تمرین های مروری

۱. $y' + \frac{۱}{x\ln x}y = ۳x^{۲}$ ۲. $y' + \sqrt{x}y = \frac{۲}{۳}\sqrt{\frac{x}{y}}$

۱. معادله دیفرانسیل خطی است:

$$\begin{aligned} y' + \frac{۱}{x\ln x}y = ۳x^{۲} &\Longrightarrow (\ln x)y' + \frac{۱}{x}y = ۳x^{۲}\ln x, \quad \mu = e^{\int \frac{۱}{x\ln x}\,dx} = e^{\ln(\ln x)} = \ln x \\ &\Longrightarrow (y\ln x)' = x^{۳}\ln x - \frac{۱}{۳}x^{۳} + c \\ &\Longrightarrow (y\ln x)' = x^{۳}\ln x - \frac{۱}{۳}x^{۳} + c. \end{aligned}$$

۲. معادله یک معادله دیفرانسیل برنولی است:

$$\begin{aligned} y' + \sqrt{x}y = \frac{۲}{۳}\sqrt{\frac{x}{y}} &\Longrightarrow y' + x^{۱/۲}y = \frac{۲}{۳}x^{۱/۲}y^{-۱/۲} \\ &\Longrightarrow y^{۱/۲}y' + x^{۱/۲}y^{۳/۲} = \frac{۲}{۳}x^{۱/۲}, \ z = y^{۳/۲}, \ z' = \frac{۳}{۲}y^{۱/۲}y' \\ &\Longrightarrow \frac{۲}{۳}z' + x^{۱/۲}z = \frac{۲}{۳}x^{۱/۲} \\ &\Longrightarrow z' + \frac{۳}{۲}x^{۱/۲}z = x^{۱/۲}, \quad \mu = e^{\int \frac{۳}{۲}x^{۱/۲}\,dx} = e^{x^{۳/۲}} \\ &\Longrightarrow e^{x^{۳/۲}}z' + \frac{۳}{۲}x^{۱/۲}e^{x^{۳/۲}}z = x^{۱/۲}e^{x^{۳/۲}} \\ &\Longrightarrow (e^{x^{۳/۲}}z)' = x^{۱/۲}e^{x^{۳/۲}} \Longrightarrow e^{x^{۳/۲}}z = \frac{۲}{۳}e^{x^{۳/۲}} + c \\ &\Longrightarrow e^{x^{۳/۲}}y^{۳/۲} = \frac{۲}{۳}e^{x^{۳/۲}} + c. \end{aligned}$$

۳. $۲yy' + y^{۲}\sin x - \sin x = ۰$ ۴. $y' - y + xe^{-۲x}y^{۳} = ۰$

۳. با استفاده از تغییر متغیر $u = y^{۲} - ۱$ معادله دیفرانسیل را حل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} ۲yy' + y^{۲}\sin x - \sin x = ۰ &\Longrightarrow ۲yy' + (y^{۲} - ۱)\sin x = ۰, \ u = y^{۲} - ۱, \quad u' = ۲yy' \\ &\Longrightarrow \frac{du}{dx} + u\sin x = ۰ \Longrightarrow \frac{du}{u} + \sin x\,dx = ۰ \\ &\Longrightarrow \ln|u| - \cos x = c \\ &\Longrightarrow \ln|y^{۲} - ۱| - \cos x = c \end{aligned}$$

۴. معادله یک معادله دیفرانسیل برنولی است:

$$\begin{aligned} y' - y + xe^{-۲x}y^۳ = ۰ \implies\ & y^{-۳}y' - y^{-۲} = -xe^{-۲x},\ \ u = y^{-۲},\ \ u' = -۲y^{-۳}y' \\ \implies\ & -\frac{۱}{۲}u' - u = -xe^{-۲x} \\ \implies\ & u' + ۲u = ۲xe^{-۲x},\ \ \mu = e^{\int ۲\,dx} = e^{۲x} \\ \implies\ & e^{۲x}u' + ۲e^{۲x}u = ۲x \implies (e^{۲x}u)' = ۲x \\ \implies\ & e^{۲x}u = x^۲ + c \\ \implies\ & e^{۲x}y^{-۲} = x^۲ + c. \end{aligned}$$

۵. $xy(۱+x^۲)y' - (۱+y^۲) = ۰$ ۶. $xyy' = ۱ + x^۲ + y^۲ + x^۲y^۲$

۵. معادله یک معادله‌ای جداشدنی است:

$$\begin{aligned} xy(۱+x^۲)y' - (۱+y^۲) = ۰ \implies\ & x(۱+x^۲)\frac{dy}{dx} = \frac{(۱+y^۲)}{y} \\ \implies\ & \frac{y\,dy}{۱+y^۲} = \frac{dx}{x(۱+x^۲)},\quad (\text{تجزیه کسر}) \\ \implies\ & \frac{y\,dy}{۱+y^۲} = \left(\frac{۱}{x} - \frac{x}{۱+x^۲}\right)dx \\ \implies\ & \frac{۱}{۲}\ln(۱+y^۲) = \ln|x| - \frac{۱}{۲}\ln(۱+x^۲) + c_۱ \\ \implies\ & (۱+y^۲)(۱+x^۲) = cx^۲. \end{aligned}$$

۶. معادله یک معادله دیفرانسیل جداشدنی است:

$$\begin{aligned} xyy' = ۱ + x^۲ + y^۲ + x^۲y^۲ = ۰ \implies\ & xy\frac{dy}{dx} = ۱ + x^۲ + y^۲(۱+x^۲) \\ \implies\ & xy\frac{dy}{dx} = (۱+x^۲)(۱+y^۲) \\ \implies\ & \frac{y\,dy}{۱+y^۲} = \frac{x\,dx}{۱+x^۲} \\ \implies\ & \frac{۱}{۲}\ln(۱+y^۲) = \frac{۱}{۲}\ln(۱+x^۲) + c_۱ \\ \implies\ & ۱ + y^۲ = c(۱+x^۲). \end{aligned}$$

۷. $yy' = e^{x+۲y}\sin x$ ۸. $(xy+y^۲)dx + (xy - x^۲)dy = ۰$

۷. معادله یک معادله‌ای جداشدنی است:

$$\begin{aligned} yy' = e^{x+۲y}\sin x = ۰ \implies\ & y\frac{dy}{dx} = e^xe^{۲y}\sin x \implies ye^{-۲y}\,dy = e^x\sin x\,dx \\ \implies\ & -\frac{۱}{۲}ye^{-۲y} + \frac{۱}{۴}e^{-۲y} = \frac{۱}{۲}e^x(\sin x - \cos x) + c. \end{aligned}$$

۸. عبارت $\mu = x^a y^b$ را در معادله ضرب می‌کنیم و a و b را طوری تعیین می‌کنیم که معادله دیفرانسیل حاصل کامل شود

$$(x^{a+1}y^{b+1} + x^a y^{b+2})dx + (x^{a+1}y^{b+1} - x^{a+2}y^b)dy = 0.$$

اگر قرار دهیم $M = x^{a+1}y^{b+1} + x^a y^{b+2}$ و $N = x^{a+1}y^{b+1} - x^{a+2}y^b$ داریم

$$M_y = (b+1)x^{a+1}y^b + (b+2)x^a y^{b+1} \quad \text{و} \quad N_x = (a+1)x^a y^{b+1} - (a+2)x^{a+1}y^b.$$

برای این که معادله دیفرانسیل کامل باشد باید داشته باشیم $M_y = N_x$. در نتیجه برای این که معادله دیفرانسیل کامل باشد (با متحد قرار دادن دو عبارت فوق) باید داشته باشیم

$$\begin{cases} b+1 = -(a+2) \\ b+2 = a+1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a+b = -3 \\ a-b = 1 \end{cases} \Longrightarrow a = -1, \quad b = -2.$$

از این‌رو $\mu = x^{-1}y^{-2}$ یک عامل انتگرال‌ساز برای معادله است. با ضرب آن در معادله داریم

$$\begin{aligned} (y^{-1} + x^{-1})dx + (y^{-1} - xy^{-2})dy = 0 \quad &\Longrightarrow \quad d(xy^{-1}) + d(\ln|x|) + d(\ln|y|) = 0 \\ &\Longrightarrow \quad xy^{-1} + \ln|x| + \ln|y| = c. \end{aligned}$$

۹. $y(x+y)dx = (2y + x + 1)dy$ **۱۰.** $x\,dy = (x^2y^2(1+e^x) - y)dx$

۹. در اینجا داریم $M = xy + y^2$ و $N = -2y - x - 1$. بنابراین

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{x + 2y - (-1)}{-2y - x - 1} = -\frac{x + 2y + 1}{2y + x + 1} = -1$$

تابعی از x است. از این‌رو $\mu = e^{-\int 1\,dx} = e^{-x}$ یک عامل انتگرال‌ساز معادله است. با ضرب آن در معادله، معادله‌ی کامل زیر را داریم

$$(xye^{-x} + y^2e^{-x})\,dx - (2ye^{-x} + xe^{-x} + e^{-x})dy = 0.$$

پس تابع $\psi(x,y)$ وجود دارد که $\psi_x = M$ و $\psi_y = N$، یعنی

$$\begin{cases} \psi_x = xye^{-x} + y^2e^{-x} \\ \psi_y = -2ye^{-x} - xe^{-x} - e^{-x} \end{cases}$$

اگر از رابطه‌ی دوم نسبت به y انتگرال بگیریم داریم

$$\psi(x,y) = -y^2e^{-x} - xye^{-x} - ye^{-x} + h(x).$$

با مشتق‌گیری از رابطه‌ی اخیر نسبت به x خواهیم داشت

$$\psi_x = y^۲ e^{-x} - ye^{-x} + xye^{-x} + ye^{-x} + h'(x).$$

با مقایسه‌ی رابطه‌ی بالا و رابطه‌ی اول داریم $h'(x) = ۰$ و در نتیجه $h(x) = ۰$. از این‌رو جواب عمومی معادله عبارت است از

$$-y^۲ e^{-x} - xye^{-x} - ye^{-x} = c.$$

۱۰. با دسته‌بندی مناسب جملات و تقسیم معادله بر $(xy)^۲$ می‌توان آن‌را حل کرد:

$$\begin{aligned} x\,dy = (x^۲y^۲(۱+e^x) - y)dx \quad &\Longrightarrow \quad x\,dy = x^۲y^۲(۱+e^x)\,dx - y\,dx \\ &\Longrightarrow \quad x\,dy + y\,dx = x^۲y^۲(۱+e^x)\,dx \\ &\Longrightarrow \quad d(xy) = x^۲y^۲(۱+e^x)\,dx \\ &\Longrightarrow \quad \frac{d(xy)}{(xy)^۲} = (۱+e^x)\,dx \\ &\Longrightarrow \quad -\frac{۱}{xy} = x + e^x + c \end{aligned}$$

۱۱. $(x^۳ + xy^۴)\,dx + ۲y^۳\,dy = ۰$ ۱۲. $xy' = y - \sqrt{x^۲ + y^۲}$

۱۱. در اینجا داریم $M = x^۳ + xy^۴$ و $N = ۲y^۳$. بنابراین

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{۴xy^۳ - ۰}{۲y^۳} = ۲x$$

تابعی از x است. از این‌رو $\mu = e^{\int ۲x\,dx} = e^{x^۲}$ یک عامل انتگرال‌ساز معادله است. با ضرب آن در معادله، معادله‌ی کامل زیر را داریم

$$(x^۳e^{x^۲} + xe^{x^۲}y^۴)\,dx + ۲y^۳e^{x^۲}\,dy = ۰.$$

پس تابع $\psi(x,y)$ وجود دارد که $\psi_x = M$ و $\psi_y = N$، یعنی

$$\begin{cases} \psi_x = x^۳e^{x^۲} + xe^{x^۲}y^۴ \\ \psi_y = ۲y^۳e^{x^۲} \end{cases}$$

اگر از رابطه‌ی دوم نسبت به y انتگرال بگیریم داریم

$$\psi(x,y) = \frac{۱}{۲}e^{x^۲}y^۴ + h(x).$$

با مشتق‌گیری از رابطه‌ی اخیر نسبت به x خواهیم داشت

$$\psi_x = xe^{x^۲}y^۴ + h'(x).$$

با مقایسه‌ی رابطه‌ی بالا و رابطه‌ی اول داریم $h'(x) = x^۳ e^{x^۲}$ و در نتیجه با استفاده از انتگرال‌گیری جزء به جزء داریم $h(x) = \frac{۱}{۲} e^{x^۲}(x^۲ - ۱)$. از این‌رو جواب عمومی معادله عبارت است از

$$\frac{۱}{۲} e^{x^۲} y^۴ + \frac{۱}{۲} e^{x^۲}(x^۲ - ۱) = c.$$

۱۲. معادله دیفرانسیل همگن است، $z = \frac{y}{x}$، $\frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx}$:

$$\begin{aligned} xy' = y - \sqrt{x^۲ + y^۲} \quad &\Longrightarrow \quad y' = \frac{y}{x} - \sqrt{۱ + \left(\frac{y}{x}\right)^۲} \\ &\Longrightarrow \quad z + xz' = z - \sqrt{۱ + z^۲} \Longrightarrow x\frac{dz}{dx} = \sqrt{۱ + z^۲} \\ &\Longrightarrow \quad \frac{dz}{\sqrt{۱ + z^۲}} = \frac{dx}{x} \Longrightarrow \ln|z + \sqrt{۱ + z^۲}| = \ln|x| + c_۱ \\ &\Longrightarrow \quad z + \sqrt{۱ + z^۲} = cx \\ &\Longrightarrow \quad \frac{y}{x} + \sqrt{۱ + (x/y)^۲} = cx. \end{aligned}$$

۱۳. $x^۲ y' + xy + ۲y^۲ = ۰$ ۱۴. $(y^۲ - x^۲)y' - xy = ۰$

۱۳. معادله دیفرانسیل همگن است، $z = \frac{y}{x}$، $\frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx}$:

$$\begin{aligned} x^۲ y' + xy + ۲y^۲ = ۰ \quad &\Longrightarrow \quad y' + \frac{y}{x} + ۲\left(\frac{y}{x}\right)^۲ = ۰ \\ &\Longrightarrow \quad z + xz' + z + ۲z^۲ = ۰ \Longrightarrow x\frac{dz}{dx} = -۲(z + z^۲) \\ &\Longrightarrow \quad \frac{dz}{z(z + ۱)} = -۲\frac{dx}{x} \Longrightarrow \left(\frac{۱}{z} - \frac{۱}{z + ۱}\right) dz = -۲\frac{dx}{x} \\ &\Longrightarrow \quad \ln|z| - \ln|z + ۱| = -۲\ln|x| + c_۱ \\ &\Longrightarrow \quad zx^۲ = c(z + ۱) \Longrightarrow \frac{y}{x} x^۲ = c\left(\frac{y}{x} + ۱\right) \\ &\Longrightarrow \quad yx^۲ = c(y + x). \end{aligned}$$

۱۴. در اینجا داریم $M = -xy$ و $N = y^۲ - x^۲$. بنابراین

$$\frac{M_y - N_x}{-M} = \frac{-x - (-۲x)}{xy} = \frac{۱}{y}$$

تابعی از y است. از این‌رو $\mu = e^{\int \frac{۱}{y}\, dy} = y$ یک عامل انتگرال‌ساز معادله است. با ضرب آن در معادله داریم

$$\begin{aligned} (y^۳ - x^۲ y)\, dy - xy^۲\, dx = ۰ \quad &\Longrightarrow \quad y^۳\, dy - x^۲ y\, dy - xy^۲\, dx = ۰ \\ &\Longrightarrow \quad \frac{۱}{۴} d(y^۴) - \frac{۱}{۲} d(x^۲ y^۲) = ۰ \\ &\Longrightarrow \quad \frac{۱}{۴} y^۴ - \frac{۱}{۲} x^۲ y^۲ = c. \end{aligned}$$

۱۵. $y^{۲} + (x^{۲} - xy + y^{۲})y' = ۰$ ۱۶. $(x + y^{۳}) + ۶xy^{۲}y' = ۰$

۱۵. معادله دیفرانسیل همگن است، $z = \frac{y}{x}$، $\frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx}$:

$$
\begin{aligned}
&y^{۲} + (x^{۲} - xy + y^{۲})y' = ۰\\
&\Longrightarrow y' = -\frac{y^{۲}}{x^{۲} - xy + y^{۲}} \Longrightarrow y' = -\frac{(y/x)^{۲}}{۱ - (y/x) + (y/x)^{۲}}\\
&\Longrightarrow z + xz' = -\frac{z^{۲}}{۱ - z + z^{۲}} \Longrightarrow xz' = \frac{-z^{۲}}{۱ - z + z^{۲}} - z \Longrightarrow xz' = -\frac{z^{۳} + z}{z^{۲} - z + ۱}\\
&\Longrightarrow -\frac{z^{۲} - z + ۱}{z(z^{۲} + ۱)}\,dz = \frac{dx}{x} \Longrightarrow \left(\frac{۱}{z^{۲} + ۱} - \frac{۱}{z}\right)dz = \frac{dx}{x}\\
&\Longrightarrow \tan^{-۱} z - \ln|z| = \ln|x| + c\\
&\Longrightarrow \tan^{-۱}(y/x) - \ln|y/x| = \ln|x| + c.
\end{aligned}
$$

۱۶. با استفاده از تغییر متغیر $u = y^{۳}$ معادله را حل می‌کنیم:

$$
\begin{aligned}
(x + y^{۳}) + ۶xy^{۲}y' = ۰ \quad&\Longrightarrow\quad (x + u) + ۲xu' = ۰,\quad u = y^{۳},\ \ u' = ۳y^{۲}y'\\
&\Longrightarrow\quad (x + u) + ۲xu' = ۰ \Longrightarrow ۲xu' + u = -x\\
&\Longrightarrow\quad u' + \frac{۱}{۲x}u = -\frac{۱}{۲},\ \ \mu = e^{\int \frac{۱}{۲x}\,dx} = x^{۱/۲}\\
&\Longrightarrow\quad x^{۱/۲}u' + \frac{۱}{۲}x^{-۱/۲}u = -\frac{۱}{۲}x^{۱/۲}\\
&\Longrightarrow\quad (x^{۱/۲}u)' = -\frac{۱}{۲}x^{۱/۲} \Longrightarrow x^{۱/۲}u = -\frac{۱}{۳}x^{۳/۲} + c\\
&\Longrightarrow\quad x^{۱/۲}y^{۳} = -\frac{۱}{۳}x^{۳/۲} + c.
\end{aligned}
$$

۱۷. $y\,dx + (۲x - xy + ۲)\,dy = ۰$ ۱۸. $y' = ۲(۳x + y)^{۲} - ۱$

۱۷. در اینجا داریم $M = y$ و $N = ۲x - xy + ۲$. بنابراین

$$
\frac{M_y - N_x}{-M} = \frac{۱ - (۲ - y)}{-y} = \frac{-۱ + y}{-y} = \frac{۱}{y} - ۱
$$

تابعی از y است. از این‌رو $\mu = e^{\int (\frac{۱}{y} - ۱)\,dy} = ye^{-y}$ یک عامل انتگرال‌ساز معادله است. با ضرب آن در معادله، معادله دیفرانسیل کامل زیر را خواهیم داشت

$$
y^{۲}e^{-y}\,dx + (۲xye^{-y} - xy^{۲}e^{-y} + ۲ye^{-y})\,dy = ۰.
$$

پس تابع $\psi(x,y)$ وجود دارد که $\psi_x = M$ و $\psi_y = N$، یعنی

$$
\begin{cases}
\psi_x = y^{۲}e^{-y}\\
\psi_y = ۲xye^{-y} - xy^{۲}e^{-y} + ۲ye^{-y}
\end{cases}
$$

اگر از رابطه‌ی اول نسبت به x انتگرال بگیریم داریم

$$\psi(x,y) = xy^{۲}e^{-y} + h(y).$$

با مشتق‌گیری از رابطه‌ی اخیر نسبت به y خواهیم داشت

$$\psi_x = ۲xye^{-y} - xy^{۲}e^{-y} + h'(y).$$

با مقایسه‌ی رابطه‌ی بالا و رابطه‌ی دوم داریم $h'(y) = ۲ye^{-y}$ و در نتیجه با استفاده از انتگرال‌گیری جزء به جزء داریم $h(y) = -۲e^{-y}(y+۱)$. از این‌رو جواب عمومی معادله عبارت است از

$$xy^{۲}e^{-y} - ۲e^{-y}(y+۱) = c.$$

۱۸. با استفاده از تغییر متغیر $u = ۳x + y$ معادله را حل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} y' = ۲(۳x+y)^{۲} - ۱ &\implies (x+u) + ۲xu' = ۰, \quad u = ۳x+y, \;\; u' = ۳ + y' \\ &\implies u' - ۳ = ۲u^{۲} - ۱ \implies u' = ۲u^{۲} + ۲ \\ &\implies \frac{du}{u^{۲}+۱} = ۲\,dx \implies \tan^{-۱} u = ۲x + c \\ &\implies \tan^{-۱}(۳x+y) = ۲x + c \end{aligned}$$

۱۹. $ye^{y} = (y^{۳} + ۲xe^{y})y'$ ۲۰. $(\tan x + ۱)\,dy + ۲y\,dx = ۰$

۱۹. در اینجا داریم $M = ye^{y}$ و $N = -y^{۳} - ۲xe^{y}$. بنابراین

$$\frac{M_y - N_x}{-M} = \frac{e^{y} + ye^{y} - (-۲e^{y})}{-ye^{y}} = -\frac{۳+y}{y} = -\frac{۳}{y} - ۱$$

تابعی از y است. از این‌رو $\mu = e^{-\int(\frac{۳}{y}+۱)\,dy} = y^{-۳}e^{-y}$ یک عامل انتگرال‌ساز معادله است. با ضرب آن در معادله داریم

$$y^{-۲}\,dx = (e^{-y} + ۲xy^{-۳})\,dy \implies d(xy^{-۲}) + d(e^{-y}) = ۰ \implies xy^{-۲} + e^{-y} = c.$$

۲۰. معادله یک معادله‌ای جداشدنی است:

$$\begin{aligned} (\tan x + ۱)\,dy + ۲y\,dx = ۰ &\implies \frac{dy}{y} = ۲\frac{dx}{\tan x + ۱} \\ &\implies \ln|y| = \ln|\sin x + \cos x| + x + c. \end{aligned}$$

توجه کنید که انتگرال بالا را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم. با تغییر متغیر $u=\tan x$ داریم $du=(۱+\tan^{۲}x)\,dx$، یعنی $dx=\frac{du}{۱+u^{۲}}$، و در نتیجه

$$\begin{aligned}
\int\frac{dx}{\tan x+۱} &= \int\frac{du}{(u+۱)(u^{۲}+۱)}\\
&= \frac{۱}{۲}\int\left(\frac{۱}{u+۱}+\frac{۱}{u^{۲}+۱}-\frac{u}{u^{۲}+۱}\right)du \quad \text{(تجزیه کسر)}\\
&= \frac{۱}{۲}\ln|u+۱|+\frac{۱}{۲}\tan^{-۱}u-\frac{۱}{۴}\ln(u^{۲}+۱)\\
&= \frac{۱}{۲}\ln|\tan x+۱|+\frac{۱}{۲}\tan^{-۱}(\tan x)-\frac{۱}{۴}\ln(\tan^{۲}x+۱)\\
&= \frac{۱}{۲}\ln|\tan x+۱|+\frac{۱}{۲}x-\frac{۱}{۴}\ln(\tan^{۲}x+۱)\\
&= \frac{۱}{۲}\ln|\frac{\sin x+\cos x}{\cos x}|+\frac{۱}{۲}x-\frac{۱}{۴}\ln\sec^{۲}x\\
&= \frac{۱}{۲}\ln|\sin x+\cos x|-\frac{۱}{۲}\ln|\sec x|+\frac{۱}{۲}x+\frac{۱}{۴}\ln\sec^{۲}x\\
&= \frac{۱}{۲}\ln|\sin x+\cos x|+\frac{۱}{۲}x.
\end{aligned}$$

۲۱. $۶y^{۲}\,dx-x(۲x^{۳}+y)\,dy=۰$ **۲۲.** $x\,dx+y\,dy=xy(x\,dy-y\,dx)$

۲۱. با تعویض نقش متغیر مستقل و وابسته معادله‌ای برنولی خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
&۶y^{۲}\,dx-x(۲x^{۳}+y)\,dy=۰\\
&\implies \frac{dx}{dy}=\frac{۲x^{۴}+xy}{۶y^{۲}}\implies\frac{dx}{dy}=\frac{x^{۴}}{۳y^{۲}}+\frac{x}{۶y}\implies\frac{dx}{dy}-\frac{۱}{۶y}x=\frac{x^{۴}}{۳y^{۲}}\\
&\implies x^{-۴}\frac{dx}{dy}-\frac{۱}{۶y}x^{-۳}=\frac{۱}{۳y^{۲}},\quad z=x^{-۳},\ \frac{dz}{dy}=-۳x^{-۴}\frac{dx}{dy}\\
&\implies -\frac{۱}{۳}\frac{dz}{dy}-\frac{۱}{۶y}z=\frac{۱}{۳y^{۲}}\implies\frac{dz}{dy}+\frac{۱}{۲y}z=-\frac{۱}{y^{۲}},\quad \mu=e^{\int\frac{۱}{۲y}dy}=y^{۱/۲}\\
&\implies y^{۱/۲}\frac{dz}{dy}+\frac{۱}{۲}y^{-۱/۲}z=-y^{-۳/۲}\implies\frac{d}{dy}(y^{۱/۲}z)=-y^{-۳/۲}\\
&\implies y^{۱/۲}z=-۲y^{-۱/۲}+c\\
&\implies y^{۱/۲}x^{-۳}=-۲y^{-۱/۲}+c.
\end{aligned}$$

۲۲. با دسته‌بندی مناسب جملات می‌بینیم که معادله یک معادله دیفرانسیل جداشدنی است:

$$\begin{aligned}
x\,dx+y\,dy=xy(x\,dy-y\,dx) &\implies (x+xy^{۲})\,dx+(y-x^{۲}y)\,dy=۰\\
&\implies x(۱+y^{۲})\,dx+y(۱-x^{۲})\,dy=۰\\
&\implies \frac{x}{۱-x^{۲}}dx+\frac{y}{۱+y^{۲}}dy
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{۱}{۲}\ln|۱-x^۲| + \frac{۱}{۲}\ln(۱+y^۲) = c_۱$$
$$\Longrightarrow \quad |۱-x^۲|(۱+y^۲) = c.$$

۲۳. $(x - y^۲x)y' + y + x^۲y = ۰$ **۲۴.** $xy' + y = y^۲x^۲\ln x$

۲۳. معادله یک معادله دیفرانسیل جداشدنی است:

$$\begin{aligned}(x - y^۲x)y' + y + x^۲y = ۰ \quad &\Longrightarrow \quad x(۱-y^۲)\frac{dy}{dx} + y(۱+x^۲) = ۰\\ &\Longrightarrow \quad \frac{۱-y^۲}{y}dy + \frac{۱+x^۲}{x}dx = ۰\\ &\Longrightarrow \quad \left(\frac{۱}{y} - y\right)dy + \left(\frac{۱}{x} + x\right)dx = ۰\\ &\Longrightarrow \quad \ln|y| - \frac{۱}{۲}y^۲ + \ln|x| + \frac{۱}{۲}x^۲ = c_۱\\ &\Longrightarrow \quad x^۲y^۲ = ce^{y^۲ - x^۲}.\end{aligned}$$

۲۴. معادله یک معادله دیفرانسیل برنولی است:

$$\begin{aligned}xy' + y = y^۲x^۲\ln x \quad &\Longrightarrow \quad y^{-۲}y' + \frac{۱}{x}y^{-۱} = x\ln x\\ &\Longrightarrow \quad y^{-۲}y' + \frac{۱}{x}y^{-۱} = x^۲\ln x, \quad u = y^{-۱}, \quad u' = -y^{-۲}y'\\ &\Longrightarrow \quad u' - \frac{۱}{x}u = -x\ln x, \quad \mu = e^{-\int \frac{۱}{x}\,dx} = x^{-۱}\\ &\Longrightarrow \quad x^{-۱}u' - x^{-۲}u = -\ln x \Longrightarrow (x^{-۱}u)' = -\ln x\\ &\Longrightarrow \quad x^{-۱}u = -x\ln x + x + c\\ &\Longrightarrow \quad x^{-۱}y^{-۱} = -x\ln x + x + c.\end{aligned}$$

۲۵. $۲xyy' + (۱+x)y^۲ = e^x$ **۲۶.** $xy' - y(\ln y - \ln x + ۱) = ۰$

۲۵. با تغییرمتغیر معادله به یک معادله‌ی خطی تبدیل می‌شود

$$\begin{aligned}۲xyy' + (۱+x)y^۲ = e^x \quad &\Longrightarrow \quad xu' + (۱+x)u = e^x, \quad u = y^۲\\ &\Longrightarrow \quad u' + \frac{۱+x}{x}u = \frac{e^x}{x}, \quad \mu = e^{\int \frac{۱+x}{x}\,dx} = xe^x\\ &\Longrightarrow \quad xe^xu' + (۱+x)e^xu = e^{۲x}\\ &\Longrightarrow \quad (xe^xu)' = e^{۲x} \Longrightarrow xe^xu = \frac{۱}{۲}e^{۲x} + c\\ &\Longrightarrow \quad xe^xy^۲ = \frac{۱}{۲}e^{۲x} + c.\end{aligned}$$

۲۶. معادله دیفرانسیل همگن است، $z=\dfrac{y}{x}$، $\dfrac{dy}{dx}=z+x\dfrac{dz}{dx}$:

$$\begin{aligned} xy'-y(\ln y-\ln x+۱)=۰ \quad &\Longrightarrow \quad y'-\frac{y}{x}(\ln(y/x)+۱)=۰\\ &\Longrightarrow \quad z+xz'-z(\ln z+۱)=۰\\ &\Longrightarrow \quad x\frac{dz}{dx}=z\ln z\Longrightarrow \frac{dz}{z\ln z}=\frac{dx}{x}\\ &\Longrightarrow \quad \ln|\ln z|=\ln|x|+c_۱\\ &\Longrightarrow \quad \ln(y/x)=cx. \end{aligned}$$

۲۷. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y-xy^۲}{x+x^۲y}$ **۲۸.** $xy'\sin\dfrac{y}{x}=y\sin\dfrac{y}{x}+x$

۲۷. معادله را به صورت $(-y+xy^۲)\,dx+(x+x^۲y)\,dy=۰$ می‌نویسیم و $\mu=x^ay^b$ را در معادله ضرب می‌کنیم و a و b را طوری تعیین می‌کنیم که معادله دیفرانسیل حاصل کامل شود

$$(-x^ay^{b+۱}+x^{a+۱}y^{b+۲})\,dx+(x^{a+۱}y^b+x^{a+۲}y^{b+۱})\,dy=۰.$$

اگر قرار دهیم $M=-x^ay^{b+۱}+x^{a+۱}y^{b+۲}$ و $N=۳x^{a+۱}y^b+۴x^{a+۲}y^{b+۱}$ داریم

$$M_y=-(b+۱)x^ay^b+(b+۲)x^{a+۱}y^{b+۱} \quad \text{و} \quad N_x=(a+۱)x^ay^b+(a+۲)x^{a+۱}y^{b+۱}.$$

برای این که معادله دیفرانسیل کامل باشد باید داشته باشیم $M_y=N_x$. در نتیجه برای این که معادله دیفرانسیل کامل باشد (با متحد قرار دادن دو عبارت فوق) باید داشته باشیم

$$\begin{cases} -(b+۱)=a+۱\\ b+۲=a+۲ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a+b=-۲\\ a-b=۰ \end{cases} \Longrightarrow a=-۱,\quad b=-۱.$$

از این‌رو $\mu=x^{-۱}y^{-۱}$ یک عامل انتگرال‌ساز برای معادله است. با ضرب آن در معادله داریم

$$\begin{aligned} (-x^{-۱}+y)dx+(y^{-۱}+x)dy=۰ \quad &\Longrightarrow \quad d(-\ln|x|)+d(xy)+d(\ln|y|)=۰\\ &\Longrightarrow \quad -\ln|x|+xy+\ln|y|=c. \end{aligned}$$

۲۸. معادله دیفرانسیل همگن است، $z=\dfrac{y}{x}$، $\dfrac{dy}{dx}=z+x\dfrac{dz}{dx}$:

$$\begin{aligned} xy'\sin\frac{y}{x}=y\sin\frac{y}{x}+x \quad &\Longrightarrow \quad y'\sin\frac{y}{x}=\frac{y}{x}\sin\frac{y}{x}+۱\\ &\Longrightarrow \quad (z+xz')\sin z=z\sin z+۱\Longrightarrow x\frac{dz}{dx}\sin z=۱\\ &\Longrightarrow \quad \sin z\,dz=\frac{dx}{x}\Longrightarrow -\cos z=\ln|x|+c\\ &\Longrightarrow \quad -\cos(y/x)=\ln|x|+c. \end{aligned}$$

۲۹. $y' = -\dfrac{y(e^{xy}+y)}{x(e^{xy}+2y)}$ **۳۰.** $y' = \dfrac{y(2x^3-y^3)}{x(2y^3-x^3)}$

۲۹. معادله دیفرانسیل کامل است:

$$\begin{aligned} y' = -\frac{y(e^{xy}+y)}{x(e^{xy}+2y)} &\implies (ye^{xy}+y^2)\,dx + (xe^{xy}+2xy)\,dy = 0 \\ &\implies d(e^{xy}) + d(xy^2) = 0 \\ &\implies e^{xy} + xy^2 = c. \end{aligned}$$

۳۰. معادله را به صورت $(2x^3y - y^4)\,dx - (2xy^3 - x^4)\,dy = 0$ می‌نویسیم و $\mu = x^a y^b$ را در معادله ضرب می‌کنیم و a و b را طوری تعیین می‌کنیم که معادله دیفرانسیل حاصل کامل شود

$$(2x^{a+3}y^{b+1} - x^a y^{b+4})\,dx + (-2x^{a+1}y^{b+3} + x^{a+4}y^b)\,dy = 0.$$

اگر قرار دهیم $M = 2x^{a+3}y^{b+1} - x^a y^{b+4}$ و $N = -2x^{a+1}y^{b+3} + x^{a+4}y^b$ داریم

$$M_y = 2(b+1)x^{a+3}y^b - (b+4)x^a y^{b+3} \quad \text{و} \quad N_x = -2(a+1)x^a y^{b+3} + (a+4)x^{a+3}y^b.$$

برای این که معادله دیفرانسیل کامل باشد باید داشته باشیم $M_y = N_x$. در نتیجه برای این که معادله دیفرانسیل کامل باشد (با متحد قرار دادن دو عبارت فوق) باید داشته باشیم

$$\begin{cases} 2(b+1) = a+4 \\ -(b+4) = -2(a+1) \end{cases} \implies \begin{cases} a - 2b = -2 \\ 2a - b = 3 \end{cases} \implies a = \frac{8}{3}, \quad b = \frac{7}{3}.$$

از این‌رو $\mu = x^{8/3}y^{7/3}$ یک عامل انتگرال‌ساز برای معادله است. با ضرب آن در معادله داریم

$$\begin{aligned} &(2x^{17/3}y^{10/3} - x^{8/3}y^{19/3})\,dx + (-2x^{11/3}y^{16/3} + x^{20/3}y^{7/3})\,dy = 0 \\ &\implies d(\tfrac{1}{4}x^8y^4) + d(-\tfrac{1}{5}x^5y^7) = 0 \implies \tfrac{1}{4}x^8y^4 - \tfrac{1}{5}x^5y^7 = c. \end{aligned}$$

۳۱. $y' = -\dfrac{y+2}{x+y-1}$ **۳۲.** $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y(\tan x + \ln y)}{\tan x}$

۳۱. معادله دیفرانسیل کامل است:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = -\frac{y+2}{x+y-1} &\implies (y+2)\,dx + (x+y-1)\,dy = 0 \\ &\implies y\,dx + 2\,dx + x\,dy + y\,dy - 1\,dy = 0 \\ &\implies d\left(\frac{1}{2}x^2y^2\right) + d(2x) + d\left(\frac{1}{2}y^2 - y\right) = 0 \\ &\implies \frac{1}{2}x^2y^2 + 2x + \frac{1}{2}y^2 - y = c. \end{aligned}$$

۳۲. با استفاده از تغییر متغیر $u=\ln y$ معادله به یک معادله خطی تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned}
&\frac{dy}{dx}=-\frac{y(\tan x+\ln y)}{\tan x}\\
&\qquad\Longrightarrow\quad \frac{۱}{y}\frac{dy}{dx}=-\frac{\tan x+\ln y}{\tan x}\Longrightarrow\frac{du}{dx}=-\frac{\tan x+u}{\tan x}\\
&\qquad\Longrightarrow\quad \frac{du}{dx}+\frac{۱}{\tan x}u=-۱,\quad \mu=e^{\int\frac{۱}{\tan x}\,dx}=e^{\int\frac{\cos x}{\sin x}\,dx}=\sin x\\
&\qquad\Longrightarrow\quad \frac{du}{dx}\sin x+u\cos x=-\sin x\Longrightarrow\frac{d}{dx}(u\sin x)=-\sin x\\
&\qquad\Longrightarrow\quad u\sin x=\cos x+c\\
&\qquad\Longrightarrow\quad \ln y\sin x=\cos x+c.
\end{aligned}$$

۳۳. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x^۳-y+xy^۲}{x-x^۲y+y^۳}$ **۳۴.** $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{۲y+۳xy^۲}{۳x+۴yx^۲}$

۳۳. معادله دیفرانسیل کامل است:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx}=\frac{x^۳-y+xy^۲}{x-x^۲y+y^۳}\quad&\Longrightarrow\quad (x^۳-y+xy^۲)\,dx-(x-x^۲y+y^۳)\,dy=۰\\
&\Longrightarrow\quad x^۳\,dx-y\,dx+xy^۲\,dx-x\,dy+x^۲y\,dy-y^۳\,dy=۰\\
&\Longrightarrow\quad d\left(\frac{۱}{۳}x^۳\right)-d(xy)+d\left(\frac{۱}{۲}x^۲y^۲\right)-d\left(\frac{۱}{۴}y^۴\right)=۰\\
&\Longrightarrow\quad \frac{۱}{۳}x^۳-xy+\frac{۱}{۲}x^۲y^۲-\frac{۱}{۴}y^۴=c.
\end{aligned}$$

۳۴. معادله را به صورت $(۲y+۳xy^۲)dx+(۳x+۴yx^۲)dy=۰$ می‌نویسیم و $\mu=x^ay^b$ را در معادله ضرب می‌کنیم و a و b را طوری تعیین می‌کنیم که معادله دیفرانسیل حاصل کامل شود

$$(۲x^ay^{b+۱}+۳x^{a+۱}y^{b+۲})\,dx+(۳x^{a+۱}y^b+۴x^{a+۲}y^{b+۱})\,dy=۰.$$

اگر قرار دهیم $M=۲x^ay^{b+۱}+۳x^{a+۱}y^{b+۲}$ و $N=۳x^{a+۱}y^b+۴x^{a+۲}y^{b+۱}$ داریم

$$\begin{aligned}
M_y&=۲(b+۱)x^ay^b+۳(b+۲)x^{a+۱}y^{b+۱}\\
N_x&=۳(a+۱)x^ay^b+۴(a+۲)x^{a+۱}y^{b+۱}.
\end{aligned}$$

برای این که معادله دیفرانسیل کامل باشد باید داشته باشیم $M_y=N_x$. در نتیجه برای این که معادله دیفرانسیل کامل باشد (با متحد قرار دادن دو عبارت فوق) باید داشته باشیم

$$\begin{cases}۲(b+۱)=۳(a+۱)\\ ۳(b+۲)=۴(a+۲)\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}۳a-۲b=-۱\\ ۴a-۳b=-۲\end{cases}\Longrightarrow a=۱,\quad b=۲.$$

از این‌رو $\mu = xy^۲$ یک عامل انتگرال‌ساز برای معادله دیفرانسیل است.

$$\begin{aligned}(۲xy^۳ + ۳x^۲y^۴)dx + (۳x^۲y^۲ + ۴x^۳y^۳)dy = ۰ \quad &\Longrightarrow \quad d(x^۲y^۳) + d(x^۳y^۴) = ۰ \\ &\Longrightarrow \quad x^۲y^۳ + x^۳y^۴ = c.\end{aligned}$$

۳۵. $y' - \tan\dfrac{y - ۲x}{x+۱} = \dfrac{y+۲}{x+۱}$ **۳۶.** $(x^۲ + ۱)y' + ۳x^۳y = ۶xe^{-۳x^۲/۲}$

۳۵. تغییر متغیر $z = \dfrac{y+۲}{x+۱}$ را در نظر می‌گیریم، داریم $(x+۱)z = y + ۲$ و در نتیجه $y' = (x+۱)z' + z$ باقرار دادن در معادله می‌توان آن‌را حل کرد:

$$\begin{aligned}&y' - \tan\frac{y-۲x}{x+۱} = \frac{y+۲}{x+۱} \\ &\Longrightarrow y' - \tan\frac{y+۲-۲-۲x}{x+۱} = \frac{y+۲}{x+۱} \Longrightarrow y' - \tan\left(\frac{y+۲}{x+۱} - ۱\right) = \frac{y+۲}{x+۱} \\ &\Longrightarrow z + (x+۱)z' - \tan z = z + ۱ \Longrightarrow (x+۱)\frac{dz}{dx} - \tan z = ۱ \\ &\Longrightarrow \frac{dz}{۱+\tan z} = \frac{dx}{x+۱} \quad \text{(با توجه به انتگرال حل شده در مساله‌ی ۲۰)} \\ &\Longrightarrow \frac{۱}{۲}\ln|\sin z + \cos z| + \frac{۱}{۲}z = \ln|x+۱| + c_۱ \\ &\Longrightarrow \ln\left|\sin\frac{y+۲}{۲(x+۱)} + \cos\frac{y+۲}{۲(x+۱)}\right| + \frac{y+۲}{۲(x+۱)} = ۲\ln|x+۱| + c\end{aligned}$$

۳۶. معادله دیفرانسیل خطی است:

$$\begin{aligned}&(x^۲+۱)y' + ۳x^۳y = ۶xe^{-۳x^۲/۲} \\ &\Longrightarrow y' + \frac{۳x^۳}{x^۲+۱}y = \frac{۶xe^{-۳x^۲/۲}}{x^۲+۱},\ \mu = e^{\int\frac{۳x^۳}{x^۲+۱}\,dx} = e^{\frac{۳x^۲}{۲} - \frac{۳}{۲}\ln(x^۲+۱)} = (x^۲+۱)^{-۳/۲}e^{۳x^۲/۲} \\ &\Longrightarrow (x^۲+۱)^{-۳/۲}e^{۳x^۲/۲}y' + (x^۲+۱)^{-۵/۲}e^{۳x^۲/۲}y = ۶x(x^۲+۱)^{-۵/۲} \\ &\Longrightarrow ((x^۲+۱)^{-۳/۲}e^{۳x^۲/۲}y)' = ۶x(x^۲+۱)^{-۵/۲} \\ &\Longrightarrow (x^۲+۱)^{-۳/۲}e^{۳x^۲/۲}y = -۲(x^۲+۱)^{-۳/۲} + c.\end{aligned}$$

۳۷. $y' = \dfrac{۲xy + ۲x}{x^۲+۱}$ **۳۸.** $(x + \tan^{-۱} y)dx + \dfrac{x+y}{۱+y^۲}dy = ۰$

۳۷. معادله دیفرانسیل جداشدنی است:

$$\begin{aligned}y' = \frac{۲xy+۲x}{x^۲+۱} \quad &\Longrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{۲x(y+۱)}{x^۲+۱} \\ &\Longrightarrow \quad \frac{dy}{y+۱} = \frac{۲x}{x^۲+۱}\,dx \Longrightarrow \ln|y+۱| = \ln(x^۲+۱) + c_۱ \\ &\Longrightarrow \quad y + ۱ = c(x^۲+۱).\end{aligned}$$

۳۸. معادله دیفرانسیل کامل است:

$$(x+\tan^{-1} y)dx + \frac{x+y}{1+y^2}dy = 0$$
$$\Longrightarrow\quad x\,dx + \tan^{-1} y\,dx + \frac{x}{1+y^2}\,dy + \frac{y}{1+y^2}\,dy = 0$$
$$\Longrightarrow\quad d\left(\frac{1}{2}x^2\right) + d(x\tan^{-1} y) + d\left(\frac{1}{2}\ln(1+y^2)\right) = 0$$
$$\Longrightarrow\quad \frac{1}{2}x^2 + x\tan^{-1} y + \frac{1}{2}\ln(1+y^2) = c.$$

۳۹. $(2x+1)y' + y = (2x+1)^{\frac{2}{3}}$ ۴۰. $xy' + (1+x)y = e^{-x}\sin 2x$

۳۹. معادله دیفرانسیل خطی است:

$$(2x+1)y' + y = (2x+1)^{\frac{2}{3}}$$
$$\Longrightarrow\quad y' + \frac{1}{2x+1}y = (2x+1)^{-\frac{1}{3}},\quad \mu = e^{\int \frac{1}{2x+1}\,dx} = e^{\frac{1}{2}\ln(2x+1)} = (2x+1)^{1/2}$$
$$\Longrightarrow\quad (2x+1)^{1/2}y' + (2x+1)^{-1/2}y = (2x+1)^{\frac{1}{6}}$$
$$\Longrightarrow\quad ((2x+1)^{1/2}y)' = (2x+1)^{1/6}$$
$$\Longrightarrow\quad (2x+1)^{1/2}y = \frac{3}{7}(2x+1)^{7/6} + c.$$

۴۰. معادله دیفرانسیل خطی است:

$$xy' + (1+x)y = e^{-x}\sin 2x$$
$$\Longrightarrow\quad y' + \frac{1+x}{x}y = e^{-x}\frac{\sin 2x}{x},\quad \mu = e^{\int \frac{1+x}{x}\,dx} = e^{x+\ln x} = xe^x$$
$$\Longrightarrow\quad xe^x y' + (1+x)e^x y = \sin 2x \Longrightarrow (xe^x y)' = \sin 2x$$
$$\Longrightarrow\quad xe^x y = -\frac{1}{2}\cos 2x + c.$$

۴۱. $y' = \dfrac{x+y\cos(y/x)}{x\cos(y/x)}$ ۴۲. $xy' + 6y = 3xy^{\frac{4}{3}}$

۴۱. معادله دیفرانسیل همگن است، $z = \dfrac{y}{x}$، $\dfrac{dy}{dx} = z + x\dfrac{dz}{dx}$:

$$y' = \frac{x+y\cos(y/x)}{x\cos(y/x)} \quad\Longrightarrow\quad y' = \sec(y/x) + \frac{y}{x} \Longrightarrow z + xz' = \sec z + z$$
$$\Longrightarrow\quad \cos z\,dz = \frac{dx}{x} \Longrightarrow \sin z = \ln|x| + c$$
$$\Longrightarrow\quad \sin(y/x) = \ln|x| + c.$$

۴۲. معادله دیفرانسیل برنولی است:

$$\begin{aligned} xy' + ۶y = ۳xy^{\frac{۴}{۳}} &\Longrightarrow y^{-۴/۳}y' + \frac{۶}{x}y^{-۱/۳} = ۳,\quad z = y^{-۱/۳},\quad z' = -\frac{۱}{۳}y^{-۴/۳}y' \\ &\Longrightarrow -۳z' + \frac{۶}{x}z = ۳ \Longrightarrow z' - \frac{۲}{x}z = -۱,\quad \mu = e^{-\int \frac{۲}{x}\,dx} = x^{-۲} \\ &\Longrightarrow x^{-۲}z' - ۲x^{-۳}z = -x^{-۲} \Longrightarrow (x^{-۲}z)' = -x^{-۲} \\ &\Longrightarrow x^{-۲}z = x^{-۱} + c \\ &\Longrightarrow x^{-۲}y^{-۱/۳} = x^{-۱} + c. \end{aligned}$$

۴۳. $x^۲y' = xy + y^۲$ ۴۴. $۵y^۴y' = x^۲y' + ۲xy$

۴۳. معادله دیفرانسیل همگن است:

$$\begin{aligned} x^۲y' = xy + y^۲ \quad &\Longrightarrow \quad y' = \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^۲ \Longrightarrow z + xz' = z + z^۲ \Longrightarrow x\frac{dz}{dx} = z^۲ \\ &\Longrightarrow \quad \frac{dz}{z^۲} = \frac{dx}{x} \Longrightarrow -\frac{۱}{z} = \ln|x| + c \\ &\Longrightarrow \quad -\frac{x}{y} = \ln|x| + c. \end{aligned}$$

۴۴. با تعویض نقش متغیر مستقل و وابسته معادله ای برنولی خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} &۵y^۴y' = x^۲y' + ۲xy \\ &\quad\Longrightarrow \quad \frac{dy}{dx}(۵y^۴ - x^۲) = ۲xy \Longrightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{۵y^۴ - x^۲}{۲xy} \\ &\quad\Longrightarrow \quad \frac{dx}{dy} - \frac{۱}{۲y}x = \frac{۵y^۳}{۲x} \Longrightarrow x\frac{dx}{dy} - \frac{۱}{۲y}x^۲ = \frac{۵y^۳}{۲},\quad z = x^۲,\quad \frac{dz}{dy} = ۲x\frac{dx}{dy} \\ &\quad\Longrightarrow \quad \frac{۱}{۲}\frac{dz}{dy} - \frac{۱}{۲y}z = \frac{۵y^۳}{۲} \Longrightarrow \frac{dz}{dy} - \frac{۱}{y}z = ۵y^۳,\quad \mu = e^{-\int \frac{۱}{y}\,dy} = y^{-۱} \\ &\quad\Longrightarrow \quad y^{-۱}\frac{dz}{dy} - y^{-۲}z = ۵y^۲ \Longrightarrow \frac{d}{dy}(zy^{-۱}) = ۵y^۲ \Longrightarrow zy^{-۱} = \frac{۵}{۳}y^۳ + c \\ &\quad\Longrightarrow \quad x^۲y^{-۱} = \frac{۵}{۳}y^۳ + c. \end{aligned}$$

۴۵. $xyy' = y^۲ + x\sqrt{۴y^۲ + x^۲}$ ۴۶. $(xy + x^۳y^۳)y' = ۱$

۴۵. معادله دیفرانسیل همگن است، $z=\dfrac{y}{x}$، $\dfrac{dy}{dx}=z+x\dfrac{dz}{dx}$:

$$\begin{aligned}
&xyy'=y^۲+x\sqrt{۴y^۲+x^۲}\\
&\quad\Longrightarrow\quad \frac{y}{x}y'=(y/x)^۲+\frac{۱}{x}\sqrt{۴y^۲+x^۲}\Longrightarrow \frac{y}{x}y'=(y/x)^۲+\sqrt{۴(y/x)^۲+۱}\\
&\quad\Longrightarrow\quad z(z+xz')=z^۲+\sqrt{۴z^۲+۱}\Longrightarrow x\frac{dz}{dx}=\sqrt{۴z^۲+۱}\\
&\quad\Longrightarrow\quad \frac{dz}{\sqrt{۴z^۲+۱}}=\frac{dx}{x}\Longrightarrow \frac{۱}{۲}\ln(۲z+\sqrt{۴z^۲+۱})=\ln|x|+c_۱\\
&\quad\Longrightarrow\quad ۲z+\sqrt{۴z^۲+۱}=cx^۲\\
&\quad\Longrightarrow\quad ۲\frac{y}{x}+\sqrt{۴(y/x)^۲+۱}=cx^۲.
\end{aligned}$$

۴۶. با تعویض نقش متغیر مستقل و وابسته معادله ای برنولی خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
&(xy+x^۳y^۳)y'=۱\\
&\Longrightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{۱}{xy+x^۳y^۳}\Longrightarrow \frac{dx}{dy}=xy+x^۳y^۳\\
&\Longrightarrow x^{-۳}\frac{dx}{dy}-x^{-۲}y=y^۳,\quad z=x^{-۲},\quad \frac{dz}{dy}=-۲x^{-۳}\frac{dx}{dy}\\
&\Longrightarrow -\frac{۱}{۲}\frac{dz}{dy}-yz=y^۳\Longrightarrow \frac{dz}{dy}+۲yz=-۲y^۳,\quad e^{\int ۲y\,dy}=e^{y^۲}\\
&\Longrightarrow e^{y^۲}\frac{dz}{dy}+۲yz=-۲y^۳e^{y^۲}\Longrightarrow (e^{y^۲}z)'=-۲y^۳e^{y^۲}\Longrightarrow e^{y^۲}z=e^{y^۲}-e^{y^۲}y^۲+c\\
&\Longrightarrow e^{y^۲}x^{-۲}=e^{y^۲}-e^{y^۲}y^۲+c.
\end{aligned}$$

۴۷. $xy'+y=۲x^۲y'\ln y$ **۴۸.** $y'-y+۲=xe^x\sqrt[۳]{y-۲}$

۴۷. ابتدا معادله را بر y تقسیم می‌کنیم. سپس با استفاده از تغییر متغیر $u=\ln y$ معادله به یک معادله برنولی تبدیل می‌شود

$$\begin{aligned}
&xy'+y=۲x^۲y'\ln y\\
&\quad\Longrightarrow\quad (x-۲x^۲\ln y)\frac{۱}{y}\frac{dy}{dx}=-۱\Longrightarrow (x-۲x^۲u)\frac{du}{dx}=-۱\Longrightarrow \frac{dx}{du}=۲x^۲u-x\\
&\quad\Longrightarrow\quad x^{-۲}\frac{dx}{du}+x^{-۱}=۲u,\quad z=x^{-۱},\quad \frac{dz}{du}=-x^{-۲}\frac{dx}{du}\\
&\quad\Longrightarrow\quad \frac{dz}{du}-z=۲u,\quad \mu=e^{-\int du}=e^{-u}\\
&\quad\Longrightarrow\quad e^{-u}\frac{dz}{du}-ze^{-u}=۲ue^{-u}\Longrightarrow \frac{d}{du}(e^{-u}z)=۲ue^{-u}\\
&\quad\Longrightarrow\quad e^{-u}z=-۲ue^{-u}-۲e^{-u}+c\Longrightarrow x^{-۱}=-۲u-۲+ce^u\\
&\quad\Longrightarrow\quad x^{-۱}=-۲\ln y-۲+cy.
\end{aligned}$$

۴۸. با استفاده از تغییر متغیر $u = \sqrt[۳]{y - ۲}$ معادله به یک معادله برنولی تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} & y' - y + ۲ = xe^x \sqrt[۳]{y - ۲} \\ & \quad \Longrightarrow \quad u' - u = xe^x u^{۱/۳} \Longrightarrow u^{-۱/۳} u' - u^{۲/۳} = xe^x, \quad z = u^{۲/۳}, z' = \frac{۲}{۳} u^{-۱/۳} u' \\ & \quad \Longrightarrow \quad \frac{۳}{۲} z' - z = xe^x \Longrightarrow z' - \frac{۲}{۳} z = \frac{۲}{۳} xe^x, \quad \mu = e^{-\int \frac{۲}{۳} dx} = e^{-۲x/۳} \\ & \quad \Longrightarrow \quad e^{-۲x/۳} z' - \frac{۲}{۳} e^{-۲x/۳} z = \frac{۲}{۳} xe^{x/۳} \Longrightarrow (e^{-۲x/۳} z)' = \frac{۲}{۳} xe^{x/۳} \\ & \quad \Longrightarrow \quad e^{-۲x/۳} z = ۲e^{x/۳} x - ۶e^{x/۳} + c \\ & \quad \Longrightarrow \quad e^{-۲x/۳} (y - ۲)^{۴/۹} = ۲e^{x/۳} x - ۶e^{x/۳} + c. \end{aligned}$$

۴۹. $dx - ۲x(e^{۳y} + ۴ \ln x)\, dy = ۰$

۵۰. $x^۲ y' = xy + x^۲ e^{y/x}$

۴۹. با استفاده از تغییر متغیر $t = \ln x$ معادله به یک معادله خطی تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} & dx - ۲x(e^{۳y} + ۴ \ln x)\, dy = ۰ \\ & \qquad \Longrightarrow \quad \frac{dx}{x} - ۲(e^{۳y} + ۴ \ln x)\, dy = ۰ \Longrightarrow dt - ۲(e^{۳y} + ۴t)\, dy = ۰ \\ & \qquad \Longrightarrow \quad \frac{dt}{dy} - ۲e^{۳y} - ۸t = ۰ \Longrightarrow \frac{dt}{dy} - ۸t = ۲e^{۳y}, \quad \mu = e^{-\int ۸\, dy} = e^{-۸y} \\ & \qquad \Longrightarrow \quad e^{-۸y} \frac{dt}{dy} - ۸e^{-۸y} t = ۲e^{-۵y} \Longrightarrow \frac{d}{dy}(e^{-۸y} t) = ۲e^{-۵y} \\ & \qquad \Longrightarrow \quad e^{-۸y} t = -\frac{۲}{۵} e^{-۵y} + c \\ & \qquad \Longrightarrow \quad e^{-۸y} \ln x = -\frac{۲}{۵} e^{-۵y} + c. \end{aligned}$$

۵۰. معادله دیفرانسیل همگن است:

$$\begin{aligned} x^۲ y' = xy + x^۲ e^{y/x} \quad & \Longrightarrow \quad y' = \frac{y}{x} + e^{y/x} \Longrightarrow z + xz' = z + e^z \\ & \Longrightarrow \quad x \frac{dz}{dx} = e^z \Longrightarrow e^{-z}\, dz = \frac{dx}{x} \Longrightarrow -e^{-z} = \ln |x| + c \\ & \Longrightarrow \quad -e^{-y/x} = \ln |x| + c. \end{aligned}$$

۵۱. $(x^۲ + xy)dx - (xy + y^۲)dy = ۰$

۵۲. $xy'' + ۳y' = ۲x^۳$

۵۱. معادله دیفرانسیل همگن است، $z=\dfrac{y}{x}$، $\dfrac{dy}{dx}=z+x\dfrac{dz}{dx}$:

$$\begin{aligned}
&(x^{۲}+xy)dx-(xy+y^{۲})dy=۰\\
&\implies\quad ۱+\frac{y}{x}-\left(\frac{y}{x}+\left(\frac{y}{x}\right)^{۲}\right)\frac{dy}{dx}=۰\implies ۱+z-(z+z^{۲})(z+xz')=۰\\
&\implies\quad z+xz'=\frac{۱+z}{z+z^{۲}}\implies x\frac{dz}{dx}=\frac{۱}{z}-z\\
&\implies\quad \frac{z}{۱-z^{۲}}\,dz=\frac{dx}{x}\\
&\implies\quad -\frac{۱}{۲}\ln(۱-z^{۲})=\ln|x|+c_{۱}\\
&\implies\quad \ln(۱-(y/x)^{۲})=-۲\ln|x|+c.
\end{aligned}$$

۵۲. با تغییر متغیر $u=y'$ معادله را به یک معادله خطی مرتبه‌ی اول تبدیل می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
xy''+۳y'=۲x^{۳}\quad&\implies\quad xu'+۳u=۲x^{۳}\implies u'+\frac{۳}{x}u=۲x^{۲},\quad \mu=e^{\int\frac{۳}{x}\,dx}=x^{۳}\\
&\implies\quad x^{۳}u'+۳x^{۲}u=۲x^{۵}+c_{۱}\implies (x^{۳}u)'=۲x^{۵}+c_{۱}\\
&\implies\quad x^{۳}u=\frac{۲}{۵}x^{۵}+c_{۱}\implies y'=\frac{۲}{۵}x^{۲}+c_{۱}x^{-۳}\\
&\implies\quad y=\frac{۲}{۱۵}x^{۳}-\frac{۱}{۲}c_{۱}x^{-۲}+c_{۲}.
\end{aligned}$$

۵۳. $۲xyy'+۴x^{۲}+۳y^{۲}=۰$ **۵۴.** $x(۲yy'+۲x)=xe^{(x^{۲}+y^{۲})/x}+(x^{۲}+y^{۲})$

۵۳. با تغییر متغیر $u=y^{۲}$ معادله به یک معادله خطی تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned}
۲xyy'+۴x^{۲}+۳y^{۲}\quad&\implies\quad xu'+۴x^{۲}+۳u=۰\\
&\implies\quad u'+\frac{۳}{x}u=-۴x,\quad \mu=e^{\int\frac{۳}{x}\,dx}=x^{۳}\\
&\implies\quad x^{۳}u'+۳x^{۲}u=-۴x^{۴}\implies (x^{۳}u)'=-۴x^{۴}\\
&\implies\quad x^{۳}u=-\frac{۴}{۵}x^{۵}+c\\
&\implies\quad x^{۳}y^{۲}=-\frac{۴}{۵}x^{۵}+c.
\end{aligned}$$

۵۴. با تغییر متغیر $u=x^{۲}+y^{۲}$ معادله به معادله ای همگن تبدیل خواهد شد:

$$\begin{aligned}
&x(۲yy'+۲x)=xe^{(x^{۲}+y^{۲})/x}+(x^{۲}+y^{۲})\\
&\implies\quad xu'=xe^{u/x}+u\implies u'=e^{u/x}+\frac{u}{x}\implies z+xz'=e^{z}+z\\
&\implies\quad x\frac{dz}{dx}=e^{z}\implies e^{-z}\,dz=\frac{dx}{x}\implies -e^{-z}=\ln|x|+c\\
&\implies\quad -e^{-(x^{۲}+y^{۲})/x}=\ln|x|+c.
\end{aligned}$$

۵۵. $x^2y''+3xy'=4$ **۵۶.** $6xy^3+2y^4+(9x^2y^2+8xy^3)y'=0$

۵۵. با تغییر متغیر $u=y'$ معادله را به یک معادله خطی مرتبه‌ی اول تبدیل می‌کنیم:

$$
\begin{aligned}
x^2y''+3xy'=4 &\Longrightarrow x^2u'+3xu=4 \Longrightarrow u'+\frac{3}{x}u=4x^{-2}, \quad \mu=e^{\int\frac{3}{x}\,dx}=x^3\\
&\Longrightarrow x^3u'+3x^2u=4x \Longrightarrow (x^3u)'=4x\\
&\Longrightarrow x^3u=2x^2+c_1 \Longrightarrow y'=2x^{-1}+c_1x^{-3}\\
&\Longrightarrow y=2\ln|x|-\frac{1}{2}c_1x^{-2}+c_2.
\end{aligned}
$$

۵۶. معادله دیفرانسیل کامل است:

$$
\begin{aligned}
&6xy^3+2y^4+(9x^2y^2+8xy^3)y'=0\\
&\qquad\Longrightarrow\quad (6xy^3+2y^4)\,dx+(9x^2y^2+8xy^3)\,dy=0\\
&\qquad\Longrightarrow\quad 6xy^3\,dx+2y^4\,dx+9x^2y^2\,dy+8xy^3\,dy=0\\
&\qquad\Longrightarrow\quad d(3x^2y^3)+d(2xy^4)=0\\
&\qquad\Longrightarrow\quad 3x^2y^3+2xy^4=c.
\end{aligned}
$$

۵۷. $y'\ln\frac{y+x}{x+3}=\frac{y+x}{x+3}-\ln\frac{y+x}{x+3}$ **۵۸.** $\left(\frac{x}{\sin y}+2\right)dx+\frac{(x^2+1)\cos y}{\cos 2y-1}dy=0$

۵۷. با تغییر متغیر $z=\frac{y+x}{x+3}$، یعنی $(x+3)z=y+x$، داریم $z+(x+3)z'=y'+1$ و با قرار دادن در معادله خواهیم داشت:

$$
\begin{aligned}
&y'\ln\frac{y+x}{x+3}=\frac{y+x}{x+3}-\ln\frac{y+x}{x+3}\\
&\quad\Longrightarrow\quad (z+(x+3)z'-1)\ln z=z-\ln z\\
&\quad\Longrightarrow\quad z\ln z+(x+3)z'\ln z-\ln z=z-\ln z\Longrightarrow z\ln z+(x+3)z'\ln z=z\\
&\quad\Longrightarrow\quad (x+3)\frac{dz}{dx}\ln z=z(1-\ln z)\Longrightarrow\frac{\ln z\,dz}{z(1-\ln z)}=\frac{dx}{x+3}\\
&\quad\Longrightarrow\quad -\ln z-\ln(\ln z-1)=\ln|x+3|+c_1\Longrightarrow z(\ln z-1)(x+3)=c\\
&\quad\Longrightarrow\quad \frac{y+x}{x+3}\left(\ln\frac{y+x}{x+3}-1\right)(x+3)=c\\
&\quad\Longrightarrow\quad (y+x)\left(\ln\frac{y+x}{x+3}-1\right)=c.
\end{aligned}
$$

۵۸. با استفاده از رابطه‌های مثلثاتی می‌بینیم که معادله یک معادله‌ی کامل است:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{x}{\sin y}+۲\right)dx+\frac{(x^۲+۱)\cos y}{\cos ۲y-۱}dy=۰\\
&\quad\Longrightarrow\quad x\csc y\,dx+۲dx+\frac{(x^۲+۱)\cos y}{-۲\sin^۲ y}dy=۰\\
&\quad\Longrightarrow\quad ۲x\csc y\,dx+۴dx-(x^۲+۱)\cot y\,\csc y\,dy=۰\\
&\quad\Longrightarrow\quad ۲x\csc y\,dx+۴dx-x^۲\cot y\,\csc y\,dy+\cot y\,\csc y\,dy=۰\\
&\quad\Longrightarrow\quad d(x^۲\csc y)+d(۴x)+d(\csc y)=۰\\
&\quad\Longrightarrow\quad x^۲\csc y+۴x\csc y=c.
\end{aligned}$$

۵۹. $(x^۴+y)dx+(xy^۲+x\ln x)dy=۰$ **۶۰.** $x^۲(x\,dy+y\,dx)+y(x\,dy-y\,dx)=۰$

۵۹. در اینجا داریم $M=x^۴+y$ و $N=x^۴+y$. بنابراین

$$\frac{M_y-N_x}{N}=\frac{۱-(y^۲+۱+\ln x)}{(xy^۲+x\ln x)}=-\frac{۱}{x}$$

تابعی از x است. از این‌رو $\mu=e^{-\int\frac{۱}{x}dx}=x^{-۱}$ یک عامل انتگرال‌ساز معادله است. با ضرب آن در معادله داریم

$$\begin{aligned}
x^۳\,dx+yx^{-۱}\,dx+y^۲\,dy+\ln x\,dy=۰&\Longrightarrow d\left(\frac{۱}{۴}x^۴\right)+d(x\ln x)+d\left(\frac{۱}{۳}y^۳\right)=۰\\
&\Longrightarrow \frac{۱}{۴}x^۴+x\ln x+\frac{۱}{۳}y^۳=c.
\end{aligned}$$

۶۰. عبارت $\mu=x^ay^b$ را در معادله ضرب می‌کنیم و a و b را طوری تعیین می‌کنیم که معادله دیفرانسیل حاصل کامل شود

$$(x^{a+۲}y^{b+۱}-x^ay^{b+۲})\,dx+(x^{a+۳}y^b+x^{a+۱}y^{b+۱})\,dy=۰.$$

اگر قرار دهیم $M=x^{a+۲}y^{b+۱}-x^ay^{b+۲}$ و $N=x^{a+۳}y^b+x^{a+۱}y^{b+۱}$ داریم

$$M_y=(b+۱)x^{a+۲}y^b-(b+۲)x^ay^{b+۱}\quad \text{و}\quad N_x=(a+۳)x^{a+۲}y^b+(a+۱)x^ay^{b+۱}.$$

برای این که معادله دیفرانسیل کامل باشد باید داشته باشیم $M_y=N_x$. در نتیجه برای این که معادله دیفرانسیل کامل باشد (با متحد قرار دادن دو عبارت فوق) باید داشته باشیم

$$\begin{cases} b+۱=a+۳\\ -(b+۲)=a+۱\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases} a-b=-۲\\ a+b=-۳\end{cases}\Longrightarrow a=-\frac{۵}{۲},\quad b=-\frac{۱}{۲}.$$

از این‌رو $\mu = x^{-۵/۲}y^{-۱/۲}$ یک عامل انتگرال‌ساز برای معادله دیفرانسیل است.

$$(x^{-۱/۲}y^{۱/۲} - x^{-۵/۲}y^{۳/۲})dx + (x^{۱/۲}y^{-۱/۲} + x^{-۳/۲}y^{۱/۲})dy = ۰$$
$$\Longrightarrow d(۲x^{۱/۲}y^{۱/۲}) + d\left(\frac{۲}{۳}۲x^{-۳/۲}y^{۳/۲}\right) = ۰ \Longrightarrow ۲x^{۱/۲}y^{۱/۲} + \frac{۲}{۳}۲x^{-۳/۲}y^{۳/۲} = c.$$

.۶۱ $(xy - ۱)\,dx + (x^{۲} - xy)\,dy = ۰$ **.۶۲** $(۲x-y-۴)\,dy+(۲y-x+۵)\,dx = ۰$

.۶۱ در اینجا داریم $M = xy - ۱$ و $N = x^{۲} - xy$. بنابراین

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{x - (۲x - y)}{x^{۲} - xy} = \frac{y - x}{x(x - y)} = -\frac{۱}{x}$$

تابعی از x است. از این‌رو $\mu = e^{-\int \frac{۱}{x}\,dx} = x^{-۱}$ یک عامل انتگرال‌ساز معادله است. با ضرب آن در معادله، معادله‌ی کامل زیر را داریم

$$\begin{aligned}(y - x^{-۱})\,dx + (x - y)\,dy = ۰ \quad &\Longrightarrow \quad y\,dx - x^{-۱}\,dx + x\,dy - y\,dy = ۰\\ &\Longrightarrow \quad d(xy) - d(\ln x) - \frac{۱}{۲}d(y^{۲}) = ۰\\ &\Longrightarrow \quad xy - \ln x - \frac{۱}{۲}y^{۲} = c.\end{aligned}$$

.۶۲ معادله دیفرانسیل کامل است:

$$\begin{aligned}&(۲x - y - ۴)\,dy + (۲y - x + ۵)\,dx = ۰\\ &\qquad\Longrightarrow \quad ۲x\,dy - y\,dy - ۴\,dy + ۲y\,dx - x\,dx + ۵\,dx = ۰\\ &\qquad\Longrightarrow \quad d(۲xy) - d\left(\frac{۱}{۲}y^{۲} + ۴y\right) + d\left(\frac{۱}{۲}x^{۲} + ۵x\right) = ۰\\ &\qquad\Longrightarrow \quad ۲xy - \frac{۱}{۲}y^{۲} - ۴y - \frac{۱}{۲}x^{۲} + ۵x = c.\end{aligned}$$

.۶۳ $$۳y\,dx - ۲x\,dy + \frac{x^{۲}}{y}(۱۰y\,dx - ۶x\,dy) = ۰$$

.۶۳ عبارت $\mu = x^a y^b$ را در معادله ضرب می‌کنیم و a و b را طوری تعیین می‌کنیم که معادله دیفرانسیل حاصل کامل شود

$$(۳x^a y^{b+۲} + ۱۰x^{a+۲}y^{b+۱})\,dx + (-۲x^{a+۱}y^{b+۱} - ۶x^{a+۳}y^b)\,dy = ۰.$$

اگر قرار دهیم $M = ۳x^a y^{b+۲} + ۱۰x^{a+۲}y^{b+۱}$ و $N = -۲x^{a+۱}y^{b+۱} - ۶x^{a+۳}y^b$ داریم

$$\begin{aligned}M_y &= ۳(b + ۲)x^a y^{b+۱} + ۱۰(b + ۱)x^{a+۲}y^b\\ N_x &= -۲(a + ۱)x^a y^{b+۱} - ۶(a + ۳)x^{a+۲}y^b.\end{aligned}$$

برای این که معادله دیفرانسیل کامل باشد باید داشته باشیم $M_y = N_x$. در نتیجه برای این که معادله دیفرانسیل کامل باشد (با متحد قرار دادن دو عبارت فوق) باید داشته باشیم

$$\begin{cases} ۳(b+۲) = -۲(a+۱) \\ ۱۰(b+۱) = -۶(a+۳) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} ۲a+۳b = -۸ \\ ۳a+۵b = -۱۴ \end{cases} \Longrightarrow a = ۲, \quad b = -۴.$$

از این‌رو $\mu = x^۲ y^{-۴}$ یک عامل انتگرال‌ساز برای معادله دیفرانسیل است.

$$\begin{aligned} &(۳x^۲y^{-۲} + ۱۰x^۴y^{-۳})\,dx + (-۲x^۳y^{-۳} - ۶x^۵y^{-۴})\,dy = ۰ \\ &\Longrightarrow \quad d(x^۳y^{-۲}) + d(۲x^۵y^{-۳}) = ۰ \Longrightarrow x^۳y^{-۲} + ۲x^۵y^{-۳} = c. \end{aligned}$$

۶۴. $$(x^۲y + xy - y)\,dx + (x^۲y - ۲x^۲)\,dy = ۰$$

۶۴. معادله دیفرانسیل جدا شدنی است:

$$\begin{aligned} &(x^۲y + xy - y)\,dx + (x^۲y - ۲x^۲)\,dy = ۰ \\ &\Longrightarrow \quad \frac{x^۲ + x - ۱}{x^۲}\,dx + \frac{y-۲}{y}\,dy = ۰ \Longrightarrow \left(۱ + \frac{۱}{x} - \frac{۱}{x^۲}\right)dx + \left(۱ - \frac{۲}{y}\right)dy = ۰ \\ &\Longrightarrow \quad x + \ln|x| + \frac{۱}{x} + y - ۲\ln|y| = c. \end{aligned}$$

۶۵. $$(۲xy + ۴x^۳)dx + (x^۲ + x^۲y + x^۴)dy = ۰$$

۶۵. در اینجا داریم $M = ۲xy + ۴x^۳$ و $N = x^۲ + x^۲y + x^۴$. بنابراین

$$\frac{M_y - N_x}{-M} = \frac{۲x - (۲x + ۲xy + ۴x^۳)}{-(۲xy + ۴x^۳)} = \frac{-(۲xy + ۴x^۳)}{-(۲xy + ۴x^۳)} = ۱$$

تابعی از y است. از این‌رو $\mu = e^{\int dy} = e^y$ یک عامل انتگرال‌ساز معادله است. با ضرب آن در معادله، معادله‌ی کامل زیر را داریم

$$(۲xye^y + ۴x^۳e^y)dx + (x^۲e^y + x^۲ye^y + x^۴e^y)dy = ۰.$$

پس تابع $\psi(x,y)$ وجود دارد که $\psi_x = M$ و $\psi_y = N$، یعنی

$$\begin{cases} \psi_x = ۲xye^y + ۴x^۳e^y \\ \psi_y = x^۲e^y + x^۲ye^y + x^۴e^y \end{cases}$$

اگر از رابطه‌ی اول نسبت به x انتگرال بگیریم داریم

$$\psi(x,y) = x^۲ye^y + x^۴e^y + h(y).$$

با مشتق‌گیری از رابطه‌ی اخیر نسبت به y خواهیم داشت

$$\psi_y = x^۲ e^y + x^۲ y e^y + x^۴ e^y + h'(y).$$

با مقایسه‌ی رابطه‌ی بالا و رابطه‌ی اول داریم $h'(y) = ۰$ و در نتیجه $h(y) = ۰$. از این‌رو جواب عمومی معادله عبارت است از

$$x^۲ y e^y + x^۴ e^y = c.$$

.۶۶ $\quad y(x^۳y^۳ + ۲x^۲ - y)\, dx + x^۳(xy^۳ - ۲)\, dy = ۰$

.۶۶ عبارت $\mu = x^a y^b$ را در معادله ضرب می‌کنیم و a و b را طوری تعیین می‌کنیم که معادله دیفرانسیل حاصل کامل شود

$$(x^{a+۳}y^{b+۴} + ۲x^{a+۲}y^{b+۱} - y^{b+۲})\, dx + (x^{a+۴}y^{b+۳} - ۲x^{a+۳}y^b)\, dy = ۰.$$

با فرض $M = x^{a+۳}y^{b+۴} + ۲x^{a+۲}y^{b+۱} - y^{b+۲}$ و $N = x^{a+۴}y^{b+۳} - ۲x^{a+۳}y^b$ داریم

$$\begin{aligned} M_y &= (b+۴)x^{a+۳}y^{b+۳} + ۲(b+۱)x^{a+۲}y^b - (b+۲)y^{b+۱} \\ N_x &= (a+۴)x^{a+۳}y^{b+۳} - ۲(a+۳)x^{a+۲}y^b. \end{aligned}$$

برای این که معادله دیفرانسیل کامل باشد باید داشته باشیم $M_y = N_x$. در نتیجه برای این که معادله دیفرانسیل کامل باشد (با متحد قرار دادن دو عبارت فوق) باید داشته باشیم

$$\left\{ \begin{array}{l} b+۴ = a+۴ \\ ۲(b+۱) = -۲(a+۳) \\ -(b+۲) = ۰ \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = b \\ a+b = -۴ \\ b = -۲ \end{array} \right. \Longrightarrow a = -۲, \quad b = -۲.$$

از این‌رو $\mu = x^{-۲}y^{-۲}$ یک عامل انتگرال‌ساز برای معادله دیفرانسیل است.

$$\begin{aligned} &(xy^۲ + ۲y^{-۱} - x^{-۲})\, dx + (x^۲y - ۲xy^{-۲})\, dy = ۰ \\ \Longrightarrow \quad & d\left(\frac{۱}{۲}x^۲y^۲\right) + d(۲xy^{-۱}) + d(x^{-۱}) = ۰ \Longrightarrow \frac{۱}{۲}x^۲y^۲ + ۲xy^{-۱} + x^{-۱} = c. \end{aligned}$$

.۶۷ $\quad (x - \sec y\, \ln x)y' + \tan y - \dfrac{y}{x}\sec y = ۰$

.۶۷ با ضرب معادله در $\cos y$ معادله‌ای کامل خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} &(x - \sec y\, \ln x)y' + \tan y - \frac{y}{x}\sec y = ۰ \\ &\Longrightarrow \quad (x\cos y - \ln x)\frac{dy}{dx} + \sin y - \frac{y}{x} = ۰ \\ &\Longrightarrow \quad x\cos y\, dy - \ln x\, dy + \sin y\, dx - \frac{y}{x}\, dx = ۰ \Longrightarrow d(x\sin y) - d(y\ln x) = ۰ \\ &\Longrightarrow \quad x\sin y - y\ln x = c. \end{aligned}$$

۶۸. $\left(y\cos x+\sin y+\frac{۱}{x}\right)\,dx+(x\cos y+\sin x+y)\,dy=۰$

۶۸. معادله دیفرانسیل کامل است:

$$\begin{aligned}&\left(y\cos x+\sin y+\frac{۱}{x}\right)\,dx+(x\cos y+\sin x+y)\,dy=۰\\&\implies\quad y\cos x\,dx+\sin y\,dx+\frac{۱}{x}\,dx+x\cos y\,dy+\sin x\,dy+y\,dy=۰\\&\implies\quad d(y\sin x)+d(x\sin y)+d(\ln|x|)+d\left(\frac{۱}{۲}y^{۲}\right)=۰\\&\implies\quad y\sin x+x\sin y+\ln|x|+\frac{۱}{۲}y^{۲}=c.\end{aligned}$$

۶۹. $x^{۳}y^{۳}(۲y\,dx+x\,dy)-۵y\,dx+۷x\,dy=۰$

۶۹. عبارت $\mu=x^ay^b$ را در معادله ضرب می‌کنیم و a و b را طوری تعیین می‌کنیم که معادله دیفرانسیل حاصل کامل شود

$$(۲x^{a+۳}y^{b+۴}-۵x^ay^{b+۱})\,dx+(x^{a+۴}y^{b+۳}+۷x^{a+۱}y^b)\,dy=۰.$$

اگر قرار دهیم $M=۲x^{a+۳}y^{b+۴}-۵x^ay^{b+۱}$ و $N=x^{a+۴}y^{b+۳}+۷x^{a+۱}y^b$ داریم

$$\begin{aligned}M_y&=۲(b+۴)x^{a+۳}y^{b+۳}-۵(b+۱)x^ay^b\\N_x&=(a+۴)x^{a+۳}y^{b+۳}+۷(a+۱)x^ay^b.\end{aligned}$$

برای این که معادله دیفرانسیل کامل باشد باید داشته باشیم $M_y=N_x$. در نتیجه برای این که معادله دیفرانسیل کامل باشد (با متحد قرار دادن دو عبارت فوق) باید داشته باشیم

$$\begin{cases}۲(b+۴)=a+۴\\-۵(b+۱)=۷(a+۱)\end{cases}\implies\begin{cases}a-۲b=۴\\۷a+۵b=-۱۲\end{cases}\implies a=-\frac{۴}{۱۹},\quad b=-\frac{۴۰}{۱۹}.$$

از این‌رو $\mu=x^{-۴/۱۹}y^{-۴۰/۱۹}$ یک عامل انتگرال‌ساز برای معادله دیفرانسیل است.

$$\begin{aligned}&(۲x^{a+۳}y^{b+۴}-۵x^ay^{b+۱})\,dx+(x^{a+۴}y^{b+۳}+۷x^{a+۱}y^b)\,dy=۰\\&\implies\quad d\left(-\frac{۱۹}{۳}x^{۱۵/۱۹}y^{-۲۱/۱۹}\right)+d\left(\frac{۱۹}{۳۶}x^{۷۲/۱۹}y^{۳۶/۱۹}\right)=۰\\&\implies\quad -\frac{۱۹}{۳}x^{۱۵/۱۹}y^{-۲۱/۱۹}+\frac{۱۹}{۳۶}x^{۷۲/۱۹}y^{۳۶/۱۹}=c.\end{aligned}$$

۷۰. $(۲x^{۲}+۲y^{۲}-۷)x\,dx+(۲x^{۲}+۲y^{۲}-۸)y\,dy=۰$

۷۰. معادله دیفرانسیل کامل است:

$$\begin{aligned}
&(۲x^۲ + ۲y^۲ - ۷)x\,dx + (۲x^۲ + ۲y^۲ - ۸)y\,dy = ۰ \\
&\quad\Longrightarrow\quad (۲x^۳ + ۲xy^۲ - ۷x)\,dx + (۲x^۲y + ۲y^۳ - ۸y)\,dy = ۰ \\
&\quad\Longrightarrow\quad d\left(\frac{۱}{۲}x^۴ - \frac{۷}{۲}x^۲\right) + d\left(\frac{۱}{۲}y^۴ - ۴y^۲\right) + d(x^۲y^۲) = ۰ \\
&\quad\Longrightarrow\quad \frac{۱}{۲}x^۴ - \frac{۷}{۲}x^۲ + \frac{۱}{۲}y^۴ - ۴y^۲ + x^۲y^۲ = c.
\end{aligned}$$

۷۱. $$(۲ + ۲x^۲y^{۱/۲})y\,dx + (x^۲y^{۱/۲} + ۲)x\,dy = ۰$$

۷۱. معادله دیفرانسیل کامل است:

$$\begin{aligned}
&(۲ + ۲x^۲y^{۱/۲})y\,dx + (x^۲y^{۱/۲} + ۲)x\,dy = ۰ \\
&\quad\Longrightarrow\quad (۲y + ۲x^۲y^{۳/۲})\,dx + (x^۳y^{۱/۲} + ۲x)\,dy = ۰ \\
&\quad\Longrightarrow\quad d(۲xy) + d\left(\frac{۲}{۳}x^۳y^{۳/۲}\right) + d(۲xy) = ۰ \\
&\quad\Longrightarrow\quad ۴xy + \frac{۲}{۳}x^۳y^{۳/۲} = c.
\end{aligned}$$

۷۲. $$y(x^۳e^{xy} - y)\,dx + x(y + x^۳e^{xy})\,dy = ۰$$

۷۲. در اینجا داریم $M = x^۳ye^{xy} - y^۲$ و $N = xy + x^۴e^{xy}$. بنابراین

$$\begin{aligned}
\frac{M_y - N_x}{N} &= \frac{x^۳e^{xy} + x^۴ye^{xy} - ۲y - (y + ۴x^۳e^{xy} + x^۴ye^{xy})}{x(y + x^۳e^{xy})} \\
&= \frac{-۳y - ۳x^۳e^{xy}}{x(y + x^۳e^{xy})} = -\frac{۳}{x}
\end{aligned}$$

تابعی از x است. از این‌رو $\mu = e^{-\int \frac{۳}{x}\,dx} = x^{-۳}$ یک عامل انتگرال‌ساز معادله است. با ضرب آن در معادله داریم

$$\begin{aligned}
(ye^{xy} - x^{-۳}y^۲)\,dx + (x^{-۲}y + xe^{xy})\,dy = ۰ \quad&\Longrightarrow\quad d(e^{xy}) + d\left(\frac{۱}{۲}x^{-۲}y^۲\right) = ۰ \\
&\Longrightarrow\quad e^{xy} + \frac{۱}{۲}x^{-۲}y^۲ = c.
\end{aligned}$$

۷۳. $$(x - y\ln y + y\ln x)\,dx + x(\ln y - \ln x)\,dy = ۰$$

۷۳. معادله دیفرانسیل همگن است، $z=\frac{y}{x}$، $\frac{dy}{dx}=z+x\frac{dz}{dx}$:

$$\begin{aligned}
&(x-y\ln y+y\ln x)\,dx+x(\ln y-\ln x)\,dy=۰\\
&\quad\Longrightarrow\quad (x-y(\ln(y/x))\,dx+x\ln(y/x)\,dy=۰\\
&\quad\Longrightarrow\quad (۱-\frac{y}{x}(\ln(y/x))+\ln(y/x)\,\frac{dy}{dx}=۰\Longrightarrow ۱-z\ln z+(z+xz')\ln z=۰\\
&\quad\Longrightarrow\quad x\frac{dz}{dx}\ln z=-۱\Longrightarrow \ln z\,dz=-\frac{dx}{x}\Longrightarrow z\ln z-z=-\ln|x|+c\\
&\quad\Longrightarrow\quad \frac{y}{x}\ln(y/x)-\frac{y}{x}=-\ln|x|+c.
\end{aligned}$$

۷۴. $$(۲x\sin y+y^{۳}e^{x})\,dx+(x^{۲}\cos y+۳y^{۲}e^{x})\,dy=۰$$

۷۴. معادله دیفرانسیل کامل است:

$$\begin{aligned}
&(۲x\sin y+y^{۳}e^{x})\,dx+(x^{۲}\cos y+۳y^{۲}e^{x})\,dy=۰\\
&\quad\Longrightarrow\quad ۲x\sin y\,dx+y^{۳}e^{x}\,dx+x^{۲}\cos y\,dy+۳y^{۲}e^{x}\,dy=۰\\
&\quad\Longrightarrow\quad d(x^{۲}\sin y)+d(y^{۳}e^{x})=۰\\
&\quad\Longrightarrow\quad x^{۲}\sin y+y^{۳}e^{x}=c.
\end{aligned}$$

۷۵. $$(۲x\cos y+۳x^{۲}y)\,dx+(x^{۳}-x^{۲}\sin y-y)\,dy=۰$$

۷۵. معادله دیفرانسیل کامل است:

$$\begin{aligned}
&(۲x\cos y+۳x^{۲}y)\,dx+(x^{۳}-x^{۲}\sin y-y)\,dy=۰\\
&\quad\Longrightarrow\quad ۲x\cos y\,dx+۳x^{۲}y\,dx+x^{۳}\,dy-x^{۲}\sin y\,dy-y\,dy=۰\\
&\quad\Longrightarrow\quad d(x^{۲}\cos y)+d(x^{۳}y)-d\left(\frac{۱}{۲}y^{۲}\right)=۰\\
&\quad\Longrightarrow\quad x^{۲}\cos y+x^{۳}y-\frac{۱}{۲}y^{۲}=c.
\end{aligned}$$

۷۶. $$(y\sec^{۲}x+\sec x\tan x)\,dx+(\tan x+۲y)\,dy=۰$$

۷۶. معادله دیفرانسیل کامل است:

$$\begin{aligned}
&(y\sec^{۲}x+\sec x\tan x)\,dx+(\tan x+۲y)\,dy=۰\\
&\quad\Longrightarrow\quad y\sec^{۲}x\,dx+\sec x\tan x\,dx+\tan x\,dy+۲y\,dy=۰\\
&\quad\Longrightarrow\quad d(y\tan x)+d(y\sec x)+d(y^{۲})=۰\\
&\quad\Longrightarrow\quad y\tan x+y\sec x+y^{۲}=c.
\end{aligned}$$

۷۷. $$\left(\frac{y}{x}\ln(\ln y)+\frac{۲}{۳}xy^{۴}\right)\,dx+\left(\frac{\ln x}{\ln y}+x^{۲}y^{۳}\right)\,dy=۰$$

۷۷. با ضرب معادله در $\frac{۱}{y}$ آن‌را به یک معادله دیفرانسیل کامل تبدیل می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{y}{x}\ln(\ln y) + \frac{۲}{۳}xy^{۴}\right)\,dx + \left(\frac{\ln x}{\ln y} + x^{۲}y^{۳}\right)\,dy = ۰\\
&\qquad\Longrightarrow\quad \left(\frac{۱}{x}\ln(\ln y) + \frac{۲}{۳}xy^{۳}\right)\,dx + \left(\frac{\ln x}{y\ln y} + x^{۲}y^{۲}\right)\,dy = ۰\\
&\qquad\Longrightarrow\quad d((\ln x)(\ln(\ln y)))) + d(\frac{۱}{۳}x^{۲}y^{۳}) = ۰
\end{aligned}$$