



دانشگاه پیام نور
دانشکده علوم پایه
استان چهارمحال بختیاری
مرکز شهرکرد

پایان نامه برای دریافت مدرک کارشناسی ارشد
رشته ریاضی محض (جبر)
گروه ریاضی

تحت عنوان : شعاع طیفی فاصله‌ای درخت‌ها با عدد جورسازی داده شده

پژوهشگر: نصیبه پوربافرانی

استاد راهنما: دکتر بیژن طائری

استاد مشاور: دکتر رسول سلیمانی

اسفند ۱۳۹۰

فهرست مطالب

(الف)

فهرست مطالب

۳	۱	مفاهیم مقدماتی و پیش‌نیازها
۳	۱.۱	مفاهیم و تعاریف ابتدایی
۹	۲.۱	معرفی چند گراف خاص
۱۲	۳.۱	جورسازی
۱۶	۴.۱	درخت‌ها
۱۹	۵.۱	مفاهیم پایه‌ای از جبرخطی
۳۷	۶.۱	ماتریس فاصله، طیف فاصله و انرژی فاصله‌ای
۴۳	۲	شعاع طیفی فاصله‌ای درخت‌ها با عدد جورسازی داده شده
۴۳	۱.۲	مقدمه
۵۳	۲.۲	تبدیل روی درخت‌ها
۶۲	۳.۲	درخت‌ها با عدد جورسازی ثابت
۶۴	۴.۲	درخت‌ها با جورسازی کامل
۶۶	۳	طیف فاصله و انرژی فاصله از ترکیب گراف‌های منتظم
۶۶	۱.۳	مقدمه
۶۷	۲.۳	الحاق گراف‌های منتظم
۷۴	۳.۳	الحاق یک گراف منتظم با یک اجتماع از گراف‌های منتظم

(الف)

۷۸	۴	شعاع طیفی فاصله‌ای از گراف‌های دوبخشی
۷۸	۱.۴	مقدمه
۸۰	۲.۴	گراف با شعاع طیفی فاصله‌ای می‌نیمم در B_n^k
۸۴	۳.۴	گراف‌ها در B_n^s با شعاع طیفی فاصله‌ای می‌نیمم
۱۰۲		ضمیمه (برنامه‌ی کامپیوتری)
۱۱۰		واژه‌نامه‌ی فارسی به انگلیسی
۱۱۵		واژه‌نامه‌ی انگلیسی به فارسی
۱۱۹		نمایه
۱۲۱		فهرست نمادها
۱۲۳		منابع

چکیده

فرض کنید $G = (V, E)$ یک گراف ساده‌ی همبند با $|V| = n$ راس باشد. برای رئوس $u, v \in V$ فاصله‌ی d_{uv} برابر است با طول کوتاه‌ترین مسیری که دو راس را در G به هم متصل می‌کند. ماتریس $D(G) = (d_{uv})_{u,v \in V}$ یک ماتریس متقارن با مقادیر ویژه‌ی حقیقی است. شعاع طیفی فاصله‌ی $\rho(G)$ از گراف G بزرگ‌ترین مقدار ویژه از ماتریس فاصله‌ی $D(G)$ است. انرژی فاصله‌ی $DE(G)$ به صورت مجموع قدرمطلق تمام مقادیر ویژه‌ی ماتریس فاصله‌ی $D(G)$ تعریف می‌شود. در این پایان‌نامه تبدیلات کلی که شعاع طیفی فاصله‌ی درخت را کاهش می‌دهند، مورد بحث و بررسی قرار می‌دهیم. درخت‌های n راسی با عدد جورسازی داده شده‌ی m که شعاع طیفی فاصله‌ی را به حداقل می‌رسانند، مشخص می‌کنیم. هم‌چنین شعاع طیفی فاصله‌ی گراف‌های دوبخشی را مطالعه نموده و گراف منحصر به فردی را تعیین می‌کنیم که در رده‌ی همه‌ی گراف‌های همبند دوبخشی با n راس و یک عدد جورسازی معین، دارای شعاع طیفی فاصله‌ی می‌نیم است. به‌علاوه گراف‌هایی را مشخص می‌کنیم که در رده‌ی همه‌ی گراف‌های همبند دوبخشی با n راس و یک عدد همبندی راسی معین، دارای شعاع طیفی فاصله‌ی می‌نیم هستند. در نهایت نشان می‌دهیم که خانواده‌هایی از گراف‌های غیر هم‌طیف با انرژی فاصله‌ی یکسان وجود دارند، به طوری که برای هر $m \in \mathbb{N}$ ، هر خانواده شامل حداقل n گراف است.

مقالات زیر از منابع اصلی این پایان‌نامه هستند

- Illic. A, (2010). **Distance spectral radius of trees with given matching number.** Discrete Applied Math. 158:1799-1806.
- Nath. M and Paul. S, (2011). **On the distance spectral radius of bipartite graphs** Linear Algebra and its Applications 1-12.
- Stevanovic. D and Indulal.G, (2009). **The distance spectrum and energy of the compositions of regular graphs.** Appl. Math. Lett. 22:1136-1140

پیش‌گفتار

برای گراف ساده‌ی همبند G با n راس، ماتریس فاصله ماتریسی متقارن و تحویل‌ناپذیر است. این ماتریس و مفاهیم مرتبط با آن مانند طیف فاصله (مجموعه‌ی مقادیر ویژه‌ی ماتریس فاصله)، شعاع طیفی فاصله‌ی (بزرگ‌ترین مقدار ویژه‌ی ماتریس فاصله) و انرژی فاصله‌ی (مجموع قدرمطلق تمام مقادیر ویژه‌ی ماتریس فاصله) کاربردهای وسیعی در شیمی و دیگر شاخه‌های علوم داشته است. امروزه بسیاری از پژوهشگران استفاده از بزرگ‌ترین مقدار ویژه‌ی ماتریس فاصله (شعاع طیفی فاصله‌ی) را برای توصیف ساختارهای ملکولی مورد استفاده قرار می‌دهند. در چند سال اخیر ژئو^۱ و تری نجستیک^۲ در مقالات [۲۳] و [۲۴] کران‌های بالا و پایینی را برای شعاع طیفی فاصله‌ی، برحسب تعداد رئوس، اندیس وینر و اندیس زاگرب به‌دست آورده‌اند. در مقالات [۲] و [۱۴] ثابت شده است که طیف فاصله‌ی درخت‌ها و گراف‌های تک‌دوری دقیقاً یک مقدار ویژه‌ی مثبت دارد و بنابراین انرژی فاصله‌ی برای درخت‌ها و گراف‌های تک‌دوری دو برابر شعاع طیفی فاصله‌ی آن‌ها خواهد بود. در [۲۰] سابهی و پاور^۳ ثابت کرده‌اند که بین درخت‌های n راسی ($n \geq 3$)، مسیر P_n دارای شعاع طیفی ماکسیمم است. به علاوه نویسندگان ثابت کرده‌اند که ستاره‌ی S_n گراف منحصر به فردی با شعاع طیفی فاصله‌ی می‌نیم در بین درخت‌های n راسی است.

در این پایان‌نامه به بحث درباره‌ی ماتریس فاصله‌ی گراف‌ها و مفاهیم مرتبط از جمله طیف فاصله، شعاع طیفی فاصله‌ی و انرژی فاصله‌ی می‌پردازیم. در اولین فصل به بیان تعاریف ابتدایی و همچنین قضایای اساسی و مفاهیم پایه‌ای مورد نیاز می‌پردازیم. در فصل دوم شعاع طیفی فاصله‌ی درخت‌ها با عدد جورسازی داده شده را مطالعه می‌کنیم و تبدیلاتی را بررسی می‌کنیم که به کمک آن‌ها بتوان شعاع طیفی فاصله‌ی درخت را کاهش داد. در فصل سوم شعاع طیفی فاصله‌ی گراف‌های دوبخشی را مطالعه نموده و گراف منحصر به فردی را تعیین می‌کنیم که در رده‌ی همه‌ی گراف‌های همبند دوبخشی با n راس و یک

^۱Zhou

^۲Trinajstik

^۳Subhi and Powers

عدد جورسازی معین، دارای شعاع طیفی فاصله‌ای می‌نیم است. به‌علاوه گراف‌هایی را مشخص می‌کنیم که در رده‌ی همه‌ی گراف‌های همبند دوبخشی با n راس و یک عدد همبندی راسی معین، دارای شعاع طیفی فاصله‌ای می‌نیم هستند. در چهارمین فصل به توصیف طیف و انرژی فاصله‌ای گراف حاصل از الحاق گراف‌های منتظم می‌پردازیم و هم‌چنین طیف و انرژی فاصله‌ای گراف‌هایی را بررسی می‌کنیم که از اجتماع یک گراف منتظم با گراف حاصل از الحاق دو یا چند گراف منتظم دیگر به‌دست می‌آید. نشان می‌دهیم که خانواده‌هایی از گراف‌های غیر هم‌طیف با انرژی فاصله‌ای یکسان وجود دارند، به طوری که برای هر $m \in \mathbb{N}$ هر خانواده شامل حداقل n گراف است. در پایان نیز برنامه کامپیوتری برای محاسبه‌ی شعاع طیفی فاصله‌ای درخت $A(n, m)$ (که در بین درخت‌های n راسی با عدد جورسازی داده شده‌ی m دارای شعاع طیفی می‌نیم است) و نوعی درخت خاص را می‌آوریم.