



دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده علوم ریاضی

طیف گراف‌های نیمه‌کیلی روی گروه‌های آبل‌ی متناهی

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض (جبر)

مجید احمدپور

استاد راهنما

دکتر بیژن طائری

۱۳۹۰

فهرست مطالب

(I)

فهرست مطالب

۱	سرشت گروه‌های آبدی	۱
۱	۱.۱ نمایش گروه‌ها	۱
۴	۲.۱ سرشت گروه‌ها	۴
۵	۳.۱ تحویل‌پذیری	۵
۸	۴.۱ روابط تعامد	۸
۱۲	۵.۱ جدول سرشت	۱۲
۱۶	۶.۱ مقادیر ویژه	۱۶
۲۰	۷.۱ حاصل ضرب تانسوری	۲۰
۲۷	۲ طیف گراف‌ها	۲۷
۳۰	۱.۲ مسیر و دور	۳۰
۳۲	۲.۲ طیف گراف‌های گردش	۳۲
۳۸	۳ گراف‌های کیلی و نیمه کیلی	۳۸
۳۸	۱.۳ عمل گروه روی مجموعه	۳۸
۴۲	۲.۳ گراف‌های کیلی	۴۲
۴۶	۳.۳ گراف‌های رأس متعدی	۴۶
۵۰	۴.۳ گراف‌های نیمه کیلی	۵۰
۵۷	۴ طیف گراف‌های نیمه کیلی روی گروه‌های آبدی متناهی	۵۷
۵۸	۱.۴ طیف گراف‌های کیلی	۵۸

۶۳	طیف گراف‌های نیمه کیلی	۲.۴
۷۴	بعضی حالت‌های خاص	۳.۴
۸۵	واژه‌نامه‌ی انگلیسی به فارسی	
۸۹	واژه‌نامه‌ی فارسی به انگلیسی	
۹۴	منابع	
۹۶	نمایه	
۹۸	فهرست نمادها	

چکیده:

فرض کنید G یک گروه و H یک زیر مجموعه از $G \setminus \{e\}$ باشد. گراف کیلی جهت دار $\text{Cay}(G, H)$ گرافی با مجموعه رئوس $V = G$ و مجموعه یال‌های $E = \{(x, y) \mid x, y \in G, yx^{-1} \in H\}$ است. اگر $H = H^{-1}$ ، گراف کیلی $\text{Cay}(G, H)$ یک گراف بدون جهت است. نشان می‌دهیم گراف دلخواه $\Gamma = (V, E)$ یک گراف کیلی است اگر و تنها اگر گروه خودریختی Γ روی مجموعه‌ی رئوس Γ به صورت منظم عمل کند. فرض می‌کنیم T و S و R زیرمجموعه‌هایی از گروه G باشند، به طوری که

$$R = R^{-1}, \quad S = S^{-1}, \quad e \notin (R \cup S).$$

گراف نیمه کیلی $SC(G; R, S, T)$ یک گراف غیر جهت دار با مجموعه رئوس $\{0, 1\} \times G$ است و رئوس (g, j) و (h, i) مجاورند اگر و تنها اگر یکی از سه حالت زیر رخ دهد.

$$i = j = 0 \text{ و } gh^{-1} \in R \quad (1)$$

$$i = j = 1 \text{ و } gh^{-1} \in S \quad (2)$$

$$i = 0, j = 1 \text{ و } gh^{-1} \in T \quad (3)$$

نشان می‌دهیم گراف $\Gamma = (V, E)$ یک گراف نیمه کیلی است اگر و تنها اگر گروه خودریختی Γ روی مجموعه‌ی رئوس Γ به صورت نیمه منظم عمل کند و دقیقاً دارای دو مدار با طول یکسان باشد.

فرض کنید $\Gamma = SC(G; R, S, T)$ یک گراف نیمه کیلی روی گروه آبله متناهی $G = \mathbb{Z}_{n_1} \times \dots \times \mathbb{Z}_{n_t}$ باشد. نشان می‌دهیم Γ دارای مقادیر ویژه‌ی زیر است.

$$\frac{\lambda_{r_1, \dots, r_t}^R + \lambda_{r_1, \dots, r_t}^S \pm \sqrt{(\lambda_{r_1, \dots, r_t}^R - \lambda_{r_1, \dots, r_t}^S)^2 + 4|\lambda_{r_1, \dots, r_t}^T|^2}}{2}, \quad r_j = 0, 1, \dots, n_j - 1, \quad j = 1, 2, \dots, t,$$

که در آن $\lambda_{r_1, \dots, r_t}^R, \lambda_{r_1, \dots, r_t}^S, \lambda_{r_1, \dots, r_t}^T$ به ترتیب مقادیر ویژه‌ی گراف‌های کیلی $\text{Cay}(G, R), \text{Cay}(G, S), \text{Cay}(G, T)$ هستند. همچنین نشان می‌دهیم اگر $\text{Cay}(G, R)$ و $\text{Cay}(G, T)$ صحیح باشند. آنگاه گراف نیمه کیلی $SC(G, R, R, T)$ یک گراف صحیح است. در ادامه نمایش ساختاری گراف‌های کیلی $\text{Cay}(D_n, H)$ و $\text{Cay}(DC_{2n}, H)$ را با استفاده از گراف‌های نیمه کیلی بررسی می‌کنیم، که در آن D_n و DC_{2n} به ترتیب گروه‌های دووجهی و دودوری از مرتبه‌ی $2n$ هستند، و با استفاده از فرمول بالا طیف گراف‌های کیلی $\text{Cay}(D_n, H)$ و $\text{Cay}(DC_{2n}, H)$ را بدست می‌آوریم.

مقاله‌ی زیر یکی از منابع اصلی این پایان نامه است

Xing Gao, Yanfeng Luo, *The spectrum of semi-Cayley graphs over abelian groups* Linear Algebra and its Applications 432 (2010) 2974–2983.

رده‌بندی موضوعی: 15A48 15A36 15A21 15A03

کلمات کلیدی: گراف کیلی، گراف نیمه کیلی، گراف صحیح، گروه خودریختی، طیف گراف، عمل منظم و نیمه منظم.