# فصل اول: منطق گزاره ها و محمولات

## برنامه هیلبرت در مبانی ریاضی

۱- احکام و قضایای ریاضیات را به صورت دنباله هایی متناهی از نمادها نمایش دهید.

۲- با روشهای مقدماتی ثابت کنید تناقضی از روشهای فوق حاصل نمی شود. (اثبات سازگاری ریاضیات با روشهای مقدماتی)

## انگیزه های طرح برنامه هیلبرت

۱- شهودی، مبهم و غیرقابل کنترل بودن برخی از اثبات های ریاضی که بعضاً نتایجی غلط اثبات می شد.

۲- بروز برخی از پارادوکس ها و پیچیدگی توضیح آنها.

۳- کشف نظریه ی مجموعه ها توسط کانتور و غیرمتعارف بودن روشهای آن برای اکثر ریاضیدان های آن زمان که به نظر آنها این نظریه بیشتر شبیه به الهیات بود تا ریاضیات. روشهای این نظریه بسیار انتزاعی بودند و به نسبت روشهای ملموس ریاضی در آن زمان غیرقابل پذیرش به نظر می رسیدند.

در واقع برنامه هیلبرت در جهت توجیه روشهای غیرمتعارف و بیش از اندازه انتزاعی و قوی نظریه مجموعه ها بر اساس روشهای ملموس و مقدماتی ریاضیات آن زمان بود. هیلبرت از نظریه ی مجموعه ها به عنوان بهشت کانتور یاد می کرد و علاقمند بود ریاضیات را در قالب نظریه ی مجموعه ها مورد مطالعه قرار دهد و در عین حال، با حساسیت و آلرژی بسیار بالای ریاضیدان های سرشناس آن زمان نیز کنار آید. این برنامه در جهت فوق بود. همچنین پارادوکس هایی که در نظریه مجموعه ها و در بخش های دیگر ریاضیات رخ داده بود ضرورت صورت بندی و مطالعه دقیق و نمادین آنها را ایجاب می کرد. مکتب هیلبرت به علت استفاده از نمادها در صورت بندی به مکتب صورت گرایی یا فرمالیسم و به علت متناهی بودن دنباله های مورد استفاده به مکتب متناهی گرایی معروف است. در سال ۱۹۲۸ هیلبرت و آکرمان کتابی به نام مبانی ریاضیات نوشتند و در جهت انجام قسمت اول برنامه، یک دستگاه منطقی و اصل موضوعی معرفی کردند. تمامیت دستگاه فوق یعنی کافی بودن آن برای اثبات تمام احکام درست را به عنوان یک مسأله ی باز اعلام کردند. گودل در سال ۱۹۳۰ در پایان نامه دکترای خویش کامل بودن آن را اثبات کرد و در سال ۱۹۳۱ گودل بخش دوم برنامه را با اثبات قضیه ناتمامیت به چالش کشید. بنابر این قضیه، سازگاری دستگاه های ریاضی مانند نظریه مجموعه ها، که حداقل به اندازه ی حساب قوی می باشند حتی با استفاده از روشهایی به قدرت روشهای خود آنها، قابل اثبات نیستند، چه رسد به روشهای ضعیف و مقدماتی. در سال ۱۹۳۴ گنتزن، دانشجوی دکترای هیلبرت در بیست سالگی در پایان نامه خود با ارائه دستگاه های منطقی، به نام حساب رشته ها و دستگاه استنتاج طبیعی، با روشهایی که بر اساس ذائقه ی ریاضیدان های آن زمان، مقدماتی به حساب می آمد توانست سازگاری حساب را ثابت کند در حالیکه

بر اساس قضیه ی گودل، این امر غیرممکن است (حتی بر اساس روشهای قوی تر نیز ممکن نیست). رفع سردرگمی حاصل، مدتی زمان برد و توضیح آن نیازمند اطلاعات فنی است.

در ادامه چند پارادوکس را معرفی می کنیم:

قضیه۱. هر حکمی مانند $A$ درست است.

اثبات. $B$ را گزاره ی روبرو در نظر بگیرید؛ «اگر این گزاره ها درست باشد آنگاه $A$ درست است». پس $B$ به معنای $B \longrightarrow A$ می باشد.

گام اول: $B$ درست است. گام دوم: $A$ درست است.

اثبات گام اول؛ برای اثبات $B$ چون $B$ یک گزاره شرطی $B \longrightarrow A$ است، $B$ را فرض گرفته و $A$ را ثابت می کنیم.

| | |
|---|---|
| فرض | 1) $B$ |
| همان ۱ | 2) $B \longrightarrow A$ |
| بنابر ۱ و ۲ | 3) $A$ |

اثبات گام دوم:

| | |
|---|---|
| بنابر گام۱ | 1) $B$ |
| همان۱ | 2) $B \longrightarrow A$ |
| بنابر ۱ و ۲ | 3) $A$ |

■

توجه کنید که اثبات دو گام شبیه به یکدیگر است ولی دلایل آنها متفاوت است و نامناسب بودن زبان مورد استفاده در صورت بندی $B$ به صورت $B \longrightarrow A$.

اشکال اثبات فوق در خود ارجاع بودن گزاره $B$ می باشد؛ می توان در ریاضیات از گزاره هایی که به خود ارجاع می دهد مانند گزاره های فوق، همچنین گزاره های سوالی، امری، تعجبی، الزامی (شامل شاید، باید، ممکن است) و... پرهیز کرد.

گزاره های؛ «علی: حسن راست می گوید.» و «حسن: علی دروغ می گوید.» گزاره های خود ارجاع می باشند و در ریاضیات قابل پرهیزند، از درستی یا نادرستی این گزاره ها به نقض درستی یا نادرستی آنها می رسیم.

در زیر چند عدد با توصیف های کمتر از ۲۰۰ حرف در زبان فارسی آمده است:

$2 =$ دو $=$ یک بعلاوه ی یک $=$ سه منهای یک $=$ اولین عدد اول $= \cdots$

$3 =$ سه $=$ یک بعلاوه ی دو $=$ چهار منهای یک $=$ دومین عدد اول $=$ دومین عدد فرد $= \cdots$

مجموعه ی $A$ را به صورت زیر تعریف کنید:

$A = \{n \in \mathbb{N} |$ را می توان با کمتر از $200$ حرف فارسی و انگلیسی توصیف کرد $n\}$

مثلاً داریم: $2,3,10^{100},10^{1000},\ldots \in A$

چون تعداد «حداکثر ۲۰۰ حرفی ها با حروف انگلیسی و فارسی» متناهی اند و فقط بخشی از آنها معنی دار بوده و از آنها نیز فقط بخشی، یک عدد را توصیف می کند، مثلاً

| | | |
|---|---|---|
| دDب T | ۴ حرفی بی معنی | |
| گرگ | ۳ حرفی معنی دار (غیرعددی) | |
| دو | ۲حرفی عددی | |

پس $A$ متناهی است و بنابراین $\mathbb{N} - A \neq \emptyset$.

بنابر اصل خوش ترتیبی $\mathbb{N} - A$ دارای کوچکترین عضو است مانند $n_0$ پس $n_0 = \min(\mathbb{N} - A)$ و بنابراین $n_0 \notin A$ و «$n_0 =$ اولین عددی که نمی توان آنرا با کمتر از ۲۰۰ حرف فارسی و انگلیسی توصیف کرد» که یک توصیف برای $n_0$ با کمتر از ۲۰۰ حرف می باشد پس $n_0 \in A$ که تناقض است، این تناقض به علت به کار رفتن کلمه ی توصیف در تعریف اعضای $A$ و به حساب آوردن توصیف $n_0$ در بالا به عنوان یک توصیف و خود ارجاع بودن رخ داده است. با پرهیز از موارد خود ارجاعی در ریاضیات، پارادوکس های فوق رخ نمی دهند.

## تولد منطق ریاضی

منطق ریاضی براساس برنامه ی هیلبرت و البته قبلاً کارهای فرگه شکل گرفت و معمولاً دارای بخش های زیر است:

۱- نحو (syntax) : نحوه ی صورت بندی گزاره ها توسط دنباله های متناهی از نمادها.

۲- معنا (semantics) : صدق و کذب گزاره ها در رویکردها و ساختارهای مختلف.

۳- استنتاج (deduction) : روشی برای استنتاج احکام درست.

۴- آلگوریتم ها: تعین صدق و کذب و به طریق ماشینی و نرم افزاری موارد فوق مخصوصاً اثبات یا رد ماشین احکام.

گزاره های خوش ساخت (نماد: wf)[1] به صورت زیر ساخته می شوند:

۱- $P_0, P_1, \ldots$ که آنها را گزاره های اتمی گوییم، wf هستند.

۲- اگر $A$ و $B$ دو wf باشند آنگاه $(A \wedge B)$ و $(A \vee B)$ و $(A \rightarrow B)$ و $(A \leftrightarrow B)$ و $(\neg A)$ نیز wf هستند.

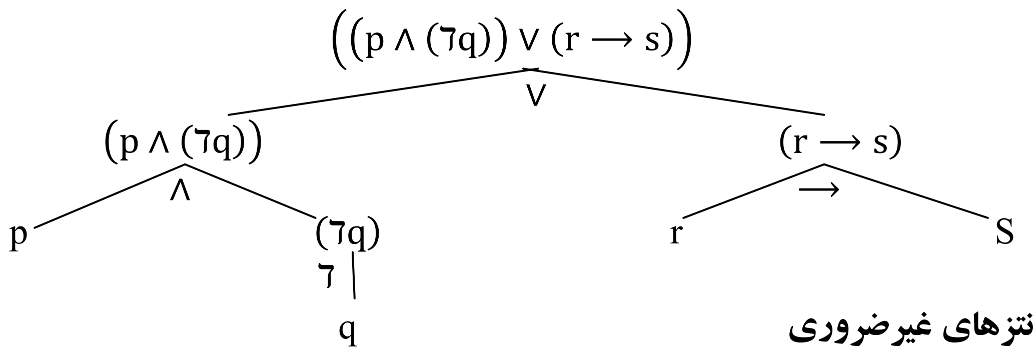
توضیح: در این نحو منطق گزاره ها، گزاره های سوالی، تعجبی، امری، خود ارجاع و... صورت بندی نمی شوند و

---

۱- مخفف well formed formula

بسیاری از پارادوکس ها رخ نمی دهد. بدین منظور در قسمت نحو گزاره ها، محدودیت هایی برای ساخت گزاره ها در نظر می گیریم و فقط صورت های ذکر شده را به عنوان گزاره می پذیریم. همچنین می توان روند تشکیل یک wf را با شروع از اتم ها و ترکیب آنها با روابط منطقی $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ به صورت یک درخت به نام درخت ساخت فرمول نشان داد، در برگ های این درخت اتم های سازنده قرار دارند.

مثال۱. $\Big(\big(p \wedge (\neg q)\big) \vee (r \longrightarrow s)\Big)$ یک wf با درخت ساخت زیر می باشد:




**حذف پرانتزهای غیرضروری**

برای پرهیز از پرانتزهای غیرضروری می توان برای روابط منطقی، قدرت چسبندگی در نظر گرفت. قدرت چسبندگی بصورت روبرو است: $\neg > \wedge,\vee > \rightarrow > \leftrightarrow$

مثال۲. $\neg p \wedge q \longrightarrow r \vee s$ یک wf نیست ولی می توان آن را خلاصه نویسی wf زیر در نظر گرفت؛

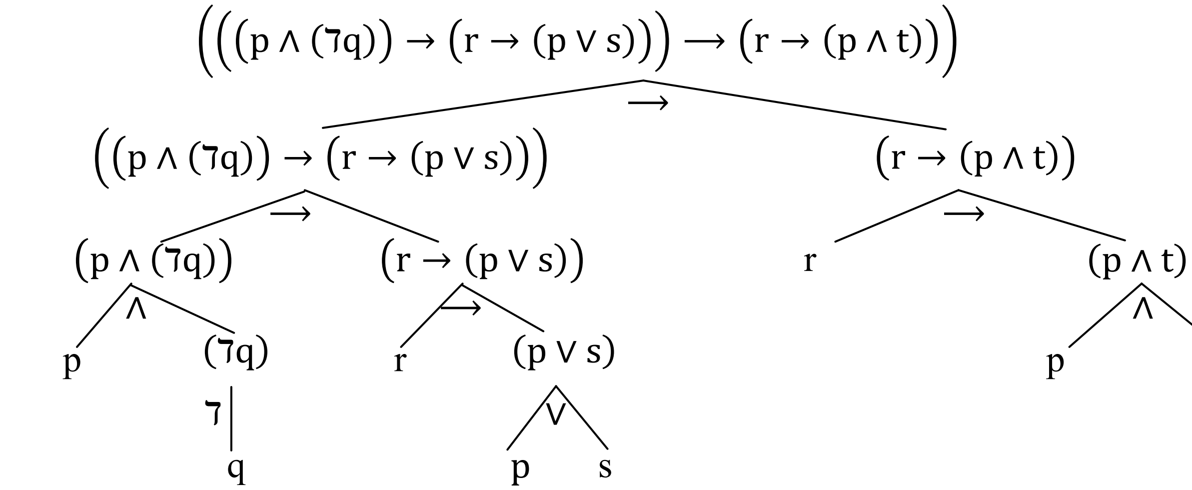
$$\Big(\big((\neg p) \wedge q\big) \longrightarrow (r \vee s)\Big)$$

در بالا p بین دو رابط $\neg,\wedge$ قرار داد که بنابر قدرت چسبندگی، به $\neg$ می چسبد و $(\neg p)$ را تشکیل می دهد. q بین دو رابط $\wedge, \longrightarrow$ قرار داد که به $\wedge$ می چسبد و $\big((\neg p) \wedge q\big)$ را تشکیل می دهد. r بین دو رابط $\vee, \longrightarrow$ قرار داد که به $\vee$ می چسبد و $(r \vee s)$ را تشکیل می دهد.

مثال۳. درخت ساخت wf زیر را رسم و آن را حذف پرانتز کنید.

$$\Big(\Big(\big(p \wedge (\neg q)\big) \rightarrow \big(r \rightarrow (p \vee s)\big)\Big) \longrightarrow \big(r \rightarrow (p \wedge t)\big)\Big)$$

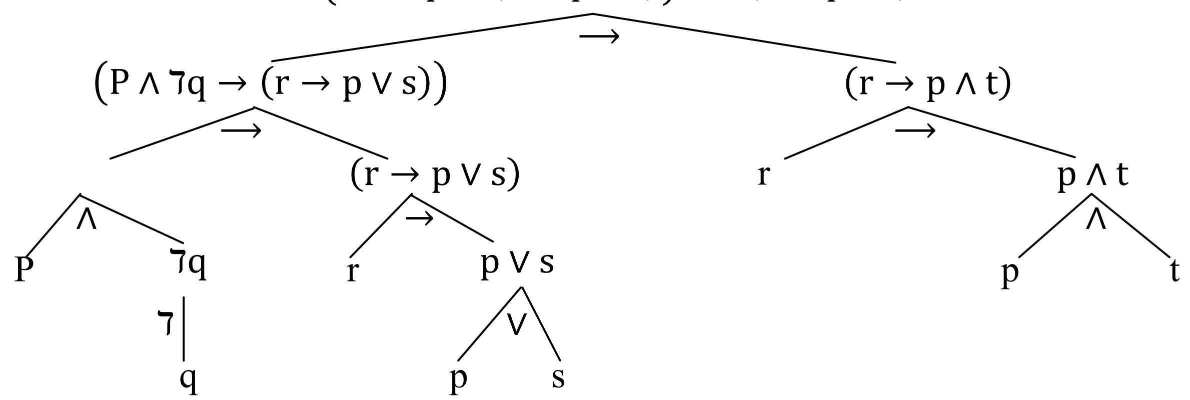
حل.



اگر فرمولی در یک راس از درخت فوق بین دو روابط منطقی از $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ قرار گرفته و رابط بالایی ضعیف تر از رابط پایینی باشد، پرانتز فرمول را در آن راس و بالای آن حذف می کنیم. مثلاً $(p \wedge t)$ در بالا بین $\wedge, \rightarrow$ قرار گرفته و قدرت $\rightarrow$ کمتر از $\wedge$ است پس پرانتز را حذف کرده و آنرا به صورت $p \wedge t$ می نویسیم. پس درخت زیر حاصل می شود:

$$A \equiv \big(p \wedge \neg q \rightarrow (r \rightarrow p \vee s)\big) \rightarrow (r \rightarrow p \wedge t)$$

حل. $\big(P \wedge \neg q \rightarrow (r \rightarrow p \vee s)\big) \longrightarrow (r \rightarrow p \wedge t)$




**معنا شناسی (صدق و کذب گزاره ها)**

یک رویکرد بسیار متداول برای تعیین صدق و کذب گزاره ها، رویکرد جدول ارزش است. در این رویکرد، مستقل از محتوا و ارتباط گزاره ها با یکدیگر، ارزش یک گزاره به صورت تابعی از ارزش اتمهای سازنده ی آن برحسب روابط منطقی سازنده ی گزاره به صورت زیر تعیین می شود.

| $A$ | $B$ | $\neg A$ | $A \wedge B$ | $A \vee B$ | $A \rightarrow B$ | $A \leftrightarrow B$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |

## توتولوژی

$A$ را توتولوژی یا همانگویی گوییم هرگاه ارزش $A$ در تمام سطرهای جدول ارزشی برابر یک باشد، که هر سطر جدول بر اساس یک ارزش دهی یک و صفر به اتمهای موجود در $A$ حاصل می شود.

مثال۴.

| A | B | $(A \wedge B) \to B$ | $A \to (A \vee B)$ | $\neg\neg A$ | $\neg A \longrightarrow (A \to B)$ | $A \to (A \wedge B)$ | $(A \wedge B) \to (A \vee B)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |

تعریف۱. اگر $\Gamma$ مجموعه ای از گزاره ها باشد، $\Gamma \vDash A$ به معنای درستی $A$ در هر سطری است که تمام فرمول های $\Gamma$ در آن سطر درستند. اگر $\Gamma = \phi$ ، آنرا به صورت $\vDash A$ نمایش داده و به معنای درستی $A$ در تمام سطرها، یا به عبارت دیگر توتولوژی بودن $A$ است.

مثال۵. $A, A \to B \vDash B$

حل. $A$ در سطرهای ۱ و ۲ و $B \to A$ در سطرهای ۱ و ۳ و ۴ درستند. پس بطور مشترک هر دو در سطر ۱ درستند که در این سطر $B$ نیز درست است.

مثال۶. $A \to B \vDash A \to (A \wedge B)$

حل. با نگاه به جدول ارزش، هر دو فرمول دقیقاً در سطرهای ۱ و ۳ و ۴ درستند.

تمرین۱. توتولوژی بودن گزاره های زیر را تحقیق کنید.

1. $(A \to B) \longrightarrow \big((B \to C) \to (A \to C)\big)$
2. $\big(A \to (B \to C)\big) \longrightarrow \big((A \to B) \to (A \to C)\big)$
3. $(\neg A \to \neg B) \longrightarrow \Big(\big(\neg A \to B\big) \to A\Big)$
4. $\big(\neg A \to B\big) \longrightarrow \big((A \to B) \to B\big)$
5. $(A \to C) \longrightarrow \big((B \to C) \to (A \vee B \to C)\big)$
6. $\big(\neg B \to \neg A\big) \longrightarrow (A \to B)$
7. $\big(A \to \neg B\big) \longrightarrow \Big((A \to B) \to \neg A\Big)$
8. $B \longrightarrow (A \to B)$
9. $\neg A \longrightarrow (A \to B)$
10. $(A \wedge B \to C) \leftrightarrow \big(A \to (B \to C)\big)$
11. $(A \to B) \leftrightarrow \big(\neg A \vee B\big)$
12. $\neg(A \vee B) \leftrightarrow \big(\neg A \wedge \neg B\big)$
13. $\neg(A \wedge B) \leftrightarrow \big(\neg A \vee \neg B\big)$

تمرین۲. تحقیق کنید کدامیک از روابط زیر برقرارند.

1. $A \to (B \to C), B \vDash A \to C$
2. $A \to (B \to C) \vDash A \vee B \to C$

### استنتاج

در بخش های قبل نحوه ی ساخت گزاره ها و درستی یا نادرستی آنها بررسی شد. برای بدست آوردن گزاره های درست از فرضیات، می توان از دستگاه های استنتاجی مختلفی استفاده کرد. تعدادی از این دستگاه ها معرفی شده و روش استفاده از آنها را با چند مثال نشان می دهیم.

### دستگاه استنتاج طبیعی

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots & & \vdots\\ A & & B\end{matrix}}{A \wedge B}\ I\wedge \qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ A \wedge B\end{matrix}}{A}\ E\wedge \qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ A \wedge B\end{matrix}}{B}\ E\wedge$$

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ A\end{matrix}}{A \vee B}\ I\vee \qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ B\end{matrix}}{A \vee B}\ I\vee \qquad \dfrac{\begin{matrix} & [A] & [B]\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ A \vee B & C & C\end{matrix}}{C}\ E\vee$$

$$\dfrac{\begin{matrix}[A]\\ \vdots\\ B\end{matrix}}{A \longrightarrow B}\ I\to \qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots & & \vdots\\ A \longrightarrow B & & A\end{matrix}}{B}\ E\to \qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \bot\end{matrix}}{A}\ \bot$$

$$\dfrac{\begin{matrix}[A]\\ \vdots\\ \bot\end{matrix}}{\neg A}\ I\neg \qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots & & \vdots\\ A & & \neg A\end{matrix}}{\bot}\ E\neg \qquad \dfrac{\begin{matrix}[\neg A]\\ \vdots\\ \bot\end{matrix}}{A}\ \text{برهان خلف}$$

### درخت استنتاج

برای اثبات یک گزاره، درختی به نام درخت استنتاج تشکیل می دهیم که گزاره مورد نظر در ریشه ی درخت و فرضیات و فرضیات کمکی در برگهای درخت، قرار گرفته و با استفاده از قواعد فوق، فرمول ها در رئوس درخت به یکدیگر مرتبط می شوند.

### لیست اثبات

لیستی از فرمول هاست که در آن هر فرمول، یا یک فرض یا فرض کمکی است یا با استفاده از قواعد فوق از فرمول های قبلی به دست می آید.

### اثبات متنی

این نوع اثبات نویسی بیشتر شبیه اثبات های نوشته شده در متون متداول ریاضی است. با مشخص نمودن فرضیات و احکام اثبات و ساده کردن آنها اثبات انجام می شود. مثلاً اگر در حکم، شرط $A \longrightarrow B$ را داشته باشیم، مقدم آن یعنی $A$ را به فرضیات اضافه کرده و تالی آن یعنی $B$ را به عنوان حکم اثبات می کنیم. همچنین اگر در فرض $A \vee B$ داشته باشیم، حکم را یک بار با فرض $A$ و یک بار با فرض $B$ اثبات می کنیم. تغییرات دیگر به طور مشابه بر اساس قواعد ذکر شده در حساب استنتاج طبیعی صورت می گیرد.

### فرض کمکی

در برخی از قواعد مانند $I\neg$ و $I\rightarrow$ و $E\vee$ و برهان خلف، برای اثبات حکم (گزاره پایین خط استنتاج) از گزاره هایی که در بین [] قرار گرفته به نام فرض کمکی در برگهای درخت استنتاج استفاده می شود. مثلاً در $I\rightarrow$ برای اثبات $A \longrightarrow B$ از گزاره $A$ به عنوان فرض کمکی استفاده شده و $B$ را اثبات می کنیم. در $E\vee$ برای اثبات حکم $C$ با فرض $A \vee B$ ، حکم را یک بار با فرض کمکی$A$ ویک بار با فرض کمکی$B$ اثبات می کنیم. در $I\neg$ برای اثبات $\neg A$ با فرض کمکی $A$ به تناقض $\perp$ می رسیم.

مثال۷.

1. $\vdash A \longrightarrow A \vee B$
2. $\vdash A \wedge B \longrightarrow A$
3. $\vdash A \longrightarrow \big(B \rightarrow (A \wedge B)\big)$
4. $\vdash (A \rightarrow B) \longrightarrow \big((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)\big)$
5. $\vdash (A \rightarrow C) \longrightarrow \big((B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C)\big)$
6. $\vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \longrightarrow \big(A \wedge (B \vee C)\big)$

حل۱.

اثبات متنی:

۱. فرض: نداریم — حکم: $A \longrightarrow A \vee B$

۲. فرض: $A$ — حکم: $A \vee B$

بنابر $I\vee$ حکم برقرار است.

اثبات لیستی:

| | |
|---|---|
| $1)\ A$ | فرض کمکی |
| $2)\ A \vee B$ | $I\vee$ |
| $3)\ A \longrightarrow A \vee B$ | $I\longrightarrow$ |

اثبات درختی:

$$\dfrac{\dfrac{[A]}{A \vee B}\, I\vee}{A \longrightarrow A \vee B}\, I\longrightarrow$$

توضیح: برای اثبات $A \longrightarrow A \vee B$ مقدم آن یعنی $A$ را در 1 فرض گرفته و تالی آن یعنی $A \vee B$ را در 2 اثبات می کنیم که بنابر $I\vee$ به دست می آید.

حل۲.

اثبات متنی:

۱. فرض: نداریم حکم: $A \wedge B \longrightarrow A$

۲. فرض: $A \wedge B$ حکم: $A$

اثبات لیستی:

| | |
|---|---|
| $1)\ A \wedge B$ | فرض کمکی |
| $2)\ A$ | $E\wedge$ |
| $3)\ A \wedge B \longrightarrow A$ | $I\longrightarrow$ |

اثبات درختی:

$$\dfrac{\dfrac{[A \wedge B]}{A}\, E\wedge}{A \wedge B \longrightarrow A}\, I\longrightarrow$$

توضیح: برای اثبات $A \wedge B \longrightarrow A$ مقدم آن یعنی $A \wedge B$ را در 1 فرض گرفته و تالی آن یعنی $A$ را در 2 اثبات می کنیم که بنابر $E\wedge$ به دست می آید.

حل۳.

اثبات متنی:

۱. فرض: نداریم حکم: $A \longrightarrow \big(B \rightarrow (A \wedge B)\big)$

۲. فرض: $A$ حکم: $B \rightarrow (A \wedge B)$

۳. فرض: $A$ و $B$ حکم: $A \wedge B$

اثبات لیستی:

| | |
|---|---|
| $1)\ A$ | فرض کمکی۱ |
| $2)\ B$ | فرض کمکی۲ |
| $3)\ A \wedge B$ | $I\wedge$ |
| $4)\ B \rightarrow (A \wedge B)$ | $I\longrightarrow$ |
| $5)\ A \longrightarrow \big(B \rightarrow (A \wedge B)\big)$ | $I\longrightarrow$ |

اثبات درختی:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]^1 \qquad [B]^2}{A \wedge B}\, I\wedge}{B \rightarrow (A \wedge B)}\, I{\rightarrow_2}'}{A \longrightarrow \big(B \rightarrow (A \wedge B)\big)}\, I{\rightarrow_1}$$

---

۱- شماره های ذکر شده تناظر بین قواعد و فرضیات کمکی آنها را نشان می دهد.

توضیح: برای اثبات $A \longrightarrow \big(B \to (A \wedge B)\big)$ مقدم آن یعنی $A$ را در $1$ فرض گرفته و تالی آن یعنی $B \to (A \wedge B)$ را در $4$ اثبات می کنیم. برای اثبات $4$ مقدم آن یعنی $B$ را در $2$ فرض گرفته و تالی آن یعنی $A \wedge B$ را در $3$ اثبات می کنیم.

حل۴.

اثبات متنی:

۱. فرض: نداریم — حکم: $(A \to B) \longrightarrow \big((B \to C) \to (A \to C)\big)$

۲. فرض: $A \to B$ — حکم: $(B \to C) \to (A \to C)$

۳. فرض: $A \to B$ و $B \to C$ — حکم: $A \to C$

۴. فرض: $A \to B$ و $B \to C$ و $A$ — حکم: $C$

بنابر $E\!\to$ از $A \to B$ و $A$ می توان $B$ را به دست آورد و با $B \to C$ ، حکم $C$ حاصل می شود.

اثبات لیستی:

| | |
|---|---|
| 1) $A \to B$ | فرض کمکی۱ |
| 2) $B \to C$ | فرض کمکی۲ |
| 3) $A$ | فرض کمکی۳ |
| 4) $B$ | $E\!\to$ و 3 و 1 |
| 5) $C$ | $E\!\to$ و 2 و 4 |
| 6) $A \to C$ | $I\to_3$ |
| 7) $(B \to C) \to (A \to C)$ | $I\to_2$ |
| 8) $(A \to B) \longrightarrow \big((B \to C) \to (A \to C)\big)$ | $I\to_1$ |

اثبات درختی:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[B \to C]^2 \qquad \dfrac{[A]^3 \quad [A \to B]^1}{B}\,E\!\to}{C}\,E\!\to}{A \to C}\,I\!\to_3}{(B \to C) \to (A \to C)}\,I\!\to_2}{(A \to B) \longrightarrow \big((B \to C) \to (A \to C)\big)}\,I\!\to_1$$

توضیح: برای اثبات $8$ مقدم آن یعنی $A \to B$ را در $1$ فرض گرفته و تالی آن یعنی $(B \to C) \to (A \to C)$ را در $7$ اثبات می کنیم. برای اثبات $7$ مقدم آن را در $2$ فرض گرفته و تالی آن یعنی $A \to C$ را در $6$ اثبات می کنیم. مجدداً برای اثبات $6$ مقدم آن یعنی $A$ را در $3$ فرض گرفته و تالی آن یعنی $C$ را در $5$ اثبات می کردیم.

حل۵.

اثبات متنی:

۱. فرض: نداریم — حکم: $(A \to C) \longrightarrow \big((B \to C) \to (A \vee B \to C)\big)$

۲. فرض: $A \to C$ — حکم: $(B \to C) \to (A \vee B \to C)$

۳. فرض: $A \to C$ و $B \to C$ — حکم: $A \vee B \to C$

۴. فرض: $A \to C$ و $B \to C$ و $A \vee B$ حکم: $C$

۵-۱. فرض: $A \to C$ و $B \to C$ و $A$ حکم: $C$

۵-۲. فرض: $A \to C$ و $B \to C$ و $B$ حکم: $C$

برای اثبات حکم $C$ تحت فرض $A \vee B$ باید حکم را در هر دو حالت یعنی چه $A$ درست باشد، چه $B$ درست باشد، ثابت کنیم که بنابر $E\vee$ برقرار است.

اثبات درختی:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \vee B]^3 \qquad \dfrac{[A]^4 \qquad [A \to C]^1}{C}\,E\!\to \qquad \dfrac{[B]^4 \qquad [B \to C]^2}{C}\,E\!\to}{C}\,E\vee_4}{A \vee B \to C}\,I\!\to_3}{(B \to C) \to (A \vee B \to C)}\,I\!\to_2}{(A \to C) \longrightarrow \big((B \to C) \to (A \vee B \to C)\big)}\,I\!\to_1$$

توضیح درخت اثبات فوق و نحوه ی خواندن آن: با حرکت از پائین به بالا برای اثبات حکم، مقدم آن یعنی $A \to C$ را فرض در نظر گرفتیم و تالی یعنی $(B \to C) \to (A \vee B \to C)$ را ثابت کردیم. دوباره مقدم حکم یعنی $B \to C$ را فرض گرفته و تالی یعنی $A \vee B \to C$ را ثابت کردیم. دوباره مقدم حکم یعنی $A \vee B$ را فرض گرفتیم و تالی یعنی $C$ را اثبات کردیم. برای استفاده از فرض $A \vee B$ حکم $C$ را یک بار با فرض $A$ و یک بار با فرض $B$ اثبات کردیم، در هر دو حالت به حکم رسیدیم.

اثبات لیستی:

| | | |
|---|---|---|
| 1) $A$ | فرض کمکی۴ | حالت اول |
| 2) $A \to C$ | فرض کمکی۱ | |
| 3) $C$ | $E\to$ | |
| 4) $B$ | فرض کمکی۴ | حالت دوم |
| 5) $B \to C$ | فرض کمکی۲ | |
| 6) $C$ | $E\to$ | |
| 7) $A \vee B$ | فرض کمکی۳ | |
| 8) $C$ | | $E\vee$ |
| 9) $A \vee B \to C$ | | $I\to$ |
| 10) $(B \to C) \to (A \vee B \to C)$ | | $I\to$ |
| 11) $(A \to C) \longrightarrow \big((B \to C) \to (A \vee B \to C)\big)$ | | $I\to$ |

حل ۶.

اثبات متنی:

۱. فرض: نداریم حکم: $(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \longrightarrow \big(A \wedge (B \vee C)\big)$

۲. فرض: $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ حکم: $A \wedge (B \vee C)$

حالت اول. فرض: $A \wedge B$ حکم: $A \wedge (B \vee C)$

حالت دوم. فرض: $A \wedge C$ حکم: $A \wedge (B \vee C)$

حالت اول. فرض: $A, B$ حکم: $A \wedge (B \vee C)$

از $B$ می توانیم $B \vee C$ را نتیجه بگیریم و بنابر فرض $A$ داریم $A \wedge (B \vee C)$.

حالت دوم. فرض: $A, C$ حکم: $A \wedge (B \vee C)$

از $C$ می توانیم $B \vee C$ را نتیجه بگیریم و بنابر فرض $A$ داریم $A \wedge (B \vee C)$.

اثبات درختی:

$$\dfrac{\dfrac{[(A \wedge B) \vee (A \wedge C)]^1 \qquad \dfrac{\dfrac{[A \wedge B]^2}{A}\,E\wedge \qquad \dfrac{\dfrac{[A \wedge B]^2}{B}\,E\wedge}{B \vee C}\,I\vee}{A \wedge (B \vee C)}\,I\wedge \qquad \dfrac{\dfrac{[A \wedge C]^2}{A}\,E\wedge \qquad \dfrac{\dfrac{[A \wedge C]^2}{C}\,E\wedge}{B \vee C}\,I\vee}{A \wedge (B \vee C)}\,I\wedge}{A \wedge (B \vee C)}\,E\vee_2}{(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \longrightarrow \big(A \wedge (B \vee C)\big)}\,I{\rightarrow}_1$$

اثبات لیستی:

| | |
|---|---|
| 1) $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ | فرض کمکی۱ |
| 2) $A \wedge B$ | فرض کمکی۲ |
| 3) $A$ | $E\wedge$ |
| 4) $B$ | $E\wedge$ |
| 5) $B \vee C$ | $I\vee$ |
| 6) $A \wedge (B \vee C)$ | $I\wedge$ |
| 7) $A \wedge C$ | فرض کمکی۲ |
| 8) $A$ | $E\wedge$ |
| 9) $C$ | $E\wedge$ |
| 10) $B \vee C$ | $I\vee$ |

11) $A \wedge (B \vee C)$ $\quad$ $I\wedge$

12) $A \wedge (B \vee C)$ $\quad$ $E\vee$

13) $(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \longrightarrow \big(A \wedge (B \vee C)\big)$ $\quad$ $I\rightarrow$

تمرین۳. گزاره های زیر را به روش متنی، درختی و لیستی اثبات کنید.

1. $(A \vee B) \wedge (A \vee C) \leftrightarrow \big(A \vee (B \wedge C)\big)$
2. $\big(A \wedge (B \vee C)\big) \longrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
3. $\neg A \wedge \neg B \leftrightarrow \neg(A \vee B)$
4. $\neg A \vee \neg B \leftrightarrow \neg(A \wedge B)$
5. $(\neg A \rightarrow B) \longrightarrow \big((A \rightarrow B) \rightarrow B\big)$

## منطق محمولات

در منطق گزاره ها، هر گزاره به گزاره های اتمی تجزیه شده و ترکیبی از گزاره های اتمی و روابط $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$ است. در منطق محمولات، گزارههای اتمی به اجزای دیگر مانند متغیرها، ثوابت، نمادهای تابعی و محمولی و ترم ها تجزیه شده و گزاره ها ترکیبی از گزاره های اتمی با روابط منطقی $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow, \forall, \exists$ می باشد.

مثال۸ هر انسانی متفکر است، برخی حیوانات انسانند، پس برخی حیوانات متفکرند.

حل. بیان نمادین استنتاج فوق بصورت زیر است:

$H(x)$: x انسان است

$A(x)$: x حیوان است

$R(x)$: x متفکر است

$$\frac{\forall x\big(H(x) \longrightarrow R(x)\big) \qquad \exists x\big(A(x) \wedge H(x)\big)}{\exists x\big(A(x) \wedge R(x)\big)}$$

مثال۹. هر دوست علی، دوست حسن است، محمد دوست حسن نیست، پس محمد دوست علی نیست.

حل. بیان نمادین استنتاج فوق بصورت زیر است:

$D(x, y) \equiv$ x دوست y است

$$\frac{\forall x\left(D\left(x, \text{علی}\right) \longrightarrow D\left(x, \text{حسن}\right)\right) \qquad \neg D\left(\text{محمد}, \text{حسن}\right)}{\neg D\left(\text{محمد}, \text{علی}\right)}$$

مثال۱۰. تالی هر عدد زوج، فرد است. 2 زوج است، پس تالی 2 فرد است.

حل. بیان نمادین استنتاج فوق بصورت زیر است:

$S(x) \equiv x$ تالی

$E(x) \equiv$ x is even

$O(x) \equiv$ x is odd

$$\frac{E(2) \qquad \forall x\big(E(x) \rightarrow O(S(x))\big)}{O(S(2))}$$

مثال ۱۱. Every one who is persistent can learn logic

حل. بیان نمادین استنتاج فوق بصورت زیر است:

P(x): x is persistent

L(x): x can learn logic

H(x): x is human

$$\forall x\Big(\big(H(x) \wedge P(x)\big) \longrightarrow L(x)\Big)$$

مثال ۱۲. هر عزبی معذب است.

حل. بیان نمادین استنتاج فوق بصورت زیر است:

M(x): x is a man

M(x,y): x married to y

U(x): x is unhappy

$$\forall x\Big(\big(M(x) \wedge \forall y\, \neg M(x,y)\big) \longrightarrow U(x)\Big)$$

مثال ۱۳. دیوانه چو دیوانه ببیند خوشش آید.

حل. بیان نمادین استنتاج فوق بصورت زیر است:

M(x): x is a mad

M(x,y): x is meets y

U(x): x is happy

$$\forall x\Big(M(x) \longrightarrow \forall y\,\big(M(y) \wedge M(x,y) \longrightarrow H(x)\big)\Big)$$

## نحو منطق محمولات

۱- متغیرهای فردی $x_0, x_1, x_2, \ldots$

۲- ثوابت فردی $a_0, a_1, a_2, \ldots$

۳- نمادهای تابعی $f_k^n$ برای $n, k \in \mathbb{N}$

۴- نمادهای محمولی $A_k^n$ برای $n, k \in \mathbb{N}$

### ترم Term

۱- متغیرهای فردی و ثوابت فردی ترم هستند.

۲-اگر $t_1, \dots, t_n$ ترم باشند، $f_k^n(t_1, \dots, t_n)$ ترم است.

۳- ترم ها فقط به دو روش ۱ و ۲ ساخته می شوند.

### فرمول های اتمی

اگر $t_1, \dots, t_n$ ترم باشند، $A_k^n(t_1, \dots, t_n)$ یک فرمول اتمی است.

### فرمول های خوش ساخت (نمادwf)

۱- فرمول های اتمی wf هستند.

۲- اگر A و B دو wf باشند آنگاه $(A \wedge B)$ و $(A \vee B)$ و $(A \to B)$ و $(A \leftrightarrow B)$ و $(\neg A)$ و $(\forall x\, A)$ و $(\exists x\, A)$ نیز wf هستند.

۳- فرمول های خوش ساخت فقط به دو روش ۱ و ۲ ساخته می شوند.

### حذف پرانتزهای غیرضروری

برای پرهیز از پرانتزهای غیرضروری می توان برای روابط منطقی قدرت چسبندگی در نظر گرفت. قدرت چسبندگی به این صورت است: $\forall, \exists, \neg > \vee, \wedge > \to > \leftrightarrow$

مثال۱۴. اگر عدد اولی، حاصلضرب دو عدد را بشمارد یکی از آن دو را خواهد شمرد.

حل. با استفاده از قراردادهای زیر خواهیم داشت؛

$A_1^1(x)$ : x اول است

$A_2^2(x, y)$ : x می شمارد y را

$f_2^2(x, y)$ : x. y

$$\left(\forall x_1\left(A_1^1(x_1) \longrightarrow \left(\forall x_2\left(\forall x_3\left(A_2^2\left(x_1, f_2^2(x_2, x_3)\right) \to \left(A_2^2(x_1, x_2) \vee A_2^2(x_1, x_3)\right)\right)\right)\right)\right)\right)$$

با حذف پرانتزهای غیرضروری یا استفاده از نمادهای متداول می توان آن را به صورت های زیر بازنویسی کرد.

$$1)\ \forall x_1\left(A_1^1(x_1) \longrightarrow \forall x_2 \forall x_3\left(A_2^2\left(x_1, f_2^2(x_2, x_3)\right) \to A_2^2(x_1, x_2) \vee A_2^2(x_1, x_3)\right)\right)$$

$$2)\ \forall x_1\left(p(x_1) \longrightarrow \forall x_2 \forall x_3 (x_1 | x_2 x_3 \to x_1 | x_2 \vee x_1 | x_3)\right)$$

مثال۱۵. اگر عددی، دو عدد را بشمارد هر ترکیب خطی از آن دو را خواهد شمرد.

حل. با استفاده از قراردادهای زیر و حذف پرانتزهای غیرضروری خواهیم داشت؛

$x : A_2^2(x,y)$ می شمارد y ارا

$x + y : f_1^2(x,y)$

$x.y : f_2^2(x,y)$

$$\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 \left(A_2^2(x_1,x_2) \wedge A_2^2(x_1,x_3) \longrightarrow \forall x_4 \forall x_5 A_2^2\left(x_1, f_1^2\left(f_2^2(x_4,x_2), f_2^2(x_5,x_3)\right)\right)\right)$$

$$\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 (x_1 | x_2 \wedge x_1 | x_3) \longrightarrow \forall x_4 \forall x_5 (x_1 | x_4.x_2 + x_5.x_3)$$

## حوزه ی سور

بین دو پرانتز در فرمول $(\forall x\ A)$ و $(\exists x\ A)$ را حوزه ی سورهای مذکور گوییم، متغیر $x$ در این حوزه را بسته گوییم اگر $x$ بسته نباشد، آزاد است.

نکته۱. جانشینی یک ترم $t$ به جای متغیر $x$ در یک فرمول، فقط در موارد آزاد صورت گرفته و آن را با $A[t/x]$ نشان می دهیم. اگر پس از جانشینی $t$ به جای $x$ متغیری در $t$ بسته شود، جانشینی را غیرآزاد گوییم.

مثال۱۶. متغیرهای آزاد در فرمول زیر پررنگ نشان داده شده اند.

$$A \equiv \forall x_1 (\exists x_3 \left(A_1^2\left(f_2^2(x_1, x_2), f_1^2(x_1,x_3)\right) \wedge \neg A_2^2\left(x_1, f_2^2(x_1, x_2)\right)\right) \longrightarrow$$
$$\forall x_2 A_1^2\ \left(f_1^2(x_1,x_2), f_2^2(x_2, x_3)\right))$$

$A[f_1^2(x_2,x_3)/x_1] \equiv A$ جانشینی آزاد است

$$A[f_1^2(x_2,x_3)/x_2] \equiv$$
$$\forall x_1 \left( \exists x_3 \left(A_1^2\left(f_2^2\left(x_1, f_1^2(x_2,x_3)\right), f_1^2(x_1,x_3)\right) \wedge \neg A_2^2\left(x_1, f_2^2\left(x_1, f_1^2(x_2,x_3)\right)\right)\right) \longrightarrow \right.$$
$$\left. \forall x_2 A_1^2\ \left(f_1^2(x_1,x_2), f_2^2(x_2,x_3)\right)\right)$$ جانشینی غیرآزاد است

$$A[f_1^2(x_2,x_4)/x_2] \equiv$$
$$\forall x_1 \left( \exists x_3 \left(A_1^2\left(f_2^2\left(x_1, f_1^2(x_2,x_4)\right), f_1^2(x_1,x_3)\right) \wedge \neg A_2^2\left(x_1, f_2^2\left(x_1, f_1^2(x_2,x_4)\right)\right)\right) \longrightarrow \right.$$
$$\left. \forall x_2 A_1^2\ \left(f_1^2(x_1,x_2), f_2^2(x_2,x_3)\right)\right)$$ جانشینی آزاد است

ممکن است که خاصیتی مانند $A(x_1)$ برای همه ی مقادیر درست باشد؛ یعنی $\forall x_1 A(x_1)$ درست باشد ولی برای برخی جانشینی های $t$ به جای $x_1$ درست نباشد.

مثال۱۷.

$A(x_1) \equiv \exists x_2 \quad x_1 < x_2$

$\forall x_1\ A(x_1) \equiv \forall x_1 \exists x_2 \quad x_1 < x_2$ این جمله در اعداد طبیعی درست است.

$A(x_2) \equiv A[x_2/x_1] \equiv \exists x_2 \quad x_2 < x_2$ این جمله در اعداد طبیعی نادرست است.

این جمله در اعداد طبیعی نادرست است. $A(x_2+3) \equiv A[x_2+3/x_1] \equiv \exists x_2 \quad x_2+3<x_2$

این جمله در اعداد طبیعی نادرست است. $A(5x_2+6) \equiv A[5x_2+6/x_1] \equiv \exists x_2 \quad 5x_2+6<x_2$

هر چند تمام اعضای مجموعه اعداد طبیعی دارای خاصیت $A(x_1)$ می باشد، یعنی بزرگتر از آنها عددی دیگر است ولی $5x_2+6$ ، $x_2$ ، $x_2+3$ در این خاصیت صدق نمی کند.

نکته۲. اگر $A(x_1)$ برای هر $x_1$ درست باشد، یعنی $\forall x_1 \ A(x_1)$ ، فقط اگر جانشینی $t$ به جای $x_1$ در $A$ آزاد باشد می توان $A(t)$ را نتیجه گرفت.

تمرین۴. بیان نمادین استنتاجات زیر را بنویسید.

۱- شما قادر به رانندگی عادی نخواهید بود، اگر زیر ۱۸ سال یا معلول باشید.

۲- تمرین زیاد برای نمره ی خوب لازم است(راهنمایی: در قالب شرطی بنویسید.)

۳- استاد تنها روزهایی حضور و غیاب می کند که من غایب هستم.

۴- هر انسان حیوان است. پس اگر انسانی هست حیوانی هست.

۵- هر جن سم دارد. پس اگر جنی باشد سم داری هست.

۶- چیز گرد سبزی هست. پس چیز سبزی هست.

۷- هر نقاش یا حجار صنعتگر است. پس هر حجار صنعتگر است.

۸- هر انسان حیوان است. هر حیوان نامی است. پس هر انسان نامی است.

۹- ماران و سوسماران از خزندگان اند. خزندگان و طیور تخم می گذارند. پس ماران تخم می گذارند.

۱۰- هر جن زرد مو سم دارد. دیروز جن زرد مویی به خانه ی ما آمد. پس جن زرد موی سم داری هست.

۱۱- یا به همه ی مهمان ها خوش گذشته یا بعضی از آنها احساسات حقیقی خود را پنهان کرده اند. هیچ آدم صدیقی احساسات حقیقی خود را پنهان نمی کند. پس اگر همه ی مهمانان مردم صدیقی بوده اند، به همه ی آنها خوش گذشته است.

## قواعد معرفی و حذف سورها در استنتاج طبیعی

$$\frac{\forall x\, A(x)}{A(t)}\ \mathrm{E}\forall \qquad\qquad \frac{A(y)}{\forall x\, A(x)}\ \mathrm{I}\forall$$

$$\frac{\exists x\, A(x) \qquad \begin{matrix}[A(y)]\\ \vdots \\ C\end{matrix}}{C}\ \mathrm{E}\exists \qquad\qquad \frac{A(t)}{\exists x\, A(x)}\ \mathrm{I}\exists$$

توضیح قواعد فوق

$\mathrm{I}\forall$ : برای اثبات $\forall x\, A(x)$ کافیست $A(y)$ را برای متغیر دلخواه[1] $y$ ثابت کنیم.

$\mathrm{E}\forall$: اگر خاصیت $A$ برای هر $x$ درست باشد برای $t$ نیز درست است. (اگر جانشینی $t$ در $A$ آزاد باشد.)

$\mathrm{I}\exists$: برای اثبات $\exists x\, A(x)$ کافیست برای یک ترم $t$ ثابت کنیم. (اگر جانشینی $t$ در $A$ آزاد باشد.)

$\mathrm{E}\exists$: اگر داشته باشیم $\exists x\, A(x)$ و بخواهیم $C$ را ثابت کنیم، می توانیم فرض کنیم مثلاً $y$ دارای خاصیت $A$ است. یعنی فرض می کنیم $A(y)$ (فرض مثلاً) و حکم را ثابت می کنیم. متغیر $y$ نباید قبلاً استفاده شده باشد.

مثال۱۸. خاصیت های زیر را اثبات کنید.

1. $\forall x\, A(x) \longrightarrow \exists x\, A(x)$
2. $\forall x \forall y\, A(x,y) \leftrightarrow \forall y \forall x\, A(x,y)$ — جابجایی سورهای عمومی (یک طرفه)
3. $\exists x \exists y\, A(x,y) \leftrightarrow \exists y \exists x\, A(x,y)$ — جابجایی سورهای وجودی (دوطرفه)
4. $\exists x \forall y\, A(x,y) \longrightarrow \forall y \exists x\, A(x,y)$ — جابجایی سورهای عمومی و وجودی (یک طرفه)
5. $\forall x\, \big(A(x) \wedge B(x)\big) \leftrightarrow \forall x\, A(x) \wedge \forall x\, B(x)$ — توزیع $\forall$ در $\wedge$ (دوطرفه)
6. $\exists x\, \big(A(x) \vee B(x)\big) \leftrightarrow \exists x\, A(x) \vee \exists x\, B(x)$ — توزیع $\exists$ در $\vee$ (دوطرفه)
7. $\forall x\, A(x) \vee \forall x\, B(x) \longrightarrow \forall x\, \big(A(x) \vee B(x)\big)$ — فاکتورگیری $\forall$ در $\vee$ (یک طرفه)
8. $\exists x\, \big(A(x) \wedge B(x)\big) \longrightarrow \exists x\, A(x) \wedge \exists x\, B(x)$ — فاکتورگیری $\exists$ در $\wedge$ (یک طرفه)
9. $\forall x\, \big(A(x) \to B(x)\big) \longrightarrow \big(\forall x\, A(x) \to \forall x\, B(x)\big)$
10. $\forall x\, \big(A(x) \to B(x)\big) \longrightarrow \big(\exists x\, A(x) \to \exists x\, B(x)\big)$
11. $\exists x\, \big(A(x) \to B(x)\big) \longrightarrow \big(\forall x\, A(x) \to \exists x\, B(x)\big)$

---

۱- دلخواه بودن یعنی، در فرضیات و حکم بصورت آزاد مشاهده نشده باشد.

اگر x در B آزاد نباشد؛

| | |
|---|---|
| ورود $\forall$ در $\wedge$ | 12. $\forall x\, A(x) \wedge B \leftrightarrow \forall x\, (A(x) \wedge B)$ |
| ورود $\forall$ در $\vee$ | 13. $\forall x\, A(x) \vee B \leftrightarrow \forall x\, (A(x) \vee B)$ |
| ورود $\exists$ در $\wedge$ | 14. $\exists x\, A(x) \wedge B \leftrightarrow \exists x\, (A(x) \wedge B)$ |
| ورود $\exists$ در $\vee$ | 15. $\exists x\, A(x) \vee B \leftrightarrow \exists x\, (A(x) \vee B)$ |
| ورود $\forall$ در تالی شرط | 16. $\big(B \to \forall x\, A(x)\big) \leftrightarrow \forall x\big(B \to A(x)\big)$ |
| ورود $\exists$ در تالی شرط | 17. $\big(B \to \exists x\, A(x)\big) \leftrightarrow \exists x\big(B \to A(x)\big)$ |
| ورود $\forall$ در مقدم شرط و تبدیل به $\exists$ | 18. $(\forall x\, A(x) \to B) \leftrightarrow \exists x(A(x) \to B)$ |
| ورود $\exists$ در مقدم شرط و تبدیل به $\forall$ | 19. $(\exists x\, A(x) \to B) \leftrightarrow \forall x(A(x) \to B)$ |
| جابجایی $\exists$ و $\neg$ و تبدیل به $\forall$ | 20. $\neg\forall x\, A(x) \leftrightarrow \exists x\, \neg A(x)$ |
| جابجایی $\forall$ و $\neg$ و تبدیل به $\exists$ | 21. $\neg\exists x\, A(x) \leftrightarrow \forall x\, \neg A(x)$ |

حل۱.

فرض می کنیم $\forall x\, A(x)$ و ثابت می کنیم $\exists x\, A(x)$. بنابر فرض $\forall x\, A(x)$ داریم $A(x)$ و یعنی A برای x برقرار است و بنابر معرفی سور وجودی داریم $\exists x\, A(x)$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x\, A(x)}{A(x)}\, E\forall}{\exists x\, A(x)}\, I\exists}{\forall x\, A(x) \longrightarrow \exists x\, A(x)}\, I\longrightarrow$$

حل۲.

اثبات لیستی:

| | |
|---|---|
| فرض کمکی | 1) $\forall x \forall y\, A(x,y)$ |
| $E\forall$ | 2) $\forall y\, A(x,y)$ |
| $E\forall$ | 3) $A(x,y)$ |
| $I\forall$ | 4) $\forall x\, A(x,y)$ |
| $I\forall$ | 5) $\forall y \forall x\, A(x,y)$ |
| $I \to$ | 6) $\forall x \forall y\, A(x,y) \longrightarrow \forall y \forall x\, A(x,y)$ |

اثبات درختی:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\forall x \forall y\, A(x,y)\,]^1}{\forall y\, A(x,y)}\, E\forall}{A(x,y)}\, E\forall}{\forall x\, A(x,y)}\, I\forall}{\forall y \forall x\, A(x,y)}\, I\forall}{\forall x \forall y\, A(x,y) \longrightarrow \forall y \forall x\, A(x,y)}\, I\longrightarrow_1$$

حل۳.

اثبات متنی:

۱. فرض: نداریم حکم: $\exists x\exists y\, A(x,y) \longrightarrow \exists y\exists x\, A(x,y)$

۲. فرض: $\exists x\exists y\, A(x,y)$ حکم: $\exists y\exists x\, A(x,y)$

۳. فرض مثلاً: $\exists y\, A(x,y)$ حکم: $\exists y\exists x\, A(x,y)$

۴. فرض مثلاً: $A(x,y)$ حکم: $\exists y\exists x\, A(x,y)$

بنابر فرض مثلاً $A(x,y)$ و قاعده ی معرفی سور وجودی داریم، $\exists x\, A(x,y)$ دوباره بنابر قاعده ی معرفی سور وجودی به حکم یعنی $\exists y\exists x\, A(x,y)$ می رسیم.

اثبات درختی:

$$\dfrac{\dfrac{[\exists x\exists y\, A(x,y)]^1 \qquad \dfrac{[\exists y\, A(x,y)]^2 \qquad \dfrac{\dfrac{[A(x,y)]^3}{\exists x\, A(x,y)}\, I\exists}{\exists y\exists x\, A(x,y)}\, I\exists}{\exists y\exists x\, A(x,y)}\, E\exists_3}{\exists y\exists x\, A(x,y)}\, E\exists_2}{\exists x\exists y\, A(x,y) \longrightarrow \exists y\exists x\, A(x,y)}\, I{\longrightarrow}_1$$

اثبات متنی:

۱. فرض: نداریم حکم: $\exists y\exists x\, A(x,y) \longrightarrow \exists x\exists y\, A(x,y)$

۲. فرض: $\exists y\exists x\, A(x,y)$ حکم: $\exists x\exists y\, A(x,y)$

۳. فرض مثلاً: $\exists x\, A(x,y)$ حکم: $\exists x\exists y\, A(x,y)$

۴. فرض مثلاً: $A(x,y)$ حکم: $\exists x\exists y\, A(x,y)$

بنابر فرض مثلاً $A(x,y)$ و قاعده ی معرفی سور وجودی داریم، $\exists y\, A(x,y)$ دوباره بنابر قاعده ی معرفی سور وجودی به حکم یعنی $\exists x\exists y\, A(x,y)$ می رسیم.

اثبات درختی:

$$\dfrac{\dfrac{[\exists y\exists x\, A(x,y)]^1 \qquad \dfrac{[\exists x\, A(x,y)]^2 \qquad \dfrac{\dfrac{[A(x,y)]^3}{\exists y\, A(x,y)}\, I\exists}{\exists x\exists y\, A(x,y)}\, I\exists}{\exists x\exists y\, A(x,y)}\, E\exists_3}{\exists x\exists y\, A(x,y)}\, E\exists_2}{\exists y\exists x\, A(x,y) \longrightarrow \exists x\exists y\, A(x,y)}\, I{\longrightarrow}_1$$

حل۴.

اثبات متنی:

۱. فرض: نداریم        حکم: $\exists x\,\forall y\,A(x,y) \longrightarrow \forall y\,\exists x\,A(x,y)$

۲. فرض: $\exists x\,\forall y\,A(x,y)$        حکم: $\forall y\,\exists x\,A(x,y)$

۳. فرض: $\exists x\,\forall y\,A(x,y)$        حکم: $\exists x\,A(x,y)$

۴. فرض: $\forall y\,A(x,y)$        حکم: $\exists x\,A(x,y)$

۵. فرض: $\forall y\,A(x,y)$        حکم: $A(x,y)$

اثبات درختی:

$$\dfrac{\dfrac{[\exists x\,\forall y\,A(x,y)]^1 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\forall y\,A(x,y)]^2}{A(x,y)}\,E\forall}{\exists x\,A(x,y)}\,I\exists}{\forall y\exists x\,A(x,y)}\,I\forall}{\forall y\,\exists x\,A(x,y)}\,E\exists_2}{\exists x\,\forall y\,A(x,y) \longrightarrow \forall y\,\exists x\,A(x,y)}\,I\!\longrightarrow_1$$

عکس این گزاره برقرار نیست.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\forall y\,\exists x\,A(x,y)]^1}{\exists x\,A(x,y)}\,E\forall \qquad \dfrac{\dfrac{[A(x,y)]^2}{\forall y\,A(x,y)}\,I\forall}{\exists x\,\forall y\,A(x,y)}\,I\exists}{\exists x\,\forall y\,A(x,y)}\,E\exists_2}{\forall y\,\exists x\,A(x,y) \longrightarrow \exists x\,\forall y\,A(x,y)}\,I\!\longrightarrow_1$$

قاعده ی نشان داده شده اشکال دارد زیرا $y$ در فرض، آزاد است.

حل۶.

اثبات متنی:

۱. فرض: نداریم        حکم: $\exists x\,\big(A(x) \vee B(x)\big) \longrightarrow \exists x\,A(x) \vee \exists x\,B(x)$

۲. فرض: $\exists x\,\big(A(x) \vee B(x)\big)$        حکم: $\exists x\,A(x) \vee \exists x\,B(x)$

۳. فرض مثلاً: $A(y) \vee B(y)$        حکم: $\exists x\,A(x) \vee \exists x\,B(x)$

۴-۱. حالت اول. فرض: $A(y)$        حکم: $\exists x\,A(x) \vee \exists x\,B(x)$

۴-۲. حالت دوم. فرض: $B(y)$        حکم: $\exists x\,A(x) \vee \exists x\,B(x)$

۱-۵. حالت اول. فرض: $A(y)$ حکم: $\exists x\, A(x)$

۲-۵. حالت دوم. فرض: $B(y)$ حکم: $\exists x\, B(x)$

که هر حکم بنابر فرض و قاعده ی $\mathrm{I}\exists$ و حکم های مراحل قبل، از $\mathrm{I}\lor$ حاصل می شود.

اثبات درختی:

$$\dfrac{\dfrac{[\exists x\,(A(x) \lor B(x))]^1 \qquad \dfrac{[A(y) \lor B(y)]^2 \quad \dfrac{\dfrac{[A(y)]^3}{\exists x\, A(x)}\,\mathrm{I}\exists}{\exists x\, A(x) \lor \exists x\, B(x)}\,\mathrm{I}\lor \quad \dfrac{\dfrac{[B(y)]^3}{\exists x\, B(x)}\,\mathrm{I}\exists}{\exists x\, A(x) \lor \exists x\, B(x)}\,\mathrm{I}\lor}{\exists x\, A(x) \lor \exists x\, B(x)}\,\mathrm{E}\lor_3}{\exists x\, A(x) \lor \exists x\, B(x)}\,\mathrm{E}\exists_2}{\exists x\,(A(x) \lor B(x)) \longrightarrow \exists x\, A(x) \lor \exists x\, B(x)}\,\mathrm{I}{\to}_1$$

اثبات متنی:

۱. فرض: نداریم حکم: $\exists x\, A(x) \lor \exists x\, B(x) \longrightarrow \exists x\,(A(x) \lor B(x))$

۲. فرض: $\exists x\, A(x) \lor \exists x\, B(x)$ حکم: $\exists x\,(A(x) \lor B(x))$

۱-۳. حالت اول. فرض: $\exists x\, A(x)$ حکم: $\exists x\,(A(x) \lor B(x))$

۲-۳. حالت دوم. فرض: $\exists x\, B(x)$ حکم: $\exists x\,(A(x) \lor B(x))$

۱-۴. حالت اول. فرض: $A(y)$ حکم: $\exists x\,(A(x) \lor B(x))$

۲-۴. حالت دوم. فرض: $B(y)$ حکم: $\exists x\,(A(x) \lor B(x))$

۱-۵. حالت اول. فرض: $A(y)$ حکم: $(A(y) \lor B(y))$

۲-۵. حالت دوم. فرض: $B(y)$ حکم: $(A(y) \lor B(y))$

اثبات درختی:

$$\dfrac{\dfrac{[\exists x\, A(x) \lor \exists x\, B(x)]^1 \qquad \dfrac{[\exists x\, A(x)]^2 \quad \dfrac{\dfrac{[A(y)]^3}{A(y) \lor B(y)}\,\mathrm{I}\lor}{\exists x\,(A(x) \lor B(x))}\,\mathrm{I}\exists}{\exists x\,(A(x) \lor B(x))}\,\mathrm{E}\exists_3 \quad \dfrac{[\exists x\, B(x)]^2 \quad \dfrac{\dfrac{[B(y)]^3}{A(y) \lor B(y)}\,\mathrm{I}\lor}{\exists x\,(A(x) \lor B(x))}\,\mathrm{I}\exists}{\exists x\,(A(x) \lor B(x))}\,\mathrm{E}\exists_3}{\exists x\,(A(x) \lor B(x))}\,\mathrm{E}\lor_2}{\exists x\, A(x) \lor \exists x\, B(x) \longrightarrow \exists x\,(A(x) \lor B(x))}\,\mathrm{I}{\to}_1$$

حل۱۷.

اثبات درختی:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[B \to \exists x\, A(x)]^1 \qquad \dfrac{[\neg\exists x(B \to A(x))]^2}{B}\,(*)}{\exists x\, A(x)}\,E{\to}_1 \qquad \dfrac{[A(x)]^3 \qquad \dfrac{[\neg\exists x(B \to A(x))]^2}{\neg A(x)}\,(**)}{\bot}\,E\neg}{\dfrac{\bot}{\exists x(B \to A(x))}\,\text{برهان خلف}_2}\,E\exists_3}{(B \to \exists x\, A(x)) \to \exists x(B \to A(x))}\,I{\to}_1$$

اثبات(**)

$$\dfrac{\dfrac{\neg\exists x(B \to A(x)) \qquad \dfrac{\dfrac{[A(x)]^1}{B \to A(x)}\,I{\to}}{\exists x(B \to A(x))}\,I\exists}{\bot}\,E\neg}{\neg A(x)}\,I\neg_1$$

اثبات(*)

$$\dfrac{\dfrac{\neg\exists x(B \to A(x)) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[B]^2 \qquad [\neg B]^1}{\bot}\,E\neg}{A(x)}\,\bot}{B \to A(x)}\,I{\to}_2}{\exists x(B \to A(x))}\,I\exists}{\bot}\,E\neg}{B}\,\text{برهان خلف}_1$$

حل۱۸.

اثبات درختی:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\exists x(A(x) \to B)]^2}{A(x)}\,(*)}{\forall x\, A(x)}\,I\forall \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\exists x(A(x) \to B)]^2}{\neg B}\,(**) \qquad \dfrac{[\forall x\, A(x) \to B]^1 \qquad [\forall x\, A(x)]^3}{B}\,E{\to}}{\bot}\,E\neg}{\neg\forall x\, A(x)}\,I\neg_3}{\bot}\,E\neg}{\exists x(A(x) \to B)}\,\text{برهان خلف}_2}{(\forall x\, A(x) \to B) \to \exists x(A(x) \to B)}\,I{\to}_1$$

اثبات (*)

$$\dfrac{\dfrac{\neg\exists x(A(x)\to B) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A(x)]^2 \qquad [\neg A(x)]^1}{\perp}\,E\neg}{B}\,E\neg}{A(x)\to B}\,I{\to}_2}{\exists x(A(x)\to B)}\,I\exists}{\perp}\,E\neg}{A(x)}\,\text{برهان خلف}_1$$

اثبات نادرست:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\forall x\, A(x)\to B]^1 \qquad \dfrac{[A(x)]^2}{\forall x\, A(x)}\,I\forall}{B}\,E{\to}}{A(x)\to B}\,I{\to}_2}{\exists x(A(x)\to B)}\,I\exists}{(\forall x\, A(x)\to B)\to\exists x(A(x)\to B)}\,I{\to}_1$$

در قاعده ی معرفی سور عمومی، $I\forall$ ، $x$ در فرض آزاد است؛ پس کاربرد قاعده درست نیست.

تمرین۵. خاصیت های حل نشده در مثال۱۸ را اثبات کنید.

## حساب رشته ها

منظور از یک رشته $\Gamma \vdash \Delta$ این است که تمام فرضیات $\Gamma$ حداقل یکی از حکم های ذکر شده در $\Delta$ را نتیجه می دهد، یعنی؛ $\bigwedge \Gamma \vdash \bigvee \Delta$ . ($\Gamma$ و $\Delta$ مجموعه های مکرر هستند، یعنی تکرار در آنها مهم است؛ اما ترتیب اهمیتی ندارد.)

اصول: $A \vdash A$ $\qquad$ $\bot \vdash A$

## قواعد حساب رشته ها:

$$\frac{\Gamma \vdash A,\Delta \qquad \Gamma \vdash B,\Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B,\Delta}\ R\wedge \qquad \frac{A, B, \Gamma \vdash \Delta}{A \wedge B, \Gamma \vdash \Delta}\ L\wedge$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, B,\Delta}{\Gamma \vdash A \vee B,\Delta}\ R\vee \qquad \frac{A, \Gamma \vdash \Delta \qquad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \vee B, \Gamma \vdash \Delta}\ L\vee$$

$$\frac{A, \Gamma \vdash B,\Delta}{\Gamma \vdash A \longrightarrow B,\Delta}\ R\rightarrow \qquad \frac{\Gamma \vdash A,\Delta \qquad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \longrightarrow B, \Gamma \vdash \Delta}\ L\rightarrow$$

$$\frac{A, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A,\Delta}\ R\neg \qquad \frac{\Gamma \vdash A,\Delta}{\neg A, \Gamma \vdash \Delta}\ L\neg$$

$$\frac{\Gamma \vdash A(y),\Delta}{\Gamma \vdash \forall x\, A(x),\Delta}\ R\forall \qquad \frac{A(t), \Gamma \vdash \Delta}{\forall x\, A(x), \Gamma \vdash \Delta}\ L\forall$$

$$\frac{\Gamma \vdash A(t),\Delta}{\Gamma \vdash \exists x\, A(x),\Delta}\ R\exists \qquad \frac{A(y), \Gamma \vdash \Delta}{\exists x\, A(x), \Gamma \vdash \Delta}\ L\exists$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash A,\Delta}\ RW \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{A, \Gamma \vdash \Delta}\ LW$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, A,\Delta}{\Gamma \vdash A,\Delta}\ RC \qquad \frac{A, A, \Gamma \vdash \Delta}{A, \Gamma \vdash \Delta}\ LC$$

$$\frac{\Gamma \vdash A,\Delta \qquad A, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta}\ Cut$$

نکته۳. در قواعد $R\forall$ و $L\exists$ متغیر $y$ در رشته ای که پایین خط استنتاج است آزاد نیست و در جانشینی $y$ در $A$ به جای $x$ ، آزاد است. در قواعد $L\forall$ و $R\exists$ جانشینی ترم $t$ به جای $x$ در $A$ ، آزاد است.

تعریف۲. یک استنتاج در حساب رشته ها برای $\Gamma \vdash \Delta$ یک درخت است که برگ های آن اصول $A \vdash A$ و در ریشه $\Gamma \vdash \Delta$ و در هر رأس یک رشته قرار گرفته که توسط قواعد فوق به هم مربوط می شوند.

مثال۱۹. $\vdash \forall x\, A(x) \longrightarrow \exists x\, A(x)$

حل.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A(t) \vdash A(t)}{\forall x\, A(x) \vdash A(t)}\; L\forall}{\forall x\, A(x) \vdash \exists x\, A(x)}\; R\exists}{\vdash \forall x\, A(x) \longrightarrow \exists x\, A(x)}\; R\longrightarrow$$

t می تواند هر ترم، مثلاً خود x باشد که به جای x در A آزاد باشد.

مثال۲۰. $\vdash \big(A \wedge (A \to B)\big) \longrightarrow B$

حل.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \vdash A}{A \vdash B, A}\; RW \qquad \dfrac{A \vdash A}{A, B \vdash B}\; LW}{A, (A \to B) \vdash B}\; L\to}{A \wedge (A \to B) \vdash B}\; L\wedge}{\vdash \big(A \wedge (A \to B)\big) \longrightarrow B}\; R\to$$

مثال۲۱. $\vdash \forall x\, \forall y\, A(x,y) \longrightarrow \forall y \forall x\, A(x,y)$

حل.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A(x,y) \vdash A(x,y)}{\forall y\, A(x,y) \vdash A(x,y)}\; L\forall}{\forall x\, \forall y\, A(x,y) \vdash A(x,y)}\; L\forall}{\forall x\, \forall y\, A(x,y) \vdash \forall x\, A(x,y)}\; R\forall}{\forall x\, \forall y\, A(x,y) \vdash \forall y \forall x\, A(x,y)}\; R\forall}{\vdash \forall x\, \forall y\, A(x,y) \longrightarrow \forall y \forall x\, A(x,y)}\; R\longrightarrow$$

مثال۲۲. $\vdash (\forall x\, A(x) \to B) \longrightarrow \exists x (A(x) \to B)$

حل.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A(x) \vdash A(x)}{A(x) \vdash A(x), B}\; RW}{\vdash A(x), A(x) \to B}\; R\to}{\vdash A(x), \exists x (A(x) \to B)}\; R\exists}{\vdash \forall x\, A(x), \exists x (A(x) \to B)}\; R\forall \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{B \vdash B}{A(x), B \vdash B}\; LW}{B \vdash A(x) \to B}\; L\to}{B \vdash \exists x (A(x) \to B)}\; R\exists}{\forall x\, A(x) \to B \vdash \exists x (A(x) \to B)}\; L\to}{\vdash (\forall x\, A(x) \to B) \longrightarrow \exists x (A(x) \to B)}\; R\to$$

**مثال۲۳.** $\vdash \exists x\, \forall y\, A(x,y) \longrightarrow \forall y \exists x\, A(x,y)$

حل: اثبات نادرست:

$$\begin{array}{cl}
A(x,y) \vdash A(x,y) & \\ \hline
\forall y\, A(x,y) \vdash A(x,y) & L\forall \\ \hline
\exists x\, \forall y\, A(x,y) \vdash A(x,y) & L\exists \\ \hline
\exists x\, \forall y\, A(x,y) \vdash \exists x\, A(x,y) & R\exists \\ \hline
\exists x\, \forall y\, A(x,y) \vdash \forall y \exists x\, A(x,y) & R\forall \\ \hline
\vdash \exists x\, \forall y\, A(x,y) \longrightarrow \forall y \exists x\, A(x,y) & R\longrightarrow
\end{array}$$

$$\begin{array}{cl}
A(x,y) \vdash A(x,y) & \\ \hline
\forall y\, A(x,y) \vdash A(x,y) & L\forall \\ \hline
\forall y\, A(x,y) \vdash \exists x A(x,y) & R\exists \\ \hline
\exists x\, \forall y\, A(x,y) \vdash \exists x\, A(x,y) & L\exists \\ \hline
\exists x\, \forall y\, A(x,y) \vdash \forall y \exists x\, A(x,y) & R\forall \\ \hline
\vdash \exists x\, \forall y\, A(x,y) \longrightarrow \forall y \exists x\, A(x,y) & R\longrightarrow
\end{array}$$

عکس این گزاره برقرار نیست.

$$\begin{array}{cl}
A(x,y) \vdash A(x,y) & \\ \hline
\exists x\, A(x,y) \vdash A(x,y) & L\exists \\ \hline
\forall y \exists x\, A(x,y) \vdash A(x,y) & L\forall \\ \hline
\forall y \exists x\, A(x,y) \vdash \forall y\, A(x,y) & R\forall \\ \hline
\forall y \exists x\, A(x,y) \vdash \exists x\, \forall y\, A(x,y) & R\exists \\ \hline
\vdash \forall y \exists x\, A(x,y) \longrightarrow \exists x\, \forall y\, A(x,y) & R\longrightarrow
\end{array}$$

x نشان داده شده آزاد است.

**مثال۲۴.** $\vdash \exists x\big(A(x) \to \forall x\, A(x)\big)$

حل.

$$\begin{array}{cl}
A(y) \vdash A(y) & \\ \hline
A(x), A(y) \vdash A(y) & LW \\ \hline
A(x), A(y) \vdash A(y), \forall x\, A(x) & RW \\ \hline
A(x) \vdash A(y), A(y) \to \forall x\, A(x) & R\to \\ \hline
A(x) \vdash A(y), \exists x\big(A(x) \to \forall x\, A(x)\big) & R\exists \\ \hline
A(x) \vdash \forall x\, A(x), \exists x\big(A(x) \to \forall x\, A(x)\big) & R\forall \\ \hline
\vdash A(x) \to \forall x\, A(x), \exists x\big(A(x) \to \forall x\, A(x)\big) & R\to \\ \hline
\vdash \exists x\big(A(x) \to \forall x\, A(x)\big), \exists x\big(A(x) \to \forall x\, A(x)\big) & R\exists \\ \hline
\vdash \exists x\big(A(x) \to \forall x\, A(x)\big) & RC
\end{array}$$

مثال۲۵. $\vdash \big((A \to B) \land (B \to C)\big) \longrightarrow (A \to C)$

اثبات متنی:

۱. فرض: نداریم   حکم: $\big((A \to B) \land (B \to C)\big) \longrightarrow (A \to C)$

۲. فرض: $(A \to B) \land (B \to C)$   حکم: $A \to C$

۳. فرض: $(A \to B) \land (B \to C)$ و $A$   حکم: $C$

۴. فرض: $A \to B$ و $B \to C$ و $A$   حکم: $C$

۵. با توجه به فرض $A \to B$ یک بار مقدم آن $A$ را ثابت می کنیم، (آن را به مجموعه احکامی که لااقل یک از آنها باید ثابت شود اضافه می کنیم ) و یک بار از تالی استفاده می کنیم:

حالت اول. فرض: $B \to C$ و $A$   حکم: $A$ یا $C$

حالت دوم. فرض: $B \to C$ و $B$ و $A$   حکم: $C$

۶. در حالت اول حکم $A$ در فرضیات موجود است. و در حالت دوم دوباره مانند مرحله ی۵ برای $B \to C$ عمل می کنیم؛

حالت اول. فرض: $B$ و $A$   حکم: $B$ و $C$

حالت دوم. فرض: $C$ و $B$ و $A$   حکم: $C$

در هر دو حالت حداقل یک از احکام در فرض موجود است.

اثبات با استفاده از حساب رشته ها:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$A \vdash A$}
\RightLabel{RW}
\UnaryInfC{$A \vdash A, C$}
\RightLabel{LW}
\UnaryInfC{$A, (B \to C) \vdash A, C$}
\AxiomC{$B \vdash B$}
\RightLabel{RW}
\UnaryInfC{$B \vdash B, C$}
\RightLabel{LW}
\UnaryInfC{$A, B \vdash B, C$}
\AxiomC{$C \vdash C$}
\RightLabel{LW}
\UnaryInfC{$A, B, C \vdash C$}
\RightLabel{L$\to$}
\BinaryInfC{$A, B, (B \to C) \vdash C$}
\RightLabel{L$\to$}
\BinaryInfC{$A, (A \to B), (B \to C) \vdash C$}
\RightLabel{L $\land$}
\UnaryInfC{$A, (A \to B) \land (B \to C) \vdash C$}
\RightLabel{R$\longrightarrow$}
\UnaryInfC{$(A \to B) \land (B \to C) \vdash A \to C$}
\RightLabel{R$\longrightarrow$}
\UnaryInfC{$\vdash \big((A \to B) \land (B \to C)\big) \longrightarrow (A \to C)$}
\end{prooftree}
$$

# فصل دوم: نظریه ی مجموعه ها

## حساب رشته ها برای مجموعه ها

در حساب رشته ها و منطق محمولات با حرکت از پایین به بالا فرمول ها به اتم ها تجزیه می شوند. با اضافه کردن قواعد زیر می توان اتم ها را نیز به اتم های دیگر ساده کرد. در پایین $t$ و $s$ و $B$ و $A$ ترم هستند و $x$ و $y$ متغیرند که در رشته پایین استنتاج آزاد نیستند. تمام جانشینی های ذکر شده آزادند.

**قواعد حساب رشته ها:**

$$\frac{t \in A, t \in B, \Gamma \vdash \Delta}{t \in A \cap B, \Gamma \vdash \Delta}\ L\cap \qquad \frac{\Gamma \vdash t \in A, \Delta \qquad \Gamma \vdash t \in B, \Delta}{\Gamma \vdash t \in A \cap B, \Delta}\ R\cap$$

$$\frac{t \in A, \Gamma \vdash \Delta \qquad \Gamma, t \in B \vdash \Delta}{t \in A \cup B, \Gamma \vdash \Delta}\ L\cup \qquad \frac{\Gamma \vdash t \in A, t \in B, \Delta}{\Gamma \vdash t \in A \cup B, \Delta}\ R\cup$$

$$\frac{t \in A, t \notin B, \Gamma \vdash \Delta}{t \in A - B, \Gamma \vdash \Delta}\ L- \qquad \frac{\Gamma \vdash t \in A, \Delta \qquad \Gamma \vdash t \notin B, \Delta}{\Gamma \vdash t \in A - B, \Delta}\ R-$$

$$\frac{t \subseteq A, \Gamma \vdash \Delta}{t \in P(A), \Gamma \vdash \Delta}\ LP \qquad \frac{\Gamma \vdash t \subseteq A, \Delta}{\Gamma \vdash t \in P(A), \Delta}\ RP$$

$$\frac{\Gamma \vdash t \in A, \Delta \qquad \Gamma, t \in B \vdash \Delta}{A \subseteq B, \Gamma \vdash \Delta}\ L\subseteq \qquad \frac{t \in A, \Gamma \vdash t \in B, \Delta}{\Gamma \vdash A \subseteq B, \Delta}\ R\subseteq$$

$$\frac{\Gamma \vdash s \in B, \Delta \qquad t \in F(s), \Gamma \vdash \Delta}{t \in \bigcap_{x \in B} F(X), \Gamma \vdash \Delta}\ L\bigcap_{x \in B} \qquad \frac{y \in B, \Gamma \vdash t \in F(y), \Delta}{\Gamma \vdash t \in \bigcap_{x \in B} F(X), \Delta}\ R\bigcap_{x \in B}$$

$$\frac{y \in B, t \in F(y), \Gamma \vdash \Delta}{t \in \bigcup_{x \in B} F(X), \Gamma \vdash \Delta}\ L\bigcup_{x \in B} \qquad \frac{\Gamma \vdash s \in B, \Delta \qquad \Gamma \vdash t \in F(s), \Delta}{\Gamma \vdash t \in \bigcup_{x \in B} F(X), \Delta}\ R\bigcup_{x \in B}$$

$$\frac{s \in B \rightarrow t \in s, \Gamma \vdash \Delta}{t \in \bigcap B, \Gamma \vdash \Delta}\ L\bigcap_B \qquad \frac{y \in B, \Gamma \vdash t \in y, \Delta}{\Gamma \vdash t \in \bigcap B, \Delta}\ R\bigcap_B$$

$$\frac{y \in B, t \in y, \Gamma \vdash \Delta}{t \in \bigcup B, \Gamma \vdash \Delta}\ L\bigcup_B \qquad \frac{\Gamma \vdash t \in s, \Delta \qquad \Gamma \vdash s \in B, \Delta}{\Gamma \vdash t \in \bigcup B, \Delta}\ R\bigcup_B$$

$$\frac{x\in A,\Gamma\vdash x\in B,\Delta \quad x\in B,\Gamma\vdash x\in A,\Delta}{\Gamma\vdash A=B,\Delta}\ R= \qquad \frac{t\in A\leftrightarrow t\in B,\Gamma\vdash\Delta}{A=B,\Gamma\vdash\Delta}\ L=$$

$$\frac{\Gamma\vdash t=A_1,\dots,t=A_n,\Delta}{\Gamma\vdash t\in\{A_1,\dots,A_n\},\Delta}\ R\{\} \qquad \frac{t=A_1,\Gamma\vdash\Delta \ \dots\ t=A_n,\Gamma\vdash\Delta}{t\in\{A_1,\dots,A_n\},\Gamma\vdash\Delta}\ L\{\}$$

مثال ۱. $\vdash A\cup B=B\cup A$

حل.

اثبات متنی:

۱. فرض: نداریم — حکم: $A\cup B=B\cup A$

۲. دو حالت داریم:

۲-۱. حالت اول. فرض: $x\in A\cup B$ — حکم: $x\in B\cup A$

۲-۲. حالت دوم. فرض: $x\in B\cup A$ — حکم: $x\in A\cup B$

۳-۱. حالت اول. فرض: $x\in A\cup B$ — حکم: $x\in A$ یا $x\in B$

۳-۲. حالت دوم. فرض: $x\in B\cup A$ — حکم: $x\in B$ یا $x\in A$

۴. در هر یک از حالت اول و دوم، دو حالت داریم:

۴-۱-۱. حالت اول. فرض: $x\in A$ — حکم: $x\in A$ یا $x\in B$

۴-۱-۲. حالت دوم. فرض: $x\in B$ — حکم: $x\in A$ یا $x\in B$

۴-۲-۱. حالت اول. فرض: $x\in B$ — حکم: $x\in B$ یا $x\in A$

۴-۲-۲. حالت دوم. فرض: $x\in A$ — حکم: $x\in B$ یا $x\in A$

در تمام موارد فوق دست کم یکی از حکم ها در فرض موجود است.

اثبات با استفاده از حساب رشته ها:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x\in A\vdash x\in A}{x\in A\vdash x\in B,x\in A}\,RW \quad \dfrac{x\in B\vdash x\in B}{x\in B\vdash x\in B,x\in A}\,RW}{x\in A\cup B\vdash x\in B,x\in A}\,L\cup}{x\in A\cup B\vdash x\in B\cup A}\,R\cup \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{x\in B\vdash x\in B}{x\in B\vdash x\in A,x\in B}\,RW \quad \dfrac{x\in A\vdash x\in A}{x\in A\vdash x\in B,x\in A}\,RW}{x\in B\cup A\vdash x\in A,x\in B}\,L\cup}{x\in B\cup A\vdash x\in A\cup B}\,R\cup}{\vdash A\cup B=B\cup A}\,R=$$

تمرین۱. گزاره های زیر را اثبات کنید.

1. $\vdash A \cap B = B \cap A$
2. $\vdash (A \cap B \subseteq A) \wedge (A \cap B \subseteq B)$
3. $\vdash (A \subseteq A \cup B) \wedge (B \subseteq A \cup B)$
4. $\vdash (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C) \longrightarrow (A \subseteq C)$
5. $\vdash (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A) \longrightarrow (A = B)$
6. $\vdash A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
7. $\vdash A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
8. $\vdash A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
9. $\vdash A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

مثال۲.

$F(n) = [n, n+1] \qquad A = \{[1,2], [2,3], [3,4]\} \qquad B = \{[1,2], [1,3], [1,4]\}$

$\bigcup A = \bigcup_{n \in \{1,2,3\}} F(n) = F(1) \cup F(2) \cup F(3) = [1,2] \cup [2,3] \cup [3,4] = [1,4]$

$\bigcap A = \bigcap_{n \in \{1,2,3\}} F(n) = F(1) \cap F(2) \cap F(3) = [1,2] \cap [2,3] \cap [3,4] = \phi$

$\bigcup C = \bigcup_{n \in \omega} F(n) = F(1) \cup F(2) \cup F(3) \cup \ldots = [1,2] \cup [2,3] \cup [3,4] \cup \ldots = [0, \infty]$

$[1,2] = F(1) \subseteq \bigcup_{n \in \{1,2,3\}} F(n) = [1,4]$

مثال۳.

$B = \{\{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,2,5\}\}$

$\bigcup B = \{1,2,3\} \cup \{1,2,4\} \cup \{1,2,5\} = \{1,2,3,4,5\}$

$\bigcap B = \{1,2,3\} \cap \{1,2,4\} \cap \{1,2,5\} = \{1,2\}$

$x \in \{1,2,3\} \in B$

$\{1,2\} = \bigcap B \subseteq x = \{1,2,3\} \subseteq \bigcup B = \{1,2,3,4,5\}$

مثال۴. $\vdash \bigcup_{x \in B}(A \cap F(x)) = A \cap \bigcup_{x \in B} F(x)$

حل.

اثبات متنی:

۱. فرض: حکم: $\bigcup_{x \in B}\big(A \cap F(x)\big) = A \cap \bigcup_{x \in B} F(x)$

۲-۱. حالت اول. فرض: $u \in \bigcup_{x \in B}\big(A \cap F(x)\big)$ حکم: $u \in A \cap \bigcup_{x \in B} F(x)$

۲-۲. حالت دوم. فرض: $u \in A \cap \bigcup_{x \in B} F(x)$ حکم: $u \in \bigcup_{x \in B}\big(A \cap F(x)\big)$

حالت دوم را به روش حساب رشته ها اثبات می کنیم، حالت اول به طور مشابه است.

$$\dfrac{\dfrac{x \in B \vdash x \in B}{u \in A, x \in B, u \in F(x) \vdash x \in B}\,\mathrm{LW} \qquad \dfrac{\dfrac{u \in A \vdash u \in A}{u \in A, x \in B, u \in F(x) \vdash u \in A}\,\mathrm{LW} \quad \dfrac{u \in F(x) \vdash u \in F(x)}{u \in A, x \in B, u \in F(x) \vdash u \in F(x)}\,\mathrm{LW}}{u \in A, x \in B, u \in F(x) \vdash u \in A \cap F(x)}\,\mathrm{R}\cap}{u \in A, x \in B, u \in F(x) \vdash u \in \bigcup_{x\in B}\big(A \cap F(x)\big)}\,\mathrm{R}\bigcup_{x\in B}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{u \in A, x \in B, u \in F(x) \vdash u \in \bigcup_{x\in B}\big(A \cap F(x)\big)}{u \in A, u \in \bigcup_{x\in B} F(x) \vdash u \in \bigcup_{x\in B}\big(A \cap F(x)\big)}\,\mathrm{L}\bigcup_{x\in B}}{u \in A \cap \bigcup_{x\in B} F(x) \vdash u \in \bigcup_{x\in B}\big(A \cap F(x)\big)}\,\mathrm{L}\cap}{\vdash A \cap \bigcup_{x\in B} F(x) \subseteq \bigcup_{x\in B}\big(A \cap F(x)\big)}\,\mathrm{R}\subseteq$$

مثال۵. خاصیت های زیر را اثبات کنید.

1. $\vdash \forall x(x \in B \longrightarrow F(x) \subseteq \bigcup_{x\in B} F(x))$
2. $\vdash \forall x\big(x \in B \longrightarrow \bigcap_{x\in B} F(x) \subseteq F(x)\big)$
3. $\vdash \forall x(x \in B \longrightarrow x \subseteq \bigcup B)$
4. $\vdash \forall x(x \in B \longrightarrow \bigcap B \subseteq x)$
5. $\vdash \forall x(x \in A \rightarrow x \subseteq B) \longrightarrow \bigcup A \subseteq B$
6. $\vdash \forall x(x \in A \rightarrow B \subseteq x) \longrightarrow B \subseteq \bigcap A$
7. $\vdash \forall x(x \in B \rightarrow F(x) \subseteq A) \longrightarrow \bigcup_{x\in B} F(x) \subseteq A$
8. $\vdash \forall x\big(x \in B \rightarrow A \subseteq F(x)\big) \longrightarrow A \subseteq \bigcap_{x\in B} F(x)$
9. $\vdash \bigcup_{x\in B}\big(F(x) \cap G(x)\big) \subseteq (\bigcup_{x\in B} F(x)) \cap (\bigcup_{x\in B} G(x))$
10. $\vdash \bigcup_{x\in B}\big(F(x) \cup G(x)\big) = (\bigcup_{x\in B} F(x)) \cup (\bigcup_{x\in B} G(x))$
11. $\vdash \bigcap_{x\in B}\big(F(x) \cap G(x)\big) = (\bigcap_{x\in B} F(x)) \cap (\bigcap_{x\in B} G(x))$
12. $\vdash \bigcap_{x\in B}\big(F(x) \cup G(x)\big) \supseteq (\bigcap_{x\in B} F(x)) \cup (\bigcap_{x\in B} G(x))$
13. $\vdash \bigcup_{x\in B}(F(x) - A) = \bigcup_{x\in B} F(x) - A$
14. $\vdash \bigcap_{x\in B}(F(x) - A) = \bigcap_{x\in B} F(x) - A$
15. $\vdash \bigcup_{x\in A}(B - F(x)) = B - \bigcap_{x\in A} F(x)$
16. $\vdash \bigcap_{x\in A}\big(B - F(x)\big) = B - \bigcup_{x\in A} F(x)$

$\bigcap_{x\in A}(B - F(x))$ را با فرض $A \neq \emptyset$ اثبات می کنیم.

17. $\vdash \bigcap_{x\in A}\big(F(x) \cap G(x)\big) = (\bigcap_{x\in B} F(x)) \cap (\bigcap_{x\in B} G(x))$
18. $\vdash \bigcap_{x\in A}(F(x) \cup B) \supseteq (\bigcap_{x\in B} F(x)) \cup B$
19. $\vdash \bigcap_{x\in A}(F(x) - B) \supseteq (\bigcap_{x\in B} F(x)) - B$
20. $\vdash \bigcup_{x\in A} \bigcup_{y\in B} F(x, y) = \bigcup_{y\in B} \bigcup_{x\in A} F(x, y)$

$21.\vdash \bigcap_{x\in A}\bigcap_{y\in B}F(x,y)=\bigcap_{y\in B}\bigcap_{x\in A}F(x,y)$

$22.\vdash \bigcup_{x\in A}\bigcap_{y\in B}F(x,y)\subseteq\bigcap_{y\in B}\bigcup_{x\in A}F(x,y)$

حل ۱.

اثبات با استفاده از حساب رشته ها:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x\in B\vdash x\in B}{x\in B, y\in F(x)\vdash x\in B}\,\mathrm{LW}\qquad\dfrac{y\in F(x)\vdash y\in F(x)}{x\in B, y\in F(x)\vdash y\in F(x)}\,\mathrm{LW}}{x\in B, y\in F(x)\vdash y\in\bigcup_{x\in B}F(x)}\,\mathrm{R}\bigcup_{x\in B}}{x\in B\vdash F(x)\subseteq\bigcup_{x\in B}F(x)}\,\mathrm{R}\subseteq}{\vdash (x\in B\longrightarrow F(x)\subseteq\bigcup_{x\in B}F(x))}\,\mathrm{R}\longrightarrow}{\vdash \forall x(x\in B\longrightarrow F(x)\subseteq\bigcup_{x\in B}F(x))}\,\mathrm{R}\forall$$

تمرین۲. سایر خاصیت های ذکر شده در مثال۴ را اثبات کنید.

## مجموعه ی توانی

مثال۶.

$A=\{1,2,3\}$

$P(A)=\{\phi,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$

$P(\{1\})\cup P(\{2,3\})=\{\phi,\{1\},\{2\},\{3\},\{2,3\}\}$

$P(\{1\}\cup\{2,3\})=P(\{1,2,3\})$

تمرین۳. خاصیت های زیر را اثبات کنید.

1. $\vdash P(A\cap B)=P(A)\cap P(B)$
2. $\vdash P(A)\cup P(B)\subseteq P(A\cup B)$
3. $\vdash A\subseteq B\longrightarrow P(A)\subseteq P(B)$
4. $\vdash P(A-B)-\{\emptyset\}\subseteq P(B)-P(A)$
5. $\vdash P(\bigcap_{x\in B}F(x))=\bigcap_{x\in B}P(F(x))$
6. $\vdash \bigcup_{x\in B}P(F(x))\subseteq P(\bigcup_{x\in B}F(x))$

## قواعد معرفی و حذف مجموعه ها در استنتاج طبیعی

$$\frac{x \in A}{x \in A \cup B}\,\mathrm{I}\cup \qquad \frac{x \in B}{x \in A \cup B}\,\mathrm{I}\cup \qquad \frac{x \in A \cup B \quad \begin{matrix}[x \in A]\\ \vdots \\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}[x \in B]\\ \vdots \\ C\end{matrix}}{C}\,\mathrm{E}\cup$$

$$\frac{x \in A \quad x \in B}{x \in A \cap B}\,\mathrm{I}\cap \qquad \frac{x \in A \cap B}{x \in A}\,\mathrm{E}\cap \qquad \frac{x \in A \cap B}{x \in B}\,\mathrm{E}\cap$$

$$\frac{x \in A \quad x \notin B}{x \in A - B}\,\mathrm{I}- \qquad \frac{x \in A - B}{x \in A}\,\mathrm{E}- \qquad \frac{x \in A - B}{x \notin B}\,\mathrm{E}-$$

$$\frac{\begin{matrix}[x \in A]\\ \vdots \\ x \in B\end{matrix}}{A \subseteq B}\,\mathrm{I}\subseteq \qquad \frac{x \in A \quad A \subseteq B}{x \in B}\,\mathrm{E}\subseteq$$

$$\frac{A \subseteq B}{A \in P(B)}\,\mathrm{IP} \qquad \frac{A \in P(B)}{A \subseteq B}\,\mathrm{EP}$$

$$\frac{\begin{matrix}[x \in A]\\ \vdots \\ t \in F(x)\end{matrix}}{t \in \bigcap_{x \in B} F(x)}\,\mathrm{I}\bigcap \qquad \frac{t \in \bigcap_{x \in B} F(x) \quad s \in B}{t \in F(s)}\,\mathrm{E}\bigcap$$

$$\frac{t \in F(s) \quad s \in B}{t \in \bigcup_{x \in B} F(x)}\,\mathrm{I}\bigcup \qquad \frac{t \in \bigcup_{x \in B} F(x) \quad \begin{matrix}[t \in F(x) \quad x \in B]\\ \vdots \\ C\end{matrix}}{C}\,\mathrm{E}\bigcup$$

$$\dfrac{\begin{matrix}[x\in A]\\ \vdots\\ x\in A\end{matrix}\qquad\qquad \begin{matrix}[x\in B]\\ \vdots\\ x\in B\end{matrix}}{A=B}\ \mathrm{I}= \qquad\qquad \dfrac{A=B\qquad\qquad t\in B}{t\in A}\ \mathrm{E}=$$

$$\dfrac{\begin{matrix}[y\in B]\\ \vdots\\ [t\in y]\end{matrix}}{t\in\bigcap B}\ \mathrm{I}\bigcap_B \qquad\qquad \dfrac{t\in\bigcap B\qquad\qquad s\in B}{t\in s}\ \mathrm{E}\bigcap_B$$

$$\dfrac{t\in s\qquad\qquad s\in B}{t\in\bigcup B}\ \mathrm{I}\bigcup_B \qquad\qquad \dfrac{\begin{matrix}[y\in B & t\in y]\\ \vdots & \vdots\\ t\in\bigcup B & C\end{matrix}}{C}\ \mathrm{E}\bigcup_B$$

$$\dfrac{t=A_i}{t\in\{A_1,\dots,A_n\}}\ \mathrm{I}\{\}_{i=1,\dots,n} \qquad \dfrac{\begin{matrix} & [t=A_1] & \cdots & [t=A_n]\\ & \vdots & & \vdots\\ t\in\{A_1,\dots,A_n\} & C & \cdots & C\end{matrix}}{C}\ \mathrm{E}\{\}_{i=1,\dots,n}$$

مثال۷. $B-\bigcup_{x\in A}F(x)\subseteq\bigcap_{x\in A}\big(B-F(x)\big)$

حل.

اثبات درختی:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[y\in B-\bigcup_{x\in A}F(x)]^1}{y\in B}\ \mathrm{E}- \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[y\in F(x)]^3\quad [x\in A]^2}{y\in\bigcup_{x\in A}F(x)}\ \mathrm{I}\bigcup_{x\in A} \qquad \dfrac{[y\in B-\bigcup_{x\in A}F(x)]^1}{y\notin\bigcup_{x\in A}F(x)}\ \mathrm{E}-}{\perp}\ \mathrm{E}\neg}{y\notin F(x)}\ \mathrm{I}\neg_3}{y\in B-F(x)}\ \mathrm{I}-}{y\in\bigcap_{x\in A}\big(B-F(x)\big)}\ \mathrm{E}\bigcap_{x\in A}\ 2}{B-\bigcup_{x\in A}F(x)\subseteq\bigcap_{x\in A}\big(B-F(x)\big)}\ \mathrm{I}\subseteq_1$$

مثال۸. $\bigcap_{x\in A}\big(B - F(x)\big) \subseteq B - \bigcup_{x\in A} F(x)$

اثبات درختی:

این از غیر تهی بودن A می آید

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\exists x\;\; x\in A \qquad \dfrac{\dfrac{[x\in A]^2 \quad \big[y\in \bigcap_{x\in A}\big(B-F(x)\big)\big]^1}{y\in B-F(x)}\,\mathrm{E}\cap}{y\in B}\,\mathrm{E}-}{y\in B}\,\mathrm{I}\exists_2 \qquad \dfrac{\dfrac{[y\in \bigcup_{x\in A}F(x)]^2 \quad \dfrac{[y\in F(x)]^3 \quad \dfrac{\dfrac{\big[y\in \bigcap_{x\in A}\big(B-F(x)\big)\big]^1 \quad [x\in A]^3}{y\in B-F(x)}\,\mathrm{E}\bigcap_{x\in A}}{y\notin F(x)}\,\mathrm{E}-}{\bot}\,\mathrm{E}\neg}{\bot}\,\mathrm{E}\bigcup_{x\in A}}{y\notin \bigcup_{x\in A}F(x)}\,\mathrm{I}\neg_2}{y\in B-\bigcup_{x\in A}F(x)}\,\mathrm{I}-}{\bigcap_{x\in A}\big(B-F(x)\big)\subseteq B-\bigcup_{x\in A}F(x)}\,\mathrm{I}\subseteq_1$$

مثال۹. $\forall(x\in B \to F(x)\subseteq A) \to \bigcup_{x\in B}F(x)\subseteq A$

اثبات درختی:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[y\in \bigcup_{x\in B}F(x)]^2 \qquad \dfrac{\dfrac{[x\in B]^3 \quad \dfrac{[\forall(x\in B\to F(x)\subseteq A)]^1}{x\in B\to F(x)\subseteq A}\,\mathrm{E}\forall}{F(x)\subseteq A}\,\mathrm{E}\to}{y\in A}\,\mathrm{E}\subseteq}{y\in A}\,\mathrm{E}\bigcup_{x\in B}\;3}{\bigcup_{x\in B}F(x)\subseteq A}\,\mathrm{I}\subseteq_2}{\forall(x\in B\to F(x)\subseteq A)\to \bigcup_{x\in B}F(x)\subseteq A}\,\mathrm{I}\to_1$$

# فصل سوم: رابطه و تابع

تعریف۱. زوج مرتب

$$\langle a,b\rangle = \{\{a,b\},\{a\}\}$$

قضیه۱.

$$\vdash \forall x\, \forall y\, \forall z\, \forall v\, (\langle x,y\rangle = \langle z,v\rangle \longrightarrow x = z \wedge y = v)$$

اثبات. به عنوان تمرین به عهده دانشجویان می باشد.

قضیه۲.

$$\vdash \forall x\, \forall y\, (x \in A \wedge y \in B \longrightarrow \langle x,y\rangle \in PP(A \cup B))$$

اثبات. چون $x \in A \subseteq A \cup B$ و $y \in B \subseteq A \cup B$ پس $x, y \in A \cup B$ .

بنابراین $\{x,y\} \subseteq A \cup B$ و $\{x\} \subseteq A \cup B$ پس $\{x,y\} \in P(A \cup B)$ پس $\{\{x,y\},\{x\}\} \subseteq P(A \cup B)$ و $\langle x,y\rangle = \{\{x,y\},\{x\}\} \in PP(A \cup B)$.

$$\dfrac{\langle x,y\rangle = PP(A\cup B) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x\in A}{x\in A\cup B}\,\mathrm{I}\cup \quad \dfrac{y\in B}{y\in A\cup B}\,\mathrm{I}\cup}{\{x,y\}\subseteq A\cup B}\,??}{\{x,y\}\in P(A\cup B)}\,\mathrm{IP} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{x\in A}{x\in A\cup B}\,\mathrm{I}\cup}{\{x\}\subseteq A\cup B}\,??}{\{x\}\in P(A\cup B)}\,\mathrm{IP}}{\{\{x,y\},\{x\}\}\subseteq P(A\cup B)}\,??}{\langle x,y\rangle = \{\{x,y\},\{x\}\}\in PP(A\cup B)}\,\mathrm{IP}}{\langle x,y\rangle \in PP(A\cup B)}\,\mathrm{E}=$$

■

## قاعده ی جدید

قاعده ی ؟؟ در مثال قبل را می توان به $\mathrm{I}\{\}\subseteq$ نشان داد:

$$\dfrac{x\in A \qquad y\in B}{\{x,y\}\subseteq A}\,\mathrm{I}\{\}\subseteq$$

اثبات قاعده فوق. (این قاعده بر اساس قواعد دیگر قابل اثبات است). فرض کنیم $z \in \{x,y\}$ و ثابت می کنیم که $z \in A$ است. بنابر فرض، دو حالت داریم:

حالت اول. اگر $z = x$ چون $x \in A$ پس $z \in A$ .

حالت دوم. اگر $z = y$ چون $y \in A$ پس $z \in A$ .

پس در هر دو حالت حکم ثابت می شود.

$$\dfrac{z \in \{x,y\} \qquad \dfrac{z = x \qquad x \in A}{z \in A}\,E{=} \qquad \dfrac{z = y \qquad y \in A}{z \in A}\,E{=}}{z \in A}\,E\{\,\}$$

$$\dfrac{z \in A}{\{x,y\} \subseteq A}\,I{\subseteq}$$

تعریف۲. ضرب دکارتی

$$A \times B = \{\langle x,y\rangle | x \in A \wedge y \in B\} = \{\langle x,y\rangle \in PP(A \cup B) | x \in A \wedge y \in B\}$$

**اصل تصریح در نظریه مجموعه ها**

با هر فرمول $\varphi(x)$ و مجموعه $A$، یک زیرمجموعه $B$ از $A$ متشکل اعضایی که دارای خاصیت $\varphi(x)$ هستند موجود است و آن را با $B = \{x \in A | \varphi(x)\}$ نشان می دهیم. اصل تصریح را با استفاده از نماد، بصورت زیر می توان بیان نمود:

$$\forall A\, \exists B\, \forall x\, \big(x \in B \leftrightarrow x \in A \wedge \varphi(x)\big)$$

بنابر اصل تصریح با استفاده از فرمول $\varphi(u) = \exists x\, \exists y\, (x \in A \wedge y \in B \wedge \langle x,y\rangle = u)$ و مجموعه ی $PP(A \cup B)$، می توان $A \times B$ را به صورت زیر داشت:

$$A \times B = \{u \in PP(A \cup B) | \exists x\, \exists y\, (x \in A \wedge y \in B \wedge \langle x,y\rangle = u)\}$$

توضیح: صورت اولیه ی اصل تصریح به صورت زیر بود؛

با هر خاصیت $\varphi(x)$ یک مجموعه داریم که آن را با $B = \{x | \varphi(x)\}$ نشان می دهیم.

اصل فوق را با استفاده از نماد، به صورت $\exists B\, \forall x\, \big(x \in B \leftrightarrow \varphi(x)\big)$ می توان بیان نمود.

مثال۱.

| | |
|---|---|
| $\bigcup A = \{x | \exists\, y \in A, x \in y\}$ | $\varphi(x) = \exists\, y \in A, x \in y$ |
| $\bigcap A = \{x | \forall\, y \in A, x \in y\}$ | $\varphi(x) = \forall\, y \in A, x \in y$ |
| $\bigcup_{x \in B} F(x) = \{x | \exists x \in B, u \in F(x)\}$ | $\varphi(x) = \exists x \in B, u \in F(x)$ |
| $\bigcap_{x \in B} F(x) = \{x | \forall x \in B, u \in F(x)\}$ | $\varphi(x) = \forall x \in B, u \in F(x)$ |
| $\{A, B\} = \{x | x \in A \vee x \in B\}$ | $\varphi(x) = x \in A \vee x \in B$ |
| $A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$ | $\varphi(x) = x \in A \vee x \in B$ |
| $A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$ | $\varphi(x) = x \in A \wedge x \in B$ |
| $A - B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$ | $\varphi(x) = x \in A \wedge x \notin B$ |
| $P(A) = \{x | x \subseteq A\}$ | $\varphi(x) = x \subseteq A$ |
| $A \times B = \{\langle x,y\rangle | x \in A \wedge y \in B\}$ $= \{u | \exists x\, \exists y (x \in A \wedge y \in B \wedge \langle x,y\rangle = u)\}$ | $\varphi(x) = \exists x\, \exists y (x \in A \wedge y \in B \wedge \langle x,y\rangle = u$ |

## پارادوکس راسل

برای فرمول $\varphi(x) = x \notin x$ بنابر اصل تصریح اولیه و خاصیت مجموعه ی متناظر $\forall x(x \in R \leftrightarrow x \notin x)$ را داریم. حال با جایگذاری $R$ به جای $x$ داریم: $(R \in R \leftrightarrow R \notin R)$، تناقض.

به علت بروز پارادوکس فوق اصل تصریح به صورت زیر اصلاح شد؛

با هر مجموعه ی $A$ و هر خاصیت $\varphi(x)$ یک مجموعه از $A$، از اعضای دارای خاصیت $\varphi(x)$ وجود دارد. با پذیرش اصل تصریح جدید پارادوکس راسل به قضیه ی زیر تبدیل شد.

**قضیه۳.** مجموعه ی تمام مجموعه ها وجود ندارد. $\vdash \neg\exists V\, \forall x\;\, x \in V$

اثبات. فرض کنیم $\exists V\, \forall x\;\, x \in V$ و بنابر قاعده ی $E\exists$، مثلاً فرض می کنیم $\forall x\;\, x \in V$، یعنی مجموعه ی تمام مجموعه ها باشد و بنابر اصل تصریح، فرض می کنیم $R = \{x \in V | x \notin x\}$. چون $V$ مجموعه ی تمام مجموعه هاست پس $R = \{x | x \notin x\}$ (چرا؟) و دوباره به تناقض قبل می رسیم. و به طور دقیق تر داریم:

اثبات لیستی:

| | |
|---|---|
| $1)\ \exists V\, \forall x\;\, x \in V$ | فرض (خلف) |
| $2)\ \forall x\;\, x \in V$ | فرض (مثلاً) |
| $3)\ \forall A\, \exists B\, \forall x(x \in B \leftrightarrow x \in A \wedge x \notin x)$ | اصل تصریح |
| $4)\ \exists B\, \forall x(x \in B \leftrightarrow x \in V \wedge x \notin x)$ | $E\forall$ و 3 |
| $5)\ \forall x(x \in R \leftrightarrow x \in V \wedge x \notin x)$ | فرض (مثلاً) و 4 |
| $6)\ R \in R \leftrightarrow R \in V \wedge R \notin R$ | $E\forall$ و 5 |
| $7)\ R \in V$ | $E\forall$ و 2 |
| $8)\ R \in R \leftrightarrow R \notin R$ | 6 و 7 و ؟ |
| $9)\ \bot$ | |

■

علاوه بر پذیرش اصل تصریح اصلاح شده، چند مورد خاص از صورت اول اصل تصریح به صورت زیر را می پذیریم:

| | |
|---|---|
| اصل وجود مجموعه ی تهی | $1.\ \emptyset = \{x | x \notin x\}$ |
| اصل زوج سازی | $2.\ \{A, B\} = \{x | x \in A \vee x \in B\}$ |
| اصل اجتماع | $3.\ \bigcup A = \{x | \exists\, y \in A, x \in y\}$ |
| اصل توان | $4.\ P(A) = \{x | x \subseteq A\}$ |

با پذیرش این ۴ حالت خاص، صورت اول اصل تصریح و همچنین اصل تصریح اصلاح شده، می توان وجود مجموعه های دیگر را ثابت کرد.

مثلاً با استفاده از اصول زوج سازی و اجتماع $\bigcup\{A,B\}$ یعنی $A \cup B$ را داریم و بنابر اصل توان $P(A \cup B)$ و $P\big(P(A \cup B)\big)$ و از آنجا بنابر اصل تصریح اصلاح شده مجموعه ی زیر را خواهیم داشت.

$$
\begin{aligned}
A \times B &= \{u \mid \exists x\, \exists y(x \in A \wedge y \in B \wedge \langle x,y \rangle = u)\} \\
&= \{u \in PP(A \cup B) \mid \exists x\, \exists y(x \in A \wedge y \in B \wedge \langle x,y \rangle = u)\}
\end{aligned}
$$

همچنین بنابر اصل اصلاح شده داریم:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$
$$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$
$$\text{If } \ A \neq \emptyset \ \text{ and } \ a \in A \ \text{ Then } \ \bigcap A = \{x \in a \mid \forall\, y \in A, x \in A\}$$

و مجموعه $PP(A \cup B)$ از اصل ذکر شده در بالا بدست می آید.

$$PP(A \cup B) = PP(\bigcup\{A,B\})$$

## قواعد معرفی و حذف حاصل ضرب دکارتی در استنتاج طبیعی

$$
\frac{u \in A \qquad v \in B}{\langle u,v \rangle \in A \times B}\, I\times
\qquad
\frac{t \in A \times B \qquad \begin{matrix} [t = \langle u,v \rangle] \quad [u \in A] \quad [v \in B] \\ \ddots \quad \vdots \quad .\cdot{}^{\cdot} \\ C \end{matrix}}{C}\, E\times
$$

مطابق معمول متغیرهای $u$ و $v$ در فرمول های $t \in A \times B$ و $C$ و فرضیات دیگر آزاد نیستند.

قضیه۴.

$P_{1-1}: \vdash A = B \longrightarrow A \times B = B \times A$

$P_{1-2}: \vdash A \neq \emptyset \ \wedge \ B \neq \emptyset \ \wedge \ A \times B = B \times A \longrightarrow A = B$

$P_2: \vdash A \times B = \emptyset \ \leftrightarrow A = \emptyset \ \vee \ B = \emptyset$

$P_3: \vdash A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

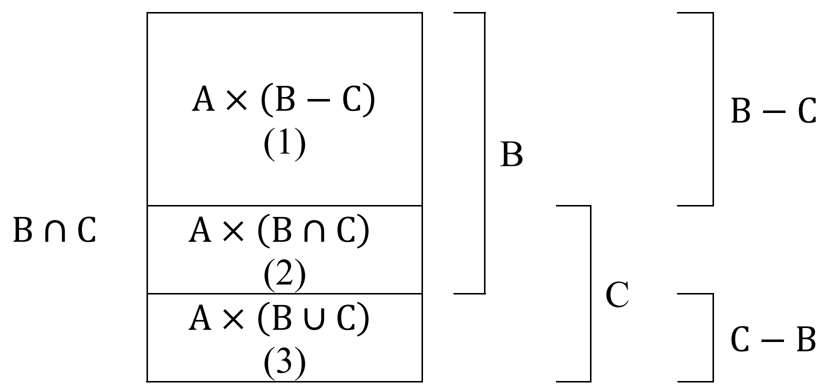
$P_4: \vdash A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$

$P_5: \vdash A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

$P_6: \vdash A \times \bigcup_{x \in B} F(x) = \bigcup_{x \in B}(A \times F(x))$

$P_7: \vdash A \times \bigcap_{x \in B} F(x) = \bigcap_{x \in B}(A \times F(x))$

در شکل زیر برخی از روابط فوق به تصویر کشیده شده است؛




کل مستطیل $= A \times (B \cup C)$

مستطیل 1 و 2 $= A \times B$

مستطیل 3 و 2 $= A \times C$

$$(A\times B)\cup(A\times C)=\left(\text{مستطیل 1 و 2}\right)\cup\left(\text{مستطیل 3 و 2}\right)=\text{کل مستطیل}=A\times(B\cup C)$$
$$(A\times B)\cap(A\times C)=\left(\text{مستطیل 1 و 2}\right)\cap\left(\text{مستطیل 3 و 2}\right)=\text{مستطیل}2=A\times(B\cap C)$$
$$(A\times B)-(A\times C)=\left(\text{مستطیل 1 و 2}\right)-\left(\text{مستطیل 3 و 2}\right)=\text{مستطیل}1=A\times(B-C)$$

اثبات $P_{1-1}$.

حالت۱. فرض کنید $A=B$ و $x\in A\times B$ و ثابت می کنیم $x\in B\times A$.

چون $x\in A\times B$ مثلاً $x=\langle u,v\rangle$ و $u\in A$ و $v\in B$ چون $A=B$ و $u\in A$ پس $u\in B$ و چون $A=B$ و $v\in B$ پس $v\in A$. چون $v\in A$ و $u\in B$ و $x=\langle u,v\rangle$ پس $x\in B\times A$

حالت۲. فرض کنید $A=B$ و $x\in B\times A$ و ثابت می کنیم $x\in A\times B$. (به طور مشابه)

$$\dfrac{[x=\langle u,v\rangle]\qquad \dfrac{\dfrac{[u\in A]\quad A=B}{u\in B}\,E{=}\qquad \dfrac{[v\in B]\quad A=B}{v\in A}\,E{=}}{\langle u,v\rangle\in B\times A}\,I\times}{x\in B\times A}\,E{=}$$

اثبات $P_3$. فرض می کنیم $x\in A\times(B\cup C)$ و ثابت می کنیم $x\in(A\times B)\cup(A\times C)$ بنابر فرض مثلاً $x=\langle u,v\rangle$ و $u\in A$ و $v\in B\cup C$، دو حالت داریم:

حالت اول. $v\in B$ چون $u\in A$ پس $x=\langle u,v\rangle\in A\times B$ و بنابراین $x\in(A\times B)\cup(A\times C)$.

حالت دوم. $v\in C$ چون $u\in A$ پس $x=\langle u,v\rangle\in A\times C$ و بنابراین $x\in(A\times B)\cup(A\times C)$.

در هر دو حالت حکم برقرار است، پس حکم ثابت می شود.

اثبات درختی:

$$\dfrac{v\in B\cup C\qquad \dfrac{\dfrac{[x=\langle u,v\rangle]\quad \dfrac{[u\in A]\quad [v\in B]}{\langle u,v\rangle\in A\times B}\,I\times}{x\in A\times B}\,E{=}}{x\in(A\times B)\cup(A\times C)}\,I\cup\qquad \dfrac{\dfrac{[x=\langle u,v\rangle]\quad \dfrac{[u\in A]\quad [v\in C]}{\langle u,v\rangle\in A\times C}\,I\times}{x\in A\times C}\,E{=}}{x\in(A\times B)\cup(A\times C)}\,I\cup}{x\in(A\times B)\cup(A\times C)}\,E\cup$$

■

تمرین۱. سایر گزاره های قضیه۴ را اثبات کنید.

تعریف۳.

$$\mathrm{Dom}(R) = \{x | \exists y \ \langle x, y\rangle \in R\}$$
$$\mathrm{Im}(R) = \mathrm{Rang}(R) = \{y | \exists x \ \langle x, y\rangle \in R\}$$

مثال۲.

$$R = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 4,5\rangle\}$$
$$\bigcup R = \langle 1,2\rangle \cup \langle 2,3\rangle \cup \langle 4,5\rangle = \big\{\{1,2\}, \{1\}\big\} \cup \big\{\{3,4\}, \{3\}\big\} \cup \big\{\{5,6\}, \{5\}\big\} =$$
$$\big\{\{1,2\}, \{1\}, \{3,4\}, \{3\}, \{5,6\}, \{5\}\big\}$$
$$\bigcup \bigcup R = \{1,2\} \cup \{1\} \cup \{3,4\} \cup \{3\} \cup \{5,6\} \cup \{5\} = \{1,2,3,4,5,6\}$$
$$\mathrm{Dom}(R) = \{1,3,5\} \subseteq \bigcup \bigcup R$$
$$\mathrm{Im}(R) = \{2,4,6\} \subseteq \bigcup \bigcup R$$

پس می توان $\mathrm{Dom}(R)$ و $\mathrm{Im}(R)$ را به صورت زیر تعریف کرد:

$$\mathrm{Dom}(R) = \{x \in \bigcup \bigcup R \,|\, \exists y \ \langle x, y\rangle \in R\}$$
$$\mathrm{Im}(R) = \mathrm{Rang}(R) = \{y \in \bigcup \bigcup R \,|\, \exists x \ \langle x, y\rangle \in R\}$$

تعاریف فوق بر اساس اصل تصریح اصلاح شده قابل قبول است.

قضیه۵.

1. $\mathrm{Dom}(R) \subseteq \bigcup \bigcup R$
2. $\mathrm{Im}(R) \subseteq \bigcup \bigcup R$

اثبات بند۱.

فرض می کنیم $x \in \mathrm{Dom}(R)$ و مثلاً فرض می کنیم $\langle x, y\rangle \in R$ چون $\langle x, y\rangle = \big\{\{x, y\}, \{x\}\big\}$ پس $\{x\} \in \bigcup R$ چون $x \in \{x\}$ پس $x \in \bigcup \bigcup R$.

■

تمرین۲. بند۲ قضیه۵ را اثبات کنید.

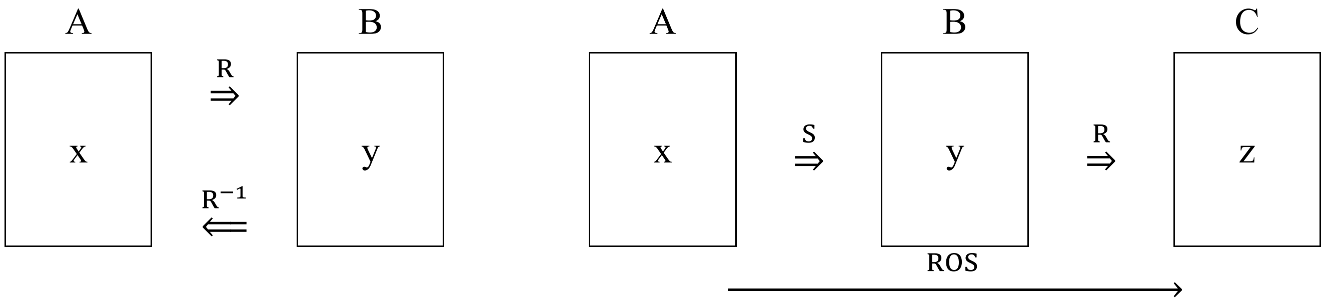
## قواعد معرفی و حذف Dom و Im در استنتاج طبیعی

$$\frac{\langle t, s\rangle \in R}{t \in \mathrm{Dom}(R)}\ \mathrm{I\ Dom} \qquad \frac{t \in \mathrm{Dom}(R) \qquad \begin{array}{c}[\langle t, y\rangle] \in R \\ \vdots \\ C\end{array}}{C}\ \mathrm{E\ Dom}$$

$$\frac{}{t \in \mathrm{Im}(R)}\ \mathrm{I\ Im} \qquad \frac{t \in \mathrm{Im}(R) \qquad \begin{array}{c}[\langle y, t\rangle] \in R \\ \vdots \\ C\end{array}}{C}\ \mathrm{E\ Im}$$

تعریف۴.

$$R^{-1} = \{\langle x,y\rangle | \langle y,x\rangle \in R\}$$
$$ROS = \{\langle x,y\rangle | \exists z\ \langle x,y\rangle \in S \wedge \langle z,y\rangle \in R\}$$




## قواعد معرفی و حذف ROS و $R^{-1}$ در استنتاج طبیعی

$$\frac{\langle t,s\rangle \in R}{\langle s,t\rangle \in R^{-1}}\ I^{-1} \qquad \frac{v \in R^{-1} \qquad \begin{matrix}[v=\langle y,x\rangle \quad \langle x,y\rangle] \in R\\ \ddots \quad \iddots\\ C\end{matrix}}{C}\ E^{-1}$$

$$\frac{\langle s,t\rangle \in S \qquad \langle t,u\rangle \in R}{\langle s,u\rangle \in ROS}\ IO \qquad \frac{v \in ROS \qquad \begin{matrix}[v=\langle x,y\rangle \quad \langle x,z\rangle \in S \quad \langle z,y\rangle \in R]\\ \ddots \quad \vdots \quad \iddots\\ \mathbf{C}\end{matrix}}{\mathbf{C}}\ EO$$

قضیه۶.

1. $(TOS)OR = TO(SOR)$
2. $(ROS)^{-1} = S^{-1}OR^{-1}$

اثبات بند۱.

حالت اول. فرض می کنیم $v \in (TOS)OR$ و ثابت می کنیم $v \in TO(SOR)$.

بنابر فرض مثلاً برای x و y و z داریم $\langle z,y\rangle \in TOS$ و $\langle x,z\rangle \in R$ و $v = \langle x,y\rangle$. دوباره با توجه به فرض $\langle z,y\rangle \in TOS$ مثلاً برای w داریم $\langle w,y\rangle \in T$ و $\langle z,w\rangle \in S$ چون $\langle z,w\rangle \in S$ و $\langle x,z\rangle \in R$ پس $\langle x,w\rangle \in SOR$ پس $v = \langle x,y\rangle \in TO(SOR)$.

حالت دوم. فرض می کنیم $v \in TO(SOR)$ و ثابت می کنیم $v \in (TOS)OR$. (به طور مشابه)

اثبات بند۲.

اثبات متنی:

حالت اول. فرض می کنیم $v \in (ROS)^{-1}$ و ثابت می کنیم $v \in S^{-1}OR^{-1}$.

بنابر فرض مثلاً داریم $\langle x,y\rangle \in ROS$ و $v = \langle y,x\rangle$. دوباره مثلاً برای $z$ ای داریم؛ $\langle z,y\rangle \in R$ و $\langle x,z\rangle \in S$ پس $\langle z,x\rangle \in S^{-1}$ و $\langle y,z\rangle \in R^{-1}$ و بنابراین $v = \langle y,x\rangle \in S^{-1}OR^{-1}$.

حالت دوم. فرض می کنیم $v \in S^{-1}OR^{-1}$ و ثابت می کنیم $v \in (ROS)^{-1}$. (به طور مشابه)

اثبات لیستی:

| | |
|---|---|
| فرض | $1)\ v \in S^{-1}OR^{-1}$ |
| فرض مثلاً و بنابر۱ | $2)\ v = \langle y,x\rangle$ |
| فرض مثلاً و بنابر۱ | $3)\ \langle y,z\rangle \in R^{-1}$ |
| فرض مثلاً و بنابر۱ | $4)\ \langle z,x\rangle \in S^{-1}$ |
| بنابر۳ | $5)\ \langle z,y\rangle \in R$ |
| بنابر۴ | $6)\ \langle x,z\rangle \in S$ |
| بنابر۵ و ۶ | $7)\ \langle x,y\rangle \in ROS$ |
| بنابر۷ | $8)\ \langle y,x\rangle \in (ROS)^{-1}$ |
| بنابر۸ و ۲ | $9)\ v \in (ROS)^{-1}$ |

| | |
|---|---|
| فرض | $1)\ v \in (ROS)^{-1}$ |
| فرض مثلاً و بنابر۱ | $2)\ v = \langle y,x\rangle$ |
| فرض مثلاً و بنابر۱ | $3)\ \langle x,y\rangle \in ROS$ |
| فرض مثلاً و بنابر۳ | $4)\ \langle x,z\rangle \in S$ |
| فرض مثلاً و بنابر۳ | $5)\ \langle z,y\rangle \in R$ |
| بنابر۴ | $6)\ \langle z,x\rangle \in S^{-1}$ |
| بنابر۵ | $7)\ \langle y,z\rangle \in R^{-1}$ |
| بنابر۶ و ۷ | $8)\ \langle y,x\rangle \in S^{-1}OR^{-1}$ |
| بنابر۸ و ۲ | $9)\ v \in S^{-1}OR^{-1}$ |

■

## تابع

تابع رابطه ای است که هیچ دو زوج مرتبی با مؤلفه اول یکسان نداشته باشد. تابع یک به یک است اگر هیچ دو زوج مرتبی با مؤلفه ی دوم یکسان نداشته باشد. به طور نمادین، تعاریف زیر را داریم:

$1)\ \mathrm{Func}(f) \equiv \forall x\, \forall y\, \forall z\, (\langle x,y\rangle \in f \ \wedge\ \langle x,z\rangle \in f \longrightarrow y = z\,)$

$2)\ \mathrm{One\ to\ one}(f) \equiv \forall x\, \forall y\, \forall z\, (\langle x,z\rangle \in f \wedge \langle y,z\rangle \in f \longrightarrow x = y)$

$3)\ f{:}\, X \longrightarrow Y \equiv \mathrm{Func}(f) \wedge \mathrm{Dom}(f) = X \wedge \mathrm{Im}(f) \subseteq Y$

$4)\ f{:}\, X \xrightarrow{1-1} Y \equiv (f{:}\, X \longrightarrow Y) \wedge \mathrm{One\ to\ one}(f)$

$5)\ f{:}\, X \xrightarrow{\mathrm{Onto}} Y \equiv (f{:}\, X \longrightarrow Y) \wedge \mathrm{Im}(f) = Y$

$6)\ f{:}\, X \xrightarrow{1-1,\mathrm{Onto}} Y \equiv \left(\ f{:}\, X \xrightarrow{1-1} Y\right) \wedge \mathrm{Im}(f) = Y$

تعریف۵. برای $A \subseteq X$ و $B \subseteq Y$ و $f{:}\, X \longrightarrow Y$ تعریف می کنیم:

$$f[A] = \{y \in Y | \exists x \in A\ f(x) = y\} = \{y \in Y | \exists x \in A\ \langle x,y\rangle \in f\,\}$$
$$f^{-1}[B] = \{x \in A | f(x) \in A\} = \{x \in A | \exists y \in B\ \langle x,y\rangle \in f\,\}$$

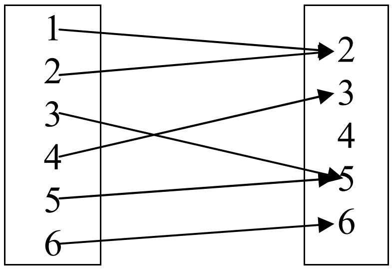
که در آن $f(x) = y$ به معنای $\langle x,y\rangle \in f$ می باشد.

**قواعد معرفی و حذف تابع در استنتاج طبیعی**

$$\frac{\begin{array}{c}[\langle x,y\rangle \in f \quad \langle x,z\rangle \in f]\\ \ddots \quad \iddots \\ y=z\end{array}}{\mathrm{Func}(f)}\ \mathrm{IFunc} \qquad \frac{\mathrm{Func}(f) \quad \langle t,s\rangle \in f \quad \langle t,u\rangle \in f}{}\ \mathrm{EFunc}$$

$$\frac{\begin{array}{c}[\langle x,z\rangle \in f \quad \langle y,z\rangle \in f]\\ \ddots \quad \iddots \\ x=y\end{array}}{\text{One to one}(f)}\ \mathrm{I1-1} \qquad \frac{\text{One to one}(f) \quad \langle s,t\rangle \in f \quad \langle u,t\rangle \in f}{}\ \mathrm{E1-1}$$

مثال۳.



$X=\{1,2,3,4,5,6\}$
$Y=\{2,3,4,5,6\}$
$f=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,5\rangle,\langle 4,3\rangle,\langle 5,5\rangle,\langle 6,6\rangle\}$

$\langle 1,2\rangle,\langle 2,2\rangle \in f$ f یک به یک نیست

$\mathrm{Im}(f)=\{2,3,5,6\}\neq Y$ f پوشا نیست

$A_1=\{1,2\} \quad A_2=\{1,2,3,5\} \quad A_3=\{1\} \quad A_4=\{1,3\} \quad A_5=\{2,3\} \quad A_6=\{2\}$

$f[A_1]=\{2\} \quad f[A_2]=\{2,5\} \quad f[A_3]=\{2\} \quad f[A_4]=\{2,5\} \quad f[A_5]=\{2,5\}$

$f^{-1}\big[f[A_1]\big]=f^{-1}[\{2\}]=\{1,2\}=A_1$

$f^{-1}\big[f[A_2]\big]=f^{-1}[\{1,2,3,5\}]=\{2,5\}=A_2$

$f^{-1}\big[f[A_3]\big]=f^{-1}[\{2\}]=\{1,2\}\supsetneqq A_3$

$f^{-1}\big[f[A_4]\big]=f^{-1}[\{2,5\}]=\{1,2,3,5\}\supsetneqq A_4$

$A_1\cup A_5=\{1,2,3\} \qquad A_1\cap A_5=\{2\} \qquad A_4-A_5=\{1\}$

$A_1-A_5=\{1\} \qquad A_3\cap A_6=\emptyset \qquad A_3-A_6=\{1\}$

$f[A_3]-f[A_6]=\{2\}$

$f[A_3\cap A_6]=f[A_3]\cap f[A_3]=\{2\}$

$f[A_1\cap A_5]=\{2\}=f[A_1]\cap f[A_5]=\{2\}\cap\{2,5\}=\{2\}$

$$f[A_1 \cup A_5] = \{2,5\} = f[A_1] \cup f[A_5] = \{2\} \cup \{2,5\} = \{2,5\}$$

$$f[A_1 - A_5] = \{2\} = f[A_1] - f[A_5] = \{2\} - \{2,5\} = \emptyset$$

قضیه۷. برای $A, A_1, A_2 \subseteq X$ و $B, B_1, B_2 \subseteq Y$ و $f: X \longrightarrow Y$ تعریف می کنیم:

1. $A \subseteq f^{-1}[f[A]]$
2. $f\left[f^{-1}[B]\right] \subseteq B$
3. $f[A_1 \cup A_2] = f[A_1] \cup f[A_2]$
4. $f[A_1 \cap A_2] \subseteq f[A_1] \cap f[A_2]$
5. $f[A_1] - f[A_2] \subseteq f[A_1 - A_2]$
6. $f^{-1}[B_1 \cup B_2] = f^{-1}[B_1] \cup f^{-1}[B_2]$
7. $f^{-1}[B_1 \cap B_2] = f^{-1}[B_1] \cap f^{-1}[B_2]$
8. $f^{-1}[B_1 - B_2] = f^{-1}[B_1] - f^{-1}[B_2]$

تمرین۳. قضیه۷ را اثبات کنید.

قضیه۸. فرض کنیم $f: X \longrightarrow Y$ و $\{A_i\}_{i \in I}$ یک خانواده از زیرمجموعه های $X$ و $\{B_i\}_{i \in I}$ یک خانواده از زیر مجموعه های $Y$ باشد، در این صورت داریم:

1. $f(\bigcap_{i \in I} A_i) \subseteq \bigcap_{i \in I} f[A_i]$
2. $f(\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} f[A_i]$
3. $f^{-1}(\bigcap_{i \in I} B_i) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}[B_i]$
4. $f^{-1}(\bigcup_{i \in I} B_i) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}[B_i]$

نکته۱. در حالت های $f^{-1}$ همیشه حالت تساوی برقرار است.

تمرین۴. قضیه۸ را اثبات کنید.

قضیه۹. فرض کنیم $f: X \longrightarrow Y$، احکام زیر معادلند:

1. $f$ یک به یک است.
2. $f$ تابع است.
3. تابع $g: Y \longrightarrow X$ وجود دارد که $gof = Id_x: X \longrightarrow X$ (تابع همانی)
4. $\forall A \subseteq X \quad A = f^{-1}\left[f[A]\right]$
5. $\forall A_1, A_2 \subseteq X \quad f[A_1 \cap A_2] = f[A_1] \cap f[A_2]$
6. $\forall A_1, A_2 \subseteq X \quad f[A_1 - A_2] = f[A_1] - f[A_2]$
7. $f(\bigcap_{i \in I} A_i) \subseteq \bigcap_{i \in I} f[A_i]$ به ازای هر خانواده $\{A_i\}_{i \in I}$ از زیرمجموعه های $X$.

اثبات.

$(2) \longrightarrow (1)$ فرض می کنیم $f$ یک به یک است، $\langle x, y\rangle, \langle x, z\rangle \in f^{-1}$ و ثابت می کنیم $y = z$ و بنابراین $f^{-1}$

تابع است. چون $\langle x,y\rangle,\langle x,z\rangle\in f^{-1}$ پس $\langle y,x\rangle,\langle z,x\rangle\in f$ و چون f یک به یک است پس $y=z$.

$(1)\longrightarrow(2)$ فرض می کنیم $f^{-1}$ یک به یک است، $\langle x,z\rangle,\langle y,z\rangle\in f$ و ثابت می کنیم $y=z$ و بنابراین f یک به یک است. چون $\langle x,z\rangle,\langle y,z\rangle\in f$ پس $\langle z,x\rangle,\langle z,y\rangle\in f^{-1}$ و چون $f^{-1}$ یک تابع است پس $y=z$.

$(1)\longrightarrow(3)$ فرض می کنیم $g\colon Y\longrightarrow X$ و $gof=Id_x$ و برای $x_1,x_2\in A$ ، $f(x_1)=f(x_2)$ و ثابت می کنیم $x_1=x_2$. بنابر فرض $f(x_1)=f(x_2)$ داریم $g\big(f(x_1)\big)=g\big(f(x_2)\big)$ و بنابر فرض $gof=Id_x$ داریم؛

$$f(x_1)=f(x_2)\longrightarrow g\big(f(x_1)\big)=g\big(f(x_2)\big)\xrightarrow{\text{فرض}}x_1=x_2$$

$(4)\longrightarrow(1)$ فرض می کنیم f یک به یک است و $A\subseteq X$ و ثابت می کنیم $A=f^{-1}\big[f[A]\big]$. $A\subseteq f^{-1}\big[f[A]\big]$ درحالت کلی برقرار است کافیست ثابت کنیم $f^{-1}\big[f[A]\big]\subseteq A$. فرض کنیم $x\in f^{-1}\big[f[A]\big]$ پس $f(x)\in f[A]$ پس مثلاً برای $y\in A$ داریم $\langle y,f(x)\rangle\in f$ و چون $\langle y,f(y)\rangle\in f$ و f تابع است پس $f(x)=f(y)$ و چون f یک به یک است $x=y$ و چون $y\in A$ پس $x\in A$.

$(1)\longrightarrow(4)$ فرض می کنیم $A=f^{-1}\big[f[A]\big]\quad\forall A\subseteq X$ و برای $x_1,x_2\in A$ ، $f(x)=f(y)$ و ثابت می کنیم $x_1=x_2$. برای $A=\{x_1\}$ داریم؛ $A\subseteq f^{-1}\big[f[A]\big]$ در حالت کلی برقرار است کافیست که ثابت کنیم $f^{-1}\big[f[A]\big]\subseteq A$.

$$f[A]=f[\{x_1\}]=\{f(x_1)\}\xrightarrow{f(x_1)=f(x_2)}f(x_2)\in f[A]\longrightarrow x_2\in f^{-1}\big[f[A]\big]=A\longrightarrow$$
$$x_2\in A=\{x_1\}\longrightarrow x_1=x_2$$

$(5)\longrightarrow(1)$ فرض می کنیم f یک به یک است و $\forall A_1,A_2\subseteq X$ ثابت میکنیم؛

$$f[A_1\cap A_2]=f[A_1]\cap f[A_2]$$

$f[A_1\cap A_2]\subseteq f[A_1]\cap f[A_2]$ در حالت کلی برقرار است کافیست ثابت کنیم؛

$$f[A_1]\cap f[A_2]\subseteq f[A_1\cap A_2]$$

فرض می کنیم $y\in f[A_1]\cap f[A_2]$ و ثابت می کنیم که $y\in f[A_1\cap A_2]$. بنابر فرض داریم، $y\in f[A_1]$ و $y\in f[A_2]$ پس مثلاً برای ، $x_1\in A_1$ و $x_2\in A_2$ داریم، $y=f(x_1)$ و $y=f(x_2)$ پس $f(x_1)=f(x_2)$ و بنابر یک به یک بودن f داریم، $x_1=x_2$. چون $x_2\in A_2$ و $x_1=x_2$ پس $x_1\in A_2$ و چون $x_1\in A_1$ پس $x_1\in A_1\cap A_2$ و بنابر $y=f(x_1)$ داریم $y\in f[A_1\cap A_2]$.

$(1)\longrightarrow(5)$ فرض می کنیم $f[A_1\cap A_2]=f[A_1]\cap f[A_2]\quad\forall A_1,A_2\subseteq X$ و برای $x_1,x_2\in A$ ، $f(x_1)=f(x_2)$ و ثابت می کنیم $x_1=x_2$. برای $A_1=\{x_1\}$ و $A_2=\{x_2\}$ داریم:

$$f[A_1\cap A_2]=f[A_1]\cap f[A_2]=f[\{x_1\}]\cap f[\{x_2\}]=\{f(x_1)\}\cap\{f(x_2)\}=\{f(x_1)\}\neq\phi$$

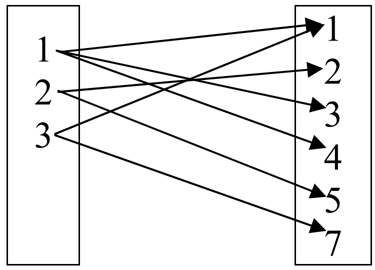
اگر $x_1\neq x_2$ پس $A_1\cap A_2=\phi$ و $f[A_1\cap A_2]=f[\phi]=\phi$ به تناقض می رسیم پس $x_1=x_2$. ■

تمرین۵. سایر حالت های اثبات نشده در قضیه۹ را اثبات کنید.

## اصل انتخاب

برای هر رابطه $R$، تابع $f$ موجود است که $f \subseteq R$ و $\mathrm{Dom}(f) = \mathrm{Dom}(R)$.

مثال۴. در این مثال، از هر تعداد زوج مرتب (پیکان) با ابتدای یکسان، دقیقاً یکی انتخاب شده و در تابع گذاشته می شود، بدین ترتیب توابع انتخاب مختلفی می توان ساخت:




$$R = \{\langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,5\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 3,7\rangle\}$$
$$f_1 = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,5\rangle, \langle 3,1\rangle\}$$
$$f_2 = \{\langle 1,3\rangle, \langle 2,5\rangle, \langle 3,1\rangle\}$$
$$f_3 = \{\langle 1,3\rangle, \langle 2,5\rangle, \langle 3,7\rangle\}$$
$$f_4 = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,1\rangle\}$$

در تمام موارد فوق $f_i \subseteq R$ و $\mathrm{Dom}(f_i) = \mathrm{Dom}(R) = \{1,2,3\}$.

قضیه۱۰. فرض کنیم $f: X \longrightarrow Y$، احکام زیر معادلند:

1. $f$ پوشا است.
2. تابع $g: Y \longrightarrow X$ وجود دارد که $fog = \mathrm{Id}_y: Y \longrightarrow Y$ (تابع همانی)
3. $\forall\, B \subseteq Y \quad f\big[f^{-1}[B]\big] = B$

اثبات.

$(2) \longrightarrow (1)$ با استفاده از اصل انتخاب تابع $g$ وجود دارد که $g \subseteq f^{-1}$ و $\mathrm{Dom}(g) = \mathrm{Dom}(f^{-1})$. چون $\mathrm{Dom}(f^{-1}) = \mathrm{Rang}(f) = Y$ و چون $\mathrm{Rang}(g) \subseteq \mathrm{Rang}(f^{-1}) = \mathrm{Dom}(f) = X$ پس $g: Y \longrightarrow X$. همچنین $fog = \mathrm{Id}_y$ زیرا اگر $w \in fog$ بنابر فرض مثلاً $w = \langle y,z\rangle$ و $\langle x,z\rangle \in f$ و $\langle y,x\rangle \in g$ چون $g \subseteq f^{-1}$ پس $\langle y,x\rangle \in f^{-1}$ پس $\langle x,y\rangle \in f$ و چون $\langle x,z\rangle \in f$ و $f$ تابع است پس $y = z$ و پس $w = \langle y,y\rangle \in \mathrm{Id}_y$. یعنی $fog \subseteq \mathrm{Id}_y$. اگر $w \in \mathrm{Id}_y$ بنابر فرض مثلاً $w = \langle y,y\rangle$ و $y \in Y = \mathrm{Dom}(g)$ پس مثلاً $\langle y,z\rangle \in g$ چون $g \subseteq f^{-1}$ پس $\langle y,z\rangle \in f^{-1}$ پس $\langle z,y\rangle \in f$ و چون $\langle y,z\rangle \in g$ پس $w = \langle y,y\rangle \in fog$. یعنی $\mathrm{Id}_y \subseteq fog$.

■

تمرین۶. سایر حالت های اثبات نشده در قضیه۱۰ را اثبات کنید.

# فصل چهارم: مجموعه های هم توان

## تناظر یک به یک (مجموعه های هم توان)

تعریف۱. اگر $f: A \xrightarrow{1-1,\mathrm{onto}} B$ گوییم $f$ یک هم توانی (تناظر یک به یک) بین $A$ و $B$ است و با نماد $A \simeq_f B$ نمایش می دهیم. اگر $f: A \xrightarrow{1-1} B$ گوییم $f$ یک کم توانی بین $A$ و $B$ است و با نماد $A \lesssim_f B$ نمایش می دهیم.

قضیه۱. تابع $f: A \xrightarrow{\mathrm{onto}} B$ وجود دارد اگر و تنها اگر تابع $g: B \xrightarrow{1-1} A$ باشد. (بنابراین $B \lesssim_g A$)

اثبات. $f: A \xrightarrow{\mathrm{onto}} B$ اگر و تنها اگر $f$ وارون راست $g$ باشد یعنی $g: B \longrightarrow A$ موجود باشد که $fog = \mathrm{Id}_B$ و بنابراین $f$ وارون چپ $g$ است و در نتیجه یک به یک است.

■

مثال۱.

$$f: \omega \xrightarrow{1-1,\mathrm{onto}} \omega - \{0\}$$
$$f(n) = n + 1$$
$$\omega = \{0,1,2,3,4, \dots, n, n+1, \dots\}$$
$$\omega - \{0\} = \{1,2,3,4,5, \dots, n+1, n+2, \dots\}$$

بنابراین $\omega \lesssim_f \omega - \{0\}$

مثال۲. در فضا هتلی با بی نهایت اتاق $0$ و $1$ و $2$ و ... وجود دارد که همگی پر هستند. مسافری جدید از راه می رسد و مسئول هتل او را در هتل جای می دهد، به این صورت که برگه ای به مسافر می دهد که روی آن نوشته شده است: «لطفاً به اتاق بعدی رفته و آنجا ساکن شوید و این برگه را به ساکن اتاق تحویل دهید». مسافر جدید به اتاق شماره $0$ رفته و برگه را به ساکن آن می دهد و ساکن اتاق $0$ به اتاق $1$ رفته و ... مسافر اتاق $n$ به اتاق $n + 1$ نقل مکان می کند، بدین ترتیب تمام مسافرین در هتل جا داده می شوند. اگر $5$ مسافر جدید بیایند کافی است که روی برگه نوشته شود؛ «لطفاً به $5$ اتاق بعد رفته و آنجا ساکن شوید و این برگه را به ساکن اتاق تحویل دهید». $5$ مسافر جدید به اتاق های $0$ و $1$ و $2$ و $3$ و $4$ رفته و برگه های خود را به ساکن اتاق تحویل دادند و ...

ضابطه نقل مکان مسافرین هتل:

$$f: \omega \xrightarrow{1-1,\mathrm{onto}} \omega - \{0,1,2,3,4\} = \{5,6,7,8, \dots\}$$
$$f(n) = n + 5$$
$$\omega = \{0,1,2,3,4, \dots, n, \dots\}$$
$$\omega - \{0,1,2,3,4\} = \{5,6,7,8,9, \dots, n+5, \dots\}$$

هتل مشابهی که کاملاً پر است می خواهد تمام مسافرین خود را به این هتل منتقل کند. مسئول هتل شماره 2 به مسافرین هتل خود اعلام می کند که شماره های اتاق خود را در 2 ضرب کنید و یک واحد به آن اضافه کنید، عدد حاصل شماره اتاق شما در هتل شماره 1 است با مراجعه به اتاق جدید از ساکن آن بخواهید که شماره ی اتاق خود را در 2 ضرب کند تا شماره ی اتاق جدید خود را بدست آورید، بنابراین شماره های زوج به مسافرین هتل 1 و شماره های فرد به ساکنین هتل 2 داده می شود.

ضابطه نقل مکان مسافرین هتل:

$$f:\{0,1,2,\dots\}\cup\{\acute{0},\acute{1},\acute{2},\dots\}\xrightarrow{1-1,\text{onto}}\{0,1,2,\dots\}$$

$$f(n)=2n \qquad f(\acute{n})=2n+1$$

$\{0,1,2,3,\dots,n,\dots\}$ شماره اتاق های هتل 1 (قبل از انتقال)

$\{0,1,2,3,4,5,6,\dots,2n,2n+1,\dots\}$ شماره اتاق های هتل 1 (بعد از انتقال)

$\{\acute{0},\acute{1},\acute{2},\dots,\acute{n},\dots\}$ شماره اتاق های هتل 2

مثال۳.

حل.

$$f:\mathbb{Z}\xrightarrow{1-1,\text{onto}}\omega$$

$$f(n)=2n \qquad f(-n)=2n+1$$

$$\{0,1,-1,2,-2,3,-3,\dots,n,-n,\dots\}$$

$$\{0,1,2,3,4,5,6,\dots,2n,2n+1,\dots\}$$

مثال۴. $\omega$ را به دو قسمت هم عدد با $\omega$ افراز کنید.

حل.

$$f_1:\omega\xrightarrow{1-1,\text{onto}}[0]_2=\{0,2,4,\dots\}$$
$$f_1(n)=2n$$

$$f_1:\omega\xrightarrow{1-1,\text{onto}}[0]_2=\{0,2,4,\dots\}$$
$$f_1(n)=2n$$

$$\omega=[0]_2\cup[1]_2$$

مثال۵. $\omega$ را به سه قسمت هم عدد با $\omega$ افراز کنید.

حل.

$$f_1:\omega\xrightarrow{1-1,\text{onto}}[0]_3=\{3n|n\in\omega\}=\{0,3,6,\dots\}$$
$$f_1(n)=3n$$

$$f_2: \omega \xrightarrow{1-1,\text{onto}} [1]_3 = \{3n+1 | n \in \omega\} = \{1,4,7,\dots\}$$
$$f_2(n) = 3n+1$$

$$f_3: \omega \xrightarrow{1-1,\text{onto}} [2]_3 = \{3n+2 | n \in \omega\} = \{2,5,8,\dots\}$$
$$f_3(n) = 3n+2$$

$$\omega = [0]_3 \cup [1]_3 \cup [2]_3$$

مثال۶. $\omega$ را به $k$ قسمت هم عدد با $\omega$ افراز کنید.

حل.

$$f: \omega \xrightarrow{1-1,\text{onto}} [i]_k = \{kn+i | n \in \omega \,, i = 0,1,2,\dots,k-1\} = \{i, k+i, 2k+i, \dots\}$$
$$\omega \simeq [i]_k \quad i = 0,1,2,\dots,k-1$$
$$\omega = [0]_k \cup [1]_k \cup \dots \cup [k-1]_k$$

در مثال های قبل برای $k = 2$ و $k = 3$ را بررسی کردیم.

مثال۷. $\omega$ را به $\omega$ قسمت هم عدد با $\omega$ افراز کنید.

حل. روش اول:

$$f_i: \omega \xrightarrow{1-1,\text{onto}} A_i$$
$$n \longrightarrow 2^i(2n+1)$$
$$A_i = \left\{2^i(2n+1) \middle| n \in \omega\right\} \simeq \omega$$
$$A_0 = \{2^0(2n+1) | n \in \omega\} = \{1,3,5,7,9,\dots,2n+1,\dots\}$$
$$A_1 = \{2^1(2n+1) | n \in \omega\} = \{2,6,10,14,\dots,2^1(2n+1),\dots\}$$
$$A_2 = \{2^2(2n+1) | n \in \omega\} = \{4,12,20,28,\dots,2^2(2n+1),\dots\}$$
$$A_3 = \{2^3(2n+1) | n \in \omega\} = \{8,24,40,56,\dots,2^3(2n+1),\dots\}$$
$$\vdots$$

داریم $\omega = \bigcup_{i\in\omega} A_i$ و $i \neq j$ اگر آنگاه $A_i \cap A_j = \emptyset$.

روش دوم:

$p_0 = 2, p_1 = 3, p_2 = 5, p_3 = 7, p_4 = 11, p_5 = 13, \dots, p_i =$ امین عدد اول $i$

$$B_0 = \{2n | n \in \omega\} = \{0,2,4,6,8,\dots\}$$
$$B_1 = \{3n | n \in \omega, 2 \nmid n\} = \{3,9,15,21,\dots\}$$
$$B_2 = \{5n | n \in \omega, 2 \nmid n, 3 \nmid n\} = \{5,25,35,55,\dots\}$$
$$\vdots$$
$$B_i = \{p_i n | n \in \omega, 2 \nmid n, 3 \nmid n, \dots, p_{i-1} \nmid n\}$$

روش سوم (هندسی):

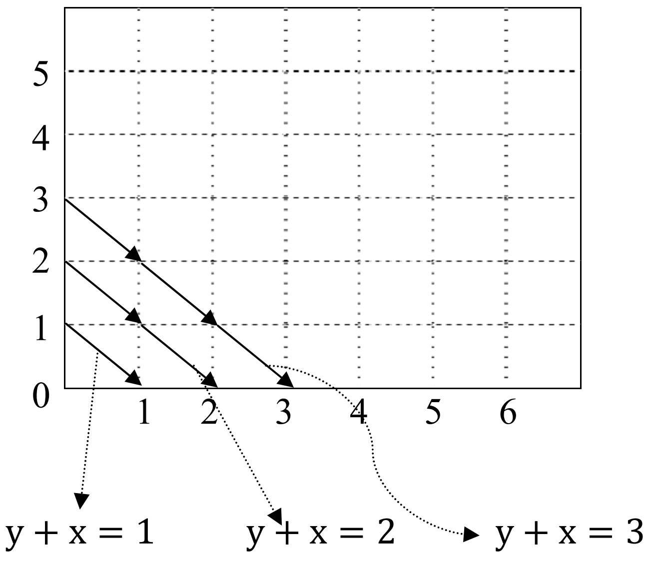
در دو مثال بعد با توجه به $f:\omega \xrightarrow{1-1,onto} \omega\times\omega$ و این که خطوط افقی و خطوط عمودی در صفحه ی $\omega\times\omega$، این صفحه را افراز می کنند، تصویر معکوس این خطوط توسط تابع مذکور، $\omega$ را به $\omega$ مجموعه ی هم توان با $\omega$ افراز می کند.

مثال۸. $\omega \simeq \omega\times\omega$

حل. خط $y+x=n$ نقطه $\langle n,0\rangle$ و $\langle 0,n\rangle$ را به هم وصل می کند. روی این خط $n+1$ نقطه وجود دارد. تعداد نقاط خطوط $y+x=n$ و ... و $y+x=2$ و $y+x=1$ و $y+x=0$ برابر است با:

$1+2+3+4+\cdots+(n-1)=\frac{n(n+1)}{2}$

مقدار نظیر نقطه $\langle 0,n\rangle$ برابر $\frac{n(n+1)}{2}$ است، پس $f\langle 0,n\rangle=\frac{n(n+1)}{2}$ چون دو نقطه ی $\langle n,m\rangle$ و $\langle 0,n+m\rangle$ روی خط $y+x=n+m$ هستند. پس $f\langle n,m\rangle=f\langle 0,n+m\rangle+n=\frac{(n+m)(n+m+1)}{2}+n$




تمرین۱. ثابت کنید $\begin{cases} f:\omega\times\omega\longrightarrow\omega \\ f\langle n,m\rangle=\frac{(n+m)(n+m+1)}{2}+n \end{cases}$ یک به یک و پوشاست.

مثال۹. ثابت کنید $f\langle n,m\rangle=2^n(2m+1)-1$ یک به یک و پوشاست.

حل.

$f\langle 0,0\rangle=2^0(0+1)-1=0$ $\quad$ $f\langle 1,0\rangle=2^1(0+1)-1=1$

$f\langle 0,1\rangle=2^0(2+1)-1=2$ $\quad$ $f\langle 1,1\rangle=2^1(2+1)-1=5$

$f\langle 0,2\rangle=2^0(4+1)-1=4$ $\quad$ $f\langle 2,0\rangle=2^2(0+1)-1=3$

$f\langle 2,1\rangle=2^2(2+1)-1=11$ $\quad$ $f\langle 1,2\rangle=2^2(4+1)-1=9$

$f\langle 2,2\rangle=2^2(4+1)-1=10$

$f$ یک به یک است، زیرا؛

$$f(n_1, m_1) = f(n_2, m_2) \Longrightarrow 2^{n_1}(2m_1+1) - 1 = 2^{n_2}(2m_2+1) - 1 \Longrightarrow$$
$$2^{n_1}(2m_1+1) = 2^{n_2}(2m_2+1)$$

اگر $n_1 < n_2$ با ساده کردن $2^{n_1}$ از دو طرف داریم؛ $(2m_1+1) = 2^{n_2-n_1}(2m_2+1)$.

پس عدد طرف چپ، فرد و عدد طرف راست، زوج است (تناقض). به طریق مشابه با فرض $n_1 > n_2$ به تناقض می رسیم، پس $n_1 = n_2$ ، پس $2m_1 + 1 = 2m_2 + 1$ ، پس $2m_1 = 2m_2$ ، پس $m_1 = m_2$ بنابراین $(n_1, m_1) = (n_2, m_2)$.

برای عدد دلخواه $k \in \omega$ فرض می کنیم $n$ بزرگترین توان $2$ در تجزیه ی $k+1$ می باشد. یعنی $k + 1 = 2^n q$ که $q$ عددی فرد است پس $m \in \omega$ وجود دارد که $q = 2m+1$ پس $k + 1 = 2^n q$، پس $k = 2^n q - 1$.

مثلاً برای $k = 35$ داریم:

$$k + 1 = 36 = 2^2 \times 9 = 2^2(2 \times 4 + 1) \Longrightarrow k = 35 = 2^2(2 \times 4 + 1) - 1 = f(2,4)$$

مثال ۱۰. $\mathbb{Q} \simeq \omega$

حل. فرض کنیم $\mathbb{Q}^+ = \left\{\frac{m}{n} | m, n \in \omega - \{0\}\right\}$ و $\mathbb{Q}^- = \left\{-\frac{m}{n} | m, n \in \omega - \{0\}\right\}$ پس

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$$

$f: \omega \times \omega \xrightarrow{\text{onto}} \mathbb{Q}^+$، این تابع یک به یک نیست، زیرا: $f(2,3) = f(4,6) = \cdots = f(2n, 3m) = \frac{2}{3}$

پس بنابر قضیه $\mathbb{Q}^+ \preccurlyeq \omega \times \omega \simeq \omega$ به طور مشابه $\mathbb{Q}^- \preccurlyeq \omega$.

چون $\omega$ را می توان به سه قسمت (اعداد زوج ناصفر، اعداد فرد و صفر) تقسیم کرد و مجموعه اعداد زوج ناصفر و مجموعه اعداد فرد با $\omega$ هم توان هستند و همچنین $\mathbb{Q}$ را هم می توان به سه قسمت ($\mathbb{Q}^+$ ، $\mathbb{Q}^-$ و صفر) تقسیم کرد.

$\mathbb{Q}^+ \preccurlyeq \omega \simeq$ اعداد زوج و $\mathbb{Q}^- \preccurlyeq \omega \simeq$ اعداد فرد و $0 \simeq 0 \Longrightarrow \mathbb{Q} \simeq \omega$

همچنین $\mathbb{Q} \preccurlyeq \omega$ بر اساس تابع همانی از $\mathbb{Q}$ به $\omega$، نمی توان ضابطه ای مشخص از تابعی یک به یک و پوشا بین $\mathbb{Q}$ و $\omega$ به دست داد، ولی بنابر قضیه ی شرودر برنشتاین داریم $\mathbb{Q} \simeq \omega$.

توجه کنید که هر چند که مجموعه ی اعداد گویا در $\mathbb{R}$ چگال است، یعنی در هر بازه $(a, b)$ هر چقدر کوچک و در هر جای $\mathbb{R}$، یک عدد گویای $r \in (a, b)$ وجود دارد ولی می توان مجموعه $\mathbb{Q}$ را به صورت زیر نمایش داد:

$$\mathbb{Q} = \{r_1, r_2, r_3, \dots\}$$

البته این شمارش $\mathbb{Q}$ نمی تواند حافظه ی ترتیب کوچکترین در $\mathbb{Q}$ باشد.

قضیه۲(کانتور). $[0,1] \not\simeq \omega$ در واقع $\omega \precnsim [0,1]$

اثبات. (فرض خلف)، فرض می کنیم که $f:\omega \xrightarrow{\text{onto}} [0,1]$ وجود دارد پس $[0,1]=\{f(0),f(1),f(2),\dots\}$، چون هر عدد در $[0,1]$ یک بسط نامتناهی[1] یکتا در مبنای 2 دارد، پس مثلاً فرض کنیم:

$$
\begin{aligned}
f(0) &= 0.a_{00}a_{01}a_{02}a_{03}\dots a_{0n}\dots\\
f(1) &= 0.a_{10}a_{11}a_{12}a_{13}\dots a_{1n}\dots\\
f(2) &= 0.a_{20}a_{21}a_{22}a_{23}\dots a_{2n}\dots\\
f(3) &= 0.a_{30}a_{31}a_{32}a_{33}\dots a_{3n}\dots
\end{aligned}
$$

که هر $a_{nm}$ برابر صفر یا یک است.

$$b_n = 1-a_{nn}=\begin{cases}1 & \text{if } a_{nn}=0\\ 0 & \text{if } a_{nn}=1\end{cases}\qquad (b_n\neq 0)\qquad b=b_0b_1b_2\dots b_n$$

چون در مبنای 2 فقط ارقام صفر و یک را داریم بهتر است از مبنای دیگر استفاده کنیم که از صفر استفاده نکنیم، زیرا ممکن است بسط حاصل برای $b$ یک بسط نامتناهی نباشد.

اصلاح اثبات. از مبنای دیگر مثلاً مبنای 3 استفاده می کنیم:
$$b_n=\begin{cases}1 & \text{if } a_{nn}\neq 1\\ 2 & \text{if } a_{nn}=1\end{cases}$$

برای هر $n\in\omega$ داریم $b_n\neq 0$ و $b_n\neq a_{nn}$. پس نمایش به صورت $b=b_0b_1b_2b_3\dots b_n\dots$ یک بسط نامتناهی است و رقم $n$ ام، یعنی $b_n$ با رقم $n$ ام $f(n)$ یعنی $a_{nn}$ مخالف است و هر دو بسط نامتناهی اند، پس برای هر $n\in\omega$ $b\neq f(n)$، پس $b\in(0,1)$ و $b\notin Im(f)$.

■

مثال ۱۱.

1. $[0,1]\simeq(0,1]$
2. $[0,1]\simeq[0,1)$
3. $[0,1]\simeq(0,1)$
4. $(0,1)\simeq(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$
5. $(0,1)\simeq(a,b)$
6. $[0,1)\simeq[a,b)$
7. $[0,1]\simeq[a,b]$
8. $(0,1)\simeq(0,\infty)$
9. $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\simeq(-\infty,\infty)$
10. $\mathbb{R}\simeq\mathbb{R}-B$ اگر $B$ شمارش پذیر باشد

حل۱. فرض کنیم $\{r_0,r_1,\dots,r_n,\dots\}$ دنباله ای با مقادیر مجزا در $[0,1]$ باشد (یعنی $a_n\neq a_m$ اگر $n\neq m$). همانند مثال مسافرخانه فضایی، برای اضافه کردن نقطه 0 به $[0,1)$ یا نقطه ی 1 به $[0,1)$ یا نقاط 0 و 1 به $(0,1)$ و یا نقاط $B$ به $\mathbb{R}-B$، کافیست این نقاط توسط دنباله ی $a_n$ جادهی شوند و بقیه ی نقاط تغییر نکنند.

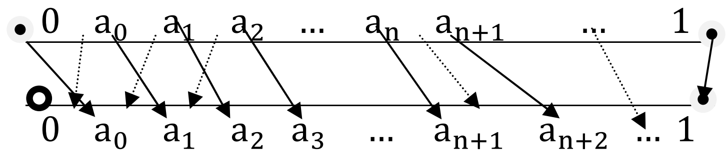
---

۱- [بسط متناهی دودویی] $\frac{3}{4}=\frac{2+1}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=0.1100$

[بسط نامتناهی دودویی که یکتاست] $\frac{3}{4}=\frac{1}{2}+\frac{0}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\dots+\frac{1}{28}+\dots=0.10111111\dots1$

$$f:[0,1]\xrightarrow{1-1,\text{onto}}(0,1]$$

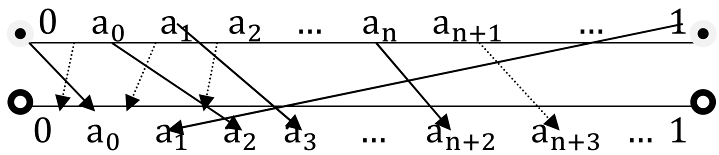
$$f(x)=\begin{cases}a_0 & x=0\\ a_{n+1} & x=a_n\\ x & x\neq a_n\end{cases}$$




حل۳.

$$f:[0,1]\xrightarrow{1-1,\text{onto}}(0,1)$$

$$f(x)=\begin{cases}a_0 & x=0\\ a_1 & x=1\\ a_{n+2} & x=a_n\\ x & x\neq a_n\end{cases}$$




حل۶.

$$f:[0,1)\xrightarrow{1-1,\text{onto}}[0,1)$$

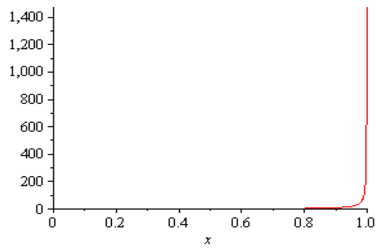
$$f(x)=(b-a)x+a$$

حل۷.

$$f:(0,1)\xrightarrow{1-1,\text{onto}}(0,\infty)$$

$$f(x)=\frac{x}{1-x}$$

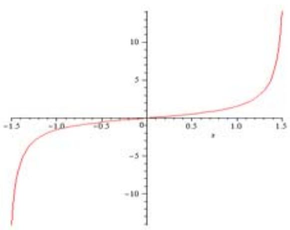
$$f(x)=\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$




حل۹.

$$f:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\xrightarrow{1-1,\text{onto}}(-\infty,\infty)$$

$$f(x)=\tan(x)$$



حل۱۰. اگر $B=\{b_0,b_1,b_2,\dots,b_n,\dots\}$ دنباله ای از مقادیر مجزا باشد و $A=\{a_0,a_1,a_2,\dots,a_n,\dots\}$ دنباله ای از مقادیر مجزا در $\mathbb{R}-B$ باشد.

$$f:\mathbb{R}\xrightarrow{1-1,\text{onto}}\mathbb{R}-B$$

$$f(x)=\begin{cases}a_{2n} & x=a_n\\ a_{2n+1} & x=b_n\\ x & x\neq a_n,b_n\end{cases}$$

تمرین۲. سایر قسمت های حل نشده در مثال۱۱ را اثبات کنید.

سوال: آیا زیرمجموعه نامتناهی $A \subseteq \mathbb{R}$ وجود دارد که $A \not\simeq \omega$ و $A \not\simeq \mathbb{R}$ ؟

جواب: طبق فرضیه ی پیوستار کانتور وجود ندارد ولی گودل وجود دقیقاً یک رده مجموعه های هم عدد را به دلایلی پذیرفت، مقدار هم عددی جواب این سوال مستقل از اصول نظریه هاست و می توان جواب های مختلفی به این سوال داد.

تعریف۲. 2 را مجموعه $\{0,1\}$ می گیریم و $2^X$ مجموعه دنباله ها (توابع) با مقادیر 0 و 1 و دامنه ی X است، یعنی:

$$2^X = \{f | f: X \longrightarrow \{0,1\}\}$$

تعریف۳. تابع مشخصه ی $\chi: P(X) \longrightarrow 2^X$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\chi_A: X \longrightarrow 2$$
$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

مثال۱۲. برای $A = \{0\} \subseteq \{0,1,2\} = X$ داریم؛ $\chi_A(x) = \{\langle 0,1\rangle, \langle 1,0\rangle, \langle 2,0\rangle\} \simeq \langle 1,0,0\rangle$ پس $2 \notin A$ و $1 \notin A$ و $0 \in A$، پس $\chi_A(2) = 0$ و $\chi_A(1) = 0$ و $\chi_A(0) = 1$. پس با توجه به این که $P(X) = \{\phi, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}\}$ داریم:

$$2^X = \{(0,0,0) = \chi_\phi, (1,0,0) = \chi_{\{0\}}, (0,1,0) = \chi_{\{1\}}, (0,0,1) = \chi_{\{2\}}, (1,1,0) = \chi_{\{0,1\}},$$
$$(1,0,1) = \chi_{\{0,2\}}, (0,1,1) = \chi_{\{1,2\}}, (1,1,1) = \chi_{\{0,1,2\}}\}$$

که هر عضو $2^X$ را دقیقاً به یک صورت $\chi_A$ نمایش می دهد یعنی تابع $\chi: P(X) \longrightarrow 2^X$ یک به یک و پوشا است.

تمرین۳. نشان دهید که تابع مشخصه ی $\chi$ یک به یک و پوشاست، بنابراین $P(X) \simeq 2^X$.

مثال۱۳. فرض کنیم $f = \{\langle 0,1\rangle, \langle 1,0\rangle, \langle 2,0\rangle\}$ و $X = \{0,1,2\}$ ، تابع f را می توان با دنباله (چندتایی)، $\langle 1,0,0\rangle$ نیز نمایش داد که در مولفه ی i ام، مقدار f(i) است. با استفاده از این قرارداد، اعضای $2^X$ را به صورت زیر نمایش می دهیم: $2^X = \{(0,0,0), (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,1,0), (1,0,1), (0,1,1), (1,1,1)\}$

$$A = \{0\} \subseteq \{0,1,2\} = X$$

قضیه۳. برای هر مجموعه x، $X \not\preccurlyeq P(X) \simeq 2^X$.

اثبات $X \not\preccurlyeq 2^X$ . تابع $X: X \longrightarrow 2^X$ که $f(x)(y) = \begin{cases} 1 & y = x \\ 0 & y \neq x \end{cases}$ تابعی یک به یک است ثابت می کنیم $X \not\preccurlyeq 2^X$ . فرض می کنیم $f: X \longrightarrow 2^X$ و ثابت می کنیم که f پوشا نیست پس $X \not\preccurlyeq 2^X$، برای این منظور دنباله ی $b \in 2^X$ را به صورت زیر می سازیم، برای هر $y \in X$، قرار می دهیم $b_y = 1 - f(x)(y)$. پس مولفه ی y ام از b دنباله های $b_y$ و دنباله های $f(y)$ یعنی $f(y)(y)$ و $b_y$ با هم مخالفند پس $b_y \neq f(y)$. برای هر $y \in X$ ، $b \notin \mathrm{Im}(f)$.

اثبات $X \preccurlyeq P(X)$ . تابع $f: X \longrightarrow P(X)$ با ضابطه ی $f(y) = \{y\}$ تابعی یک به یک است پس $X \preccurlyeq P(X)$.
ثابت می کنیم $X \not\preccurlyeq P(X)$ . فرض می کنیم $g: X \longrightarrow P(X)$ و ثابت می کنیم که g پوشا نیست. فرض می کنیم که $B = \{y \in X | y \notin g(y)\}$ پس $\forall y \in X\big(y \in B \Leftrightarrow y \notin g(y)\big)$ (*). اگر (فرض خلف) $b = g(y)$ برای مثلاً $y \in X$ پس بنابر (*) برای این y داریم $y \in B \Leftrightarrow y \notin g(y)$ . تناقض. بنابراین $b \notin Im(g)$ پس $g$ پوشا نیست.

■

## پارادوکس کانتور

فرض کنیم V، مجموعه ی همه ی مجموعه ها باشد. قبلاً دیدیم که این فرض به پارادوکس راسل منجر شد. برای V داریم:

1. $P(V) = V$ زیرا، اگر $y \in P(V)$ چون V شامل همه ی مجموعه هاست پس $y \in V$.

2. اگر $y \in V$ پس $y \subseteq V$ (زیرا اگر $x \in y$ چون V شامل همه مجموعه هاست پس $x \in V$) پس $y \in P(V)$.

بنابر قضیه ی کانتور $V = P(V) \precnsim V$ یعنی تابع پوشا $f: V \longrightarrow P(V) = V$ موجود نیست ولی تابع همانی $P(x) = x$ یک به یک و پوشاست که تناقض است.

## اعداد اصلی

در نظریه مجموعه ها می توان به مجموعه A عددی به نام اعداد اصلی [card(A)] نسبت داد که در خاصیت زیر صدق کند: $card(A) = card(A) \Leftrightarrow A \simeq B$.

برای تعریف دقیق کاردینال ها نیاز به بحث اعداد ترتیبی (اوردینال ها) داریم، که در این جا از آن صرف نظر می کنیم.
همچنین $|A|$ و $\#A$ برای نمایش $card(A)$ استفاده می شود.

## جمع، ضرب و توان اعداد اصلی

اگر $\kappa = card(A)$ و $\lambda = card(B)$ آنگاه تعریف می کنیم:

$$\kappa + \lambda = card(A \cup B) \qquad \text{if } A \cap B = \phi$$
$$\kappa . \lambda = card(A \times B)$$
$$\lambda^{\kappa} = card(B^{A}) \qquad B^{A} = \{f | f: A \longrightarrow B\}$$

قضیه۴. جمع، ضرب و توان کاردینال ها خوش تعریف است، یعنی اگر:

$$\kappa = card(A) = card(\acute{A}) \qquad \lambda = card(B) = card(\acute{B})$$

آنگاه:

$$\kappa + \lambda = \mathrm{card}(A \cup B) = \mathrm{card}(\acute{A} \cup \acute{B})$$
$$\kappa . \lambda = \mathrm{card}(A \times B) = \mathrm{card}(\acute{A} \times \acute{B})$$
$$\lambda^{\kappa} = \mathrm{card}(B^{A}) = \mathrm{card}(\acute{B}^{\acute{A}})$$

یا به طور معادل اگر $\acute{A} \simeq A$ و $\acute{B} \simeq B$ آنگاه:

$$(A \cup B) \simeq (\acute{A} \cup \acute{B}) \qquad \text{if } (A \cap B) \simeq (\acute{A} \cap \acute{B}) = \phi$$
$$(A \times B) \simeq (\acute{A} \times \acute{B})$$
$$(B^{A}) \simeq (\acute{B}^{\acute{A}})$$

قضیه۵. اگر $\kappa = \mathrm{card}(A)$ و $\lambda = \mathrm{card}(B)$ و $\mu = \mathrm{card}(C)$ و $\aleph_0 = \mathrm{card}(\omega)$ در این صورت:

1. $\kappa + \lambda = \lambda + \kappa$
2. $\kappa . \lambda = \lambda . \kappa$
3. $\kappa + (\lambda + \mu) = (\kappa + \lambda) + \mu$
4. $\kappa . (\lambda . \mu) = (\kappa . \lambda) . \mu$
5. $\kappa . (\lambda + \mu) = \kappa . \lambda + \kappa . \mu$
6. $\kappa . 0 = 0 \qquad [0 = \mathrm{card}(\phi)]$
7. $\kappa + 0 = 0$
8. $\kappa^{(\lambda+\mu)} = \kappa^{\lambda} . \kappa^{\mu}$
9. $\kappa^{\lambda . \mu} = (\kappa^{\lambda})^{\mu}$
10. $(\kappa . \lambda)^{\mu} = \kappa^{\mu} . \lambda^{\mu}$
11. $\kappa^{0} = 1 \quad 0^{\kappa} = \begin{cases} 1 & \kappa = 0 \\ 0 & \kappa \neq 0 \end{cases}$
12. $\kappa \leq \lambda \Longrightarrow \kappa + \mu \leq \lambda + \mu$
13. $\kappa \leq \lambda \Longrightarrow \kappa . \mu \leq \lambda . \mu$
14. $\kappa \leq \lambda \Longrightarrow \kappa^{\mu} \leq \lambda^{\mu}$
15. $\kappa \leq \lambda \Longrightarrow \mu^{\kappa} \leq \mu^{\lambda}$ اگر $\kappa$و $\mu$، با هم صفر نباشند.
16. $(\kappa \leq \lambda) \wedge (\lambda \leq \mu) \Longrightarrow \kappa \leq \mu$
17. $(\kappa \leq \lambda) \wedge (\lambda \leq \kappa) \Longrightarrow \kappa = \lambda$
18. $\lambda \leq \kappa \vee \kappa \leq \lambda$
19. $\kappa + \lambda = \kappa . \lambda = \max(\kappa, \lambda) \qquad \text{if } \aleph_0 \leq \kappa \vee \aleph_0 \leq \lambda$
20. $\kappa + \kappa = \kappa . \kappa = \kappa$ اگر $\kappa$ نامتناهی باشد ( $\aleph_0 \leq \kappa$ )

قضیه۶. $\kappa = \mathrm{card}(A) \wedge (\aleph_0 \le \kappa) \wedge n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \mathrm{card}(A^n) = \kappa$

اثبات.

$n = 1 \qquad \mathrm{card}(A^1) = \kappa$

فرض استقرا $\qquad \mathrm{card}(A^n) = \kappa$

حکم استقرا $\qquad \mathrm{card}(A^{n+1}) = \kappa$

$\mathrm{card}(A^{n+1}) = \mathrm{card}(A^n \times A) = \mathrm{card}(A^n) \times \mathrm{card}(A) = \kappa.\kappa = \kappa$

■

مثال۱۴.

$\mathrm{card}(\omega^3) = \mathrm{card}(\omega^2) = \mathrm{card}(\omega) = \aleph_0$

$\omega^2 = \{(m,n)|m,n \in \omega\}$ مجموعه نقاط صفحه با مختصات اعداد طبیعی

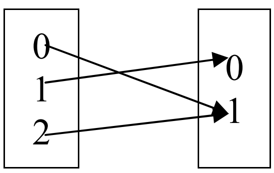
$\omega^3 = \{(m,n,k)|m,n,k \in \omega\}$ مجموعه نقاط فضا با مختصات اعداد طبیعی

مثال۱۵. مربع واحد $[0,1]^2$ با $[0,1]$ و $\mathbb{R}$ هم عدد است، یعنی $\mathbb{R} \simeq [0,1] \simeq [0,1] \times [0,1]$. مثلاً رنگ کردن یک مربع با مدادرنگی بطوریکه تمام نقاط رنگ شوند یک تابع از زمان $\mathbb{R}^+$ به کل مربع است. اگر $a = 0.a_0a_1 \ldots$ و $b = 0.b_0b_1 \ldots$ شمارش های نامتناهی اعداد $a, b \in [0,1]$ مثلاً در مبنای 10 باشند، تابع f به صورت زیر مطلوب است؛

$$f: [0,1] \times [0,1] \xrightarrow{1-1,\mathrm{onto}} [0,1]$$
$$f(a,b) = f(0.a_0a_1a_2 \ldots a_n \ldots, 0.b_0b_1b_2 \ldots b_n \ldots) = 0.a_0b_0a_1b_1a_2b_2 \ldots a_nb_n \ldots$$
$$f\left(\frac{1}{2},\frac{4}{5}\right) = f(0.5,0.8) = f(0.499\ldots,0.799\ldots) = 0.47999\ldots = 0.48 = \frac{48}{100} = \frac{12}{25}$$

به سادگی می توان یک به یک بودن و پوشا بودن f را نشان داد.

نکته۱. دو تعبیر برای دنباله متناهی $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ می توان ارائه داد، مثلاً دنباله $\langle 1,0,1 \rangle$ را می توان به معنای زوج مرتب $\langle\langle 1,0 \rangle, 1\rangle$ در نظر گرفت که مولفه ی اول خود یک زوج مرتب $\langle 1,0 \rangle$ است. همچنین می توان آن را براینمایش دنباله ای برای تابع زیر در نظر گرفت.




$$f = \{\langle 0,1 \rangle, \langle 1,0 \rangle, \langle 2,1 \rangle\}$$

تعریف۴. اگر $A^n$ را با مجموعه دنباله های به طول n از اعضای A یکی بگیریم، پس $A^{<\omega}$ اجتماع همه ی $A^n$ هاست.

$A^{<\omega}$ مجموعه دنباله هایی با طول متناهی از A

مثال۱۵. اگر $A = \{0,1\}$ باشد، مطلوب است $A^{<\omega}$؛

$$A^{\prec\omega}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A^n=A^0\cup A^1\cup A^2\cup A^3\cup\ldots\cup A^n\cup\ldots$$
$$A^{\prec\omega}=\{\phi,\langle 0\rangle,\langle 1\rangle,\langle 1,0\rangle,\langle 0,1\rangle,\langle 1,1\rangle,\langle 0,0,0\rangle,\langle 0,0,1\rangle,\langle 0,1,0\rangle,\langle 1,0,0\rangle,\langle 0,1,1\rangle,\langle 1,0,1\rangle,\langle 1,1,0\rangle,\langle 1,1,1\rangle,\langle 0,0,0,0\rangle,\langle 0,0,0,1\rangle,\ldots\}$$

قضیه۷.

1. اگر A نامتناهی باشد $|A^{\prec\omega}|=|A|$

2. اگر A متناهی باشد $|A^{\prec\omega}|=|\aleph_0|$

در حالت کلی؛

1. $\vdash |A^{\prec\omega}|=\max(|A|,\aleph_0)$
2. $\vdash |B|\le\kappa\wedge\forall x\,|f(x)|\le\lambda\Longrightarrow|\bigcup_{x\in B}f(x)|\le\kappa.\lambda$
3. $\vdash |B|\le\kappa\wedge\forall x\in B\,|f(x)|\le\kappa\Longrightarrow|\bigcup_{x\in B}f(x)|\le\kappa.\kappa=\kappa$ حالت خاص
4. $\vdash |B|\le\aleph_0\wedge\forall x\in B\,|f(x)|\le\aleph_0\Longrightarrow|\bigcup_{x\in B}f(x)|\le\aleph_0$ حالت خاص
5. $\vdash |A^{\prec\omega}|=|\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A^n|\le\aleph_0.|A|=\max(|A|,\aleph_0)$ حالت خاص

یعنی اجتماع شمارش پذیر از مجموعه های شمارش پذیر، شمارش پذیر است.

اثبات. اگر $\kappa=|A|\ge\aleph_0$ پس $A\simeq A^n$ و بنابراین $\mathrm{card}(A^n)=\mathrm{card}(A)=\kappa$. اگر برای هر $n\ge 1$ فرض کنیم $f_n:A\xrightarrow{1-1,\mathrm{onto}}A^n$ ، تعریف می کنیم؛ $f_n:(\omega-\{0\})\times A\xrightarrow{1-1,\mathrm{onto}}A^{\prec\omega}=\bigcup_{n=1}^{\infty}A^n$ و $f(n,a)=f_n(a)$.

f یک به یک است زیرا؛

$$f(n,a)=f(m,b)\Longrightarrow f_n(a)=f_m(b),f_n(a)\in A^n,f_m(b)\in A^m\Longrightarrow A^n\cap A^m\neq\phi\Longrightarrow$$
$$n=m\Longrightarrow f_n(a)=f_n(b)\xRightarrow{f_n\ \text{یک به یک است}}a=b\Longrightarrow(n,a)=(m,b)$$

f پوشا است زیرا؛

اگر $b\in A^{\prec\omega}=\bigcup_{0\neq n\in\mathbb{N}}A^n$ مثلاً $0\neq n\in\mathbb{N}$ و $b\in A^n$ و چون $f_n$ پوشاست، پس مثلاً $a\in A$ و $b=f_n(a)$ پس $b=f(n,a)$.

$$\mathrm{card}(A^{\prec\omega})=\mathrm{card}\big((\omega-\{0\})\times A\big)=\mathrm{card}(\omega-\{0\}).\mathrm{card}(A)=\aleph_0.\kappa=\max(\aleph_0,\kappa)=\kappa=\mathrm{card}(A)$$

فرض $\kappa=|A|\le\aleph_0$

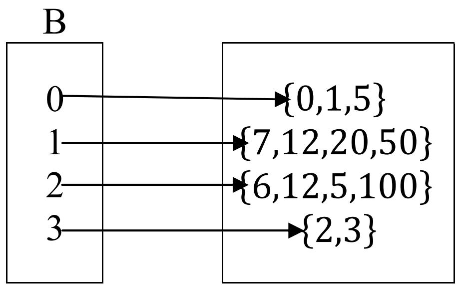
$$\begin{cases}A\preccurlyeq\omega\Longrightarrow A^{\prec\omega}\preccurlyeq\omega^{\prec\omega}\simeq\omega\\ \mathrm{card}(\omega^{\prec\omega})=\mathrm{card}(\omega)=\aleph_0\end{cases}\Longrightarrow\mathrm{card}(A^{\prec\omega})\le\aleph_0$$
$$a\in A\neq\phi,\{a\}\subseteq A\qquad\ni\{a\}^{\prec\omega}=\{\langle a\rangle,\langle a,a\rangle,\langle a,a,a\rangle,\ldots\}\subseteq A^{\prec\omega}$$
$$\aleph_0=\mathrm{card}(\{a\}^{\prec\omega})\le\mathrm{card}(A^{\prec\omega})\le\aleph_0\xRightarrow{\text{قضیه شرودربرنشتاین}}\mathrm{card}(A^{\prec\omega})=\aleph_0$$

$f_n: \omega - \{0\} \xrightarrow{1-1,onto} \{a\}^{<\omega}$
$n \longrightarrow \langle a, a, a, \dots, a\rangle$
$f(1) = \langle a\rangle \qquad f(2) = \langle a, a\rangle \qquad f(3) = \langle a, a, a\rangle$

■

مثال۱۶.

$|B| = 4$
$\forall x \in B \ \ |f(x)| \leq 4$
$\bigcup_{x\in B} f(x) = f(0) \cup f(1) \cup f(2) \cup f(3) =$
$\{0,1,5\} \cup \{7,12,20,50\} \cup \{6,12,5,100\} \cup \{2,3\} =$
$\{0,1,2,3,5,7,12,20,50,100\}$
$10 = |\bigcup_{x\in B} f(x)| \leq 4 \times 4 = 16$




تعریف۵. $A[x]$ و $A[x, y]$ مجموعه چندجمله ایها برحسب x متناظراً برحسب x و y با ضرایب از A می گیریم. یعنی؛

$A[x] = \{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n | a_0, a_1, \dots, a_n \in A, n \in \omega\}$
$A[x, y] = \{\sum_{i,j\leq n} a_{ij}x^iy^j \,|n \in \omega, a_{ij} \in A \ \ i, j \text{ برای هر}\}$

مثال۱۷.

$\mathbb{Z}[x] = \{-1, +2, +3, \dots, -1 + 2x, -2 + 5x - 7x^2, -5 + 6x - 7x^3 + 12x^5, \dots\}$
$\mathbb{Z}[x, y] = \{-5, +4, -6, +7x, +8 - 9y, +5 - 3x^27xy + 5y^2, \dots\}$

با فاکتور گیری از $y^n$ ها در چندجمله ای $P(x, y) = \sum_{i,j\leq n} a_{ij}x^iy^j$ می توان آنها را برحسب توان های y با ضرایب چندجمله ایهایی برحسب x یعنی با ضرایب در $A[x]$ به فرم $\sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x^i)y^j$ نوشت، پس $A[x, y] = (A[x])[y]$ مثلاً؛

$P(x, y) = 2x^4y^3 + 3x^2y^3 + 5x^5y^2 - 7x^4y^2 - 2x^5y - 4x^4 + x - 1 \in \mathbb{Z}[x, y]$
$P(x, y) = (2x^4 + 3x^2)y^3 + (5x^5 - 7x^4)y^2 + (-2x^5)y + (-4x^4 + x - 1) \in$
$(\mathbb{Z}[x])[y]$

همچنین $A[x, y, z]$ مجموعه چند جمله ای ها برحسب x و y و z با ضرایب A را می توان به صورت چندجمله ای هایی برحسب z با ضرایب از $A[x, y]$ نوشت.

$A[x, y, z] = (A[x, y])[z]$

چندجمله ایهای $P(x, y)$ برحسب x و y با ضرایب از A

چندجمله ایهای $P(x, y, z)$ برحسب x و y و z با ضرایب A

$P(x, y, z) = 2x^2y^3z^2 - 7xy^2z^2 - 6xy^3z - 12x^4y^2 - 7x^5y - 6x^3 - 7 \in \mathbb{Z}[x, y, z]$
$P(x, y, z) = (2x^2y^3 - 7xy^2)z^2 + (-6xy^3)z + (-12x^4y^2 - 7x^5y - 6x^3 - 7) \in$
$(\mathbb{Z}[x, y])[z]$

قضیه۸.

$$1.\ \vdash A[x] \simeq A^{\prec\omega}$$
$$2.\ \vdash A[x,y] \simeq A^{\prec\omega}$$
$$3.\ \vdash A[x,y,z] \simeq A^{\prec\omega}$$
$$4.\ \vdash A[x_1,\dots,x_n] \simeq A^{\prec\omega}$$
$$5.\ \vdash |A[x_1,\dots,x_n]| = \max(|A|,\aleph_0)$$
$$6.\ |\mathbb{Z}[x]| = |\mathbb{Z}| = \aleph_0$$

اثبات۱.

$$f: A[x] \xrightarrow{1-1,\text{onto}} A^{\prec\omega}$$
$$a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \mapsto \langle a_0, a_1, \dots, a_n\rangle$$
$$A[x] \simeq A^{\prec\omega} \Longrightarrow |A[x]| \simeq |A^{\prec\omega}| = \max(|A|,\aleph_0)$$

اثبات۲.

$$B = A^{\prec\omega} \overset{(1)}{\Rightarrow} A[x] \simeq A^{\prec\omega} = B \Longrightarrow A[x,y] = (A[x])[y] \simeq B^{\prec\omega} \simeq B = A^{\prec\omega}$$

توجه کنید که چون $B = A^{\prec\omega}$ نامتناهی است، پس $|B^{\prec\omega}| = \max(|B|,\aleph_0) = |B|$ پس $B^{\prec\omega} \simeq B$.

$$\Longrightarrow \begin{cases} \dots \simeq A[x,y,z] \simeq A[x,y] \simeq A[x] \simeq A^{\prec\omega} \simeq A & \text{اگر } A \text{ نامتناهی باشد} \\ \dots \simeq A[x,y,z] \simeq A[x,y] \simeq A[x] \simeq A^{\prec\omega} \simeq \omega & \text{اگر } A \text{ متناهی باشد} \end{cases}$$

■

تمرین۴. سایر گزاره های قضیه۸ را اثبات کنید.

مثال۱۸.

$$-1 + 5x^3 + 7x^6 + 9x^{10} \mapsto \langle -1,0,0,5,0,0,7,0,0,0,9\rangle$$
$$|\mathbb{Z}[x]| = \max(|\mathbb{Z}|,\aleph_0) = \max(\aleph_0,\aleph_0) = \aleph_0$$

پس مجموعه چندجمله ای با ضرایب صحیح، شمارش پذیر است.

تعریف۶. $A_{alg}$ مجموعه تمام ریشه های چندجمله ایها با ضرایب در $A$ می باشد. یعنی؛

$$A_{alg} = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists p(y) \in A[y] \quad p(x) = 0\}$$
$$\mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{Z}_{alg} = \mathbb{Q}_{alg} \subsetneq \mathbb{R}$$

مثال۱۹.

$$2, -2, -\frac{1}{2}, -\frac{4}{5}, \sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{3} - \sqrt{2}, \sqrt{\sqrt[3]{5} - \sqrt[4]{2}}, \dots \in \mathbb{Z}_{alg}$$
$$x = -\frac{1}{2} \Longrightarrow p(x) = 2x + 1 = 0$$
$$x = -\frac{4}{5} \Longrightarrow p(x) = 5x + 4 = 0$$
$$x = \sqrt{2} \Longrightarrow p(x) = x^2 - 2 = 0$$

$x = \sqrt{2} - \frac{3}{5} \Longrightarrow p(x) = 5x + 3 = 5\sqrt{2} \Longrightarrow p(x) = (5x+3)^2 - 50 = 25x^2 + 30x - 41 = 0$

تعریف۷. $\mathbb{Z}_{alg}$ را مجموعه اعداد جبری و $\mathbb{R} - \mathbb{Z}_{alg}$ را مجموعه اعداد حقیقی متعالی گوییم.

$A \subseteq A_{alg} = \bigcup_{p(y)\in A[y]}\{x|p(x) = 0\}$ $\qquad |\{x|p(x) = 0\}| < \aleph_0$

$|A| \leq |A_{alg}| = \left|\bigcup_{p(y)\in A[y]}\{x|p(x) = 0\}\right| \leq |A[y]|.\aleph_0 = |A^{<\omega}|.\aleph_0 = \max(|A|, \aleph_0) = \max(\max(|A|, \aleph_0), \aleph_0) = \max(|A|, \aleph_0) = A$ نامتناهی A

$$\Longrightarrow \begin{cases} |A_{alg}| = A & \text{اگر A نامتناهی باشد} \\ |A| \leq |A_{alg}| \leq \aleph_0 & \text{اگر A متناهی باشد} \end{cases}$$

مثال۲۰.

$\mathbb{Z}_{alg} = \bigcup_{p(x)\in\mathbb{Z}[x]}\{x|p(x) = 0\} = \{x|p(x) = x^2 - 2 = 0\} \cup \{x|p(x) = x^3 - 5 = 0\} \cup \{x|p(x) = x^4 - 3 = 0\} \cup \ldots = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\} \cup \{\sqrt[3]{5}\} \cup \{\sqrt[3]{3}, -\sqrt[3]{3}\} \cup \ldots$

$\{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\} = \{x|p(x) = x^2 - 2 = 0\}$

$\{\sqrt[3]{5}\} = \{x|p(x) = x^3 - 5 = 0\}$

$\{\sqrt[3]{3}, -\sqrt[3]{3}\} = \{x|p(x) = x^4 - 3 = 0\}$

$\vdots$

$\mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Z}_{alg} = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\} \cup \{\sqrt[3]{5}\} \cup \{\sqrt[3]{3}, -\sqrt[3]{3}\} \cup \ldots$

$\aleph_0 \leq |\mathbb{Z}_{alg}| \leq \aleph_0.\aleph_0 = \aleph_0 \Longrightarrow |\mathbb{Z}_{alg}| = \aleph_0$

تعریف۸. مجموعه ی $B \subseteq \mathbb{R}$ را وابسته جبری روی A گوییم هرگاه $a_1, a_2, \ldots, a_n \in B$ چندجمله ای $p(x_1, \ldots, x_n) \in A[x_1, \ldots, x_n]$ وجود داشته باشد که $p(a_1, \ldots, a_n) = 0$.

تعریف۹. مجموعه ی $B \subseteq \mathbb{R}$ را مستقل جبری روی A گوییم هرگاه وابسته نباشد. اگر $A = \mathbb{Z}$ یا $A = \mathbb{Q}$ آن را ذکر نمی کنیم و آن را وابسته یا مستقل جبری گوییم.

مثال۲۱.

$\{1, e, \pi, \pi^e, e^\pi, \sin e\}$ مستقل جبری

$\{e, \pi, e^2 + \sqrt[3]{\pi e}\}$ وابسته جبری

$e^2 + \sqrt[3]{\pi e} = x$

$(x - e^2)^3 = \pi e \Longrightarrow x^3 - 3x^2e^2 + 3xe^4 - e^3 - \pi e = 0$

$p(x, y, z) = x^3 - 3x^2y^2 + 3xy^4 - y^3 - \pi z \Longrightarrow p(e^2 + \sqrt[3]{\pi e}, \pi, e) = 0$

تعریف۱۰. فرض کنیم $B = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\}$ مجموعه ای مستقل جبری از اعداد حقیقی باشد. در این صورت یک زنجیره ای از بستارهای جبری بصورت $\mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq A_0 = \mathbb{Z}_{alg} \subsetneq A_1 \subsetneq A_2 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathbb{R}$ خواهیم داشت که:

$$A_0 = \mathbb{Z}_{alg}$$
$$A_1 = (A_0 \cup \{a_1\})_{alg}$$
$$A_2 = (A_1 \cup \{a_2\})_{alg}$$
$$\vdots$$
$$A_{n+1} = (A_n \cup \{a_{n+1}\})_{alg}$$
$$\mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq A_0 = \mathbb{Z}_{alg} \subsetneq A_1 \subsetneq A_2 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathbb{R}$$

مثال۲۲. برای $B = \{e, \pi, e^{\pi}\}$ داریم:

$$\sqrt[5]{\sqrt[3]{e^2 + \sqrt[7]{5}} + \sqrt[6]{7}.\sqrt[7]{e}}, e^3 + e^2 + \sqrt{e}, e \in A_1$$
$$\sqrt{e^3 + \sqrt{\pi^5 + \sqrt[12]{7} + \sqrt[8]{e}}} + \sqrt[7]{6e + 7\pi^2 + \sqrt[8]{e\pi}}, e\pi, \pi \in A_2$$
$$\sqrt[5]{1 + \sqrt{2}}\pi^4 e^5 + \pi^5 e^{\frac{\pi}{5}} + \sqrt{\pi\sqrt{e^{2\pi}} + \frac{1}{\sqrt{e^{2\pi} + \sqrt{2}}}}, e^{\pi} \in A_3$$

برای هر $n$، مجموعه $A_n$ شمارش پذیر است؛

$$A_0 = \mathbb{Z}_{alg} \Longrightarrow |A_0| = \aleph_0$$
$$|A_0 \cup \{a_1\}| = \aleph_0 \Longrightarrow |A_1| = \left|(A_0 \cup \{a_1\})_{alg}\right| = \aleph_0$$

اگر بنابر فرض استقراء $|A_n| = \aleph_0$ پس $|A_{n+1}| = \left|(A_n \cup \{a_{n+1}\})_{alg}\right| = |A_n \cup \{a_n\}| = \aleph_0$.

سوال: طول دنباله ی فوق از $A_n$ ها چقدر است؟

پاسخ: بی نهایت

سوال: کدام بی نهایت؟

پاسخ: برای هر $B$ شمارش پذیر و مستقل جبری در بالا، $A = \bigcup_{a(n)\in B} A_n$ شمارش پذیر است. پس $\mathbb{R} - A \neq \emptyset$ پس مثلاً برای $b \in \mathbb{R} - A$، پس $(A \cup \{b\}_a)$ را می توان به دنباله ی بالا اضافه کرد. $B \cup \{b\}$ نیز مستقل جبری است.

## بعد جبری

$\mathrm{Dim}_{alg}(A)$ بعد جبری مجموعه ی $A \subseteq \mathbb{R}$ را بزرگترین کاردینال یک مجموعه ی مستقل جبری در $A$ گوییم.

قضیه۹. $\mathrm{Dim}_{alg}(A) = 2^{\aleph_0}$

یعنی یک مجموعه ی مستقل جبری A وجود دارد که $A \subseteq \mathbb{R}$. $|A| = 2^{\aleph_0} = |\mathbb{R}|$

تمرین۵. قضیه۹ را اثبات کنید.

مثال۲۳.

$\{e, \pi, \pi^e, e^\pi, (e+\pi)^e, (e+\pi)^\pi, 2^e, \dots\}$ مستقل جبری

$\left\{e, \pi, e^{\frac{2}{3}}\right\}, \{e, \pi, \sqrt{e+\pi}\}, \{e, \pi, e\pi\}, \dots$ وابسته جبری

$\left\{e, \pi, e\pi + e^2 + 5\pi + 7e + \sqrt{5}\right\}$ وابسته جبری

یعنی به تعداد $\mathbb{R}$، اعداد متعالی مستقل جبری داریم.

$e^{\frac{2}{3}}, \sqrt{e+\pi}, e\pi, \dots, e(\mathbb{Z} \cup \{e, \pi\})_{alg}$

$A \subseteq \mathbb{R}\,, A = \{a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_i, \dots\}, i \in \mathbb{R}$ یک مجموعه ی مستقل جبری

$A_0 = \mathbb{Z}_{alg}\ ,\ A_1 = (A_0 \cup \{a_0\})_{alg}\ ,\ A_2 = (A_1 \cup \{a_1\})_{alg}\ ,\ A_{i+1} = (A_i \cup \{a_i\})_{alg}$

$\mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq A_0 \subsetneq A_1 \subsetneq A_2 \subsetneq \cdots \subsetneq A_i \subsetneq \cdots \subsetneq \mathbb{R}$

دنباله ای به طول $2^{\aleph_0}$ از مجموعه های شمارش پذیر $\mathbb{R}$ (طول دنباله برابر تعداد نقاط $\mathbb{R}$)

نکته۲. بیان بالا غیردقیق بوده و برای بیان دقیق تر نیاز به مبحث اوردینال ها داریم.

نکته۳. توجه کنید $|A_{alg}| = |A|$ اگر A نامتناهی باشد، یعنی بستار جبری کاردینال را افزایش نمی دهند، پس کاردینال دو عضو متوالی بالا برابر هستند.

هر مجموعه بستار جبری مجموعه ی قبل به علاوه یک عنصر متعالی نسبت به آن است.

مثال۲۴.

1. $\{f | f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ثابت است$\} \simeq \mathbb{R}$

2. $\mathbb{N}^{\mathbb{R}} = \{f | f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{N}\} \simeq \{f | f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Q}\} = \mathbb{Q}^{\mathbb{R}} \simeq 2^{2^\omega}$

3. $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{f | f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}\} \simeq \{f | f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}\} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \simeq \mathbb{R} \simeq 2^\omega$

4. $\{f | f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ پیوسته$\} \simeq \{f | f: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^{\mathbb{Q}} \simeq \mathbb{R} \simeq 2^\omega$

حل۴.

$f: \mathbb{R} \xrightarrow{\text{پیوسته}} \mathbb{R}$

$f|_{\mathbb{Q}}: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \in \mathbb{R}, r_n \in \mathbb{Q}\ \ r_n \longrightarrow x$

$\varphi: c(\mathbb{R}) \xrightarrow{1-1} \mathbb{R}^{\mathbb{Q}}$

$f \longrightarrow f|_{\mathbb{Q}}$

$\varphi(f) = \varphi(g) \Longrightarrow f|_{\mathbb{Q}} = g|_{\mathbb{Q}}$

$$\text{f, g} \text{پیوسته} \Longrightarrow \begin{cases} f(r_n) \longrightarrow f(x) \\ g(r_n) \longrightarrow g(x) \end{cases}$$

$$f|_{\mathbb{Q}} = g|_{\mathbb{Q}}, r_n \in \mathbb{Q} \Longrightarrow f(r_n) = g(r_n) \Longrightarrow f(x) = \lim f(r_n) = \lim g(r_n) = g(x) \Longrightarrow f(x) = g(x)$$

$$c(\mathbb{R}) \preccurlyeq \mathbb{R}^{\mathbb{Q}} \simeq (2^{\omega})^{\omega} \simeq 2^{\omega\times\omega} \simeq 2^{\omega} \simeq \mathbb{R}$$

نتیجه ای که از یک به یک بودن می گیریم:

$$\left\{f|f: \mathbb{R} \xrightarrow{\text{ثابت}} \mathbb{R}\right\} \subseteq \left\{f|f: \mathbb{R} \xrightarrow{\text{پیوسته}} \mathbb{R}\right\} = c(\mathbb{R}) \overset{(1)}{\Rightarrow} \mathbb{R} \simeq \left\{f|f: \mathbb{R} \xrightarrow{\text{ثابت}} \mathbb{R}\right\} \preccurlyeq c(\mathbb{R}) \Longrightarrow c(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}$$

تمرین۶. سایر گزاره های مثال۲۴ را اثبات کنید.

قضیه۱۰.

1. اگر $f = g \cup h$ و $f$ تابع باشد آنگاه $g$ و $h$ تابعند.

2. اگر $f = g \cup h$ و $g$ و $h$ تابع بوده و $D(g) \cap D(f) \neq \emptyset$ آنگاه $f$ نیز تابع است.

قضیه۱۱. اگر $f: A \longrightarrow \acute{A}$ و $g: B \longrightarrow \acute{B}$ آنگاه:

1. اگر $A \cap B = \emptyset$ آنگاه $f \cup g: A \cup B \longrightarrow \acute{A} \cup \acute{B}$ تابع است.

2. اگر $A \cap B = \acute{A} \cap \acute{B} = \emptyset$ و توابع $g$ و $f$ یک به یک باشند، آنگاه $f \cup g: A \cup B \longrightarrow \acute{A} \cup \acute{B}$ یک به یک است.

3. با فرض 1 اگر $g$ و $f$ پوشا باشند، آنگاه $f \cup g: A \cup B \longrightarrow \acute{A} \cup \acute{B}$ نیز پوشاست.

$$\kappa = \text{card}(A) = \text{card}(\acute{A}), \lambda = \text{card}(B) = \text{card}(\acute{B})$$
$$\kappa + \lambda = \text{card}(A \cup B) = \text{card}(\acute{A} \cup \acute{B}) \qquad \text{if } A \cap B = \acute{A} \cap \acute{B} = \phi$$
$$\kappa.\lambda = \text{card}(A \times B) = \text{card}(\acute{A} \times \acute{B})$$
$$\lambda^{\kappa} = \text{card}(A^B) = \text{card}(\acute{A}^{\acute{B}})$$

فرض:
$$\begin{cases} f: A \xrightarrow{1-1\text{ ,onto}} \acute{A} \\ g: B \xrightarrow{1-1\text{ ,onto}} \acute{B} \end{cases}$$

حکم1:
$$h_1 = f \cup g: A \cup B \xrightarrow{1-1\text{ ,onto}} \acute{A} \cup \acute{B} \qquad \text{if } A \cap B = \acute{A} \cap \acute{B} = \phi$$
$$(a, b) \longmapsto (f(a), g(b))$$

حکم2:
$$h_2 = f \times g: A \times B \xrightarrow{1-1\text{ ,onto}} \acute{A} \times \acute{B}$$
$$(a, b) \longmapsto (f(a), g(b))$$

حکم3: $h_3: A^B \xrightarrow{1-1, onto} \acute{A}^{\acute{B}} \quad , \quad \alpha: B \longrightarrow A$
$h_3(\alpha) f o \alpha o g^{-1}$

اثبات۱. فرض کنیم $\langle x,y\rangle, \langle x,z\rangle \in f \cup g$ ، حالات زیر را داریم:

1. اگر $\langle x,y\rangle, \langle x,z\rangle \in f$ چون f تابع است پس $y = z$.

2. اگر $\langle x,y\rangle, \langle x,z\rangle \in g$ چون g تابع است پس $y = z$.

3. اگر $\langle x,z\rangle \in g$ و $\langle x,y\rangle \in f$ پس $x \in Dom(f) = A$ و $x \in Dom(g) = B$ پس $A \cap B \neq \phi$ . به تناقض رسیدیم.

4. اگر $\langle x,z\rangle \in f$ و $\langle x,y\rangle \in g$ پس $x \in Dom(f) = A$ و $x \in Dom(g) = B$ پس $A \cap B \neq \phi$ . به تناقض رسیدیم.

پس حالت 3 و 4 برقرار نیست و به تناقض می رسیم و در حالات 1 و 2 داریم $y = z$ پس $f \cup g$ تابع است.

$Dom(f \cup g) = Dom(f) \cup Dom(g) = A \cup B$
$Rang(f \cup g) = Rang(f) \cup Rang(g) \subseteq \acute{A} \cup \acute{B}$

اثبات۲. فرض کنیم $A \cap B = \acute{A} \cap \acute{B} = \phi$ پس $f \cup g: A \cup B \longrightarrow \acute{A} \cup \acute{B}$، اگر $\langle x,z\rangle, \langle y,z\rangle \in f \cup g$ حالات زیر را داریم:

1. اگر $\langle x,z\rangle, \langle y,z\rangle \in f$ چون f یک به یک است پس $y = z$.

2. اگر $\langle x,z\rangle, \langle y,z\rangle \in g$ چون g یک به یک است پس $y = z$.

3. اگر $\langle y,z\rangle \in g$ و $\langle x,z\rangle \in f$ پس $z \in Rang(g) = \acute{B}$ و $x \in Rang(f) = \acute{A}$ پس $\acute{A} \cap \acute{B} \neq \phi$ . به تناقض رسیدیم.

4. اگر $\langle y,z\rangle \in f$ و $\langle x,z\rangle \in g$ پس $z \in Rang(g) = \acute{B}$ و $x \in Rang(f) = \acute{A}$ پس $\acute{A} \cap \acute{B} \neq \phi$ . به تناقض رسیدیم.

پس حالت 3 و 4 برقرار نیست و به تناقض می رسیم و در حالات 1 و 2 داریم $y = z$ پس $f \cup g$ یک به یک است.

■

تمرین۷. قسمت 3 قضیه۱۱ را اثبات کنید.

## فصل پنجم: ساختمان اعداد طبیعی

هدف: بازسازی اعداد طبیعی در نظریه مجموعه ها و اثبات خواص آن.

شعار: تمام ریاضیات را می توان در نظریه مجموعه ها مطالعه کرد.

هدف: تحقیق شعار فوق برای نظریه ی اعداد

همان طور که می توان در کامپیوتر اعداد و اشکال و ... را توسط دنباله های متناهی از بیت های مغناطیسی (که با صفر و یک نمایش می دهیم) نمایش داد، در نظریه ی مجموعه ها با استفاده از $\{,\}$ که به نوعی نقش صفر و یک را بازی می کنند، بر اساس اصل زوج سازی و اصول دیگر نظریه ی مجموعه ها، می توان اعداد و ساختمان های ریاضی را بازسازی کرد، در زیر اعداد طبیعی را می سازیم؛

$$
\begin{aligned}
&0 = \{\,\} \\
&1 = \{0\} = \{\,\} \cup \{0\} = 0 \cup \{0\} = \{\{\,\}\} \\
&2 = \{0,1\} = \{0\} \cup \{1\} = 1 \cup \{1\} = \left\{\{\,\},\{\{\,\}\}\right\} \\
&3 = \{0,1,2\} = \{0,1\} \cup \{2\} = 2 \cup \{2\} = \left\{\{\,\},\{\{\,\}\},\left\{\{\,\},\{\{\,\}\}\right\}\right\} \\
&4 = \{0,1,2,3\} = \{0,1,2\} \cup \{3\} = 3 \cup \{3\} \\
&5 = \{0,1,2,3,4\} = \{0,1,2,3\} \cup \{4\} = 4 \cup \{4\} \\
&\vdots \\
&n+1 = \{0,1,2,3,4,\dots,n\} = \{0,1,2,3,\dots,n-1\} \cup \{n\} = n \cup \{n\}
\end{aligned}
$$

در نمایش های فوق برای اعداد طبیعی داریم:

$$
\begin{aligned}
&0 \subsetneq 1 \subsetneq 2 \subsetneq 3 \subsetneq \cdots \subsetneq n \subsetneq n+1 \subsetneq \cdots \subsetneq m \subsetneq \cdots \\
&0 \in 1 \in 2 \in 3 \in \cdots \in n \in n+1 \in \cdots \in m \in \cdots
\end{aligned}
$$

پس برای $n < m$ در نمایش آنها به صورت فوق داریم: $n \subsetneq m$ و $n \in m$.

تعریف۱. $A$ را بازگشتی گوییم، هرگاه $0 \in A$ و اگر $y \in A$ آنگاه $y^+ \in A$ که در آن $y^+ = y \cup \{y\}$ یعنی؛

$$0 \in A \wedge \forall y(y \in A \longrightarrow y^+ \in A)$$

مثال۱.

$$0^+ = 0 \cup \{0\} = 1, 1^+ = 1 \cup \{1\} = 2, 2^+ = 2 \cup \{2\} = 3, \dots, n^+ = n+1$$

مثال۲. مجموعه های زیر بازگشتی اند. در تمام آنها در تمام آنها اعداد طبیعی وجود دارد، البته هنوز وجود آنها تضمین نشده است.

1. $A = \{0,1,2,3,4,5,\dots\}$
2. $A = \left\{0,\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},2,\frac{5}{2},3,\dots\right\}$
3. $A = \left\{0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1,\frac{4}{3},\frac{5}{3},2,\frac{7}{3},\frac{8}{3},3,\dots\right\}$

## اصل بی نهایت

حداقل یک مجموعه ی بازگشتی وجود دارد. $\exists x\big(0 \in x \wedge \forall y(y \in x \longrightarrow y^{+} \in x)\big)$

تعریف۲. $\omega$ را اشتراک (کوچکترین) مجموعه های بازگشتی گوییم؛

$$\omega = \bigcap \left\{A \middle| \text{بازگشتی است } A\right\} = \bigcap\{A | 0 \in A \wedge \forall y(y \in A \longrightarrow y^{+} \in A)\}$$

قضیه۱. $\omega$ کوچکترین مجموعه ی بازگشتی است، یعنی:

1. $\omega$ بازگشتی است.

2. اگر $A$ بازگشتی باشد $\omega \subseteq A$.

3. اگر $A \subseteq \omega$ بازگشتی باشد، $\omega = A$. (قضیه ی استقرا)

اثبات۱. چون برای هر $A$ بازگشتی، $0 \in A$ پس $0$ در اشتراک مجموعه های بازگشتی یعنی $\omega$ است. اگر $y \in \omega$ و $A$ بازگشتی باشد، پس $y \in A$ و چون $A$ بازگشتی است پس $y^{+} \in A$ و چون $A$ بازگشتی و دلخواه است یعنی $y^{+} \in \omega$ پس $\omega$ بازگشتی است. پس $y^{+}$ در اشتراک آنهاست.

اثبات۲. اگر $A$ بازگشتی باشد پس $\omega = \bigcap \left\{A \middle| \text{بازگشتی است } A\right\} \subseteq A$ زیرا داشتیم $\vdash A \in B \longrightarrow \bigcap B \subseteq A$ و برای $B = \left\{A \middle| \text{بازگشتی است } A\right\}$ حکم حاصل می شود.

اثبات۳. بنابر۲ داریم $\omega \subseteq A$ و چون $A \subseteq \omega$ پس $\omega = A$.

■

کاربرد قضیه۱. برای اثبات حکم $A(n)$ برای هر $n \in \omega$، ثابت می کنیم مجموعه ی زیر بازگشتی است؛ $A = \{n \in \omega | A(x)\}$ مجموعه $n \in \omega$ که در خاصیت $A(n)$ صدق می کنند و چون $A \subseteq \omega$ بنابر۳ در قضیه۱، $\omega = A$ یعنی $\forall n \in \omega \; A(x)$.

قضیه۲. برای $n, m \in \omega$ داریم:

1. $m \in n \leftrightarrow m \subsetneq n$
2. $n^{+} \neq 0$
3. $n \neq 0 \longrightarrow \exists k \in \omega \quad n = k^{+}$
4. $m = n \leftrightarrow m^{+} = n^{+}$
5. $m \in n \leftrightarrow m^{+} \in n^{+}$
6. $m \in n \leftrightarrow m^{+} \in n \vee m^{+} = n$
7. $n \notin n$
8. $m \in n \vee n \in m \vee m = n$

تعریف۳. $m < n$ هرگاه $m \in n$ و $m \leq n$ هرگاه $m \in n$ یا $m = n$.

قضیه۳ (قضیه بازگشت). مجموعه $A$ و تابع $f: A \longrightarrow A$ و عضو $a \in A$ را در نظر می گیریم، تابع یکتای $h: \omega \longrightarrow A$ وجود دارد که $h(0) = a$ و $h(n^+) = f(h(n))$.

$$\omega = \{0,1,2,3,\dots,n,n^+,\dots\}$$

$$A = \left\{a, f(a), f\big(f(a)\big), f\Big(f\big(f(a)\big)\Big), \dots, h(n), f\big(h(n)\big), \dots\right\}$$

تعریف۴. برای تابع $\begin{cases} f: \omega \longrightarrow \omega \\ f(n) = n^+ \end{cases}$ و تابع متناظر $\begin{cases} h_m: \omega \longrightarrow \omega \\ h_m(0) = m \end{cases}$ با شرایط زیر را بنابر قضیه ی بازگشت خواهیم داشت:

$$h_m(n^+) = f\big(h(n)\big) = \big(h(n)\big)^+$$

تابع $h_m$ یک تابع یک متغیره است و به هر مقدار در دامنه $m$ واحد اضافه می کند.

تعریف۵. تابع دو متغیره جمع را به صورت روبرو تعریف می کنیم:

$$\begin{cases} +: \omega \times \omega \longrightarrow \omega \\ (m,n) \longrightarrow +(m,n)\,[1] = h_m(n) \end{cases}$$

متناظر تابع $h_m: \omega \longrightarrow \omega$ در قضیه ی بازگشت تابع $g_m: \omega \longrightarrow \omega$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$g_m(n^+) = h_m\big(g_m(n)\big) = g_m + m$$

این تابع نیز یک متغیره است و هر مقدار را در $m$ ضرب می کند.

تعریف۶. تابع دومتغیره ضرب را به صورت روبرو تعریف می کنیم:

$$\begin{cases} .: \omega \times \omega \longrightarrow \omega \\ (m,n) \longrightarrow .(m,n)\,[2] = g_m(n) \end{cases}$$

قضیه۴. برای $n, m, p \in \omega$ داریم:

1. $m + 0 = m, m + n^+ = (m + n)^+$
2. $m + 1 = m^+$
3. $0 + n = n$
4. $1 + n = n^+$
5. $m^+ + n = (m + n)^+$
6. $m + n = n + m$
7. $m + (n + p) = (m + n) + p$

---

۱- به جای $+(m,n)$ از $m + n$ استفاده می کنیم.

۲- به جای $.(m,n)$ از $m.n$ استفاده می کنیم.

8. $m.0 = 0$
9. $0.m = 0$
10. $1.m = m$
11. $m^+.n = m.n + n$
12. $m.n = n.m$
13. $m.(n.p) = (m.n).p$
14. $m.(n + p) = m.n + m.p$
15. $m \leq n$ iff $\exists p \in \omega \quad m + p = n$
16. $m < n$ iff $\exists p \in \omega \quad (p \neq 0 \wedge m + p = n)$
17. $m < n$ iff $\forall p \in \omega \quad m + p < n + p$
18. if $p \neq 0$ then ($m < n$ iff $m.p < n.p$)
19. $m = n \leftrightarrow m + p = n + p$
20. $m = n \leftrightarrow m.p = n.p \quad$ if $p \neq 0$
21. $m < n \vee n < m \vee m = n$
22. $m < n \wedge n < p \longrightarrow m < p$

اثبات۱.

$$m + 0 = h_m(0) = m$$
$$m + n^+ = h_m(n^+) = \left(h_m(n)\right)^+ = (m + n)^+$$

اثبات۲.

$$m + 1 = m + 0^+ = (m + 0)^+ = m^+$$

**اثبات۳.** فرض می کنیم $A = \{n \in \omega | 0 + n = n\}$ ، ثابت می کنیم A بازگشتی است. چون بنابر1، $0 + 0 = 0$ پس $0 \in A$. همچنین اگر $n \in A$ پس $0 + n = n$ پس $0 + n^+ = (0 + n)^+ = n^+$ بنابراین $n^+ \in A$. در نتیجه $A \subseteq \omega$ بازگشتی است پس $A = \omega$ و نتیجه می گیریم $\forall n \in \omega \ \ 0 + n = n$.

**اثبات۴.** حالت خاص 5 برای $m = 0$.

**اثبات۵.** فرض می کنیم $A = \{n \in \omega | m \in \omega \ m^+ + n = (m + n)^+\}$ و ثابت می کنیم A بازگشتی است.

الف. برای اثبات $0 \in A$ ثابت می کنیم که $\forall m \in \omega \ m^+ + 0 = (m + 0)^+$ و برای این منظور توجه می کنیم که $m^+ + 0 = m^+$ و $m + 0 = m$ پس $(m + 0)^+ = m^+$ در نتیجه $m^+ + 0 = (m + 0)^+ = m$.

ب. فرض می کنیم $n \in A$ یعنی $\forall m \in \omega \ m^+ + n = (m + n)^+$ و ثابت می کنیم $n^+ \in A$ یعنی؛

$$\forall m \in \omega \ m^+ + n^+ = (m + n^+)^+$$

بنابر 1 و فرض داریم؛ $m^+ + n^+ = (m^+ + n)^+ = ((m + n)^+)^+ = (m + n^+)^+$

در نتیجه $A \subseteq \omega$ بازگشتی است پس $A = \omega$ پس نتیجه می گیریم $\forall n, m \in \omega \ \ m^+ + n = (m + n)^+$.

اثبات۶. فرض می کنیم $A = \{n \in \omega | m \in \omega\ n + m = m + n\}$ و ثابت می کنیم $A$ بازگشتی است.

الف. برای اثبات $0 \in A$ ثابت می کنیم که $\forall m \in \omega\ 0 + m = m + 0$ و برای آن طبق 1 و 3 داریم $0 + m = m$ و $m + 0 = 0$ پس $0 + m = m + 0$.

ب. فرض می کنیم $n \in A$ یعنی $\forall m \in \omega\ n + m = m + n$ و ثابت می کنیم $n^+ \in A$ یعنی؛

$\forall m \in \omega\ n^+ + m = m + n^+$

طبق 1 و 3 و فرض داریم؛ $n^+ + m = (n + m)^+ = (m + n)^+ = m + n^+$. بنابراین $A \subseteq \omega$ بازگشتی است پس $A = \omega$ پس نتیجه می گیریم $\forall n, m \in \omega\ \ n + m = m + n$.

اثبات۷. فرض می کنیم $A = \{p \in \omega | \forall n, m \in \omega\ m + (n + p) = (m + n) + p\}$ و ثابت می کنیم $A$ بازگشتی است.

الف. برای اثبات $0 \in A$ ثابت می کنیم که $\forall n, m \in \omega\ m + (n + 0) = (m + n) + 0$ و طبق 1 داریم؛

$$\begin{cases} m + (n + 0) = m + n \\ (m + n) + 0 = m + n \end{cases} \Rightarrow m + (n + 0) = (m + n) + 0$$

ب. فرض می کنیم $p \in A$ یعنی $\forall n, m \in \omega\ m + (n + p) = (m + n) + p$ و ثابت می کنیم $p^+ \in A$ یعنی؛ $m + (n + p^+) = (m + n) + p^+$ . طبق 1 و فرض داریم؛

$$m + (n + p^+) = m + (n + p)^+ = \big(m + (n + p)\big)^+ = \big((m + n) + p\big)^+ = (m + n) + p^+.$$

بنابراین $A \subseteq \omega$ بازگشتی است پس $A = \omega$ پس نتیجه می گیریم؛

$\forall n, m, p \in \omega\ m + (n + p) = (m + n) + p$ .

اثبات۱۴. فرض می کنیم $A = \{p \in \omega | \forall n, m \in \omega\ m.(n.p) = (m.n).p\}$ و ثابت می کنیم $A$ بازگشتی است.

الف. برای اثبات $0 \in A$ ثابت می کنیم که $\forall n, m \in \omega\ m.(n.0) = (m.n).0$ ، داریم؛

$$\begin{cases} m.(n.0) = 0 \\ (m.n).0 = 0 \end{cases} \Rightarrow m + (n + 0) = (m + n) + 0 = 0$$

ب. فرض می کنیم $p \in A$ یعنی $\forall n, m \in \omega\ m.(n.p) = (m.n).p$ و ثابت می کنیم $p^+ \in A$ یعنی؛ $m.(n.p^+) = (m.n).p^+$ ؛

$$m.(n.p^+) = m.(n.p + n) = m.(n.p) + m.n = (m.n).p + m.n = (m.n).p^+.$$

بنابراین $A \subseteq \omega$ بازگشتی است پس $A = \omega$ پس نتیجه می گیریم؛ $\forall n, m, p \in \omega\ m.(n.p) = (m.n).p$ .

اثبات۱۵. فرض می کنیم $A = \{p \in \omega | \forall n, m \in \omega\ m.(n+p) = m.n + m.p\}$ و ثابت می کنیم A بازگشتی است.

الف. برای اثبات $0 \in A$ ثابت می کنیم که $\forall n, m \in \omega\ m.(n+0) = m.n + m.0$، داریم؛

$$\begin{cases} m.(n+0) = 0 \\ m.n + m.0 = m.n \end{cases} \Longrightarrow m.(n+0) = m.n + m.0$$

ب. فرض می کنیم $p \in A$ یعنی $\forall n, m \in \omega\ m.(n+p) = m.n + m.p$ و ثابت می کنیم $p^+ \in A$ یعنی؛ $m.(n+p^+) = m.n + m.p^+$؛

$$m.(n+p^+) = m.(n+p)^+ = m.(n+p) + m = (m.n + m.p) + m = m.n + (m.p + m) = m.n + m.p^+.$$

بنابراین $A \subseteq \omega$ بازگشتی است پس $A = \omega$ پس نتیجه می گیریم؛

$$\forall n, m, p \in \omega\ m.(n+p) = m.n + m.p$$

اثبات۲۰. فرض می کنیم $A = \{p \in \omega | \forall n, m \in \omega\ m = n \leftrightarrow m + p = n + p\}$ و ثابت می کنیم A بازگشتی است.

الف. برای اثبات $0 \in A$ ثابت می کنیم که $\forall n, m \in \omega\ m = n \leftrightarrow m + 0 = n + 0$، داریم؛

$$\begin{cases} m + 0 = m \\ n + 0 = n \end{cases} \Longrightarrow m = n \leftrightarrow m + 0 = n + 0$$

ب. فرض می کنیم $p \in A$ یعنی $\forall n, m \in \omega\ \ m = n \leftrightarrow m + p = n + p$ و ثابت می کنیم $p^+ \in A$ یعنی؛ $m = n \leftrightarrow m + p^+ = n + p^+$

$$m = n \leftrightarrow m + p = n + p \leftrightarrow (m+p)^+ = (n+p)^+ \leftrightarrow m + p^+ = n + p^+.$$

بنابراین $A \subseteq \omega$ بازگشتی است پس $A = \omega$ پس نتیجه می گیریم؛

$$\forall n, m, p \in \omega\ m = n \leftrightarrow m + p = n + p$$

■

تمرین۱. سایر گزاره های قضیه۴ را اثبات کنبد.

## فصل ششم: ساختمان اعداد صحیح

تعریف۱. رابطه ی $R$ را روی $A$ ؛

1. بازتابی گوییم هرگاه $\forall x \in A\ \langle x,x\rangle \in R$

2. تقارنی گوییم هرگاه $\forall x,y \in A\ (\langle x,y\rangle \in R \longrightarrow \langle y,x\rangle \in R)$

3. پادتقارنی گوییم هرگاه $\forall x,y \in A\ (\langle x,y\rangle \in R \wedge \langle y,x\rangle \in R \longrightarrow x = y)$

4. متعدی گوییم هرگاه $\forall x,y,z \in A\ (\langle x,y\rangle \in R \wedge \langle y,z\rangle \in R \longrightarrow \langle x,z\rangle \in R)$

5. ترتیب گوییم هرگاه $R$ پادتقارنی و متعدی باشد.

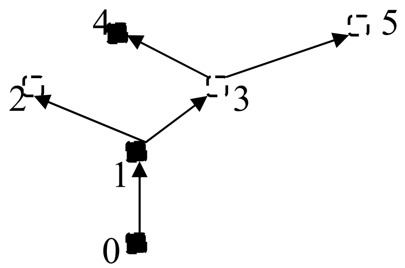
6. ترتیب تام یا زنجیر گوییم هرگاه یک ترتیب باشد و $\forall x,y \in A\ (\langle x,y\rangle \in R \vee \langle y,x\rangle \in R \vee x = y)$.

7. خوش ترتیب گوییم هرگاه زیرمجموعه ی $B \subseteq A$ دارای کوچکترین عضو باشد. یعنی؛

$\exists y \in B\ \forall x \in B\ \langle x,y\rangle \in R \vee x = y$

8. هم ارزی گوییم هرگاه $R$ بازتابی، تقارنی و متعدی باشد.

مثال۱. مجموعه ی $A = \{0,1,2,3,4,5\}$ ، رابطه ی $R_1$ روی $A$ و گراف متناظر را که درآن هر یال جهت دار متناظر یک زوج مرتب در $R_1$ است را در نظر می گیریم. در $R_2$ و $R_3$ مسیرهایی به طول 2 و 3 نیز متناظر زوج مرتب های جدید می باشد. رئوس 0 و 1 و 4 به صورت نقاط توپر و متناظر زوج های $\langle 0,0\rangle$ و $\langle 1,1\rangle$ و $\langle 4,4\rangle$ در $R_i$ ها می باشند و رئوس 2 و 3 و 5 به صورت نقاط توخالی نشان داده شده اند و به معنای نبود نقاط $\langle 2,2\rangle$ و $\langle 3,3\rangle$ و $\langle 5,5\rangle$ در $R_i$ ها می باشند. رابطه را در رئوس توپر، بازتابی و در رئوس توخالی غیر بازتابی گویند.




$R_1 = \{\langle 0,0\rangle, \langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 4,4\rangle, \langle 0,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 3,4\rangle, \langle 3,5\rangle\}$
$R_2 = R_1 \cup \{\langle 0,2\rangle, \langle 0,3\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 1,5\rangle\} = R_1 \cup \{\exists z\ (\langle x,z\rangle \in R_1 \wedge \langle z,y\rangle \in R)\}$
$R_2 = \{\langle 0,0\rangle, \langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 4,4\rangle, \langle 0,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 3,4\rangle, \langle 3,5\rangle, \langle 0,2\rangle, \langle 0,3\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 1,5\rangle\}$
$R_3 = R_2 \cup \{\langle 0,4\rangle, \langle 0,5\rangle\} = \{\langle x,y\rangle | \exists z\ (\langle x,z\rangle \in R_2 \wedge \langle z,y\rangle \in R)\}$
$R_3 = \{\langle 0,0\rangle, \langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 4,4\rangle, \langle 0,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 3,4\rangle, \langle 3,5\rangle, \langle 0,2\rangle, \langle 0,3\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 1,5\rangle,$
$\langle 0,4\rangle, \langle 0,5\rangle\}$

$R_3$ زوج های مرتب متناظر تمام مسیرهای گراف را در بر دارد و آن را بستار متعددی $R_1$ گویند.

$\Big($ $R_3$ کوچکترین مجموعه متعدی شامل $R_1$ است $\Big)$

مثال۲. فرض کنیم $B=\{2,3\}$ و $C=\{4\}$ و $D=\{0,1,5\}$

$$A=\{0,1,2,3,4,5\}=\{2,3\}\cup\{4\}\cup\{0,1,5\}=B\cup C\cup D$$
$$R=\{\langle 0,0\rangle,\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle,\langle 5,5\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 0,5\rangle,\langle 0,1\rangle,\langle 5,0\rangle,\langle 1,0\rangle,\langle 5,1\rangle,\langle 1,5\rangle\}=B^2\cup C^2\cup D^2$$
$$R=B^2\cup C^2\cup D^2$$
$$B^2=\{\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$$
$$C^2=\{\langle 4,4\rangle\}$$
$$D^2=\{\langle 0,0\rangle,\langle 0,1\rangle,\langle 0,5\rangle,\langle 1,1\rangle,\langle 1,0\rangle,\langle 1,5\rangle,\langle 5,5\rangle,\langle 5,0\rangle,\langle 5,1\rangle\}$$
$$R=\{\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle,\langle 0,0\rangle,\langle 0,1\rangle,\langle 0,5\rangle,\langle 1,1\rangle,\langle 1,0\rangle,\langle 1,5\rangle,\langle 5,5\rangle,\langle 5,0\rangle,\langle 5,1\rangle\}$$

$R$ یک رابطه ی هم ارزی روی $A$ با کلاس های هم ارزی $B$ و $C$ و $D$ می باشد.

نماد۱. افراز حاصل از رابطه ی هم ارزی $R$ را با $A/_R$ و عضوی از افراز شامل $a\in A$ را با $a/_R$ یا $[a]_R$ نمایش می دهیم. رابطه ی هم ارزی متناظر افراز $X\subseteq P(A)$ را با $R=A/_X$ نمایش می دهیم یعنی؛

$$A/_R=\{a/_R\,|\,a\in A\}$$

$$A/_X=\{\langle a,b\rangle\in A^2\,|\,\exists y\in X\ a\in y\wedge\ b\in y\}$$

مثال۳. در مثال۲ برای افراز $X=\{B,C,D\}$ و رابطه ی هم ارزی متناظر $R$ داریم؛

$$R=A/_X\,,X=A/_R$$

$$B=2/_R=3/_R=[2]_R=[3]_R$$

$$C=4/_R=[4]_R$$

$$B=0/_R=1/_R=5/_R=[0]_R=[1]_R=[5]_R$$

قضیه۱. برای افراز $X$ از $A$ و رابطه ی هم ارزی $R$ روی$A$ داریم:

1. $A/_R$ یک افراز از $A$ است.

2. $A/_X$ یک رابطه هم ارزی روی $A$ است.

3. بنابر 1 و 2، $A/\!\!/\left(A/_R\right)$ یک رابطه ی هم ارزی و $A/\!\!/\left(A/_X\right)$ یک افراز از $A$ است و داریم $R=A/\!\!/\left(A/_R\right)$

و $X = {}^{A}\Big/\left({}^{A}/_{X}\right)$.

مثال۴. برای رابطه ی هم ارزی $\equiv_5$ یعنی هم نهشتی به پیمانه 5 داریم:

$$\mathbb{Z}/_{\equiv_5} = \{[0]_5, [1]_5, [2]_R, [3]_5, [4]_5\} = \mathbb{Z}_5$$

برای اعداد $[i]_5 = \{5k + i|k \in \mathbb{Z}\}, i = 0,1,2,3,4$ مثلاً ؛

$$[0]_5 = \{5k|k \in \mathbb{Z}\} = \{0,5,10,15, \dots\} \cup \{-5, -10, -15, \dots\}$$
$$[1]_5 = \{5k + 1|k \in \mathbb{Z}\} = \{1,5,11,16, \dots\} \cup \{-4, -9, -14, \dots\}$$
$$[2]_5 = \{5k + 2|k \in \mathbb{Z}\} = \{2,6,12,17, \dots\} \cup \{-3, -8, -13, \dots\}$$
$$[3]_5 = \{5k + 3|k \in \mathbb{Z}\} = \{3,7,13,18, \dots\} \cup \{-2, -7, -12, \dots\}$$
$$[4]_5 = \{5k + 4|k \in \mathbb{Z}\} = \{4,8,14,19, \dots\} \cup \{-1, -6, -11, \dots\}$$

## ایده برای ساختمان اعداد صحیح

از تفاضل اعداد طبیعی، اعداد صحیح بدست می آید، مثلاً؛

$$1 = 1 - 0 = 2 - 1 = 3 - 2 = \cdots$$
$$2 = 2 - 0 = 3 - 1 = 4 - 2 = \cdots$$
$$-1 = 0 - 1 = 1 - 2 = 2 - 3 = \cdots$$
$$-2 = 0 - 2 = 1 - 3 = 2 - 4 = \cdots$$

به جای $n - m$ از زوج مرتب $\langle n, m\rangle$ استفاده کرده و تساوی را به یک رابطه هم ارزی تبدیل می کنیم. اعداد صحیح را مجموعه کلاس های هم ارزی حاصل می گیریم.

$$\langle 1,0\rangle \simeq \langle 2,1\rangle \simeq \langle 3,2\rangle \simeq \cdots$$
$$\langle 2,0\rangle \simeq \langle 3,1\rangle \simeq \langle 4,2\rangle \simeq \cdots$$
$$\langle 0,1\rangle \simeq \langle 1,2\rangle \simeq \langle 2,3\rangle \simeq \cdots$$
$$\langle 0,2\rangle \simeq \langle 1,3\rangle \simeq \langle 2,4\rangle \simeq \cdots$$

تعریف۲. $\mathbb{Z}$ را مجموعه کلاس های هم ارزی رتبطه ی هم ارزی $\simeq$ روی $\omega \times \omega$ می گیریم.

یعنی ${}^{\omega \times \omega}/_{\simeq} = \mathbb{Z}$ که در آن جمع، ضرب، قرینه، تفاضل و رابطه ی ترتیب روی $\mathbb{Z}$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\langle n_1, m_1\rangle \simeq \langle n_2, m_2\rangle \text{ iff } n_1 - m_1 = n_2 - m_2 \text{ or } n_1 + m_2 = n_2 + m_1$$

1. $[\langle m, n\rangle] + [\langle p, q\rangle] = [\langle m + p, n + q\rangle]$
2. $[\langle m, n\rangle]. [\langle p, q\rangle] = [\langle m. p + n. q, mq + n. p\rangle]$
3. $-[\langle m, n\rangle] = [\langle n, m\rangle]$
4. $[\langle m, n\rangle] - [\langle p, q\rangle] = [\langle m, n\rangle] + (-[\langle p, q\rangle]) = [\langle m, n\rangle] + [\langle q, p\rangle] = [\langle m + q, n + p\rangle]$

5. $[\langle m,n\rangle] < [\langle p,q\rangle] \quad \text{iff} \quad m+q < n+p$

همچنین برای هر $n \in \omega$ ، کلاس هم ارزی $[\langle n,0\rangle]$ را به عنوان عدد $n$ در $\mathbb{Z}$ در نظر می گیریم و با $n_{\mathbb{Z}}$ نمایش می دهیم، یعنی $n_{\mathbb{Z}} = [\langle n,0\rangle]$ و $-n_{\mathbb{Z}} = [\langle 0,n\rangle]$ . برای مثال؛

$-1_{\mathbb{Z}} = [\langle 0,1\rangle]$ و $0_{\mathbb{Z}} = [\langle 0,0\rangle]$ و $1_{\mathbb{Z}} = [\langle 1,0\rangle]$

قضیه۲. جمع، ضرب، قرینه و تفاضل و ترتیب اعداد صحیح خوش تعریف است.

اثبات. فرض می کنیم $a = [\langle m_1,n_1\rangle] = [\langle m_2,n_2\rangle]$ و $b = [\langle p_1,q_1\rangle] = [\langle p_2,q_2\rangle]$ ثابت می کنیم؛

$$a+b = [\langle m_1+p_1, n_1+q_1\rangle] = [\langle m_2+p_2, n_2+q_2\rangle]$$
$$a.b = [\langle m_1p_1+n_1q_1\rangle] = [\langle m_2p_2+n_2q_2\rangle]$$

بنابر فرض و تعریف کلاس های هم ارزی داریم، $m_1+n_2 = n_1+m_2$ و $p_1+q_2 = q_1+p_2$ و برای اثبات حکم ثابت کنیم $(m_1+p_1)+(n_2+q_2) = (n_1+q_1)+(m_2+p_2)$.

■

تمرین۱. روابط فوق را اثبات کنید.

مثال۵.

$$a = [\langle 5,2\rangle] = [\langle 12,9\rangle] = 3_{\mathbb{Z}}$$
$$b = [\langle 7,12\rangle] = [\langle 4,9\rangle] = -5_{\mathbb{Z}}$$
$$a+b = [\langle 5+7,2+12\rangle] = [\langle 12+4,9+9\rangle] = [\langle 12,14\rangle] = [\langle 16,18\rangle] = -2_{\mathbb{Z}}$$
$$a.b = [\langle 5\times 7+2\times 12,5\times 12+2\times 7\rangle] = [\langle 12\times 4+9\times 9,12\times 9+4\times 9\rangle] = [\langle 59,74\rangle] = [\langle 129,144\rangle] = -15_{\mathbb{Z}}$$

قضیه۳. اگر $a,b,c \in \mathbb{Z}$ آنگاه:

1. $a+b = b+a$
2. $a+0_{\mathbb{Z}} = a$
3. $a.0_{\mathbb{Z}} = 0$
4. $a+(b+c) = (a+b)+c$
5. $a.(b.c) = (a.b).c$
6. $a.(b+c) = a.b+a.c$
7. $a.b = b.a$
8. $a < b \leftrightarrow a+c < b+c$
9. $c > 0 \longrightarrow (a < b \leftrightarrow a.c < b.c)$
10. $a = b \leftrightarrow a+c = b+c$
11. $c \neq 0 \longrightarrow (a = b \leftrightarrow a.c = b.c)$
12. بین $a$ و $a+1$ هیچ عدد صحیحی وجود ندارد

اثبات۶. فرض می کنیم $a=[\langle m,n\rangle]$ و $b=[\langle p,q\rangle]$ و $c=[\langle k,l\rangle]$ و $a.(b+c)=a.b+a.c$ را ثابت می کنیم؛

طرف اول تساوی:

$$\begin{aligned}
&a.(b+c)=[\langle m,n\rangle].[\langle p+k,q+l\rangle]\\
&=[\langle m.(p+k)+n(q+l),m.(q+l)+n(p+k)\rangle]\\
&=[\langle (m.p+m.k+n.q+n.l),(m.q+m.l+n.p+n.k)\rangle]
\end{aligned}$$

طرف دوم تساوی:

$$\begin{aligned}
&a.b+a.c=[\langle m,n\rangle].[\langle p,q\rangle]+[\langle m,n\rangle].[\langle k,l\rangle]\\
&=[\langle m.p+n.q,m.q+n.p\rangle+\langle m.k+n.l,m.l+n.k\rangle]\\
&=[\langle (m.p+n.q+m.k+n.l),(m.q+n.p+m.l+n.k)\rangle]
\end{aligned}$$

بنابراین $a.(b+c)=a.b+a.c$

■

تمرین۲. سایر خواص ذکر شده در قضیه۳ را اثبات کنید.

## فصل هفتم: ساختمان اعداد گویا

### ایده برای ساختمان اعداد گویا

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\frac{-1}{-2}=\frac{-2}{-4}=\frac{-3}{-6}=\cdots$$
$$\frac{4}{5}=\frac{8}{12}=\frac{12}{15}=\frac{-4}{-5}=\frac{-8}{-12}=\frac{-12}{-15}=\cdots$$

به جای کسر $\frac{m}{n}$ از زوج $\langle m,n\rangle$ و به جای تساوی از هم ارزی استفاده می کنیم:

$$\langle n,m\rangle \simeq \langle p,q\rangle \quad \text{iff} \quad m.q=n.p \quad \text{or} \quad \frac{m}{n}=\frac{p}{q}$$

تعریف۱. $\mathbb{Q}$ را مجموعه ی کلاس های هم ارزی رابطه $\simeq$ در بالا روی زوج های مرتب در $\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}-\{0\})$ می گیریم، یعنی $\mathbb{Q}=\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}-\{0\})/_{\simeq}$

1. $[\langle m,n\rangle]+[\langle p,q\rangle]=[\langle m.q+n.p,n.q\rangle]$
2. $[\langle m,n\rangle]-[\langle p,q\rangle]=[\langle m.q-n.p,n.q\rangle]$
3. $-[\langle m,n\rangle]=[\langle -m,n\rangle]=[\langle m,-n\rangle]$
4. $[\langle m,n\rangle].[\langle p,q\rangle]=[\langle m.p,n.q\rangle]$
5. $[\langle m,n\rangle]^{-1}=[\langle n,m\rangle]$
6. $[\langle m,n\rangle]<[\langle p,q\rangle] \quad \text{iff} \quad mq<np \quad (\text{if } n,q>0)$
7. $n_{\mathbb{Q}}$[۱] $=[\langle n,1\rangle]$
8. $\frac{m}{n_{\mathbb{Q}}}$[۲] $=[\langle m,n\rangle]$

قضیه۱. جمع، تفاضل، قرینه، ضرب، معکوس و ترتیب در تعریف۱ خوش تعریف می باشند، یعنی مستقل از انتخاب عضوند.

اثبات. فرض می کنیم $a=[\langle m_1,n_1\rangle]=[\langle m_2,n_2\rangle]$ و $b=[\langle p_1,q_1\rangle]=[\langle p_2,q_2\rangle]$ وثابت می کنیم؛

$$a+b=[\langle m_1.q_1+n_1.p_1,n_1.q_1\rangle]=[\langle m_2.q_2+n_2.p_2,n_2.q_2\rangle]$$
$$a-b=[\langle m_1.q_1-n_1.p_1,n_1.q_1\rangle]=[\langle m_2.q_2-n_2.p_2,n_2.q_2\rangle]$$
$$a.b=[\langle m_1.p_1,n_1.q_1\rangle]=[\langle m_2.p_2,n_2.q_2\rangle]$$
$$-a=[\langle -m_1,n_1\rangle]=[\langle -m_2,n_2\rangle]$$
$$a^{-1}=[\langle n_1,m_1\rangle]=[\langle n_2,m_2\rangle]$$
$$a<b \quad iff \quad m_1q_1<n_1p_1 \quad \text{iff} \quad m_2q_2<n_2p_2$$

---

۱– در صورت عدم وجود ابهام، به جای $n_{\mathbb{Q}}$ از $n$ استفاده می کنیم.

۲– در صورت عدم وجود ابهام، به جای $\frac{m}{n_{\mathbb{Q}}}$ از $\frac{m}{n}$ استفاده می کنیم.

تمرین۱. اثبات قضیه۱ را کامل کنید.

تمام خواص جمع، ضرب، معکوس و ترتیب اعداد گویا برای $\mathbb{Q}$ با تعاریف فوق برقرار است، یعنی $\mathbb{Q}$ یک میدان مرتب است.

قضیه۲. برای $a, b, c \in \mathbb{Q}$ داریم:

1. $a + b = b + a$
2. $a + 0_{\mathbb{Q}} = a$
3. $a.0_{\mathbb{Q}} = 0$
4. $a + (b + c) = (a + b) + c$
5. $a.(b.c) = (a.b).c$
6. $a.(b + c) = a.b + a.c$
7. $a.b = b.a$
8. $a < b \leftrightarrow a + c < b + c$
9. $c > 0 \longrightarrow (a < b \leftrightarrow a.c < b.c)$
10. $a = b \leftrightarrow a + c = b + c$
11. $c \neq 0 \longrightarrow (a = b \leftrightarrow a.c = b.c)$
12. $a \neq 0 \longrightarrow a.a^{-1} = 1_{\mathbb{Q}}$
13. $m.n^{-1} = \frac{m}{n}$
14. $(m, n \in \mathbb{Z}) \qquad \frac{m}{n} = \frac{km}{kn}$

تمرین۲. قضیه۲ را اثبات کنید.

# فصل هشتم: ساختمان اعداد حقیقی

## ایده برای ساختمان اعداد حقیقی

اگر $a \in \mathbb{R}$ یک عدد حقیقی باشد، دنباله ی $(a_n)$ از اعداد گویا وجود دارد که $\lim(a_n) = a$. ممکن است حد این دنباله د اعداد گویا نباشد، ولی این دنباله یک دنباله ی اساسی است. اگر $(a_n)$ و $(b_n)$ دو دنباله اساسی از اعداد گویا باشند که $\lim(a_n) = \lim(b_n) = a$ پس $\lim(a_n - b_n) = 0$. پس برای ساخت اعداد حقیقی از اعداد گویا، a را با کلاس هم ارزی دنباله های اساسی $(a_n)$ از اعداد گویا با رابطه ی هم ارزی زیر یکی می گیریم؛ $(a_n) \sim (b_n) \text{ iff } \lim(a_n - b_n) = 0$.

تعریف۱. یک تابع $a: \omega \longrightarrow \mathbb{Q}$ را یک دنباله ی $a = (a_n)$ از اعضای $\mathbb{Q}$ گوییم.

تعریف۲. یک دنباله ی $a = (a_n)$ از اعضای $\mathbb{Q}$ را اساسی (کوشی) گوییم، هرگاه:

$$\forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists N \qquad \forall n \left(m, n \geq N \longrightarrow |a_m - a_n| < \mathcal{E}\right)$$

مثال۱. $a_n = \frac{1}{n}$ و $b_n = \frac{2^n}{2\times 2^n - 3}$ دو دنباله ی اساسی اند؛

$$N > \frac{2}{\mathcal{E}}, m, n \geq N \longrightarrow |a_n - a_m| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \leq \frac{1}{N} + \frac{1}{N} = \frac{2}{N} < \mathcal{E}$$

$$2^{\frac{1}{N-2}}, m > n > N \longrightarrow |b_n - b_m| = \left|\frac{2^n}{2^{n+1}-3} - \frac{2^m}{2^{m+1}-3}\right| \leq \left|\frac{2^n}{2^{n+1}-3} - \frac{2^m}{2^{m+1}-3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right| \leq$$
$$\left|\frac{2^n}{2^{n+1}-3} - \frac{1}{2}\right| + \left|\frac{2^m}{2^{m+1}-3} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{3}{2(2^{n+1}-3)}\right| + \left|\frac{3}{2(2^{m+1}-3)}\right| = \frac{3}{2(2^{n+1}-2^n)} + \frac{3}{2(2^{m+1}-2^m)} \leq$$
$$\frac{2^2}{2^n\times 2} + \frac{2^2}{2^m\times 2} \leq \frac{1}{2^{N-1}} + \frac{1}{2^{N-1}} = \frac{2}{2^{N-1}} = \frac{1}{2^{N-2}} < \mathcal{E}$$

مثال۲. چون $\sqrt{2} = 1.4142$ و دنباله ی $(a_n)$ به صورت زیر می باشد؛

$$a_1 = 1.4 = \frac{14}{10}, a_2 = 1.41 = \frac{141}{100}, a_3 = 1.414 = \frac{1414}{1000}, a_4 = 1.4142 = \frac{14142}{10000}, \ldots$$

پس به $\sqrt{2}$ همگراست. کلاس هم ارزی شامل این دنباله عدد $\sqrt{2}$ را در $\mathbb{R}$ تشکیل می دهد، یعنی؛

$$\sqrt{2} = \{(1, 1.4, 1.41, 1.141, 1.4142, \ldots)\}$$

تعریف۳. $\mathbb{R}$ را مجموعه $F/\sim$، یعنی مجموعه ی کلاس های هم ارزی $[(a_n)]$ که $(a_n) \in F$ تعریف می کنیم:

$$F = \{(a_n) \in \mathbb{Q}^\omega \mid \text{است } \mathbb{Q} \text{ یک دنباله ی اساسی در } (a_n)\}$$

برای $(a_n), (b_n) \in F$ رابطه ی هم ارزی $\sim$ به صورت زیر تعریف می شود؛

$$(a_n) \sim (b_n) \text{ iff } \lim(a_n - b_n) = 0$$

تعریف۴. جمع، تفریق، ضرب، وارون و ترتیب در $\mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف می شود:

1. $[(a_n)] + [(b_n)] = [(a_n + b_n)]$
2. $[(a_n)] - [(b_n)] = [(a_n - b_n)]$
3. $[(a_n)].[(b_n)] = [(a_n.b_n)]$

$$4.\ [(a_n)] < [(b_n)] \quad \text{iff} \quad \exists r \in \mathbb{Q}\ \exists N \in \omega\ \ (\forall n \geq N\ 0 < r < b_n - a_n)$$

اگر $r \in \mathbb{Q}$ آنگاه تعریف می کنیم؛ $\bar{r} = [(r, r, r, \dots)]$.

اگر $a > \bar{0}$ پس؛

$$a = [(a_n)] > \bar{0} = [(0,0,\dots)] \Longrightarrow \exists r \in \mathbb{Q}\ \exists N \in \omega\ \forall n \geq N\ (\ 0 < r < a_n - 0)$$

پس $a^{-1}$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$a^{-1} = \left[\left(1,1,\dots,1,\frac{1}{a_n},\frac{1}{a_{n+1}},\frac{1}{a_{n+2}},\dots\right)\right] = [(b_n)]\ \ , b_n = \begin{cases} 1 & n < N \\ \frac{1}{a_n} & n \geq N \end{cases}$$

اگر $a < \bar{0}$ نیز به طریق مشابه $a^{-1}$ تعریف می شود.

مثال۳.

$$\bar{2} = [(2,2,2,\dots)] = \left[\left(2-1, 2-\frac{1}{2}, 2-\frac{1}{3}, \dots, 2-\frac{1}{n+1}, \dots\right)\right] =$$
$$\left[\left(2-1, 2-\frac{1}{2}, 2-\frac{1}{4}, \dots, 2-\frac{1}{2^n}, \dots\right)\right] = \left[\left(1, 1+\frac{1}{2}, 1+\frac{2}{3}, \dots, 1+\frac{n}{n+1}, \dots\right)\right]$$

قضیه۱. جمع، ضرب، ترتیب و وارون اعداد حقیقی خوش تعریف هستند. یعنی اگر $a = [(a_n)] = [(a'_n)]$ و $b = [(b_n)] = [(b'_n)]$ آنگاه:

$$1.\ a + b = [(a_n + b_n)] = [(a'_n + b'_n)]$$
$$2.\ a.b = [(a_n.b_n)] = [(a'_n.b'_n)]$$
$$3.\ -a = [(-a_n)] = [(-a'_n)]$$
$$4.\ a^{-1} = \left[\left(\frac{1}{a_n}\right)\right] = \left[\left(\frac{1}{a'_n}\right)\right] \quad \text{iff} \quad \forall a_n, a'_n > 0$$
$$5.\ a < b \quad iff \quad [(a_n)] < [(b_n)] \quad \text{iff} \quad [(a'_n)] < [(b'_n)]$$

یعنی اگر $(a_n)$ و $(a'_n)$ و $(b_n)$ و $(b'_n)$ دنباله های اساسی باشند و $(a_n)\sim(a'_n)$ و $(b_n)\sim(b'_n)$ آنگاه دنباله های زیر اساسی هستند؛

$(a_n + b_n)$ و $(a'_n + b'_n)$ و $(a_n.b_n)$ و $(a'_n.b'_n)$ و $(-a_n)$ و $(-a'_n)$ و $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ و $\left(\frac{1}{a'_n}\right)$ همچنین؛

$$(a_n + b_n)\sim(a'_n + b'_n)$$
$$(a_n b_n)\sim(a'_n.b'_n)$$
$$(-a_n)\sim(-a'_n)$$
$$\left(\frac{1}{a_n}\right)\sim\left(\frac{1}{a'_n}\right) \quad \text{if} \quad \forall a_n, a'_n > r > 0$$
$$\exists r \in \mathbb{Q}, \exists N \in \omega, \forall n \geq N\ (b_n - a_n \geq r > 0) \quad \text{iff} \quad \exists r \in \mathbb{Q}, \exists N \in \omega, \forall n \geq N\ (b'_n - a'_n \geq r > 0)$$

تمرین۱. قضیه۱ را اثبات کنید.

قضیه۲. فرض کنیم $a = [(a_n)]$ و $b = [(b_n)]$ و $c = [(c_n)]$ سه عدد حقیقی باشد. در این صورت:

1. $a + b = b + a$
2. $a + \bar{0} = a$
3. $a + (-a) = \bar{0}$
4. $a + (b + c) = (a + b) + c$
5. $a.b = b.a$
6. $a.\bar{1} = a$
7. $a.(b.c) = (a.b).c$
8. $a.(b + c) = a.b + a.c$
9. $a.a^{-1} = \bar{1}$
10. $a < b \leftrightarrow a + c < b + c$
11. $c > 0 \longrightarrow (a < b \leftrightarrow a.c < b.c)$
12. $c < 0 \longrightarrow (a < b \leftrightarrow a.c > b.c)$
13. $a < b \leftrightarrow -b < -a$
14. $a \neq 0 \longrightarrow a \nless a$
15. $a < b \wedge b < c \longrightarrow a < c$
16. $a < b \vee b < a \vee a = b$
17. $a > 0 \longrightarrow \exists n \in \omega\ na > b$ (اصل ارشمیدس)
18. $a < b \longrightarrow \exists r \in \mathbb{Q}\ a < r < b$ (چگال بودن $\mathbb{Q}$ در $\mathbb{R}$)
19. $a < b \longrightarrow \exists c \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}\ a < c < b$ (چگال بودن $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ در $\mathbb{R}$)
20. $a > \bar{0} \longrightarrow -a < \bar{0}$
21. $-(a + b) = -a - b$
22. $-(a - b) = -a + b$
23. $a - b = a + (-b)$

تعریف۵. میدان مرتب $F$ را کامل گوییم اگر هر دنباله اساسی $F$ در $F$ همگرا باشد.

مثال۴. $\mathbb{Q}$ کامل نیست، مثلاً اگر دنباله $(a_n)$ از اعداد گویا به $\sqrt{2}$ همگرا باشد، حد آن یعنی $\sqrt{2}$ در $\mathbb{Q}$ نیست.

قضیه۳. $\mathbb{R}$ کامل است و با هر میدان مرتب کامل دیگر یکریخت است، یعنی با تقریب یکریختی $\mathbb{R}$ تنها میدان مرتب کامل است.

خواص $1 - 9 \Longleftarrow$ میدان

خواص $1 - 16 \Longleftarrow$ میدان مرتب

خواص $1 - 17 \Longleftarrow$ میدان مرتب ارشمیدسی

چنانچه در ایده ی ساخت $\mathbb{R}$ ذکر شده هر عدد حقیقی $a$ با رده ی دنباله های گویای $(a_n)$ همگرا به $a$ یکی در نظر گرفته می شود. این ایده در $\mathbb{R}$ درست باقی می ماند. یعنی اگر متناظر اعداد گویای $a_n$ در دنباله $(a_n)$، اعداد $\overline{a_n}$ در $\mathbb{R}$ را در نظر بگیریم داریم $\lim \overline{a_n} = \bar{a}$. این مطلب در قضیه ی زیر بیان می شود.

قضیه۴.

1. اگر $a = [(a_n)] \in \mathbb{R}$ آنگاه در $\mathbb{R}$ داریم $\lim \overline{a_n} = \bar{a}$

2. اگر $\bar{r} = [(a_n)] \in \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ آنگاه $\lim a_n = r \Leftrightarrow \lim \overline{a_n} = \bar{r}$