



دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده علوم ریاضی

گراف‌های دوکیلی تک جورساز روی گروه‌های آبلی

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض (جبر)

محمد سابقی نژاد

استاد راهنما

دکتر بیژن طائری

۱۳۹۲

فهرست مطالب

هفت	فهرست مطالب
	۱ مقدمه
۳	۱.۱ عمل گروه روی مجموعه
۳	۲.۱ مفاهیم اولیه گراف
۵	۳.۱ گراف پوششی
۱۴	۴.۱ ولتاژ و گراف مشتق
۱۶	۵.۱ نمایش گروه‌ها
۱۹	۱.۵.۱ نمایش ماتریسی
۱۹	۲.۵.۱ سرشت گروه‌ها
۲۲	۳.۵.۱ تحویل پذیری
۲۳	۴.۵.۱ روابط تعامد
۲۶	۵.۵.۱ جدول سرشت
۲۹	
	۲ گراف‌های کیلی و دوکیلی
۳۴	۱.۲ گراف‌های کیلی
۳۴	۲.۲ گراف‌های کیلی نرمال
۳۹	۳.۲ گراف‌های دوکیلی
۴۳	
	۳ گراف‌های دوکیلی تک جورساز روی گروه‌های آبلی
۵۰	۱.۳ چند مثال
۵۱	۲.۳ آنالیز ۴- دورهای گراف دوکیلی
۵۴	۳.۳ گراف خارج قسمتی $X/N_{\mathcal{R}}$
۵۷	۴.۳ اثبات قضیه ۱.۳
۷۲	

۸۸

منابع

۹۱

واژه‌نامه‌ی فارسی به انگلیسی

۹۸

واژه‌نامه‌ی انگلیسی به فارسی

۱۰۴

نمایه

۱۰۷

فهرست نمادها

چکیده:

فرض کنید H یک گروه متناهی و C یک زیر مجموعه از $H \setminus \{1\}$ باشد. در این صورت گراف کیلی جهت دار $\text{Cay}(H, C)$ گرافی است با مجموعه رئوس $V = H$ و مجموعه یال‌های

$$E = \{(x, y) \mid x, y \in H, yx^{-1} \in C\} = \{(x, hx) \mid x \in H, h \in C\}$$

در حالتی که $C, C = C^{-1}$ را زیر مجموعه کیلی می‌نامیم. در این حالت گراف کیلی $\text{Cay}(H, C)$ ، یک گراف بدون جهت است. یک گراف $\Gamma = (V, E)$ را گراف دوکیلی روی یک گروه H می‌نامیم هرگاه گروه H روی مجموعه V به صورت نیمه‌منظم عمل کند و دقیقاً دارای دو مدار با طول یکسان باشد، یعنی $\text{Aut}(\Gamma)$ زیرگروهی یکرخت با H داشته باشد به طوری که روی V به صورت نیمه‌منظم عمل کند و دقیقاً دارای دو مدار با طول یکسان باشد. هر گراف دوکیلی را می‌توان با شرایط معادل زیر نیز توصیف کرد.

فرض کنید R, S, T زیر مجموعه‌هایی از گروه H باشند به طوری که $S^{-1} = S$ و $R^{-1} = R$ و $R \cup S$ شامل عضو همانی H نباشد، گراف $\text{BiCay}(H; R, S, T)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

مجموعه رئوس آن $H \times \{0, 1\}$ است و دو رأس (i, h) و (j, g) مجاورند اگر و تنها اگر یکی از این سه حالت زیر رخ دهد

$$(1) \quad i = j = 0 \text{ و } gh^{-1} \in R$$

$$(2) \quad i = j = 1 \text{ و } gh^{-1} \in S$$

$$(3) \quad i = 0, j = 1 \text{ و } gh^{-1} \in T$$

نشان می‌دهیم گراف $\Gamma = (V, E)$ یک گراف دوکیلی روی گروه H است اگر و تنها اگر گروه H روی مجموعه V به صورت نیمه‌منظم عمل کند و دقیقاً دارای دو مدار با طول یکسان باشد.

یک گراف را گراف دوکیلی تک جورساز می‌نامیم هرگاه گراف دو بخشی القاء شده توسط یال‌های که این دو مدار را به هم متصل می‌کنند، یک جورسازی تام باشد. گراف‌های پترسن تعمیم یافته مثال‌های نوعی از این چنین گراف‌ها هستند. در ادامه یک رده‌بندی از گراف‌های دوکیلی تک جورساز همبند تراگذار کمانی روی گروه‌های آبلی را بررسی می‌کنیم، این رده‌بندی بدون استفاده از رده‌بندی گروه‌های ساده متناهی انجام شده است. در عوض سرشت‌های تحویل‌ناپذیر مختلط گروه‌های آبلی به صورت گسترده استفاده می‌شود.

مقاله‌ی زیر یکی از منابع اصلی این پایان نامه است

Istvan Kovacs, Aleksander Malnic, Dragan Marusic, stefko Miklavic, One-matching bi-Cayley graphs over abelian groups European Journal of Combinatorics, 30 (2009) 602-616.

رده‌بندی موضوع: 05C25 20B25

کلمات کلیدی: عمل منظم و نیمه‌منظم، گراف مشتق، گراف ولتاژ، نگاشت پوشش منظم، گراف کیلی، گراف دوکیلی، تک جورساز

پیشگفتار

گراف‌های کیلی اولین بار در سال ۱۸۷۸ مورد بررسی قرار گرفتند و کمک می‌کنند تا بتوانیم گراف‌های تراگذار رأسی زیادی را بسازیم. هر گراف کیلی تراگذار رأسی است ولی عکس این مطلب درست نیست. هم‌چنین مطالعه‌ی گراف‌های s - تراگذار از یک نتیجه مطلوب توسط توتِه^۱ در سال ۱۹۷۷ شروع شد، که او نشان داد گراف‌های مکعبی s - تراگذار متناهی برای $s \geq 6$ وجود ندارند. بعدها قضیه‌ی توتِه توسط ویس^۲ در سال ۱۹۸۱ گسترش داده شد، در واقع او نشان داد که گراف‌های s - تراگذار متناهی برای $s = 6$ و $s \geq 8$ وجود ندارند. هدف اولیه در بدست آوردن گراف‌های پوششی، حل مسأله نگاشت رنگی هی وود^۳ بود، که توسط رینگل^۴ یانگز^۵ و همکارانش صورت گرفت. پوشش‌ها زمینه‌ی از تکنیک‌ها را فراهم کردند، به طوری که منجر به حل نهایی مسله‌ی شد، که توسط آلپرت^۶ و گروس^۷ مطرح شده بود. این ایده‌ها بیشتر در سال ۱۹۷۴ در کارگروس شکل گرفت، که در آن گراف‌های ولتاژ به عنوان یک توصیف ترکیبی خاص از پوشش‌ها گراف منظم معرفی شدند. به طور همزمان ایده تکریختی گراف در بیگز^۸ ظاهر شد. هم‌چنین بیشتر نظریه پوشش‌های گراف ترکیبی در دهه هفتاد توسط گروس و تاکر^۹ توسعه داده شد. به علاوه نظریه مجموعه‌های گراف ترکیبی تولید شده توسط پیسانسکی^{۱۰} و وربک^{۱۱} در دهه هشتاد گسترش یافت. پس از دو دهه، کتاب گروس و تاکر منتشر شد، که آن مشهورترین کتاب درسی و هم‌چنین مرجع کتاب پوشش باقی ماند. هر گرافی که دو کیلی باشد لزوماً یک گراف کیلی نیست (گراف پترسن). بررسی گراف‌های دو کیلی قسمتی از یک پروژه بزرگتر است، که هدف آن به دست آوردن مفاهیم عمیق تر از رده‌های گوناگون گراف‌های متقارن است. (مراجع [۱۴، ۱۵، ۱۶، ۲۱، ۲۲] را ببینید) بویژه گراف‌های دو کیلی از گذشته نه چندان دور به طور قابل ملاحظه‌ای مورد

^۱Tutte

^۲Weiss

^۳Heawood

^۴Rinegel

^۵Youngs

^۶Alpert

^۷Gross

^۸Biggs

^۹Tucker

^{۱۰}Pisanski

^{۱۱}Vrabec

توجه قرار گرفته‌اند و تعداد زیادی مقاله در این موضوع منتشر شده‌اند که سوالاتی درباره قویاً منظم بودن (مراجع [۲۴، ۱۳، ۱۸، ۲۰] را ببینید) نیمه‌متقارن بودن (مراجع [۲۴، ۱۳، ۱۷] را ببینید) و همیلتونی بودن [۲۷]، را بررسی می‌کنند.

قویاً منظم بودن گراف‌های دو کیلی بر روی گروه‌های آبلی اولین بار توسط رسمینی^{۱۲} و جان نیکل^{۱۳} در سال ۱۹۹۲ بررسی شد (مرجع [۲۴] را ببینید). بعدها بررسی قویاً منظم بودن گراف‌های دو کیلی توسط لنوگ^{۱۴} و ما^{۱۵} در مرجع [۱۳] انجام شد، گراف‌های دو کیلی مکعبی روی گروه‌های ساده غیرآبلی توسط زای پینگ لو^{۱۶} و چانگ کن وانگ^{۱۷} و مینگ یاو زو^{۱۸} در مرجع [۱۷] بررسی شد.

همچنین مطالعه گراف‌های نیمه‌متقارن توسط فولک من^{۱۹} در مرجع [۵] شروع شد. و ساختاری از گراف‌های دو اولیه توسط یوفینوا^{۲۰} و ایوانف^{۲۱} در مرجع [۵] انجام شد، و در سال ۱۹۸۵ گراف مکعبی نیمه‌متقارن را رده‌بندی کردند. هدف از پایان‌نامه توصیف گراف‌های دو کیلی همبند تراگذار کمانی روی گروه‌های آبلی است. در فصل اول ابتدا عمل گروه روی مجموعه را تعریف و خواص اساسی آن را معرفی می‌کنیم. سپس مفاهیم مورد نیاز اولیه‌ی گراف را بررسی و قضیه‌ی مهم پرون - فروبنیوس را بیان می‌کنیم. در ادامه مفاهیم گراف پوششی و مفاهیم ولتاژ و گراف مشتق را تعریف می‌کنیم. هم‌چنین مفهوم نمایش برای گروه‌های متناهی را معرفی می‌کنیم. در فصل دوم گراف‌های کیلی و گراف‌های کیلی نرمال و گراف‌های دو کیلی را تعریف کرده و خواص اساسی آن‌ها را بررسی می‌کنیم. در فصل سوم گراف‌های دو کیلی همبند تراگذار کمانی روی گروه‌های آبلی با این خاصیت که دو مدار گروه با جورسازی تام متصل می‌شوند، را بررسی می‌کنیم. هم‌چنین رده‌بندی از گراف‌های دو کیلی تک جورساز همبند روی گروه‌های آبلی را نشان می‌دهیم. مثال‌های نوعی این گراف‌ها، شامل هفت گراف پترسن تعمیم یافته تراگذار کمانی و ابرمکعب‌ها است.

^{۱۲}Resmini

^{۱۳}Jungnickel

^{۱۴}Lenug

^{۱۵}Ma

^{۱۶}Zaiping Lu

^{۱۷}Changqun Wang

^{۱۸}Mingyao Xu

^{۱۹}Folkman

^{۲۰}Iofinova

^{۲۱}Ivanov