد $(0, 0, k)$ است. اگر $|k|>c$، اشتراکی وجود ندارد. بحث در صورتی که مقاطع مخروطی از صفحات موازی صفحات مختصات دیگر تشکیل شده باشند مشابه است.

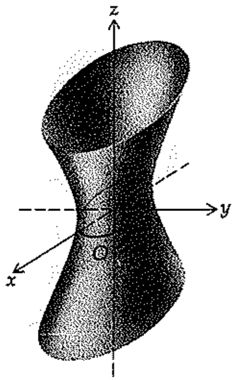
اعداد a، b، و c طول نیمه محورهای بیضی‌گون‌اند. اگر هر دو عدد از این سه عدد مساوی باشند، یک بیضی‌گون دوار داریم، که **کره‌گون** نیز نام دارد. یک کره‌گون را که در آن عدد سوم بزرگتر از دو عدد مساوی است **کشیده** می‌نامند. یک کره‌گون کشیده شبیه توپ

راگبی است. یک کره‌گون **جمع شده** کره‌گونی است که عدد سوم آن از دو عدد مساوی کوچکتر است. اگر هر سه عدد a، b، و c در معادلهٔ بیضی‌گون مساوی باشند، بیضی‌گون یک **کره** می‌باشد.

هذلولی‌گون بیضوی یک پارچه

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (2)$$

که در آن a، b، و c مثبت‌اند (ر.ک. شکل ۲۰۸۰۱۷).



شکل ۲۰۸۰۱۷

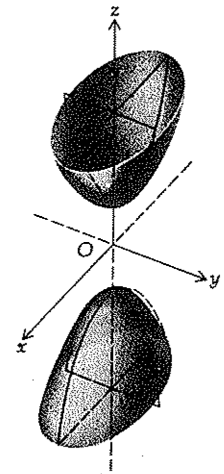
مقاطع عرضی در صفحات $z=k$ عبارتند از بیضیهای $x^2/a^2+y^2/b^2=1+k^2/c^2$. وقتی $k=0$، طول نیمه محورهای بیضی مینیمم‌اند، و این طولها با افزایش $|k|$ زیاد می‌شوند. مقاطع عرضی در صفحات $x=k$ هذلولیهای $y^2/b^2-z^2/c^2=1-k^2/a^2$ می‌باشند. اگر $|k|<a$، محور متقاطع هذلولی موازی محور y است، و اگر $|k|>a$، محور متقاطع موازی محور z است. اگر $k=a$، هذلولی به دو خط مستقیم تبدیل می‌شود: $y/b-z/c=0$ و $y/b+z/c=0$. بهمین نحو، مقاطع عرضی در صفحات $y=k$ نیز هذلولی‌اند. محور این هذلولی‌گون محور z می‌باشد.

اگر $a=b$، سطح یک هذلولی‌گون دوار است که محورش خط شامل محور مزدوج می‌باشد.

هذلولی‌گون بیضوی دو پارچه

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (3)$$

که در آن a ، b ، و c مثبت‌اند (ر.ک. شکل ۳۰۸۰۱۷).



شکل ۳۰۸۰۱۷

از تعویض z با k در (۳) خواهیم داشت $x^2/a^2 + y^2/b^2 = k^2/c^2 - 1$. اگر $|k| < c$ ، صفحهٔ $z = k$ با سطح اشتراک ندارد؛ لذا، نقطه‌ای از سطح بین صفحات $z = -c$ و $z = c$ موجود نیست. اگر $|k| = c$ ، اشتراک صفحهٔ $z = k$ با سطح نقطهٔ منفرد $(0, 0, k)$ است. وقتی $|k| > c$ ، مقطع عرضی سطح در صفحهٔ $z = k$ یک بیضی است و طول نیمه محورهای آن با افزایش $|k|$ زیاد می‌شود.

مقاطع عرضی سطح درصفحات $x = k$ هذلولیهای $z^2/c^2 - y^2/b^2 = 1 + k^2/a^2$ اند که محورهای متقاطعش موازی محور z می‌باشند. بهمین نحو، مقاطع عرضی در صفحات $y = k$ هذلولیهای $z^2/c^2 - x^2/a^2 = 1 + k^2/b^2$ اند که محورهای متقاطعشان نیز موازی محور z می‌باشند.

اگر $a = b$ ، سطح یک هذلولی گون دوار است که محورش خط شامل محور متقاطع هذلولی است.

هریک از سه سطح درجهٔ دو نسبت به هریک از صفحات مختصات و همچنین نسبت به مبداء متقارن است. نمودارهای آنها **درجه دوهای مرکزی**اند و مراکزشان در مبداء می‌باشند. نمودار هر معادله به شکل

$$\pm\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}\pm\frac{z^2}{c^2}=1$$

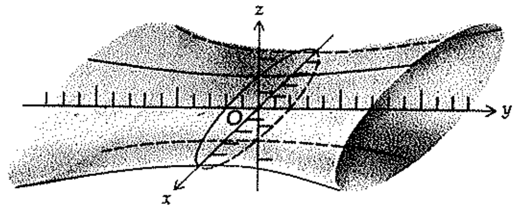
که در آن a ، b ، و c مثبت‌اند، یک درجهٔ دو مرکزی است.

مثال ۱. نمودار معادلهٔ $4x^2 - y^2 + 25z^2 = 100$ را رسم کرده، و سطح را نام ببرید.

حل. معادله را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{100}+\frac{z^2}{4}=1$$

که به شکل (۲) است که در آن y و z با هم تعویض شده‌اند. لذا، سطح یک هذلولی‌گون بیضوی یک‌پارچه است که محورش محور y است. مقاطع عرضی در صفحات $y = k$ بیضیهای $x^2/25 + z^2/4 = 1 + k^2/100$ می‌باشند. مقاطع عرضی در صفحات $x = k$ هذلولیهای $z^2/4 - y^2/100 = 1 - k^2/25$ بوده، و مقاطع عرضی در صفحات $z = k$ هذلولیهای $x^2/25 - y^2/100 = 1 - k^2/4$ می‌باشند. سطح در شکل ۴۰۸۰۱۷ نموده شده است.



شکل ۴۰۸۰۱۷

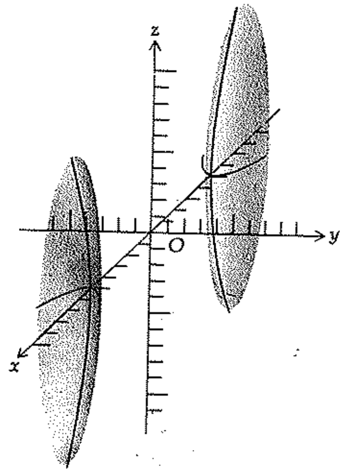
مثال ۲. نمودار معادلهٔ $4x^2 - 25y^2 - z^2 = 100$ را رسم کرده، و سطح را نام ببرید.

حل. معادله را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{100}=1$$

که به شکل (۳) است که x و z در آن تعویض شده‌اند؛ لذا، سطح یک هذلولی‌گون بیضوی دو پارچه است که محورش محور x می‌باشد. مقاطع عرضی در صفحات $x = k$ ، که $|k| > 5$ ، بیضیهای $y^2/4 + z^2/100 = k^2/25 - 1$ می‌باشند. صفحات $x = k$ ، که $|k| < 5$ ، سطح را قطع نمی‌کنند. مقاطع عرضی در صفحات $y = k$ هذلولیهای $x^2/25 - z^2/100 = 1 + k^2/4$ اند، و مقاطع عرضی در صفحات $z = k$ هذلولیهای $x^2/25 - y^2/4 = 1 + k^2/100$ می‌باشند. رسم مورد نظر در شکل ۵۰۸۰۱۷ نموده شده

است .



شکل ۵۰۸۰۱۷

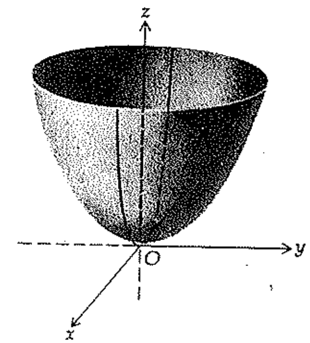
دو درجهٔ دو زیر درجهٔ دو غیر مرکزی نام یافته‌اند .

سهمی‌گون بیضوی

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c} \qquad (۴)$$

که‌درآن a و b مثبت بوده‌و $c \neq 0$. شکل ۶۰۸۰۱۷ سطح را درصورتی که $c > 0$ نشان می‌دهد .

باگذاردن k به جـای z در (۴) خواهیم داشت $x^2/a^2 + y^2/b^2 = k/c$. وقتی



شکل ۶۰۸۰۱۷

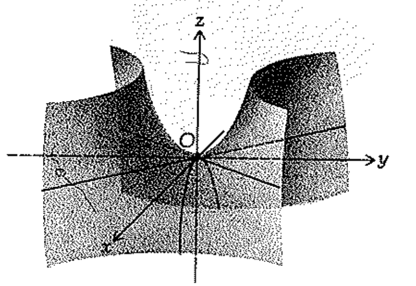
$k = 0$ ، این معادله خواهد شد $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 0$ ، که نمایش یک نقطه ، یعنی مبداء ، است . اگر $k \neq 0$ و k و c متحدالعلامه باشند ، معادله معادلهٔ یک‌بیضی است . درنتیجه ، مقاطع مخروطی سطح در صفحات $z = k$ ، که k و c متحدالعلامه‌اند ، بیضی بوده وطول نیم‌محورهای آنها باافزایش $|k|$ زیاد می‌شود . اگر k و c مختلف‌العلامه باشند ، صفحات $z = k$ سطح راقطع نمی‌کنند . مقاطع مخروطی سطح با صفحات $x = k$ و $y = k$ سهمی‌اند. وقتی $c > 0$ ، همانطورکه شکل ۶۰۸۰۱۷ نشان داده ، سهمیها به بالا باز می‌شوند ؛وقتی $c < 0$ ، سهمیها به پایین باز خواهند شد .

اگر $a = b$ ، سطح یک سهمی‌گون دوار است .

سهمی‌گون هذلولوی

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=\frac{z}{c} \qquad (۵)$$

که‌درآن a و b مثبت بوده و $c \neq 0$. سطح در شکل ۷۰۸۰۱۷ به‌ازای $c > 0$ نموده‌شده است .



شکل ۷۰۸۰۱۷

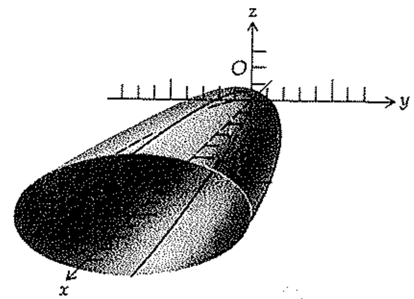
مقاطع مخـروطی سطـح در صفحات $z = k$ ، که $k \neq 0$ ، هذلولیهایی هستند که محورهای متقـاطعشان مـوازی محور y اند اگر k و c متحدالعلامه باشند و موازی محور x اند اگر k و c مختلف‌العلامه باشند . مقطع عرضی سطح در صفحهٔ $z = 0$ از دو خط مستقیم ماربر مبداء تشکیل شده است . مقاطع عرضی در صفحات $x = k$ سهمی‌اند که اگر $c > 0$ به بـالا و اگـر $c < 0$ به پایین بـاز می‌شوند . مقاطع عرضی در صفحات $y = k$ سهمی‌اند که اگر $c > 0$ به پایین و اگر $c < 0$ به بالا باز می‌شوند .

مثال ۳ . نمودار معادلهٔ $3y^2 + 12z^2 = 16x$ را رسم کرده ، و سطح را نام ببرید .

حل. معادله را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{4}=\frac{x}{3}$$

که به شکل (۴) است که در آن x و z تعویض شده‌اند. از اینرو، نمودار معادله یک سهمی‌گون بیضوی است که محورش محور x است. مقاطع عرضی در صفحات $x=k>0$ بیضیهای $y^2/16+z^2/4=k/3$ است، وصفحات $x=k<0$ سطح راقطع نمی‌کنند. مقاطع عرضی درصفحات $y=k$ سهمیهای $12z^2=16x-3k^2$ اند، و مقاطع عرضی در صفحات $z=k$ سهمیهای $3y^2=16x-12k^2$ می‌باشند. سهمی‌گون بیضوی در شکل ۸.۸.۱۷ نموده شده است.



شکل ۸.۸.۱۷

مثال ۴. نمودار معادلهٔ $3y^2-12z^2=16x$ را رسم کنید، و سطح را نام ببرید.

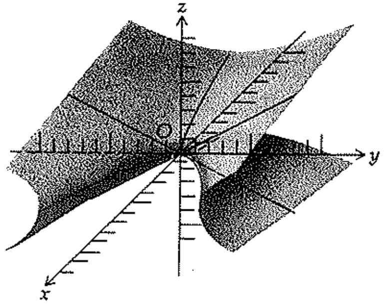
حل. اگر معادله را به‌صورت

$$\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{4}=\frac{x}{3}$$

بنویسیم، به شکل (۵) می‌شود که در آن x و z تعویض شده‌اند. بنابراین، سطح یک سهمی‌گون هذلولوی است. مقاطع عرضی در صفحات $x=k\neq 0$ هذلولیهای $y^2/16-z^2/4=k/3$ اند. مقطع عرضی در صفحهٔ yz ($x=0$) از دو خط $y=2z$ و $y=-2z$ تشکیل شده است. در صفحات $z=k$، مقاطع عرضی سهمیهای $3y^2=16x+12k^2$ اند؛ درصفحات $y=k$، مقاطع عرضی سهمیهای $12z^2=3k^2-16x$ اند. شکل ۹.۸.۱۷ سهمی‌گون هذلولوی را نشان می‌دهد.

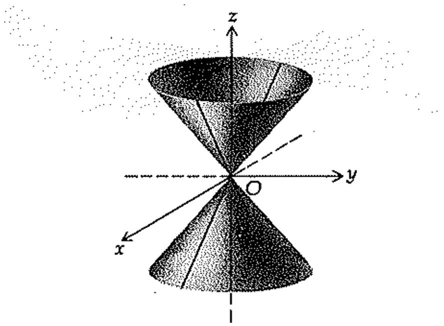
مخروط بیضوی

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \qquad (۶)$$



شکل ۹.۸.۱۷

که در آن a، b، و c مثبت‌اند (ر.ک. شکل ۱۰.۸.۱۷).



شکل ۱۰.۸.۱۷

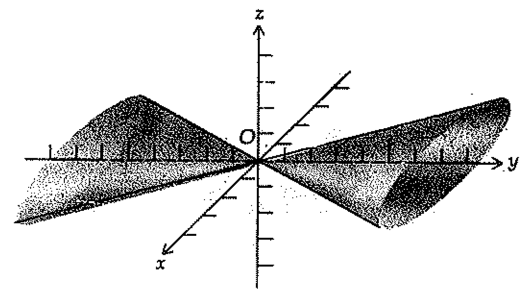
فصل مشترک صفحهٔ $z=0$ با سطح تنها یک نقطه، یعنی مبداء، است. مقاطع عرضی سطح در صفحات $z=k$، که $k\neq 0$، بیضی‌اند، و طول نیمه محورها با افزایش k زیاد می‌شود. مقاطع عرضی درصفحات $x=0$ و $y=0$ جفتهایی از خطوط متقاطع‌اند. در صفحات $x=k$ و $y=k$، که $k\neq 0$، مقاطع عرضی هذلولی می‌باشند.

مثال ۵. نمودار معادلهٔ $4x^2-y^2+25z^2=0$ را رسم کرده، و سطح را نام ببرید.

حل. معادله را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{100}+\frac{z^2}{4}=0$$

که به شکل (۶) است که در آن y و z تعویض شده‌اند. لذا، سطح یک مخروط بیضوی است که محورش محور y است. سطح صفحهٔ xz ($y=0$) را فقط در مبداء قطع می‌کند. فصل مشترک سطح با صفحهٔ yz ($x=0$) جفت خطوط متقاطع $y=\pm 5z$ است، وفصل مشترک آن با صفحهٔ xy ($z=0$) جفت خطوط متقاطع $y=\pm 2x$ می‌باشد. مقاطع عرضی در صفحات $y=k\neq 0$ بیضیهای $x^2/25+z^2/4=k^2/100$ می‌باشند. درصفحات $x=k\neq 0$ و $z=k\neq 0$، مقاطع عرضی بترتیب عبارتند از هذلولیهای $y^2/100-z^2/4=k^2/25$ و $y^2/100-x^2/25=k^2/4$. سطح در شکل ۱۱۰۸۰۱۷ رسم شده است.



شکل ۱۱۰۸۰۱۷

معادلهٔ کلی درجهٔ دوم از x، y، و z به شکل

$$ax^2+by^2+cz^2+dxy+exz+fyz+gx+hy+iz+j=0$$

است، که در آن $a, b, \ldots, j$ ثابت‌اند. می‌توان نشان داد که، با انتقال و دوران محورهای مختصات سه بعدی (که بررسی آنها از حوصلهٔ این کتاب خارج است)، این معادله به‌یکی از دو شکل زیر تحویل می‌شود:

$$Ax^2+By^2+Cz^2+J=0 \qquad (۷)$$

یا

$$Ax^2+By^2+Iz=0 \qquad (۸)$$

نمودار معادلات درجهٔ دوم یا یکی از شش نوع درجهٔ دو فوق است یا به یک استوانه، صفحه، خط، نقطه، یا مجموعهٔ تهی تباه می‌شود.

منحنیهای تباه نشدهٔ معادلات به شکل (۷) درجهٔ دوهای مرکزی و مخروط بیضوی‌اند،

حال آنکه منحنیهای تباه نشدهٔ معادلات به شکل (۸) درجه دوهای غیر مرکزی می‌باشند. ذیلاً چند نمونه از حالات تباه شده ذکر شده‌اند:

$x^2-y^2=0$؛ دو صفحه، $x-y=0$ و $x+y=0$

$z^2=0$؛ یک صفحه، صفحهٔ xy

$x^2+y^2=0$؛ یک خط، محور z

$x^2+y^2+z^2=0$؛ یک نقطه، یعنی مبداء

$x^2+y^2+z^2+1=0$؛ مجموعهٔ تهی

تمرینات ۸۰۱۷

در تمرینهای ۱ تا ۶، سطح معادلهٔ داده شده را نام ببرید.

۱. $9x^2-4y^2+36z^2=36$ ۲. $4x^2-16y^2+9z^2=0$

۳. $5x^2-2z^2-3y=0$ ۴. $25x^2=4y^2+z^2+100$

۵. $4y^2-25x^2=100$ ۶. $3y^2+7z^2=6x$

در تمرینهای ۷ تا ۱۸، نمودار معادلهٔ داده شده را رسم کرده و سطح رانام ببرید.

۷. $4x^2+9y^2+z^2=36$ ۸. $4x^2-9y^2-z^2=36$

۹. $4x^2+9y^2-z^2=36$ ۱۰. $4x^2-9y^2+z^2=36$

۱۱. $x^2=y^2-z^2$ ۱۲. $x^2=y^2+z^2$

۱۳. $\frac{x^2}{36}+\frac{z^2}{25}=4y$ ۱۴. $\frac{y^2}{25}+\frac{x^2}{36}=4$

۱۵. $\frac{x^2}{36}-\frac{z^2}{25}=9y$ ۱۶. $x^2=2y+4z$

۱۷. $x^2+16z^2=4y^2-16$ ۱۸. $9y^2-4z^2+18x=0$

۱۹. مقادیری از k را بیابید که به‌ازای آنها فصل مشترک صفحهٔ $x+ky=1$ و هذلولی‌گون بیضوی دوپارچهٔ $y^2-x^2-z^2=1$ (آ) یک بیضی و (ب) یک هذلولی باشد.

۲۰. راس و کانون سهمیی که فصل مشترک صفحهٔ $y=2$ با سهمی‌گون هذلولوی $y^2/16-x^2/4=z/9$ است را بیابید.

۲۱. راس و کانون سهمیی که فصل مشترک صفحهٔ $x=1$ با سهمی‌گون هذلولوی $z^2/4-x^2/9=y/3$ است را بیابید.

۲۲. مساحت مقطع مسطح حاصل از برخورد صفحهٔ $y=3$ با جسم محدود به بیضی‌گون

$x^2/9 + y^2/25 + z^2/4 = 1$ را بیابید .

۲۳ . نشان دهید که فصل مشترک سطح $x^2 - 4y^2 - 9z^2 = 36$ و صفحهٔ $x + z = 9$ یک بیضی است .

۲۴ . نشان دهید که فصل مشترک سهمی‌گون هذلولوی $y^2/b^2 - x^2/a^2 = z/c$ و صفحهٔ $z = bx + ay$ از دو خط مستقیم متقاطع تشکیل شده است .

در تمرینهای ۲۵ تا ۲۷ ، با استفاده از روش مقاطع مسطح موازی (بخش ۴.۷) ، حجم جسم داده شده را بیابید . مساحت ناحیهٔ محصور به بیضی با نیمه محورهای a و b مساوی πab است .

۲۵ . جسم محدود به بیضی‌گون $36x^2 + 9y^2 + 4z^2 = 36$.

۲۶ . جسم محدود به بیضی‌گون $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$.

۲۷ . جسم محدود به صفحهٔ $z = h$ ، که $h>0$ ، و سهمی‌گون بیضوی $x^2/a^2 + y^2/b^2 = z/c$ ، که $c > 0$.

۹.۱۷ منحنیها در R^3

ما توابع برداری در فضای سه‌بعدی را درنظر می‌گیریم .

۱.۹.۱۷ تعریف . فرض‌کنیم f_1 ، f_2 ، و f_3 سه تابع حقیقی از متغیر حقیقی t باشند . به‌ازای هر عدد t در قلمرو مشترک f_1 ، f_2 ، و f_3 ، برداری مانند $\mathbf{R}$ وجود دارد که با

$$\mathbf{R}(t) = f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j} + f_3(t)\mathbf{k} \qquad (۱)$$

تعریف می‌شود و $\mathbf{R}$ یک *تابع برداری* نام دارد .

نمودار یک تابع برداری در فضای سه‌بعدی مشابه روشی که در بخش ۴.۱۶ نمودار تابع برداری در فضاهای دوبعدی را داد بدست می‌آید . وقتی t همهٔ مقادیر در قلمرو $\mathbf{R}$ را می‌گیرد ، نقطهٔ پایان نمایش موضعی بردار $\mathbf{R}(t)$ یک منحنی مانند C رسم می‌کند ، و این منحنی نمودار (۱) نام دارد . یک نقطه بر منحنی C دارای نمایش دکارتی (x, y, z) است ، که

$$x = f_1(t) \qquad y = f_2(t) \qquad z = f_3(t) \qquad (۲)$$

معادلات (۲) *معادلات پارامتری* C نام دارند، حال‌آنکه معادلهٔ (۱) *معادلهٔ برداری*

C نامیده می‌شود . با حذف t از معادلات (۲) ، دو معادله از x ، y ، و z بدست می‌آیند . این معادلات *معادلات دکارتی* C نام دارند . هر معادلهٔ دکارتی معادلهٔ یک سطح است ، و منحنی C فصل مشترک دو سطح می‌باشد . معادلات هر دو سطح شامل C را می‌توان معادلات دکارتی معرف C گرفت .

توضیح ۱ . منحنی به معادلهٔ برداری

$$\mathbf{R}(t) = a\cos t\mathbf{i} + b\sin t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$$

را رسم می‌کنیم . معادلات پارامتری منحنی داده شده عبارتند از

$$x = a\cos t \qquad y = b\sin t \qquad z = t$$

برای حذف t از دو معادلهٔ اول آنها را به‌صورت زیر می‌نویسیم :

$$y^2 = b^2\sin^2 t \quad \text{و} \quad x^2 = a^2\cos^2 t$$

که از آنها داریم

$$\frac{y^2}{b^2} = \sin^2 t \quad \text{و} \quad \frac{x^2}{a^2} = \cos^2 t$$

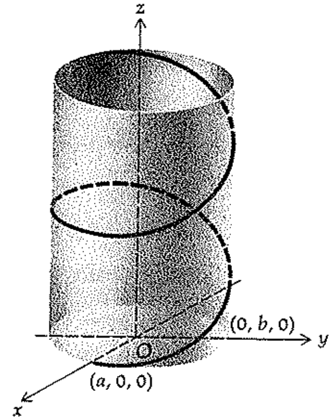
با افزودن طرفهای نظیر این دو معادله ، بدست می‌آوریم

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

لذا ، منحنی تماماً بر استوانهٔ بیضویی قرار دارد که هادیش یک بیضی در صفحهٔ xy بوده و خطوط جاریش موازی محور z اند . جدول ۱.۹.۱۷ مجموعه‌ای از مقادیر x ، y ، و z را به‌ازای مقادیر خاص t بدست می‌دهد . منحنی در شکل ۱.۹.۱۷ نموده شده‌است .

t	x	y	z
0	a	0	0
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{a}{\sqrt{2}}$	$\frac{b}{\sqrt{2}}$	$\frac{\pi}{4}$
$\frac{\pi}{2}$	0	b	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{a}{\sqrt{2}}$	$\frac{b}{\sqrt{2}}$	$\frac{3\pi}{4}$
π	$-a$	0	π
$\frac{3\pi}{2}$	0	$-b$	$\frac{3\pi}{2}$

جدول ۱.۹.۱۷



شکل ۱۰۹۰۱۷

منحنی توضیح ۱ یک **مارپیچ** نام دارد. هرگاه $a = b$ ، مارپیچ یک **مارپیچ مستدیر** است و بر استوانهٔ مستدیر قائم $x^2 + y^2 = a^2$ قرار دارد.

توضیح ۲. منحنی به معادلهٔ برداری

$$\mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$$

یک **مکعبی پیچ خورده** نام دارد. معادلات پارامتری مکعبی پیچ خورده عبارتند از

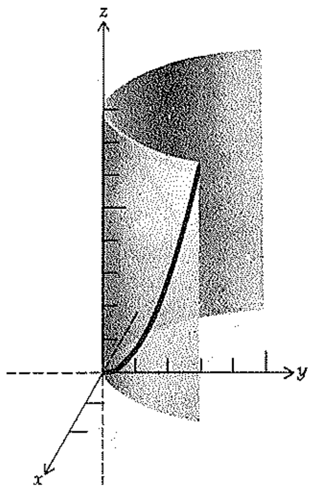
$$x = t \qquad y = t^2 \qquad z = t^3$$

با حذف t از دو معادلهٔ اول $y = x^2$ بدست می‌آید، که استوانه‌ای است که هادیش در صفحهٔ xy یک سهمی است. مکعبی پیچ خورده براین استوانه قرار دارد. شکل ۲۰۹۰۱۷ یک استوانه و بخشی از مکعبی پیچ خورده از $t = 0$ تا $t = 2$ را نشان می‌دهد.

بسیاری ازتعاریف و قضایای حاکم بر توابع برداری در ابعاد دو را می‌توان به توابع برداری در ابعاد سه تعمیم داد.

۲۰۹۰۱۷ تعریف. هرگاه $\mathbf{R}(t) = f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j} + f_3(t)\mathbf{k}$، آنگاه در صورت وجودهمهٔ $\lim_{t \to t_1} f_1(t)$ ، $\lim_{t \to t_1} f_2(t)$ ، و $\lim_{t \to t_1} f_3(t)$ ،

$$\lim_{t \to t_1} \mathbf{R}(t) = \lim_{t \to t_1} f_1(t)\mathbf{i} + \lim_{t \to t_1} f_2(t)\mathbf{j} + \lim_{t \to t_1} f_3(t)\mathbf{k}$$



شکل ۲۰۹۰۱۷

۳۰۹۰۱۷ تعریف. تابع برداری $\mathbf{R}$ در t_1 پیوسته است اگر و فقط اگر

(یک) $\mathbf{R}(t_1)$ وجود داشته باشد؛

(دو) $\lim_{t \to t_1} \mathbf{R}(t)$ وجود داشته باشد؛

(سه) $\lim_{t \to t_1} \mathbf{R}(t) = \mathbf{R}(t_1)$.

۴۰۹۰۱۷ تعریف. مشتق تابع برداری $\mathbf{R}$ تابعی برداری است که با $\mathbf{R}'$ نموده و به‌شکل

$$\mathbf{R}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{R}(t + \Delta t) - \mathbf{R}(t)}{\Delta t}$$

درصورت وجود حد، تعریف می‌شود.

۵۰۹۰۱۷ قضیه. *هرگاه $\mathbf{R}$ تابع برداری تعریف شده با*

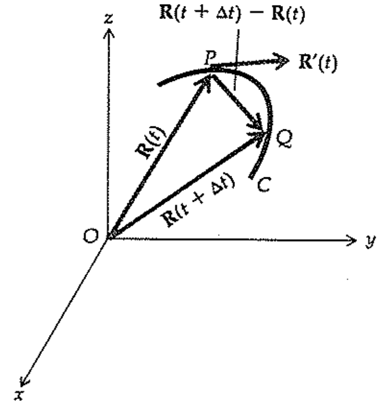
$$\mathbf{R}(t) = f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j} + f_3(t)\mathbf{k}$$

بوده و $\mathbf{R}'(t)$ موجود باشد، آنگاه

$$\mathbf{R}'(t) = f_1{}'(t)\mathbf{i} + f_2{}'(t)\mathbf{j} + f_3{}'(t)\mathbf{k}$$

اثبات قضیهٔ ۵۰۹۰۱۷ را به‌عنوان تمرین می‌گذاریم (ر.ک. تمرین ۱۳).

تعبیر هندسی مشتق $\mathbf{R}$ همان تعبیر مشتق یک تابع برداری در R^2 است. شکل ۳.۹.۱۷ بخشی از منحنی C را نشان می‌دهد، که نمودار $\mathbf{R}$ است. دراین شکل، $\overrightarrow{OP}$



شکل ۳.۹.۱۷

نمایش موضعی $\mathbf{R}(t)$ ، و $\overrightarrow{OQ}$ نمایش موضعی $\mathbf{R}(t+\Delta t)$ است؛ و درنتیجه، $\overrightarrow{PQ}$ نمایش بردار $\mathbf{R}(t+\Delta t)-\mathbf{R}(t)$ است. وقتی Δt به صفر نزدیک می‌شود، بردار $[\mathbf{R}(t+\Delta t)-\mathbf{R}(t)]/\Delta t$ نمایشی دارد که به پاره‌خط جهتدار مماس بر منحنی C در P نزدیک خواهد شد.

تعریف بردار یکهٔ مماس شبیه تعریف ۱.۸.۱۶ برای بردارها در صفحه است. درنتیجه، اگر $\mathbf{T}(t)$ بردار یکهٔ مماس بر منحنی C به معادلهٔ برداری (۱) باشد،

$$\mathbf{T}(t)=\frac{D_t\mathbf{R}(t)}{|D_t\mathbf{R}(t)|} \qquad (۳)$$

توضیح ۳. بردار یکهٔ مماس مکعبی پیچ‌خوردهٔ توضیح ۲ را پیدا می‌کنیم. چون $\mathbf{R}(t)=t\mathbf{i}+t^2\mathbf{j}+t^3\mathbf{k}$

$$D_t\mathbf{R}(t)=\mathbf{i}+2t\mathbf{j}+3t^2\mathbf{k}$$

$$|D_t\mathbf{R}(t)|=\sqrt{1+4t^2+9t^4}$$

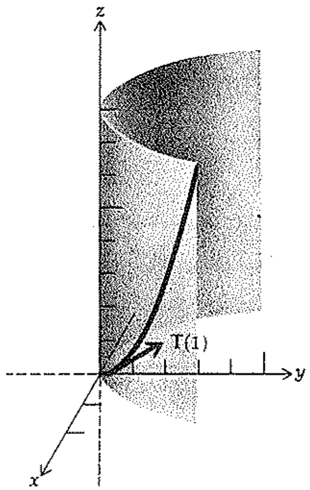
پس از (۳) داریم

$$\mathbf{T}(t)=\frac{1}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}}(\mathbf{i}+2t\mathbf{j}+3t^2\mathbf{k})$$

لذا، بخصوص،

$$\mathbf{T}(1)=\frac{1}{\sqrt{14}}\mathbf{i}+\frac{2}{\sqrt{14}}\mathbf{j}+\frac{3}{\sqrt{14}}\mathbf{k}$$

شکل ۴.۹.۱۷ نمایش $\mathbf{T}(1)$ در نقطهٔ $(1, 1, 1)$ را نمایش می‌دهد.



شکل ۴.۹.۱۷

قضایای ۶.۵.۱۶ ، ۷.۵.۱۶ ، و ۸.۵.۱۶ در رابطه با مشتقات مجموعها و حاصل ضربهای توابع برداری دوبعدی برای بردارها در ابعاد سه نیز برقرارند. قضیهٔ زیر در رابطه با مشتق حاصل‌ضرب خارجی دو تابع برداری شبیه فرمول نظیر برای مشتق حاصل ضرب توابع حقیقی‌اند؛ با اینحال، مهم حفظ صحیح ترتیب توابع برداری است، زیرا حاصل ضرب خارجی تعویض‌پذیر نیست.

۶.۹.۱۷ قضیه. ***هرگاه $\mathbf{R}$ و $\mathbf{Q}$ توابعی برداری باشند، آنگاه، به‌ازای جمیع مقادیر t که $\mathbf{R}'(t)$ و $\mathbf{Q}'(t)$ وجود داشته باشند،***

$$D_t[\mathbf{R}(t)\times\mathbf{Q}(t)]=\mathbf{R}(t)\times\mathbf{Q}'(t)+\mathbf{R}'(t)\times\mathbf{Q}(t)$$

اثبات قضیهٔ ۶.۹.۱۷ را به‌عنوان تمرین می‌گذاریم (ر.ک. تمرین ۱۴).

طول قوس منحنی C در فضای سه‌بعدی را می‌توان درست به همان طریقی که طول

قوس یک منحنی در صفحه تعریف شد (ر.ک. تعریف ۱۰۶۰۱۶) تعریف کنیم. هرگاه C منحنی به معادلات پارامتری (۲) باشد، f_1', f_2', f_3' بر بازهٔ بستهٔ $[a, b]$ پیوسته بوده، و هیچ‌دو مقدار t یک نقطهٔ (x, y, z) بر C را ندهند، آنگاه می‌توان (همانطور که درصفحه شد) قضیه‌ای شبیه قضیهٔ ۳۰۶۰۱۶ ثابت‌کرد، که می‌گوید طول قوس L منحنی C ازنقطهٔ $(f_1(a), f_2(a), f_3(a))$ تا نقطهٔ $(f_1(b), f_2(b), f_3(b))$ با رابطهٔ

$$L = \int_a^b \sqrt{[f_1'(t)]^2 + [f_2'(t)]^2 + [f_3'(t)]^2}\, dt \tag{۴}$$

معین می‌شود.

هرگاه s طول قوس C از نقطهٔ ثابت $(f_1(t_0), f_2(t_0), f_3(t_0))$ تا نقطهٔ متغیر $(f_1(t), f_2(t), f_3(t))$ بوده‌و s باافزایش t زیاد شود، آنگاه s تابعی از t است و ازرابطهٔ زیر بدست می‌آید:

$$s = \int_{t_0}^t \sqrt{[f_1'(u)]^2 + [f_2'(u)]^2 + [f_3'(u)]^2}\, du \tag{۵}$$

همانطور که دربخش ۶۰۱۶ برای منحنیهای مسطح شد، می‌توان نشان داد که اگر (۱) معادلهٔ برداری C باشد،

$$D_t s = |D_t\mathbf{R}(t)| \tag{۶}$$

و طول قوس L داده شده با (۴) را می‌توان با

$$L = \int_a^b |D_t\mathbf{R}(t)|\, dt \tag{۷}$$

نیز معین کرد.

مثال ۱. مارپیچ مستدیر $\mathbf{R}(t) = a\cos t\mathbf{i} + a\sin t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$، که در آن $a > 0$، داده شده است. طول قوس از $t = 0$ تا $t = 2\pi$ را پیدا کنید.

حل. $D_t\mathbf{R}(t) = -a\sin t\mathbf{i} + a\cos t\mathbf{j} + \mathbf{k}$. درنتیجه، از (۷) داریم

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2 + 1}\, dt$$
$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + 1}\, dt = 2\pi\sqrt{a^2 + 1}$$

لذا، طول قوس مساوی $2\pi\sqrt{a^2 + 1}$ می‌باشد.

تعاریف ***بردار انحنای*** $\mathbf{K}(t)$ و ***انحنای*** $K(t)$ در نقطهٔ P بر منحنی C در R^3 همانهای بوده برای منحنیهای مسطح در تعریف ۱۰۹۰۱۶ می‌باشند. لذا، هرگاه $\mathbf{T}(t)$ بردار یکهٔ مماس‌بر C در P بوده‌و s طول قوس‌از نقطهٔ دلخواهی بر C تا P باشد، که s با افزایش t افزایش می‌یابد، آنگاه

$$\mathbf{K}(t) = D_s\mathbf{T}(t)$$

یا، معادلاً،

$$\mathbf{K}(t) = \frac{D_t\mathbf{T}(t)}{|D_t\mathbf{R}(t)|} \tag{۸}$$

و

$$K(t) = |D_s\mathbf{T}(t)|$$

یا، معادلاً،

$$K(t) = \left|\frac{D_t\mathbf{T}(t)}{|D_t\mathbf{R}(t)|}\right| \tag{۹}$$

با ضرب نقطه‌ای $\mathbf{K}(t)$ و $\mathbf{T}(t)$ و استفاده از (۸)، بدست می‌آوریم

$$\mathbf{K}(t)\cdot\mathbf{T}(t) = \frac{D_t\mathbf{T}(t)}{|D_t\mathbf{R}(t)|}\cdot\mathbf{T}(t) = \frac{1}{|D_t\mathbf{R}(t)|}D_t\mathbf{T}(t)\cdot\mathbf{T}(t) \tag{۱۰}$$

قضیهٔ ۱۱۰۵۰۱۶ می‌گویدکه اگریک تابع برداری در یک صفحه اندازهٔ ثابت داشته باشد، بر مشتق خود عمود است. این قضیه و برهانش برای بردارها در ابعاد سه نیز برقرارند. لذا، چون $|\mathbf{T}(t)| = 1$، می‌توان از (۱۰) نتیجه گرفت که $\mathbf{K}(t)\cdot\mathbf{T}(t) = 0$. و لذا، بردار انحنا و بردار یکهٔ مماس یک منحنی در یک نقطه متعامد می‌باشند.

بردار یکهٔ قائم برداریکه‌ای تعریف می‌شودکه با بردار انحنا همجهت است، مشروط براینکه بردار انحنا بردار صفر نباشد. درنتیجه، هرگاه $\mathbf{N}(t)$ بردار یکهٔ قائم به منحنی C در نقطهٔ P باشد، آنگاه اگر $\mathbf{K}(t) \neq \mathbf{0}$،

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{K}(t)}{|\mathbf{K}(t)|} \tag{۱۱}$$

از فرمول (۱۱) و بحث پیش معلوم می‌شود که بردار یکهٔ قائم و بردار یکهٔ مماس

متعامدند. لذا، زاویهٔ بین این دو بردار $\frac{1}{2}\pi$ رادیان است، و از قضیهٔ ۶۰۶۰۱۷ داریم

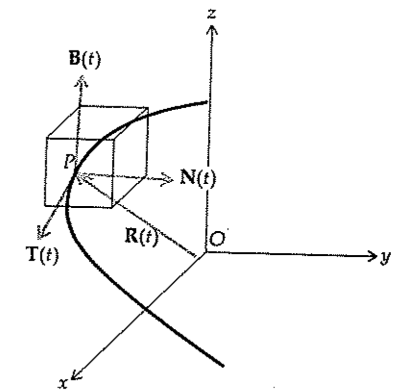
$$|\mathbf{T}(t)\times\mathbf{N}(t)| = |\mathbf{T}(t)||\mathbf{N}(t)|\sin\tfrac{1}{2}\pi = (1)(1)(1) = 1$$

بنابراین، حاصل ضرب خارجی $\mathbf{T}(t)$ و $\mathbf{N}(t)$ یک بردار یکه است. طبق قضیهٔ ۹۰۶۰۱۷، $\mathbf{T}(t)\times\mathbf{N}(t)$ به هر دوی $\mathbf{T}(t)$ و $\mathbf{N}(t)$ عمود است؛ از اینرو، بردار $\mathbf{B}(t)$، که با

(۱۲) $$\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t)\times\mathbf{N}(t)$$

تعریف می‌شود، بردار یکه‌ای عمود بر $\mathbf{T}(t)$ و $\mathbf{N}(t)$ است و **بردار یکهٔ قائم دوم** به‌منحنی C در P نام دارد.

سه بردار یکهٔ دوبدو متعامد $\mathbf{T}(t)$، $\mathbf{N}(t)$، و $\mathbf{B}(t)$ منحنی C **سه‌وجهی حرکت** C نامیده می‌شوند (ر.ک. شکل ۵۰۹۰۱۷).



شکل ۵۰۹۰۱۷

مثال ۲. سه وجهی حرکت و انحنا را درهر نقطهٔ مارپیچ مستدیر مثال ۱ پیدا کنید.

حل. معادلهٔ برداری مارپیچ مستدیر عبارت است از

$$\mathbf{R}(t) = a\cos t\mathbf{i} + a\sin t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$$

درنتیجه، $D_t\mathbf{R}(t) = -a\sin t\mathbf{i} + a\cos t\mathbf{j} + \mathbf{k}$ و $|D_t\mathbf{R}(t)| = \sqrt{a^2+1}$. از (۳) معلوم می‌شود که

$$\mathbf{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}(-a\sin t\mathbf{i} + a\cos t\mathbf{j} + \mathbf{k})$$

درنتیجه،

$$D_t\mathbf{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}(-a\cos t\mathbf{i} - a\sin t\mathbf{j})$$

با اعمال (۸) بدست می‌آوریم

$$\mathbf{K}(t) = \frac{1}{a^2+1}(-a\cos t\mathbf{i} - a\sin t\mathbf{j})$$

پس انحنا عبارت است از

$$K(t) = |\mathbf{K}(t)| = \frac{a}{a^2+1}$$

درنتیجه، انحنای مارپیچ مستدیر ثابت است. از (۱۱) داریم

$$\mathbf{N}(t) = -\cos t\mathbf{i} - \sin t\mathbf{j}$$

با اعمال (۱۲) خواهیم داشت

$$\mathbf{B}(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}(-a\sin t\mathbf{i} + a\cos t\mathbf{j} + \mathbf{k})\times(-\cos t\mathbf{i} - \sin t\mathbf{j})$$
$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}(\sin t\mathbf{i} - \cos t\mathbf{j} + a\mathbf{k})$$

بررسی جامع منحنیها و سطوح به‌وسیلهٔ حساب دیفرانسیل و انتگرال مبحث **هندسهٔ دیفرانسیل** را تشکیل می‌دهد. استفاده‌از حساب بردارها بر اهمیت این مبحث می‌افزاید. بحث پیشین تنها یک آشنایی مختصر بوده است.

حال به حرکت یک ذره در امتداد یک منحنی در فضای سه بعدی به‌اختصار می‌پردازیم. اگر در معادلهٔ برداری (۱) پارامتر t زمان باشد، موضع ذرهٔ متحرک در t در امتداد منحنی C به معادلهٔ برداری (۱) نقطهٔ $P(f_1(t), f_2(t), f_3(t))$ است. **بردار سرعت** $\mathbf{V}(t)$ و **بردار شتاب** $\mathbf{A}(t)$ همانند در صفحه تعریف می‌شوند. بردار $\mathbf{R}(t)$ **بردار موضع** نام دارد،

و

(۱۳) $$\mathbf{V}(t) = D_t\mathbf{R}(t)$$

و

(۱۴) $$\mathbf{A}(t) = D_t\mathbf{V}(t) = D_t{}^2\mathbf{R}(t)$$

مقدار سرعت ذره در t اندازهٔ بردار سرعت است. با اعمال (۶) می‌توان نوشت

$$|\mathbf{V}(t)| = D_t s$$

مثال ۳. ذره‌ای در امتداد یک منحنی به معادلات پارامتری $x = 3t$ ، $y = t^2$ ، و $z = \frac{2}{3}t^3$ در حرکت است. بردارهای سرعت و شتاب و مقدار سرعت ذره در $t = 1$ را بیابید. بخشی از منحنی در $t = 1$ را رسم کرده، و نمایشهای بردارهای سرعت و شتاب دراین نقطه را بکشید.

حل. معادلهٔ برداری منحنی عبارت است

$$\mathbf{R}(t) = 3t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \frac{2}{3}t^3\mathbf{k}$$

بنابراین،

$$\mathbf{V}(t) = D_t\mathbf{R}(t) = 3\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 2t^2\mathbf{k}$$

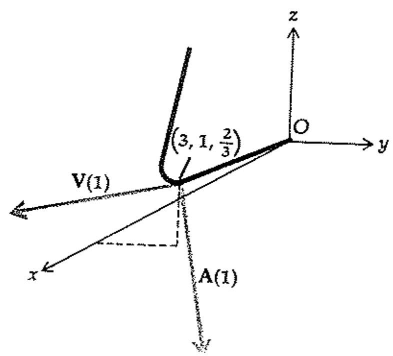
و

$$\mathbf{A}(t) = D_t\mathbf{V}(t) = 2\mathbf{j} + 4t\mathbf{k}$$

همچنین،

$$|\mathbf{V}(t)| = \sqrt{9 + 4t^2 + 4t^4}$$

درنتیجه، وقتی $t = 1$ ، $\mathbf{V} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ ، $\mathbf{A} = 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ ، و $|\mathbf{V}(1)| = \sqrt{17}$. رسم مطلوب در شکل ۶.۹.۱۷ نموده شده است.



شکل ۶.۹.۱۷

تمرینات ۹.۱۷

در تمرینهای ۱ تا ۵، بردار یکهٔ مماس منحنی به معادلهٔ برداری داده شده را بیابید.

۱. $\mathbf{R}(t) = (t + 1)\mathbf{i} - t^2\mathbf{j} + (1 - 2t)\mathbf{k}$

۲. $\mathbf{R}(t) = \sin 2t\mathbf{i} + \cos 2t\mathbf{j} + 2t^{3/2}\mathbf{k}$

۳. $\mathbf{R}(t) = e^t \cos t\mathbf{i} + e^t \sin t\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}$

۴. $\mathbf{R}(t) = t^2\mathbf{i} + (t + \frac{1}{3}t^3)\mathbf{j} + (t - \frac{1}{3}t^3)\mathbf{k}$

۵. $\mathbf{R}(t) = 2t \cos t\mathbf{i} + 5t\mathbf{j} + 2t \sin t\mathbf{k}$

۶. بردار یکهٔ مماس منحنی به معادلهٔ برداری

$$\mathbf{R}(t) = 4 \cosh 2t\mathbf{i} + 4 \sinh 2t\mathbf{j} + 6t\mathbf{k}$$

در نقطه‌ای که $t = 0$ را بیابید.

در تمرینهای ۷ تا ۱۱، طول قوس منحنی از t_1 تا t_2 را بیابید.

۷. منحنی تمرین ۱؛ $t_1 = -1$ ؛ $t_2 = 2$.

۸. منحنی تمرین ۲؛ $t_1 = 0$ ؛ $t_2 = 1$.

۹. منحنی تمرین ۳؛ $t_1 = 0$ ؛ $t_2 = 3$.

۱۰. منحنی تمرین ۴؛ $t_1 = 0$ ؛ $t_2 = 1$.

۱۱. $\mathbf{R}(t) = 4t^{3/2}\mathbf{i} - 3 \sin t\mathbf{j} + 3 \cos t\mathbf{k}$ ؛ $t_1 = 0$ ؛ $t_2 = 2$.

۱۲. ثابت کنید بردار یکهٔ مماس مارپیچ مستدیر مثال ۱ با بردار یکهٔ $\mathbf{k}$ زاویهٔ ثابتی می‌سازد.

۱۳. قضیهٔ ۵.۹.۱۷ را ثابت کنید.

۱۴. قضیهٔ ۶.۹.۱۷ را ثابت کنید.

۱۵. معادلهٔ برداری منحنی مشترک سطوح $y = e^x$ و $z = xy$ را بنویسید.

۱۶. معادلهٔ برداری منحنی مشترک سطوح $x = \ln(z^2 + 2)$ و $y = xz^3$ را بنویسید.

۱۷. کسینوس زاویهٔ بین بردار $\mathbf{j}$ و بردار یکهٔ مماس بر منحنی $\mathbf{R}(t) = \cos 2t\mathbf{i} - 3t\mathbf{j} + 2 \sin 2t\mathbf{k}$ در نقطه‌ای که $t = \pi$ را بیابید.

۱۸. انحنای منحنی $\mathbf{R}(t) = t^2\mathbf{i} + (4 + t)\mathbf{j} + (3 - 2t)\mathbf{k}$ در نقطه‌ای که $t = 1$ را پیدا کنید.

۱۹. سه‌وجهی حرکت و انحنای مکعبی پیچ خوردهٔ توضیح ۲ را در نقطه‌ای که $t = 1$ پیدا کنید.

۲۰. سه‌وجهی حرکت و انحنای منحنی $\mathbf{R}(t) = \cosh t\mathbf{i} + \sinh t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ در یک نقطه را پیدا کنید.

در تمرینهای ۲۱ تا ۲۴، سه‌وجهی حرکت و انحنای منحنی داده شده در $t = t_1$ را، در صورت وجود، پیدا کنید.

۲۱. منحنی تمرین ۱؛ $t_1 = -1$.

۲۲. منحنی تمرین ۲؛ $t_1 = 0$.

۲۳. منحنی تمرین ۳؛ $t_1 = 0$.

۲۴. منحنی تمرین ۴؛ $t_1 = 1$.

در تمرینهای ۲۵ تا ۲۸، ذره‌ای در امتداد منحنی داده شده حرکت می‌کند. بردار سرعت، بردار شتاب، و مقدار سرعت را در $t = t_1$ بیابید. بخشی از منحنی را در $t = t_1$ بکشید، و بردارهای سرعت و شتاب را در این نقطه رسم نمایید.

۲۵. مارپیچ مستدیر مثال ۱؛ $t_1 = \frac{1}{2}\pi$.

۲۶. $x = t, y = \frac{1}{2}t^2, z = \frac{1}{3}t^3; t_1 = 2$

۲۷. $x = e^{2t}, y = e^{-2t}, z = te^{2t}; t_1 = 1$

۲۸. $x = 1/2(t^2 + 1), y = \ln(1 + t^2), z = \tan^{-1} t; t_1 = 1$

۲۹. ثابت کنید هرگاه $\mathbf{R}(t) = f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j} + f_3(t)\mathbf{k}$ معادلهٔ برداری منحنی C بوده، و $K(t)$ انحنای C باشد، آنگاه

$$K(t) = \frac{|D_t\mathbf{R}(t) \times D_t^2\mathbf{R}(t)|}{|D_t\mathbf{R}(t)|^3}$$

۳۰. با استفاده از فرمول تمرین ۲۹، نشان دهید که انحنای مارپیچ مستدیر مثال ۱ مساوی $a/(a^2 + 1)$ است.

در تمرینهای ۳۱ و ۳۲، انحنای منحنی داده شده در نقطهٔ ذکر شده را پیدا کنید.

۳۱. $x = t, y = t^2, z = t^3$؛ مبداء.

۳۲. $x = e^t, y = e^{-t}, z = t; t = 0$

۳۳. ثابت کنید هرگاه $\mathbf{R}(t) = f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j} + f_3(t)\mathbf{k}$ معادلهٔ برداری منحنی C، $K(t)$ انحنای C در نقطهٔ P، و s طول قوس سنجیده شده از نقطهٔ دلخواهی بر C تا p باشد، آنگاه

$$D_s\mathbf{R}(t) \cdot D_s^3\mathbf{R}(t) = -[K(t)]^2$$

۳۴. ذره‌ای در امتداد یک منحنی به معادلهٔ برداری $\mathbf{R}(t) = \tan t\mathbf{i} + \sinh 2t\mathbf{j} + \operatorname{sech} t\mathbf{k}$ حرکت می‌کند. ثابت کنید بردار سرعت و بردار شتاب در $t = 0$ متعامدند.

۳۵. ثابت کنید هرگاه مقدار سرعت یک ذرهٔ متحرک ثابت باشد، بردار شتابش همیشه بر بردار سرعتش عمود است.

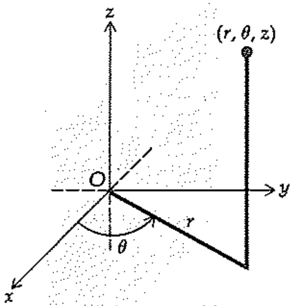
۳۶. ثابت کنید در مکعبی پیچ خوردهٔ توضیح ۲، اگر $t \neq 0$، هیچ دو بردار از بردارهای $\mathbf{R}(t)$، $\mathbf{V}(t)$ و $\mathbf{A}(t)$ متعامد نیستند.

۱۷.۱۰ مختصات استوانه‌ای و کروی

مختصات استوانه‌ای و کروی تعمیمات مختصات قطبی به فضای سه‌بعدی‌اند. نمایش مختصات

استوانه‌ای نقطهٔ P عبارت است از (r, θ, z)، که در آن r و θ مختصات قطبی تصویر P بر صفحهٔ قطبی بوده و z فاصلهٔ جهتدار این صفحه تا P است. ر.ک. شکل ۱۷.۱۰.۱.

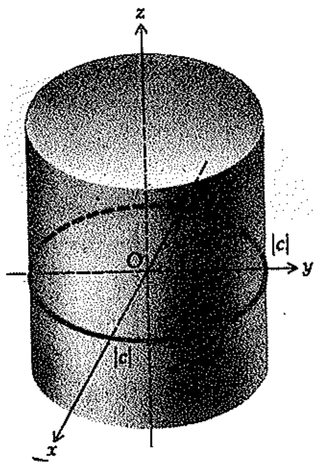
مثال ۱. نمودار هر یک از معادلات زیر، که در آنها c ثابت است، را رسم کنید: (آ) $r = c$؛ (ب) $\theta = c$؛ (پ) $z = c$.



شکل ۱۷.۱۰.۱

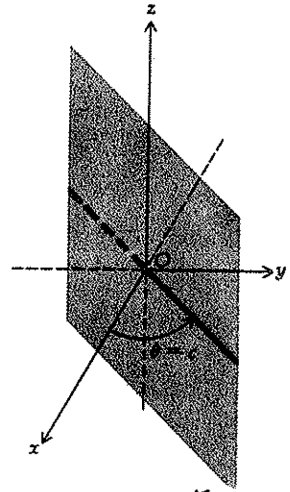
حل

(آ) برای آنکه نقطهٔ $P(r, \theta, z)$ بر نمودار $r = c$ باشد، θ و z می‌توانند هر مقدار داشته باشند و r یک ثابت می‌باشد. نمودار یک استوانهٔ مستدیر قائم به شعاع $|c|$ است که محور z محورش می‌باشد. نمودار در شکل ۱۷.۱۰.۲ نموده شده است.



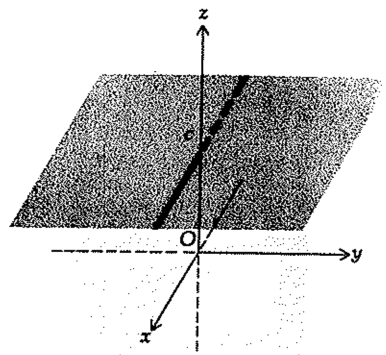
شکل ۱۷.۱۰.۲

(ب) در تمام نقاط $P(r, \theta, z)$ بر نمودار $\theta = c$ ، r و z می‌توانند هر مقدار را بگیرند ولی θ ثابت مـی‌ماند. نمودار صفحه‌ای است ماربر محور z . برای این نمودار، ر.ک. شکل ۳.۱۰.۱۷ .



شکل ۳.۱۰.۱۷

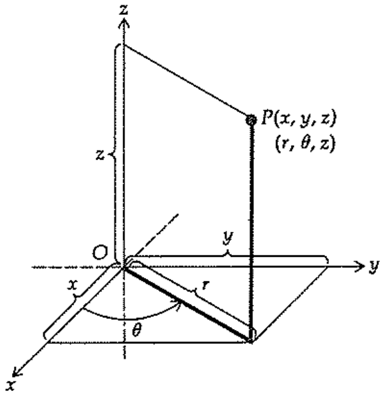
(پ) نمودار $z = c$ صفحه‌ای است موازی صفحهٔ قطبی در فاصلهٔ جهتدار c واحد از آن. شکل ۴.۱۰.۱۷ نمودار را نشان می‌دهد.



شکل ۴.۱۰.۱۷

نام "مختصات استوانه‌ای" از ایـن نـاشی شده که نمودار $r = c$ یک استوانهٔ

مستدیر قائم همانند مثال ۱ (آ) است. مختصات استوانه‌ای اغلب در مسائل فیزیکی‌وقتی محور تقارن وجود دارد بکار می‌روند. فرض کنیم یک دستگاه مختصات دکارتی و یک دستگاه مختصات استوانه‌ای، همانند شکل ۵.۱۰.۱۷ ، طوری قرار گرفته باشند که صفحهٔ



شکل ۵.۱۰.۱۷

xy صفحهٔ قطبی دستگاه‌مختصات استوانه‌ای‌بوده و جهت مثبت محور x محور قطبی‌باشد. دراین‌صورت، نقطهٔ P دارای دو دسته مختصات (x, y, z) و (r, θ, z) است که بامعادلات

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta \qquad z = z \tag{۱}$$

و

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad \tan\theta = \frac{y}{x} \quad \text{اگر } x \neq 0 \qquad z = z \tag{۲}$$

بهم مربوط می‌شوند.

مثال ۲. معادلهٔ مختصات دکارتی سطوح زیر را بیابید که معادلاتشان در مختصات استوانه‌ای داده شده‌اند، و سطح را نام ببرید: (آ) $r = 6\sin\theta$ ؛ (ب) $r(3\cos\theta + 2\sin\theta) + 6z = 0$.

حل

(آ) با ضرب طرفین معادله در r بدست می‌آوریم $r^2 = 6r\sin\theta$. چون $r^2 = x^2 + y^2$

و $r\sin\theta = y$ ، داریم $x^2+y^2=6y$. این معادله را می‌توان به شکل $x^2+(y-3)^2=9$ نوشت ، که نشان می‌دهد که نمودار آن استوانهٔ مستدیر قائمی است که مقطع عرضی‌اش در صفحهٔ xy دایره‌ای به مرکز $(0,3)$ و شعاع 3 می‌باشد .

(ب) ازتعویض $r\cos\theta$ با x و $r\sin\theta$ با y معادلهٔ $3x+2y+6z=0$ بدست می‌آید . لذا ، نمودار صفحه‌ای است ماربر مبداء که $\langle 3,2,6\rangle$ یک بردار قائم آن است .

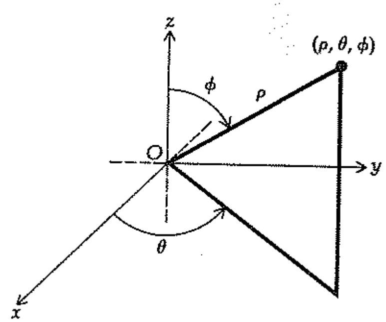
مثال ۳. معادلهٔ سطوح زیر که معادلات آنها در مختصات دکارتی داده شده‌اند را در مختصات استوانه‌ای بیابید ، و سطح را نام ببرید : (آ) $x^2+y^2=z$ ؛ (ب) $x^2-y^2=z$.

حل

(آ) معادله شبیه معادلهٔ (۴) از بخش ۸۰۱۷ است ؛ درنتیجه ، نمودار یک سهمی‌گون بیضوی است . هرگاه x^2+y^2 با r^2 عوض شود ، معادله خواهد شد $r^2=z$.

(ب) معادله شبیه معادلهٔ (۵) از بخش ۸۰۱۷ است که در آن x و y با هم عوض شده‌اند . بنابراین ، نمودار یک سهمی‌گون هذلولوی است که محور z محورش می‌باشد . وقتی x با $r\cos\theta$ و y با $r\sin\theta$ عوض شود ، معادله خواهد شد $r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta = z$ ؛ و چون $\cos^2\theta-\sin^2\theta=\cos 2\theta$ ، این را می‌توان به صورت $z=r^2\cos 2\theta$ نوشت .

در دستگاه مختصات کروی یک صفحهٔ قطبی و یک محور عمود بر این صفحه وجود دارند بطوری که مبداء محور z در قطب صفحهٔ قطبی است . یک نقطه با سه عدد مشخص می‌شود ، و نمایش نقطهٔ P به صورت مختصات کروی (ρ,θ,ϕ) است ، که در آن $\rho=|\overline{OP}|$ ، θ زاویهٔ قطبی تصویر P بر صفحهٔ قطبی به رادیان ، و ϕ کوچکترین زاویهٔ نامنفی از



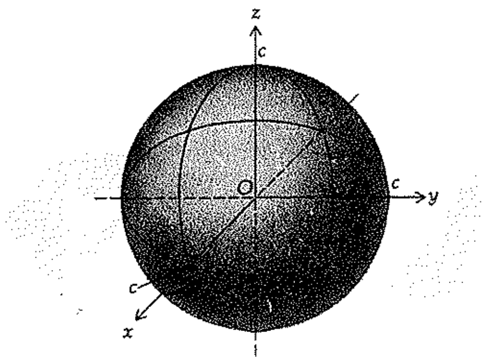
شکل ۶۰۱۰۰۱۷

جهت مثبت محور z به خط OP به رادیان است . ر.ک. شکل ۶۰۱۰۰۱۷ . مبداء دارای مختصات کروی $(0,\theta,\phi)$ است ، که در آن θ و ϕ می‌توانند هر مقدار داشته باشند . اگر نقطهٔ $P(\rho,\theta,\phi)$ مبداء نباشد ، $\rho>0$ و $0\le\phi\le\pi$ ، که $\phi=0$ اگر P در جهت مثبت محور z واقع باشد و $\phi=\pi$ اگر P در جهت منفی محور z واقع باشد .

مثال ۴. نمودار هریک از معادلات زیر که در آنها c ثابت است را رسم نمایید : (آ) $\rho=c$ ، و $c>0$ ؛ (ب) $\theta=c$ ؛ (پ) $\phi=c$ ، و $0<c<\pi$.

حل

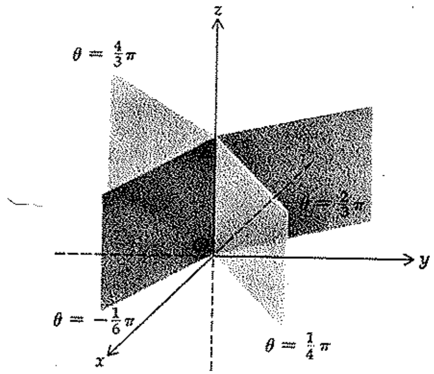
(آ) هر نقطهٔ $P(\rho,\theta,\phi)$ بر نمودار $\rho=c$ دارای یک مقدار ρ است ، θ ممکن است هر عدد باشد ، و $0\le\phi\le\pi$. پس نمودار کره‌ای است به شعاع c و مرکز در قطب . شکل ۷۰۱۰۰۱۷ کره را نشان می‌دهد .



شکل ۷۰۷۰۱۰

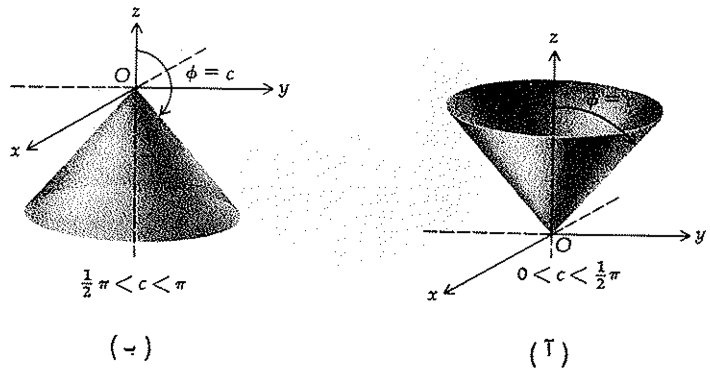
(ب) در نقطهٔ $P(\rho,\theta,\phi)$ بر نمودار $\theta=c$ ، ρ می‌تواند هر عدد نامنفی باشد ، ϕ می‌تواند هر عدد در بازهٔ بستهٔ $[0,\pi]$ باشد ، و θ ثابت باشد . نمودار نیمصفحه‌ای است شامل محور z که از دوران آن نیمه از صفحهٔ xz که $x\ge 0$ به اندازهٔ c رادیان حول محور z بدست می‌آید . شکل ۸۰۱۰۰۱۷ نیمصفحه‌هایی را نشان می‌دهد که در آنها $\theta=\frac{1}{4}\pi$ ، $\theta=\frac{2}{3}\pi$ ، $\theta=\frac{4}{3}\pi$ ، و $\theta=-\frac{1}{6}\pi$.

(پ) نمودار $\phi=c$ شامل تمام نقاطی چون $P(\rho,\theta,\phi)$ است که در آنها ρ هر عدد نامنفی است ، θ هر عدد است ، و ϕ ثابت c می‌باشد . نمودار نیمی از یک مخروط است



شکل ۸۰۱۰۰۱۷

که‌راسش درمبداء بوده‌و محور z محورش می‌باشد. شکل ۹۰۱۰۰۱۷ (آ) و (ب) هرکدام یک نیم‌مخروط‌را بترتیب به‌ازای $0 < c < \frac{1}{2}\pi$ و $\frac{1}{2}\pi < c < \pi$ نشان می‌دهد.

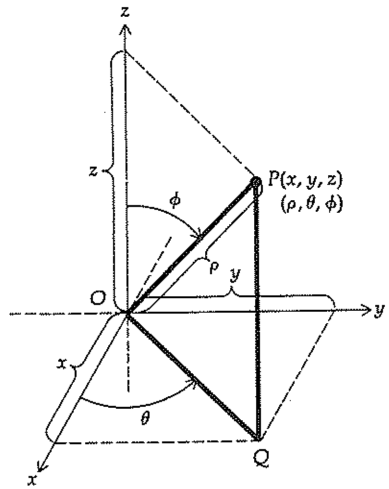


شکل ۹۰۱۰۰۱۷

چون همانطور که در مثال ۴ (آ) می‌بینیم، نمودار $\rho = c$ یک کره است، نام "مختصات کروی" را داریم. در یک مسئلهٔ فیزیکی وقتی مرکز تقارن وجود داشته باشد، اغلب مختصات کروی بکار می‌روند.

با اختیار دستگاه مختصات کروی و دستگاه مختصات دکارتی مثل شکل ۱۰۰۱۰۰۱۷، از معادلات

$$x = |\overline{OQ}|\cos\theta \qquad y = |\overline{OQ}|\sin\theta \qquad z = |\overline{QP}|$$



شکل ۱۰۰۱۰۰۱۷

روابط بین مختصات کروی و مختصات دکارتی نقطهٔ P بدست می‌آیند. چون $|\overline{OQ}| = \rho\sin\phi$ و $|\overline{QP}| = \rho\cos\phi$، این معادلات خواهند شد

$$x = \rho\sin\phi\cos\theta \qquad y = \rho\sin\phi\sin\theta \qquad z = \rho\cos\phi \tag{۳}$$

با مجذور کردن معادلات (۳) و افزودن آنها بهم، خواهیم داشت

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2\sin^2\phi\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\phi\sin^2\theta + \rho^2\cos^2\phi$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2\sin^2\phi(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + \rho^2\cos^2\phi$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2(\sin^2\phi + \cos^2\phi)$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$$

مثال ۵. معادلهٔ سطوح زیر را که معادلات آنها به مختصات کروی داده شده درمختصات دکارتی پیدا کرده، و سطح را نام ببرید: (آ) $\rho\cos\phi = 4$ ؛ (ب) $\rho\sin\phi = 4$.

حل

(آ) چون $z = \rho\cos\phi$، معادله‌خواهدشد $z = 4$. لذا، نمودار یک صفحه‌موازی

صفحهٔ xy است و 4 واحد بالای آن می‌باشد.

(ب) در مختصات کروی $\rho \geq 0$ و $\sin\phi \geq 0$ (زیرا $0 \leq \phi \leq \pi$)؛ پس، از مجذور کردن طرفین معادلهٔ داده شده معادلهٔ معادل $\rho^2 \sin^2\phi = 16$ بدست می‌آید، که خود معادل است با

$$\rho^2(1 - \cos^2\phi) = 16$$

$$\rho^2 - \rho^2\cos^2\phi = 16$$

از تعویض ρ^2 با $x^2 + y^2 + z^2$ و $\rho\cos\phi$ با z، بدست می‌آوریم

$$x^2 + y^2 + z^2 - z^2 = 16$$

$$x^2 + y^2 = 16$$

لذا، نمودار استوانهٔ مستدیر قائم است که محورش محور z بوده و شعاعش 4 است.

مثال ۶. برای (آ) سهمی‌گون بیضوی مثال ۳ (آ)؛ (ب) صفحهٔ مثال ۲ (ب) معادله‌ای در مختصات کروی بیابید.

حل

(آ) معادلهٔ دکارتی سهمی‌گون بیضوی مثال ۳ (آ) عبارت است از $x^2 + y^2 = z$. از تعویض x با $\rho\sin\phi\cos\theta$، y با $\rho\sin\phi\sin\theta$، و z با $\rho\cos\phi$، بدست می‌آوریم

$$\rho^2\sin^2\phi\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\phi\sin^2\theta = \rho\cos\phi$$

$$\rho^2\sin^2\phi(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = \rho\cos\phi$$

که معادل است با دو معادلهٔ

$$\rho = 0 \quad \text{و} \quad \rho\sin^2\phi = \cos\phi$$

مبداء تنها نقطه‌ای است که مختصاتش در $\rho = 0$ صدق می‌کنند. چون مبداء $(0, \theta, \frac{1}{2}\pi)$ بر $\rho\sin^2\phi = \cos\phi$ واقع است، می‌توان معادلهٔ $\rho = 0$ را حذف کرد. بعلاوه، $\sin\phi \neq 0$، زیرا مقداری از ϕ که هردوی $\sin\phi$ و $\cos\phi$ را صفر کند وجود ندارد. بعلاوه، معادلهٔ $\rho\sin^2\phi = \cos\phi$ را نمی‌توان به صورت $\rho = \csc^2\phi\cos\phi$ یا، معادلاً، $\rho = \csc\phi\cot\phi$ نوشت.

(ب) معادلهٔ دکارتی صفحهٔ مثال ۲ (ب) عبارت است از $3x + 2y + 6z = 0$. با استفاده از معادلات (۳)، این معادله خواهد شد

$$3\rho\sin\phi\cos\theta + 2\rho\sin\phi\sin\theta + 6\rho\cos\phi = 0$$

تمرینات ۱۰۰۱۷

۱. مختصات دکارتی نقطه به مختصات استوانه‌ای داده شده را بیابید: (آ) $(3, \frac{1}{2}\pi, 5)$؛ (ب) $(7, \frac{2}{3}\pi, -4)$؛ (پ) $(1, 1, 1)$.

۲. مختصات استوانه‌ای نقطه به مختصات دکارتی داده شده را بیابید: (آ) $(4, 4, -2)$؛ (ب) $(-3\sqrt{3}, 3, 6)$؛ (پ) $(1, 1, 1)$.

۳. مختصات دکارتی نقطه به مختصات کروی داده شده را بیابید: (آ) $(4, \frac{1}{6}\pi, \frac{1}{4}\pi)$؛ (ب) $(4, \frac{1}{2}\pi, \frac{1}{3}\pi)$؛ (پ) $(\sqrt{6}, \frac{1}{3}\pi, \frac{3}{4}\pi)$.

۴. مختصات کروی نقطه به مختصات دکارتی داده شده را بیابید: (آ) $(1, -1, -\sqrt{2})$؛ (ب) $(-1, \sqrt{3}, 2)$؛ (پ) $(2, 2, 2)$.

۵. مختصات استوانه‌ای نقطه به مختصات کروی داده شده را بیابید: (آ) $(4, \frac{2}{3}\pi, \frac{5}{6}\pi)$؛ (ب) $(\sqrt{2}, \frac{3}{4}\pi, \pi)$؛ (پ) $(2\sqrt{3}, \frac{1}{3}\pi, \frac{1}{4}\pi)$.

۶. مختصات کروی نقطه به مختصات استوانه‌ای داده شده را بیابید: (آ) $(3, \frac{1}{6}\pi, 3)$؛ (ب) $(3, \frac{1}{2}\pi, 2)$؛ (پ) $(2, \frac{5}{6}\pi, -4)$.

در تمرینهای ۷ تا ۱۲، معادلهٔ سطح داده شده را در مختصات استوانه‌ای یافته، و سطح را نام ببرید.

۷. $x^2 + y^2 + 4z^2 = 16$

۸. $x^2 - y^2 = 9$

۹. $x^2 + y^2 = 3z$

۱۰. $9x^2 + 4y^2 = 36$

۱۱. $x^2 - y^2 = 3z^2$

۱۲. $x^2 + y^2 = z^2$.

در تمرینهای ۱۳ تا ۱۷، معادلهٔ سطح داده شده را در مختصات کروی یافته، و سطح را نام ببرید.

۱۳. $x^2 + y^2 + z^2 - 9z = 0$

۱۴. $x^2 + y^2 = z^2$

۱۵. $x^2 + y^2 = 9$

۱۶. $x^2 + y^2 = 2z$

۱۷. $x^2 + y^2 + z^2 - 8x = 0$

در تمرینهای ۱۸ تا ۲۲، معادلهٔ سطح که در مختصات استوانه‌ای داده شده در مختصات دکارتی بیابید. در تمرینهای ۱۸ و ۱۹، سطح را نام ببرید.

۱۸. $r = 3\cos\theta$

۱۹. (آ) $r = 4$؛ (ب) $\theta = \frac{1}{4}\pi$.

۲۰. $r = 3 + 2\cos\theta$

۲۱. $r^2\cos 2\theta = z^3$

۲۲. $z^2\sin^3\theta = r^3$

در تمرینهای ۲۳ تا ۲۷، معادلهٔ سطح که در مختصات کروی داده شده در مختصات دکارتی

بیابید. در تمرینهای ۲۳ تا ۲۵ سطح را نام ببرید.

۲۳. (آ) $\rho = 9$ ؛ (ب) $\theta = \frac{1}{4}\pi$ ؛ (پ) $\phi = \frac{1}{4}\pi$.

۲۴. $\rho = 9 \sec \phi$

۲۵. $\rho = 6 \csc \phi$

۲۶. $\rho = 3 \cos \phi$

۲۷. $\rho = 2 \tan \theta$

۲۸. $\rho = 6 \sin \phi \sin \theta + 3 \cos \phi$

۲۹. منحنی C در R^3 دارای معادلات پارامتری زیر در مختصات استوانه‌ای است:

$$r = F_1(t) \qquad \theta = F_2(t) \qquad z = F_3(t)$$

با استفاده از فرمول (۴) در بخش ۹۰۱۷ و فرمولهای (۱) در این بخش، ثابت‌کنید هرگاه L طول قوس C از نقطه‌ای که $t = a$ تا نقطه‌ای که $t = b$ باشد، آنگاه

$$L = \int_a^b \sqrt{(D_t r)^2 + r^2 (D_t \theta)^2 + (D_t z)^2}\, dt$$

۳۰. منحنی C در R^3 به معادلات پارامتری زیر در مختصات کروی است:

$$\rho = G_1(t) \qquad \theta = G_2(t) \qquad \phi = G_3(t)$$

با استفاده از فرمول (۴) در بخش ۹۰۱۷ و فرمولهای (۳) در این بخش، ثابت کنید هرگاه L طول قوس C از نقطه‌ای که $t = a$ تا نقطه‌ای که $t = b$ باشد، آنگاه

$$L = \int_a^b \sqrt{(D_t \rho)^2 + \rho^2 \sin^2 \phi (D_t \theta)^2 + \rho^2 (D_t \phi)^2}\, dt$$

۳۱. (آ) نشان دهید که معادلات پارامتری مارپیچ مستدیر مثال ۱ در بخش ۹۰۱۷ عبارتند از

$$r = a \qquad \theta = t \qquad z = t$$

(ب) با استفاده از فرمول تمرین ۲۹، طول قوس مارپیچ مستدیر قسمت (آ) را از $t = 0$ تا $t = 2\pi$ بیابید. نتیجه را با مثال ۱ در بخش ۹۰۱۷ مقایسه کنید.

۳۲. یک **مارپیچ مخروطی** حول یک مخروط به طریقی شبیه چرخش مارپیچ مستدیر حول یک استوانه می‌چرخد. با استفاده از فرمول تمرین ۳۰، طول قوس مارپیچ مخروطی به معادلات پارامتری

$$\rho = t \qquad \theta = t \qquad \phi = \frac{1}{4}\pi$$

از $t = 0$ تا $t = 2\pi$ را بیابید.

تمرینات دوره‌ای برای فصل ۱۷

۱. نمودار $x = 3$ در R^1 ، R^2 ، و R^3 را رسم کنید.

۲. مجموعهٔ نقاط صادق در معادلات همزمان $x = 6$ و $y = 3$ در R^2 و R^3 را رسم کنید.

در تمرینهای ۳ تا ۱۱، مجموعهٔ نقاطی در R^3 که در معادلهٔ داده شده یا جفت معادلات داده شده صدق می‌کنند را توصیف کرده، و نمودار را رسم نمایید.

۳. $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

۴. $\begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases}$

۵. $\begin{cases} x^2 + z^2 = 4 \\ y = 0 \end{cases}$

۶. $y^2 - z^2 = 0$

۷. $x = y$

۸. $x^2 + z^2 = 4$

۹. $x^2 + y^2 = 9z$

۱۰. $x^2 + y^2 = z^2$

۱۱. $x^2 - y^2 = z^2$

در تمرینهای ۱۲ تا ۱۷، فرض کنید $\mathbf{A} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ ، $\mathbf{B} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ ، $\mathbf{C} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ ، $\mathbf{D} = 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$ ، $\mathbf{E} = 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ ، و بردار یا اسکالر داده شده را بیابید.

۱۲. $3\mathbf{A} - 2\mathbf{B} + \mathbf{C}$

۱۳. $6\mathbf{C} + 4\mathbf{D} - \mathbf{E}$

۱۴. $2\mathbf{B} \cdot \mathbf{C} + 3\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}$

۱۵. $\mathbf{D} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C}$

۱۶. $(\mathbf{A} \times \mathbf{C}) - (\mathbf{D} \times \mathbf{E})$

۱۷. $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}||\mathbf{D} \times \mathbf{E}|$

در تمرینهای ۱۸ تا ۲۳، فقط به یک طریق می‌توان با درج پرانتز عبارت با معنی بدست آورد. پرانتزها را گذاشته و بردار یا اسکالر ذکرشده را درصورتی بیابید که $\mathbf{A} = \langle 3, -2, 4 \rangle$ ، $\mathbf{B} = \langle -5, 7, 2 \rangle$ ، $\mathbf{C} = \langle 4, 6, -1 \rangle$.

۱۸. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}\mathbf{C}$

۱۹. $\mathbf{A}\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$

۲۰. $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{C}$

۲۱. $\mathbf{A} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$

۲۲. $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \times \mathbf{A}$

۲۳. $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{B} - \mathbf{C}$

۲۴. هرگاه $\mathbf{A}$ یک بردار باشد، ثابت کنید $\mathbf{A} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{i})\mathbf{i} + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{j})\mathbf{j} + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{k})\mathbf{k}$.

۲۵. خطی از نقطهٔ $(-3, 5, 1)$ عمود بر صفحهٔ xz رسم شده است. مختصات نقاط واقع بر این خط در فاصلهٔ 13 واحد از $(-2, 0, 0)$ را بیابید.

۲۶. معادلهٔ کره‌ای را بیابید که پاره‌خط به نقاط انتهایی $(3, 5, -4)$ و $(-1, 7, 4)$ قطرش باشد.

۲۷. معادلهٔ کرهٔ متحدالمرکز با کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 2y - 6z + 10 = 0$ و شامل نقطهٔ $(-4, 2, 5)$ را پیدا کنید.

۲۸. ثابت کنید نقاط $(4, 1, -1)$ ، $(2, 0, 1)$ ، و $(4, 3, 0)$ رئوس یک مثلث قائم‌الزاویه‌اند، و

مساحت مثلث را پیدا کنید .

۲۹ . منحنی مولد و محور سطح دوار به معادلهٔ $x^2 + z^2 = e^{4y}$ را پیدا کنید .

۳۰ . معادلهٔ سطح حاصل از دوران بیضی $9x^2 + 4z^2 = 36$ در صفحهٔ xz حول محور x را بیابید ، و سطح را رسم نمایید .

۳۱ . c را طوری تعیین کنید که بردارهای $3\mathbf{i} + c\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ و $5\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$ متعامد باشند .

۳۲ . نشان دهید که نمایشهایی از سه بردار $\mathbf{A} = 5\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ ، $\mathbf{B} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ ، و $\mathbf{C} = -4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ یک مثلث تشکیل می‌دهند .

۳۳ . نقاط $A(5, 9, -3)$ و $B(-2, 4, -5)$ داده شده‌اند . (آ) کسینوسهای هادی $\mathbf{V}(\overrightarrow{AB})$ و (ب) بردار یکهٔ همجهت $\mathbf{V}(\overrightarrow{AB})$ را پیدا کنید .

۳۴ . هرگاه $\mathbf{A} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ ، $\mathbf{B} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ ، $\mathbf{C} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ ، و $\mathbf{D} = 5\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$ ، اسکالرهای a ، b ، و c را طوری بیابید که $a\mathbf{A} + b\mathbf{B} + c\mathbf{C} = \mathbf{D}$.

۳۵ . هرگاه $\mathbf{A} = \langle 7, -1, 5 \rangle$ و $\mathbf{B} = \langle -2, 3, 1 \rangle$ ، (آ) مولفهٔ $\mathbf{B}$ در جهت $\mathbf{A}$ و (ب) تصویر برداری $\mathbf{B}$ روی $\mathbf{A}$ را پیدا کنید .

۳۶ . معادلهٔ صفحهٔ شامل نقاط $(1, 7, -3)$ و $(3, 1, 2)$ و غیر متقاطع با محور x را بیابید .

۳۷ . معادلهٔ صفحهٔ ماربر سه نقطهٔ $(-1, 2, 1)$ ، $(1, 4, 0)$ ، و $(1, -1, 3)$ را به دو روش بیابید : (آ) با استفاده از حاصل‌ضرب خارجی ؛ (ب) بدون استفاده از حاصل ضرب خارجی .

۳۸ . معادلهٔ صفحهٔ شامل نقطهٔ $(7, -2, -5)$ و عمود بر خط ماربر نقاط $(-3, 0, 4)$ و $(3, 2, 1)$ را بیابید .

۳۹ . فاصلهٔ مبداء تا صفحهٔ ماربر نقطهٔ $(-6, 3, -2)$ به بردار قائم $5\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ را پیدا کنید .

۴۰ . دو بردار یکهٔ عمود بر $\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ را بیابید که نمایشهای آنها موازی صفحهٔ yz باشند .

۴۱ . فاصلهٔ نقطهٔ $P(4, 6, -4)$ تا خط ماربر دو نقطهٔ $A(2, 2, 1)$ و $B(4, 3, -1)$ را پیدا کنید .

۴۲ . فاصلهٔ صفحهٔ $9x - 2y + 6z + 44 = 0$ تا نقطهٔ $(-3, 2, 0)$ را پیدا کنید .

۴۳ . هرگاه θ زاویهٔ بین بردارهای $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ و $\mathbf{B} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ به رادیان باشد ، $\cos\theta$ را به دو طریق بیابید : (آ) با استفاده از حاصل ضرب نقطه‌ای ؛ (ب) با استفاده از حاصل‌ضرب خارجی و یک اتحاد مثلثاتی .

۴۴ . ثابت کنید خطوط

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-5}{3} = \frac{z-5}{1} \quad \text{و} \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-2}{2}$$

متنافرند و فاصلهٔ بین آنها را بیابید .

۴۵ . معادلات متقارن و پارامتری خط ماربر مبداء و عمود بر خطوط تمرین ۴۲ را بیابید .

۴۶ . معادلات متقارن و پارامتری خط ماربر دو نقطهٔ $(-3, 5, 2)$ و $(4, -3, -1)$ را پیدا کنید .

۴۷ . نشان دهید که خطوط

$$\frac{x+1}{-6} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{-8} \quad \text{و} \quad \frac{x-2}{3} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-5}{4}$$

برهم منطبق‌اند .

۴۸ . معادلهٔ صفحهٔ شامل خط $\frac{1}{2}(x-3) = -(y+5) = -\frac{1}{3}(z+2)$ و نقطهٔ $(5, 0, -4)$ را بیابید .

۴۹ . مساحت مقطع عرضی بیضی‌گون $x^2/4 + y^2/9 + z^2/25 = 1$ در صفحهٔ $z = 4$ را پیدا کنید .

۵۰ . مساحت متوازی‌الاضلاعی را بیابید که دو ضلع آن نمایشهای موضعی بردارهای $2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ و $5\mathbf{i} + 4\mathbf{k}$ می‌باشند .

۵۱ . حجم متوازی‌السطوح به رئوس $(1, 3, 0)$ ، $(2, -1, 3)$ ، $(-2, 2, -1)$ ، و $(-1, 1, 2)$ را پیدا کنید .

۵۲ . طول قوس منحنی

$$x = t\cos t \qquad y = t\sin t \qquad z = t$$

از $t = 0$ تا $t = \frac{1}{2}\pi$ را پیدا کنید .

۵۳ . طول قوس منحنی $\mathbf{R}(t) = (2-3t)\mathbf{i} + (4t-1)\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$ از $t = 0$ تا $t = \frac{5}{2}$ را پیدا کنید .

۵۴ . ذره‌ای، در امتداد یک منحنی به معادلات پارامتری

$$x = \ln(t^2+1) \qquad y = t^2 + 1 \qquad z = \tan^{-1} t$$

در حرکت است . بردار سرعت ، بردار شتاب ، و مقدار سرعت ذره $t = 0$ را بیابید .

۵۵ . ذره‌ای در امتداد منحنی تمرین ۵۲ در حرکت است . بردار سرعت ، بردار شتاب ، و مقدار سرعت در $t = \frac{1}{2}\pi$ را بیابید . بخشی از منحنی در $t = \frac{1}{2}\pi$ ، و نیز نمایشهای بردارهای سرعت و شتاب در آنجا را رسم کنید .

۵۶ . بردار یکهٔ مماس و انحنای منحنی به معادلهٔ برداری $\mathbf{R}(t) = e^t\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$ را

در یک نقطه بیابید .

۵۷ . سوجهی حرکت منحنی $\mathbf{R}(t) = 3\sin 2t\mathbf{i} - 4t\mathbf{j} - 3\cos 2t\mathbf{k}$ در نقطه‌ای که $t = \frac{1}{2}\pi$ را بیابید .

۵۸ . مختصات کروی نقطه به مختصات دکارتی $(-3, \sqrt{3}, 2)$ را پیدا کنید .

۵۹ . مختصات استوانه‌ای نقطه به مختصات کروی $(3, \pi, \frac{1}{3}\pi)$ را بیابید .

۶۰ . معادلهٔ نمودار هریک از معادلات زیر را در مختصات کروی بیابید :

(آ) $x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$ ؛ (ب) $4x^2 - 4y^2 + 9z^2 = 36$

۶۱ . معادلهٔ نمودار هریک از معادلات زیر را در مختصات استوانه‌ای بیابید :

(آ) $(x + y)^2 + 1 = z$ ؛ (ب) $25x^2 + 4y^2 = 100$.

۶۲ . هرگاه $\mathbf{R}$ ، $\mathbf{Q}$ ، و $\mathbf{W}$ سه تابع برداری باشند که مشتقشان نسبت به t وجود دارد، ثابت کنید

$$D_t[\mathbf{R}(t)\cdot\mathbf{Q}(t) \times \mathbf{W}(t)] = D_t\mathbf{R}(t)\cdot\mathbf{Q}(t) \times \mathbf{W}(t) + \mathbf{R}(t)\cdot D_t\mathbf{Q}(t) \times \mathbf{W}(t) + \mathbf{R}(t)\cdot\mathbf{Q}(t) \times D_t\mathbf{W}(t)$$