



دانشگاه پیام نور
دانشکده علوم پایه
استان چهارمحال بختیاری
مرکز شهرکرد

پایان نامه برای دریافت مدرک کارشناسی ارشد
رشته ریاضی محض (جبر)
گروه ریاضی

تحت عنوان : شعاع طیفی فاصله‌ای درخت‌ها با درجه ماکسیمم ثابت

پژوهشگر: اعظم جهانبخش

استاد راهنما: دکتر بیژن طائری

استاد مشاور: دکتر رسول سلیمانی

اسفند ۱۳۹۰

فهرست مطالب

فهرست مطالب		(الف)
۱	مفاهیم مقدماتی و پیش نیازها	۳
۱.۱	مفاهیم پایه‌ای از جبرخطی	۳
۲.۱	مفاهیم پایه‌ای گراف‌ها	۷
۳.۱	معرفی چند گراف پایه‌ای و ابتدایی	۱۰
۴.۱	ماتریس فاصله، شعاع طیفی فاصله‌ای، ماتریس وقوع	۱۳
۵.۱	قضایای مقدماتی و قضایای اساسی ماتریس‌های وابسته به گراف‌ها	۱۷
۲	شعاع طیفی فاصله‌ای درخت‌ها با درجه‌ی ماکسیمم ثابت	۲۶
۱.۲	مقدمه	۲۶
۲.۲	ستاره‌ی S_n شعاع طیفی فاصله‌ای مینیمم دارد.	۲۹
۳.۲	مسیر P_n شعاع طیفی فاصله‌ای ماکسیمم دارد.	۳۲
۴.۲	درخت‌هایی با درجه‌ی ماکسیمم ثابت	۴۳
۳	درایه‌ی مینیمال و ماکسیمال در بردار ویژه‌ی اصلی برای ماتریس فاصله‌ی یک گراف	۴۷
۱.۳	مقدمه	۴۸
۲.۳	کران‌هایی روی شعاع طیفی ماتریس فاصله‌ی یک گراف و نتایج مدل نرددهوس -	۴۸
	گادوم	۵۰
۳.۳	کران بالا روی درایه‌ی مینیمال در بردار ویژه‌ی اصلی ماتریس فاصله‌ی یک گراف	۵۴
۴.۳	کران‌های بالا و پایین روی درایه‌ی ماکسیمال در بردار ویژه‌ی اصلی ماتریس فاصله‌ی	۵۴
	یک گراف	۶۴

۷۱	طیف فاصله‌ی مسیر P_n و اولین بردار ویژه‌ی فاصله‌ی گراف‌های همبند	۴
۷۱ مقدمه	۱.۴
۷۲ طیف فاصله‌ی مسیر P_n	۲.۴
۸۰ ماکسیمم و مینیمم مقادیر $\rho(G)$ بین گراف‌های همبند از مرتبه‌ی یکسان	۳.۴
۸۴ اولین بردار ویژه‌ی فاصله	۴.۴
۸۸	واژه‌نامه‌ی فارسی به انگلیسی	
۹۳	واژه‌نامه‌ی انگلیسی به فارسی	
۹۷	نمایه	
۹۹	فهرست نمادها	
۱۰۱	منابع	

چکیده

فرض کنیم $G = (V, E)$ یک گراف همبند ساده با $n = |V|$ راس باشد. به ازای رئوس $u, v \in V$ فاصله d_{uv} به صورت کوتاه‌ترین مسیر بین دو راس u و v در G تعریف می‌شود. ماتریس فاصله $D = (d_{uv})_{u,v \in V}$ یک ماتریس حقیقی متقارن، با مقادیر ویژه حقیقی است. شعاع طیفی فاصله $\rho(G)$ از G بزرگ‌ترین مقدار ویژه ماتریس فاصله D از یک گراف G است. در این پایان‌نامه تبدیل‌هایی بر روی یک گراف را بررسی می‌کنیم که با انجام آن بر روی گراف شعاع طیفی فاصله D افزایش می‌یابد. تحقیق می‌کنیم که مسیر P_n دارای شعاع طیفی فاصله D ماکسیمال بین درخت‌های n راسی است. علاوه بر این، بین درخت‌ها با درجه Δ ماکسیمم ثابت، یک درخت منحصر به فرد وجود دارد که دارای شعاع طیفی فاصله D ماکسیمال است. همچنین، یک کران بالایی را روی درایه D مینیمال در بردار ویژه اصلی برای ماتریس فاصله D گراف‌ها به دست می‌آوریم و گراف‌های اکستریمال را مشخص می‌کنیم. علاوه بر این، کران‌های بالا و پایینی را روی درایه D ماکسیمال در بردار ویژه اصلی برای ماتریس فاصله D یک گراف ارائه می‌دهیم و گراف‌های اکستریمال را مشخص می‌کنیم. همچنین، طیف فاصله D مسیر P_n و اولین بردار ویژه D فاصله D گراف‌های همبند را به دست می‌آوریم. مقالات زیر از منابع اصلی این پایان‌نامه هستند.

- Das. K. C, (2011). **Maximal and minimal entry in the principal eigenvector for the distance matrix of a graph.** Discrete Appl. Math 311: 2593-2600.
- Stevanovic. D and Ilic. A, (2010). **On the distance spectral radius of trees with fixed maximum degree.** Linear Algebra Issn, 1081-3810: 168-179.
- Subhi. R and Powers. D, (1990). **The distance spectrum of the path P_n and the first distance eigenvector of connected graphs.** Linear Multilinear Algebra, 28: 75-81.

پیش‌گفتار

ماتریس مجاورت یک گراف و طیف متعارف آن (مقادیر ویژه‌ی گراف) و انرژی گراف (مجموع قدرمطلق مقادیر ویژه‌ی ماتریس مجاورت) به عنوان یک ابزار طبیعی به مطالعه‌ی گراف‌ها و ساختار آن‌ها کمک و افری می‌کند. ماتریس فاصله و ماتریس‌های وابسته به آن، بر پایه‌ی مفهوم فاصله در گراف‌ها، بیان شده‌اند. بنابراین منابع بسیار غنی از پایاهای گراف‌ها (اندیس‌های توپولوژیک) هستند که دارای کاربردهای زیادی در خواص مدل‌های مولکولی هستند. علاوه بر این‌ها، مطالعه‌ی طیف و چندجمله‌ای‌هایی از این ماتریس‌ها مورد علاقه‌ی محققین است. به نظر می‌رسد که ایده‌ی ماتریس فاصله، طیف فاصله گراف (مقادیر ویژه‌ی ماتریس فاصله) و انرژی فاصله‌ای آن (مجموع قدرمطلق مقادیر ویژه‌ی ماتریس فاصله) در تعمیم مبحث ماتریس مجاورت کمک قابل توجهی به مطالعه‌ی گراف‌ها کند. در واقع بسیاری از خواصی که در مورد ماتریس مجاورت برقرار است را می‌توانیم برای ماتریس فاصله نیز به دست آوریم. ماتریس فاصله‌ی یک گراف و ویژگی‌های آن، کاربرد وسیعی در شیمی و دیگر شاخه‌های علوم دارد. هم‌چنین کاربردهای زیادی در محاسبه‌ی اندیس‌های توپولوژیکی مانند اندیس وینر و اندیس زاگراب دارد. به طور کلی می‌توان گفت ماتریس فاصله شامل اطلاعات بیشتری از ساختار ماتریس مجاورت است. بالابان^۱ و دیگران در مقاله‌ی [۱۷] پیشنهاد کردند که از $\rho(G)$ (بزرگ‌ترین مقدار ویژه‌ی ماتریس فاصله) به عنوان یک توصیف‌گر مولکولی استفاده شود. او موفق شد از $\rho(G)$ برای ساختن مدل نقاط جوشش و شاخه‌ای آلکان‌ها استفاده کند. در برخی از مقالات، بعضی کران‌های بالا و پایین روی شعاع طیفی ماتریس فاصله از یک گراف ارائه شده است. هم‌چنین در برخی مقالات، چندجمله‌ای‌های فاصله (چندجمله‌ای‌های مشخصه‌ی ماتریس‌های فاصله) برای چندین گراف محاسبه شده‌اند. تعداد زیادی از مقالات درباره‌ی شعاع طیفی ماتریس فاصله وجود دارند. شعاع طیفی فاصله‌ی درخت‌ها با درجه‌ی ماکسیمم ثابت، در مقاله‌ی [۲۸] در سال ۲۰۱۰ توسط استوانویچ^۲ و الیچ^۳ بررسی شده است. در این پایان‌نامه تبدیلاتی بر

^۱Balaban

^۲Stevanovic

^۳Ilic

روی گراف‌ها بررسی شده که با انجام آن بر روی گراف، شعاع طیفی فاصله‌ای افزایش می‌یابد. با مطالعه‌ی ماتریس فاصله و چندجمله‌ای مشخصه‌ی آن مشاهده می‌کنیم که محاسبه‌ی مقادیر ویژه‌ی ماتریس فاصله بسیار پیچیده‌تر از محاسبه‌ی مقادیر ویژه‌ی ماتریس مجاورت یک گراف است. در سال‌های ۲۰۰۵، ۲۰۰۷ و ۲۰۱۱ نیز کارهایی در زمینه‌ی انرژی فاصله‌ای گراف‌ها و کران‌های بالا و پایین روی درایه‌ی ماکسیمال و مینیمال در بردار ویژه‌ی اصلی ماتریس فاصله‌ی یک گراف توسط ژنو^۴، تری نجستیک^۵، یان^۶، داس^۷ در [۳۳] و [۳۲]، [۳۱]، [۱۰] انجام شده است.

در این پایان‌نامه سعی کرده‌ایم به مبحث ماتریس فاصله و شعاع طیفی فاصله‌ای انواع گراف‌های ساده پردازیم. کران‌های بالا و پایینی را روی درایه‌ی ماکسیمال و مینیمال در بردار ویژه‌ی اصلی ماتریس فاصله‌ی یک گراف ارائه دهیم و گراف‌های اکستریمال را مشخص کنیم.

در فصل اول برخی تعاریف اولیه در زمینه‌ی گراف‌ها، ماتریس مجاورت و ماتریس فاصله‌ی گراف‌ها را بیان می‌کنیم. هم‌چنین به برخی قضایای مقدماتی در مورد طیف متعارف و طیف فاصله‌ی گراف‌ها اشاره می‌کنیم. در فصل دوم پایان‌نامه که در آن اصول کار را عنوان کرده‌ایم، به بررسی شعاع طیفی فاصله‌ای درخت‌ها با درجه‌ی ماکسیمم ثابت می‌پردازیم. در فصل سوم کران‌های بالا و پایینی را روی درایه‌ی ماکسیمال و مینیمال در بردار ویژه‌ی اصلی ماتریس فاصله‌ی یک گراف به دست می‌آوریم و گراف‌های اکستریمال را مشخص می‌کنیم. در فصل چهارم طیف فاصله‌ی مسیر P_n و اولین بردار ویژه‌ی فاصله‌ی گراف‌های همبند را بررسی می‌کنیم.

^۴Zhou^۵Trinajstik^۶Yan^۷Das