بنام خدا

امتحان پایان ترم ریاضی مهندسی (ترم دوم ۱۳۹۲)

جمع نمرات	سوال چهارم	سوال سوم	سوال دوم	سوال اول

نام و نام خانوادگی: .... شماره دانشجویی: .... نام استاد درس: ....

نام خود را روی همه‌ی برگه‌های امتحانی بنویسید.
وقت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
با آرزوی موفقیت

سوال یک. سری لوران $f(z) = \dfrac{1}{(z+i)(z+3i)}$ را در ناحیه $2 < |z+i|$ بیابید.
(۲۰ نمره)

سوال دو. (الف) تصویر ناحیه $1 < |z|$ را تبدیل خطی کسری $T(z) = \dfrac{-z+i}{z+i}$ دقیقا و با استدلال کامل مشخص کنید.

(ب) تعیین کنید که تابع $f(z) = \mathrm{Ln}\left(\dfrac{-z+i}{z+i}\right)$، Ln شاخه اصلی لگاریتم، در چه ناحیه‌ای تحلیلی است (با استدلال کامل).

(ج) مقدار انتگرال زیر را بیابید و آن‌را به صورت $a+ib$ نشان دهید

$$\int_{|z-1|=1} \frac{f(z)}{z-1}\, dz$$

(۱۰، ۱۰، ۱۰ نمره)

سوال سه. مقدار انتگرال حقیقی $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(x^2+2x+2)^2}\, dx$ را با استفاده از انتگرال‌گیری مختلط محاسبه کنید (با استدلال کامل).
(۲۵ نمره)

سوال چهار. انتگرال زیر را محاسبه کنید

$$\int_{|z|=2} z\, e^{1/(z-i)}\, dz$$

(۲۵ نمره)

سوال یک. سری لوران $f(z) = \frac{1}{(z+i)(z+3i)}$ را در ناحیه $|z+i| < 2$ بیابید. (۲۰ نمره)

$$f(z) = \frac{1}{(z+i)(z+3i)}$$

$$= \frac{1}{z+i} \frac{1}{z+i+2i}$$

$$= \frac{1}{z+i} \frac{1}{2i\left(1+\frac{z+i}{2i}\right)}$$

$$= \frac{1}{z+i} \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z+i}{2i}\right)^n$$

در سری هندسی $\sum_{n=0}^{\infty} w^n = \frac{1}{1-w}$ $|w|<1$

$\left(-\frac{z+i}{2i}\right)$ بجای w قرار میدهیم

$$\left|-\frac{z+i}{2i}\right| < 1$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z+i)^{n-1}}{(2i)^{n+1}} , \qquad |z+i| < 2$$

سوال دوم. (الف) تصویر ناحیه $|z| < 1$ را تبدیل خطی کسری $T(z) = \dfrac{-z+i}{z+i}$ دقیقا مشخص کنید. (۱۰ نمره)

(ب) تعیین کنید که تابع $f(z) = \mathrm{Ln}\left(\dfrac{-z+i}{z+i}\right)$، Ln شاخه اصلی لگاریتم، در چه ناحیه‌ای تحلیلی است. (۱۰ نمره)

(ج) مقدار انتگرال زیر را بیابید و آن‌را به صورت $a+ib$ نشان دهید (۱۰ نمره)

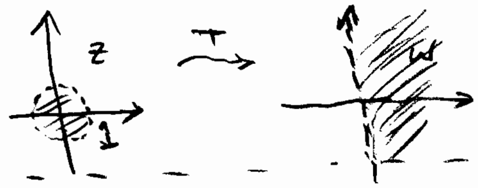
$$\int_{|z-1|=1} \frac{f(z)}{z-1}\, dz$$

الف) $w = \dfrac{-z+i}{z+i} \Leftrightarrow wz + wi = -z + i \Leftrightarrow z(w+1) = i(1-w) \Leftrightarrow z = i\dfrac{1-w}{1+w}$

$\therefore |z|<1 \Leftrightarrow \left|i\dfrac{1-w}{1+w}\right| < 1 \Leftrightarrow |1-w| < |1+w| \Leftrightarrow |1-w|^2 < |1+w|^2$

$\Leftrightarrow (1-w)(1-\bar{w}) < (1+w)(1+\bar{w}) \Leftrightarrow 1-\bar{w}-w+|w|^2 < 1+\bar{w}+w+|w|^2$

$\Leftrightarrow 0 < 2(w+\bar{w}) \Leftrightarrow \mathrm{Re}\, w > 0$



ب) $\dfrac{-z+i}{z+i} = \dfrac{-z+i}{z+i} \times \dfrac{\overline{z+i}}{\overline{z+i}} = \dfrac{(-z+i)(\bar{z}-i)}{|z+i|^2} = \dfrac{-|z|^2+iz+i\bar{z}+1}{|z+i|^2} = \dfrac{-(x^2+y^2)+1+2ix}{x^2+(y-1)^2}$ $(z=x+iy)$

چون $\mathrm{Ln}\, w$ همه جا تحلیلی است بجز ناحیه $\begin{cases} \mathrm{Im}\, w = 0 \\ \mathrm{Re}\, w \le 0 \end{cases}$ پس $\mathrm{Ln}\dfrac{-z+i}{z+i}$ همه جا تحلیلی است

بجز در $z=i$ (که $w = \dfrac{-z+i}{z+i}$ در آن تعریف نشده) و ناحیه $\begin{cases} ① \; 2x = 0 \\ ② \; -(x^2+y^2)+1 \le 0 \end{cases}$

$\xRightarrow{①} x = 0 \xRightarrow{②} -y^2+1 \le 0 \Rightarrow |y| \ge 1$

بنابراین $f(z) = \mathrm{Ln}\dfrac{-z+i}{z+i}$ همه جا تحلیلی است بجز در ناحیه $\{z \in \mathbb{C} \mid z = x+iy,\ x=0,\ |y| \ge 1\}$ (نقطه i نیز در مجموعه بالا وجود دارد)

ج) طبق (ب) تابع f در داخل و روی منحنی $|z-1|=1$ تحلیلی است پس طبق قضیه انتگرال کشی داریم

$\displaystyle\int_{|z-1|=1} \frac{f(z)}{z-1}\, dz = 2\pi i\, f(1) = 2\pi i\, \mathrm{Ln}\frac{-1+i}{1+i} \overset{*}{=} 2\pi i\, \mathrm{Ln}\, i$

$= 2\pi i(\ln|i| + i\,\mathrm{Arg}(i))$

$= 2\pi i(\underbrace{\ln 1}_{=0} + i\pi/2)$

$= -\pi^2$

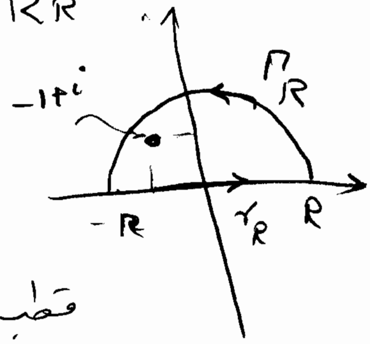
$(*)$ $\dfrac{-1+i}{1+i} = \dfrac{-1+i}{1+i} \times \dfrac{1-i}{1-i} = \dfrac{-1+i+i+1}{2} = i$

سوال سه. مقدار انتگرال حقیقی $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(x^2+2x+2)^2}\,dx$ را با استفاده از انتگرال‌گیری مختلط محاسبه کنید. (۲۵ نمره)

تابع $f(z)=\frac{z}{(z^2+2z+2)^2}$ را در نظر می‌گیریم و $\int_C f(z)dz$ را محاسبه می‌کنیم که در آن $C=\Gamma_R+\gamma_R$

Γ_R نیمدایره بالایی به شعاع R و γ_R پاره خط واصل $-R$ و R است.

$|z|<R$



$$z^2+2z+2=0 \to z_1,z_2=\frac{-1\pm\sqrt{1-2}}{1}=-1\pm i$$

چون $|-1+i|=\sqrt{2}$ پس فرض می‌کنیم $R>\sqrt{2}$.

f در نقطه $z_1=-1+i$ داخل منحنی C تحلیلی نیست و نقطه z_1 قطب مرتبه دوم f است. پس

$$\operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z)=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to z_1}\frac{d}{dz}\left[(z-z_1)^2 f(z)\right]$$

$(z_2=-1-i)$

$(z_1=-1+i)$

$$=\lim_{z\to z_1}\frac{d}{dz}\frac{z}{(z-z_2)^2}=\lim_{z\to z_1}\frac{(z-z_2)^2-2z(z-z_2)}{(z-z_2)^4}$$

$$=\lim_{z\to z_1}\frac{(z-z_2)-2z}{(z-z_2)^3}=\frac{z_1-z_2-2z_1}{(z_1-z_2)^3}=\frac{-(z_1+z_2)}{((-1+i)-(-1-i))^3}=\frac{2}{(2i)^3}=\frac{2}{-8i}$$

$$=\frac{1}{-4i}$$

بنابراین طبق قضیه مانده‌ها داریم

$$\int_C f(z)dz=2\pi i\operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z)=2\pi i\left(\frac{1}{-4i}\right)=\frac{-\pi}{2}$$

پس

$$-\pi/2=\int_C f(z)dz=\int_{\Gamma_R} f(z)dz+\int_{\gamma_R} f(z)dz=\int_{\Gamma_R} f(z)dz+\int_{-R}^{R} f(x)dx \qquad (*)$$

حال نشان می‌دهیم $\lim_{R\to+\infty}\int_{\Gamma_R} f(z)dz$. چون روی $\Gamma_R: |z|=R$ داریم

$$|z^2+2z+2|=|z-z_1||z-z_2|\underset{\text{نامساوی مثلث}}{\geq}(|z|-|z_1|)(|z|-|z_2|)=(R-\sqrt{2})(R-\sqrt{2})=(R-\sqrt{2})^2$$

پس روی Γ_R داریم

$$|f(z)|=\frac{|z|}{|z^2+2z+2|^2}\le\frac{R}{(R-\sqrt{2})^4}$$

بنابراین $\left|\int_{\Gamma_R} f(z)dz\right|\le\frac{R}{(R-\sqrt{2})^4}\times\pi R$. چون وقتی $R\to+\infty$ طرف راست به صفر میل می‌کند، پس طرف راست نیز به صفر میل می‌کند. پس $\lim_{R\to+\infty}\int_{\Gamma_R} f(z)dz=0$. پس وقتی $R\to+\infty$، از (*) داریم

$$-\pi/2=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx.$$

سوال چهار. انتگرال زیر را محاسبه کنید (۲۵ نمره)

$$\int_{|z|=2} z\, e^{1/(z-i)}\, dz$$

تابع $f(z)=z\,e^{\frac{1}{z-i}}$ دارای نقطه تکین اساسی در $z=i$ است. با استفاده از سری لوران f حول $z=i$ مانده f در $z=i$ را می‌یابیم:

$$f(z)=z\,e^{\frac{1}{z-i}}=\left((z-i)+i\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{z-i}\right)^n}{n!}$$

$$=\left((z-i)+i\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\,(z-i)^n}$$

$$=\left((z-i)+i\right)\left(1+\frac{1}{z-i}+\frac{1}{2(z-i)^2}+\frac{1}{3!\,(z-i)^3}+\cdots\right)$$

$$=\cdots+\left(i+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{z-i}+\cdots$$

بنابراین $\operatorname*{Res}_{z=i} f(z)=i+\frac{1}{2}$ و در نتیجه طبق قضیه مانده‌ها

$$\int_{|z|=2} f(z)\,dz=2\pi i\left(\operatorname*{Res}_{z=i} f(z)\right)=2\pi i\times\left(i+\frac{1}{2}\right)=-2\pi+\pi i$$