به نام خدا

امتحان میان ترم جبر ۱

۱. ثابت کنید هیچ جایگشتی در S_n را نمی‌توان هم به صورت حاصل‌ضرب تعداد زوجی ترانهش و هم به صورت حاصل‌ضرب تعداد فردی ترانهش تجزیه کرد.

۲. فرض کنید p عدد اول باشد. نشان دهید که اگر $p = ۴n + ۱$، آن‌گاه معادله‌ی $x^۲ = -۱$ در $\mathbb{Z}_p$ دارای جواب است و اگر $p = ۴n + ۳$، آن‌گاه این معادله جواب ندارد.

۳. فرض کنید G یک گروه دوری دوری باشد. ثابت کنید که هر زیرگروه G دوری است. به علاوه اگر G متناهی از مرتبه‌ی n باشد، ثابت کنید که اگر $k|n$، آن‌گاه G یک و تنها یک زیر گروه‌از مرتبه‌ی k دارد.

۴. نشان دهید رابطه‌ی مزدوجی روی یک گروه رابطه‌ی هم‌ارزی است. رده‌های مزدوجی $D_{۲n}$ را برای n زوج و فرد بیابید.

موفق باشید

وقت: ۸۰ دقیقه

به نام خدا

امتحان پایان ترم جبر

(۲۴ دی ۱۳۹۱)

۱. فرض کنید $f(x) = \mathbb{R}[x]$ یک چندجمله‌ای غیر ثابت باشد. نشان دهید

$$f(x) = a(x - r_۱)(x - r_۲)\cdots(x - r_r)q_۱(x)q_۲(x)\cdots q_k(x),$$

که در آن $r_۱$، $r_۲$، $\ldots$، r_m ریشه‌های حقیقی $f(x)$ (در صورت وجود) و $q_۱(x)$، $\ldots$، $q_k(X)$، چندجمله‌ای‌های حقیقی تکین تحویل‌ناپذیر درجه‌ی دو (در صورت وجود) هستند و a ضریب پیشروی $f(x)$ است.

۲. نشان دهید ایدآل $(۲, x)$ در $\mathbb{Z}[x]$ اصلی نیست.

۳. فرض کنید F یک میدان باشد و $h(x) \in F[x]$ یک چندجمله‌ای تکین غیر ثابت درجه‌ی m باشد، نشان دهید حلقه‌ی خارج‌قسمتی $\dfrac{F[x]}{\langle h(x)\rangle}$ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$R = \frac{F[x]}{\langle h(x)\rangle} = \{a_۰ + a_۱t + \cdots + a_{m-۱}t^{m-۱} \mid a_i \in F,\ h(t) = ۰\}$$

که در آن $I = \langle h(x)\rangle$ علاوه بر آن R شامل (یک کپی یکریخت با) F است و $\{۱, t, \ldots, t^{m-۱}\}$ پایه‌ای برای R روی F است.

۴. فرض کنید $F : K$ توسیع باشد. نشان دهید $a \in F$ روی K جبری است اگر و تنها اگر $[K(a) : K]$ متناهی باشد. در این حالت اگر $m(x)$ چندجمله‌ای می‌نیمال a روی K باشد و $\deg m(x) = n$، آن‌گاه $\{۱, a, \ldots, a^{n-۱}\}$ پایه‌ای برای $K(a)$ روی K است.

۵. فرض کنید F یک زیر میدان $\mathbb{R}$ باشد. نشان دهید نقطه‌ی برخورد یک F-خط و یک F-دایره (در صورت تلاقی)، یک $F(\sqrt{r})$-نقطه است، که در آن $r \in F$.

۶. فرض کنید $f(x) = x^۳ - ۲ \in \mathbb{Q}[x]$.

(الف) توسیع تجزیه‌ی $f(x)$ را بیابید و درجه‌ی آن روی $\mathbb{Q}$ را مشخص کنید.

(ب) گروه گالوای توسیع تجزیه‌ی $f(x)$ را بیابید.

به نام خدا

امتحان میان ترم جبر

(۲۸ آبان ۱۳۹۱)

۱. فرض کنید H زیرگروهی از گروه G باشد. نشان دهید G روی

$$X = \{xH \mid x \in G\}$$

عمل می‌کند. ثابت‌ساز هر عضو و هسته‌ی عمل را بیابید.

۲. فرض کنید G یک گروه باشد و $N \trianglelefteq G$. نشان دهید که اگر N و G/N حل‌پذیر باشند، آن‌گاه G حل‌پذیر است.

۳. فرض کنید H و K دو زیرگروه حل از گروه G باشند و $H \trianglelefteq G$. نشان دهید HK زیرگروه حل‌پذیر G است.

۴. نشان دهید که سری

$$\{۱\} = G_۰ \leq G_۱ \leq \cdots \leq G_n = G$$

یک سری مرکزی است اگر و تنها اگر $[G_{i+۱}, G] \leq G_i$، به ازای هر $i = ۰, ۱, \ldots, n-۱$.

۵. فرض کنید گروه G روی مجموعه‌ی X عمل می‌کند. نشان دهید

(الف) نشان دهید به ازای هر $x \in X$ و $g \in G$ داریم

$$stab(g \cdot x) = g\, stab(x)\, g^{-۱}.$$

(ب) اگر عمل ترایا باشد و به ازای یک $x \in X$، $stab(x) = ۱$، آن‌گاه عمل منظم است.

(ج) اگر G آبلی و عمل صادقانه و ترایا باشد، آن‌گاه عمل منظم است.

۶. نشان دهید که هر گروه مرتبه‌ی $p^۲q^۲$ ساده نیست (p و q اعداد اول).

به نام خدا

امتحان میان ترم جبر ۱

۱. فرض کنید

$$\alpha = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶ & ۷ \\ ۲ & ۶ & ۵ & ۴ & ۳ & ۱ & ۷ \end{pmatrix}, \qquad \beta = (۱۲۳۴۵)(۶۷)(۱۳۵۷).$$

تجزیه‌ی دوری α و β را یافته و عبارت‌های $\alpha\beta$، $\alpha\beta\alpha^{-۱}$، و $\beta^{-۱}\alpha\beta$ را محاسبه کنید.

۲. دستگاه معادله‌ی $\begin{cases} \bar{۳}x + \bar{۴}y = \bar{۱} \\ \bar{۲}x + \bar{۳}y = \bar{۴} \end{cases}$ را در $\mathbb{Z}_۵$ حل کنید.

۳. نشان دهید رابطه‌ی مزدوجی روی یک گروه رابطه‌ی هم‌ارزی است.

۴. اگر a عضوی از گروه G نشان دهید $\langle a\rangle$ یک گروه است. در حالتی که مرتبه‌ی a متناهی باشد اعضای $\langle a\rangle$ به چه صورت هستند؟ اگر مرتبه‌ی a نامتناهی اعضای $\langle a\rangle$ به چه صورت هستند؟ (ادعاهای خود را ثابت کنید)

۵. ثابت کنید $f: G \longrightarrow G$ با ضابطه‌ی $f(a) = a^{-۱}$ همریختی است اگر و تنها اگر G آبلی باشد.