به نام خدا

امتحان میان ترم مبانی جبر

(۱۱ اردیبهشت ۱۳۹۲)

۱. (الف) مفاهیم زیر را به طور دقیق تعریف کنید : گروه دوری، مرتبه‌ی عضو، جبر تولید شده توسط یک مجموعه، حلقه.

(ب) گروهی آبلی و غیر دوری مثال بزنید که هر زیرگروه سره‌ی آن دوری باشد.

(ج) گروهی ناآبلی مثال بزنید که هر زیرگروه سره‌ی آن دوری باشد.

(د) گروه آبلی نامتناهی مثال بزنید که هر زیرگروه سره‌اش دوری متناهی باشد.

(هـ) گروهی مثال بزنید که مرتبه‌ی هر عضو غیرهمانی آن نامتناهی باشد.

۲. به ازای هر $a,b \in \mathbb{Q}$ تعریف می‌کنیم

$$a \star b = a + b - ۱ \qquad \text{و} \qquad a \odot b = a + b - ab.$$

(الف) نشان دهید $(\mathbb{Q}, \star)$ یک گروه آبلی با عضو همانی ۱ است.

(ب) نشان دهید $(\mathbb{Q} \setminus \{۱\}, \odot)$ یک گروه آبلی با عضو همانی ۰ است.

(ج) نشان دهید $(\mathbb{Q}, \star, \odot)$ یک میدان است.

۳. نشان دهید که اگر p یک عدد اول به صورت $p = ۴n+۱$ باشد، آنگاه معادله‌ی $x^۲ = -۱$ در $\mathbb{Z}_p$ دارای جواب است، در حالی‌که اگر p صورت $p = ۴n + ۳$ باشد، آنگاه این معادله در $\mathbb{Z}_p$ دارای جواب نیست.

۴. ثابت کنید که اگر $G = \langle a \rangle$ یک گروه دوری مرتبه‌ی n باشد، آنگاه به ازای هر شمارنده‌ی s از n یک زیرگروه یکتا از مرتبه‌ی s در G وجود دارد.

۵. نشان دهید که گروه ضربی اعداد گویای مثبت، $\mathbb{Q}^{\times}_{pos}$، متناهیاً تولید شده نیست و یک مجموعه‌ی مولد (به غیر از خودش) برای آن ارائه کنید.

موفق باشید

وقت: ۱۲۰ دقیقه

به نام خدا

امتحان پایان ترم مبانی جبر

(۱۹ خرداد ۱۳۹۲)

۱. فرض کنید $f : G \longrightarrow H$ یک همریختی گروهی باشد نشان دهید که f یک‌به‌یک است اگر و تنها اگر به ازای هر $a \in G$، $o(f(a)) = o(a)$.

۲. فرض کنید H یک زیرگروه از گروه G باشد. نشان دهید رابطه‌ی

$$a \sim b \Longleftrightarrow a^{-1}b \in H$$

یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی G است. علاوه بر آن H زیرگروه نرمال است اگر و تنها اگر مجموعه‌ی رده‌های هم‌ارزی با عمل القا شده از G یک گروه باشد.

۳. قضیه‌ی لاگرانژ را بیان و ثابت کنید.

۴. فرض کنید G یک گروه باشد. نشان دهید $G/Z(G) \cong \mathrm{Inn}(G)$.

۵. فرض کنید R حلقه‌ی جابجایی و یکدار باشد. نشان دهید $y \in J(R)$ اگر و تنها اگر به ازای هر $x \in R$، $1 - xy$ وارون‌پذیر باشد.

۶. نشان دهید نرمال بودن خاصیت ترایایی ندارد (با اثبات همه‌ی ادعاها).

۷. فرض کنید $f : R \longrightarrow S$ یک همریختی حلقه‌ای باشد. نشان دهید

(الف) اگر R و S یکدار و f پوشا باشد، آن‌گاه $f(1_R) = 1_S$.

(ب) اگر R و S یکدار و $f(u)$ وارون‌پذیر باشد، که در آن u عضوی از R است، آن‌گاه $f(1_R) = 1_S$.

اگر $f \neq 0$ و R یکدار و S مقسوم‌علیه صفر نداشته باشد، آن‌گاه S یکدار است و $f(1_R) = 1_S$.

موفق باشید

وقت: ۱۲۰ دقیقه