به نام خدا
امتحان میان ترم معادلات دیفرانسیل
(۲۲ اسفند ۱۳۹۴)

پاسخ سوالات

....

۱. معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید

$$x\,dx + y\,dy = xy(x\,dy - y\,dx)$$

راه اول، معادله جداشدنی است: با دسته‌بندی مناسب جملات جواب عمومی معادله‌ی جداشدنی را می‌یابیم

$$\begin{aligned}
x\,dx + y\,dy = xy(x\,dy - y\,dx) &\implies x\,dx + y\,dy = x^2 y\,dy - xy^2\,dx \\
&\implies (x + xy^2)\,dx = (x^2 y - y)\,dy \\
&\implies x(1 + y^2)\,dx = y(x^2 - 1)\,dy \\
&\implies \frac{x}{x^2 - 1}\,dx = \frac{y}{1 + y^2}\,dy \\
&\implies \frac{1}{2}\ln|x^2 - 1| = \frac{1}{2}\ln(1 + y^2) + c_2 \quad \text{(تا اینجا کافی است)} \\
&\implies \ln|x^2 - 1| = \ln(1 + y^2) + c_1 \\
&\implies x^2 - 1 = c(1 + y^2).
\end{aligned}$$

راه دوم، معادله برنولی است: با دسته‌بندی مناسب جملات جواب عمومی معادله‌ی برنولی را می‌یابیم

$$\begin{aligned}
&x\,dx + y\,dy = xy(x\,dy - y\,dx) \\
&\implies x\,dx + y\,dy = x^2 y\,dy - xy^2\,dx \\
&\implies (x + xy^2)\,dx = (x^2 y - y)\,dy \\
&\implies (x + xy^2)\,dx + y(1 - x^2)\,dy = 0 \\
&\implies x + xy^2 + y(1 - x^2)\,y' = 0 \\
&\implies yy' + \frac{x}{1 - x^2}y^2 = -\frac{x}{1 - x^2}, \quad z = y^2,\ z' = 2yy' \\
&\implies z' + \frac{2x}{1 - x^2}z = -\frac{2x}{1 - x^2}, \quad \mu = e^{\int \frac{2x}{1 - x^2}\,dx} = e^{-\ln(1 - x^2)} = \frac{1}{1 - x^2} \\
&\implies z' + \frac{2x}{(1 - x^2)^2}z = -\frac{2x}{(1 - x^2)^2} \\
&\implies \left(\frac{1}{1 - x^2}z\right)' = -\frac{2x}{(1 - x^2)^2} \\
&\implies \frac{1}{1 - x^2}z = \frac{-1}{1 - x^2} + c \\
&\implies y^2 = -1 + c(1 - x^2).
\end{aligned}$$

راه سوم، یافتن عامل انتگرال‌ساز بر حسب x: ابتدا معادله را مرتب می‌کنیم

$$\begin{aligned}
x\,dx + y\,dy = xy(x\,dy - y\,dx) &\implies x\,dx + y\,dy = x^2 y\,dy - xy^2\,dx \\
&\implies (x + xy^2)\,dx + (y - x^2 y)\,dy = 0.
\end{aligned}$$

در اینجا داریم $M = x + xy^۲$ و $N = y - x^۲y$. بنابراین

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{۲xy - (-۲xy)}{y - x^۲y} = \frac{۴xy}{y(۱ - x^۲)} = \frac{۴x}{۱ - x^۲}$$

تابعی از x است. از این‌رو

$$\mu = e^{\int \frac{۴x}{۱-x^۲}\,dx} = e^{-۲\ln(۱-x^۲)} = e^{\ln(۱-x^۲)^{-۲}} = (۱ - x^۲)^{-۲}$$

یک عامل انتگرال‌ساز معادله است. با ضرب آن در معادله یک معادله‌ی کامل به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
&(x + xy^۲)\,dx + (y - x^۲y)\,dy = ۰ \\
&\quad\Longrightarrow (x + xy^۲)(۱ - x^۲)^{-۲}\,dx + (y - x^۲y)(۱ - x^۲)^{-۲}\,dy = ۰ \\
&\quad\Longrightarrow x(۱ + y^۲)(۱ - x^۲)^{-۲}\,dx + y(۱ - x^۲)(۱ - x^۲)^{-۲}\,dy = ۰ \\
&\quad\Longrightarrow x(۱ + y^۲)(۱ - x^۲)^{-۲}\,dx + y(۱ - x^۲)^{-۱}\,dy = ۰
\end{aligned}$$

چون معادله‌ی بالا کامل است، تابع $\psi(x,y)$ وجود دارد که $\psi_x = M$ و $\psi_y = N$، یعنی

$$\begin{cases} \psi_x = x(۱ + y^۲)(۱ - x^۲)^{-۲} = x(۱ - x^۲)^{-۲} + xy^۲(۱ - x^۲)^{-۲} \\ \psi_y = y(۱ - x^۲)^{-۱} \end{cases}$$

اگر از رابطه‌ی دوم نسبت به y انتگرال بگیریم داریم

$$\psi(x,y) = \frac{۱}{۲}y^۲(۱ - x^۲)^{-۱} + h(x).$$

با مشتق‌گیری از رابطه‌ی اخیر نسبت به x خواهیم داشت

$$\psi_x = xy^۲(۱ - x^۲)^{-۱} + h'(x).$$

با مقایسه‌ی رابطه‌ی بالا و رابطه‌ی اول داریم $h'(x) = x(۱ - x^۲)^{-۲}$ و در نتیجه $h(x) = \frac{۱}{۲}(۱ - x^۲)^{-۱}$.
از این‌رو جواب عمومی معادله عبارت است از

$$\frac{۱}{۲}y^۲(۱ - x^۲)^{-۱} + \frac{۱}{۲}(۱ - x^۲)^{-۱} = c_۱ \quad \text{یا} \quad y^۲ + ۱ = c(۱ - x^۲).$$

راه چهارم، یافتن عامل انتگرال‌ساز بر حسب y: ابتدا معادله را مرتب می‌کنیم

$$\begin{aligned}
x\,dx + y\,dy = xy(x\,dy - y\,dx) \quad &\Longrightarrow \quad x\,dx + y\,dy = x^۲y\,dy - xy^۲\,dx \\
&\Longrightarrow \quad (x + xy^۲)\,dx + (y - x^۲y)\,dy = ۰.
\end{aligned}$$

در اینجا داریم $M = x + xy^۲$ و $N = y - x^۲y$. بنابراین

$$\frac{M_y - N_x}{-M} = \frac{۲xy - (-۲xy)}{-(x + xy^۲)} = \frac{۴xy}{-x(۱ + y^۲)} = \frac{-۴y}{۱ + y^۲}$$

تابعی از y است. از این‌رو

$$\mu = e^{\int \frac{-۴y}{۱+y^۲}\,dy} = e^{-۲\ln(۱+y^۲)} = e^{\ln(۱+y^۲)^{-۲}} = (۱ + y^۲)^{-۲}$$

یک عامل انتگرال‌ساز معادله است. با ضرب آن در معادله یک معادله‌ی کامل به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
&(x+xy^{2})\,dx+(y-x^{2}y)\,dy=0\\
&\quad\Longrightarrow (x+xy^{2})(1+y^{2})^{-2}\,dx+(y-x^{2}y)(1+y^{2})^{-2}\,dy=0\\
&\quad\Longrightarrow x(1+y^{2})(1+y^{2})^{-2}\,dx+y(1-x^{2})(1+y^{2})^{-2}\,dy=0\\
&\quad\Longrightarrow x(1+y^{2})^{-1}\,dx+y(1-x^{2})(1+y^{2})^{-2}\,dy=0
\end{aligned}$$

چون معادله‌ی بالا کامل است، تابع $\psi(x,y)$ وجود دارد که $\psi_x=M$ و $\psi_y=N$، یعنی

$$\begin{cases}\psi_x=x(1+y^{2})^{-1}\\ \psi_y=y(1-x^{2})(1+y^{2})^{-2}=y(1+y^{2})^{-2}-yx^{2}(1+y^{2})^{-2}\end{cases}$$

اگر از رابطه‌ی اول نسبت به x انتگرال بگیریم داریم

$$\psi(x,y)=\frac{1}{2}x^{2}(1+y^{2})^{-1}+h(y).$$

با مشتق‌گیری از رابطه‌ی اخیر نسبت به y خواهیم داشت

$$\psi_y=-x^{2}y(1+y^{2})^{-2}+h'(y).$$

با مقایسه‌ی رابطه‌ی بالا و رابطه‌ی دوم داریم $h'(y)=y(1+y^{2})^{-2}$ و در نتیجه $h(y)=-\frac{1}{2}(1+y^{2})^{-1}$. از این‌رو جواب عمومی معادله عبارت است از

$$\frac{1}{2}x^{2}(1+y^{2})^{-1}-\frac{1}{2}(1+y^{2})^{-1}=c_1 \quad \text{یا} \quad x^{2}-1=c(1+y^{2}).$$

....

۲. جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را بیابید

$$y'=\frac{2xy^{3}}{x^{2}y^{2}-y^{4}-4}$$

راه اول: با تعویض نقش متغیر مستقل و وابسته، معادله دیفرانسیل به معادله‌ای برنولی تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx}=\frac{2xy^{3}}{x^{2}y^{2}-y^{4}-4}&\Longrightarrow \frac{dx}{dy}=\frac{x^{2}y^{2}-y^{4}-4}{2xy^{3}}\Longrightarrow \frac{dx}{dy}-\frac{1}{2y}x=-\frac{y^{4}+4}{2y^{3}}x^{-1}\\
&\Longrightarrow x\frac{dx}{dy}-\frac{1}{2y}x^{2}=-\frac{y^{4}+4}{2y^{3}},\quad z=x^{2},\quad \frac{1}{2}\frac{dz}{dy}=x\frac{dx}{dy}\\
&\Longrightarrow \frac{dz}{dy}-\frac{1}{y}z=-\frac{y^{4}+4}{y^{3}},\quad \mu=e^{\int\frac{-1}{y}\,dy}=\frac{1}{y}\\
&\Longrightarrow \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{y}z\right)=-\frac{y^{4}+4}{y^{4}}\\
&\Longrightarrow \frac{1}{y}x^{2}=-y+\frac{4}{3y^{3}}+c.
\end{aligned}$$

راه دوم، یافتن عامل انتگرال‌ساز بر حسب y

$$\frac{dy}{dx}=\frac{۲xy^۳}{x^۲y^۲-y^۴-۴}\Longrightarrow ۲xy^۳\,dx-(x^۲y^۲-y^۴-۴)\,dy=۰$$

در اینجا داریم $M=۲xy^۳$ و $N=-x^۲y^۲+y^۴+۴$. بنابراین

$$\frac{M_y-N_x}{-M}=\frac{۶xy^۲-(-۲xy^۲)}{-۲xy^۳}=\frac{۸xy^۲}{-۲xy^۳}=\frac{-۴}{y}$$

تابعی از y است. از این‌رو

$$\mu=e^{\int\frac{-۴}{y}\,dy}=e^{-۴\ln y}=e^{\ln y^{-۴}}=y^{-۴}$$

یک عامل انتگرال‌ساز معادله است. با ضرب آن در معادله داریم

$$\begin{aligned}
&۲xy^۳\,dx-(x^۲y^۲-y^۴-۴)\,dy=۰\\
&\quad\Longrightarrow ۲xy^{-۱}\,dx-(x^۲y^{-۲}-۱-۴y^{-۴})\,dy=۰\\
&\quad\Longrightarrow ۲xy^{-۱}\,dx-x^۲y^{-۲}\,dy+\,dy-۴y^{-۴}\,dy=۰\\
&\quad\Longrightarrow d(x^۲y^{-۱})+d(y)+\frac{۴}{۳}d(y^{-۳})=۰\\
&\quad\Longrightarrow d\left(x^۲y^{-۱}+y+\frac{۴}{۳}y^{-۳}\right)=۰\\
&\quad\Longrightarrow x^۲y^{-۱}+y+\frac{۴}{۳}y^{-۳}=c.
\end{aligned}$$

....

۳. معادله دیفرانسیل غیرهمگن زیر را حل کنید

$$y''-y=\frac{۱}{e^x+۱}$$

ریشه‌های معادله‌ی شاخص و جواب‌های مستقل خطی معادله‌ی همگن نظیر عبارت است از

$$\begin{gathered}
y=e^{rx}\Longrightarrow r^۲-۱=۰\Longrightarrow(r-۱)(r+۱)=۰\Longrightarrow r_۱=۱,r_۲=-۱\\
y_۱=e^x,\quad y_۲=e^{-x}
\end{gathered}$$

اکنون با استفاده از روش تغییر پارامتر یک جواب خاص $y_p=u_۱y_۱+u_۲y_۲$ از معادله را می‌یابیم

$$\begin{cases}u'_۱y_۱+u'_۲y_۲=۰\\ u'_۱y'_۱+u'_۲y'_۲=\dfrac{R(x)}{P(x)}\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}u'_۱e^x+u'_۲e^{-x}=۰\\ u'_۱e^x-u'_۲e^{-x}=\dfrac{۱}{e^x+۱}\end{cases}$$

اگر معادله‌ی دوم را در -۱ ضرب کنیم و با معادله‌ی اول جمع کنیم خواهیم داشت $۲u'_۲e^{-x}=\dfrac{-۱}{e^x+۱}$ و در نتیجه $u'_۲=\dfrac{-e^x}{۲(e^x+۱)}$. پس $u_۲=\dfrac{-۱}{۲}\ln(e^x+۱)$. با قرار دادن $u'_۲=\dfrac{-e^x}{۲(e^x+۱)}$ در معادله‌ی

اول داریم $\circ = u'_۱ e^x - \frac{e^x}{۲(e^x+۱)} e^{-x}$ و در نتیجه $u'_۱ = \frac{e^{-x}}{۲(e^x+۱)}$. اکنون $u_۱$ را می‌یابیم

$$\begin{aligned}
u_۱ &= \int \frac{e^{-x}}{۲(e^x+۱)}\,dx, \qquad u = e^{-x},\ \ du = -e^{-x}\,dx, \quad dx = -du \\
&= \int \frac{-du}{۲\left(۱+\frac{۱}{u}\right)}\,dx \\
&= -\frac{۱}{۲}\int \frac{u}{u+۱}\,du \\
&= -\frac{۱}{۲}\int \frac{u+۱-۱}{u+۱}\,du \\
&= -\frac{۱}{۲}\int \left(۱ - \frac{۱}{u+۱}\right) du \\
&= -\frac{۱}{۲}\left(u - \ln(u+۱)\right) \\
&= -\frac{۱}{۲}\left(e^{-x} - \ln(e^{-x}+۱)\right)
\end{aligned}$$

بنابراین

$$y_p = u_۱ y_۱ + u_۲ y_۲ = -\frac{۱}{۲} e^x \left(e^{-x} - \ln(e^{-x}+۱)\right) - \frac{۱}{۲} e^{-x} \ln(e^x+۱)$$

راه دیگر برای یافتن y_p با استفاده از فرمول: رنسکین $y_۱$ و $y_۲$ را می‌یابیم

$$W(y_۱, y_۲) = \begin{vmatrix} y_۱ & y_۲ \\ y'_۱ & y'_۲ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -۲$$

اکنون با استفاده از فرمول داریم

$$u'_۱ = \frac{-g y_۲}{W(y_۱, y_۲)} = \frac{e^{-x}}{۲(e^x+۱)} \quad \text{و} \quad u'_۲ = \frac{g y_۱}{W(y_۱, y_۲)} = \frac{-e^x}{۲(e^x+۱)}.$$

ابتدا $u_۲$ را می‌یابیم

$$\begin{aligned}
u_۲ &= \int \frac{-e^x}{۲(e^x+۱)}\,dx \\
&= \frac{-۱}{۲} \ln(e^x+۱)
\end{aligned}$$

اکنون $u_۱$ را می‌یابیم

$$\begin{aligned}
u_۱ &= \int \frac{e^{-x}}{۲(e^x+۱)}\,dx, \qquad u = e^x,\ \ du = e^x\,dx, \quad dx = \frac{۱}{u} du \\
&= \int \frac{du}{۲u^۲(u+۱)}\,dx \\
&= \frac{۱}{۲}\int \left(\frac{-۱}{u} + \frac{۱}{u^۲} + \frac{۱}{u+۱}\right) du \\
&= \frac{-۱}{۲}\ln u - \frac{۱}{۲u} + \ln(u+۱) \\
&= \frac{-x}{۲} - \frac{e^{-x}}{۲} + \frac{۱}{۲}\ln(e^x+۱)
\end{aligned}$$

که در آن از تجزیه‌ی کسرها به صورت زیر انجام شده است

$$\frac{1}{u^2(u+1)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u^2} + \frac{C}{u+1}$$

با مخرج مشترک گرفتن و متحد قرار دادن صورت کسرها A، B و C را می‌یابیم

$$Au(u+1) + B(u+1) + Cu^2 = 1 \Longrightarrow \begin{cases} B = 1 \\ A + B = 0 \\ A + C = 0 \end{cases} \Longrightarrow A = -1, B = 1, C = 1$$

بنابراین

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 = \frac{1}{2} e^x \left(-x - e^{-x} + \ln(e^x + 1)\right) - \frac{1}{2} e^{-x} \ln(e^x + 1)$$

. . . .

۴. فرض کنید رُنسکین دو جواب از معادله دیفرانسیل زیر برابر x باشد. جواب عمومی معادله را بیابید (تابع $p(x)$ پیوسته است)

$$y'' + p(x)y' + \frac{1}{x^2} y = 0, \quad x > 0$$

با استفاده از قضیه داریم

$$W' + p(x)W = 0 \Longrightarrow 1 + p(x)x = 0 \Longrightarrow p(x) = -\frac{1}{x}$$

با جایگذاری در معادله یک معادله‌ی اویلر داریم

$$\begin{aligned} y'' + p(x)y' + \frac{1}{x^2}y = 0 \quad &\Longrightarrow \quad y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 0 \\ &\Longrightarrow \quad x^2 y'' - xy' + y = 0 \end{aligned}$$

با قرار دادن $y = x^r$ معادله‌ی شاخص و ریشه‌های آن‌را به دست می‌آویم

$$r(r-1) - r + 1 = 0 \Rightarrow r^2 - 2r + 1 = 0 \Rightarrow (r-1)^2 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = 1$$

پس جواب عمومی معادله عبارت است از $y = c_1 x + c_2 x \ln x$.

. . . .

موفق باشید

هر سوال ۲۰ نمره دارد

وقت: ۱۰۰ دقیقه