



طیف فاصله و انرژی فاصله‌ی گراف‌ها

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض (جبر)

ستاره اکبری

استاد راهنما

دکتر بیژن طائری

۱۳۸۹

فهرست مطالب

۱	پیشگفتار
۳	فصل اول مقدمه
۳	۱-۱ مفاهیم و تعاریف اولیه
۵	۲-۱ معرفی چند گراف پایه‌ای ابتدایی
۸	۳-۱ مفاهیم پایه‌ای از جبر خطی
۱۵	فصل دوم برخی قضایا و نتایج مقدماتی
۱۵	۱-۲ طیف متعارف، طیف فاصله و ماتریس تحویل‌ناپذیر
۲۱	۲-۲ قضایای مقدماتی گراف‌ها و قضایای اساسی ماتریس‌های وابسته به گراف‌ها
۳۷	فصل سوم طیف فاصله‌ی برخی گراف‌ها
۳۷	۱-۳ الحاق دو گراف
۴۲	۲-۳ گراف مضاعف
۴۴	۳-۳ تاج گراف G با K_1
۴۷	۴-۳ حاصل ضرب دکارتی دو گراف
۵۴	۵-۳ گراف همینگ
۵۶	۶-۳ گراف C_4 نانوچنبره، T_{k,m,C_4}
۵۷	۷-۳ حاصل ضرب لغت نامه‌ای دو گراف

۶۲	گراف پوشش مضاعف توسعه یافته	۳-۸
۶۶	گراف‌های دوبخشی فاصله‌ای هم‌انرژی	۳-۹
۶۸	فصل چهارم ویژه‌گی‌هایی از طیف فاصله و انرژی فاصله‌ای گراف‌ها	
۶۸	کران‌هایی برای شعاع طیفی فاصله‌ای گراف	۴-۱
۷۱	کران‌هایی برای انرژی فاصله‌ای گراف	۴-۲
۷۷	ضمیمه (برنامه‌های کامپیوتری)	
۸۶	مراجع	
۸۹	واژه‌نامه‌ی فارسی به انگلیسی	
۹۲	واژه‌نامه‌ی انگلیسی به فارسی	
۹۵	فهرست نمادها	
۹۷	فهرست راهنما	

چکیده

یکی از ماتریس‌های مهم که می‌توان به گراف‌ها نظیر کرد، ماتریس فاصله‌ی یک گراف است. فرض کنیم G یک گراف با مجموعه رأس‌های $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ باشد. در این صورت در ماتریس فاصله‌ی این گراف که با $D(G)$ نشان می‌دهیم، درایه‌ی (i, j) طول کوتاه‌ترین فاصله‌ی رأس‌های i و j از یکدیگر است. طیف ماتریس فاصله‌ی گراف G برابر با مجموعه‌ی همه‌ی مقادیر ویژه، بادر نظر گرفتن تکرار، است که آن را با $\text{spec}_D(G)$ نشان می‌دهیم. مجموع قدرمطلق مقادیر ویژه‌ی ماتریس فاصله گراف را انرژی فاصله‌ای گراف گوئیم. دو گراف را هم‌انرژی فاصله‌ای گوئیم، هرگاه هر دو گراف دارای یک انرژی فاصله‌ای باشند و دو گراف G و H را هم‌طیف گوئیم، هرگاه $\text{spec}_D(G) = \text{spec}_D(H)$.

در این پایان نامه، طیف فاصله‌ای برخی گراف‌های منظم و همبند را بررسی کرده و انرژی فاصله‌ای آن‌ها، گراف‌های هم‌انرژی فاصله‌ای و گراف‌های هم‌طیف و غیرهم‌طیف را مطالعه می‌کنیم. سعی می‌کنیم برخی روابط مهم که در مورد ماتریس‌های مجاورت برقرار هستند و مفاهیم مشابه را برای ماتریس‌های فاصله بررسی کنیم.

پیشگفتار

ماتریس مجاورت یک گراف و مقادیر ویژه آن (طیف متعارف گراف) و انرژی گراف (مجموع قدرمطلق مقادیر ویژه ماتریس مجاورت) به عنوان یک ابزار طبیعی که به مطالعه‌ی گراف‌ها و ساختار آنها کمک وافری می‌کند، ایجاد شد. امروزه طیف متعارف گراف در مطالعه‌ی تئوری کوانتوم و شیمی کاربردهای موثری دارد. ایده‌ی ماتریس فاصله، طیف فاصله (مقادیر ویژه‌ی ماتریس فاصله) و انرژی فاصله‌ای گراف (مجموع قدرمطلق مقادیر ویژه‌ی ماتریس فاصله) به نظر می‌رسد در تعمیم مبحث ماتریس مجاورت کمک قابل توجهی به علوم کند. در واقع بسیاری از خواصی که در مورد ماتریس مجاورت برقرار است را می‌توانیم برای ماتریس فاصله نیز بدست آوریم. ماتریس فاصله‌ی یک گراف و ویژه‌گی‌های آن، کاربردهای وسیعی در شیمی و دیگر شاخه‌های علوم دارد، همچنین کاربردهای زیادی در محاسبه‌ی اندیس‌های توپولوژیکی مانند اندیس وینر، و نیز در محاسبه‌ی خواص ترمودینامیک مانند فشار و درجه‌ی حرارت و دما دارد. به طور کلی می‌توان گفت ماتریس فاصله شامل اطلاعات بیشتری از ساختار یک ماتریس مجاورت ساده است. همچنین ماتریس‌های فاصله و خواص مربوط به آن، کاربردهایی در علم شیمی، تئوری موسیقی، پرنده شناسی، زیست شناسی مولکولی، روان شناسی، باستان شناسی و غیره دارد.

ماتریس فاصله و طیف آن، در مقاله‌ی [6] در سال ۱۹۷۱ توسط گراهام^۱ و پولاک^۲ بررسی شد. در این مقاله بیشتر به مبحث مقادیر ویژه‌ی منفی ماتریس فاصله‌ی گراف پرداخته شده است. با مطالعه‌ی ماتریس فاصله و چند جمله‌ای مشخصه‌ی آن مشاهده می‌کنیم که محاسبه‌ی مقادیر ویژه‌ی ماتریس فاصله

^۱ Graham

^۲ Pollak

بسیار پیچیده‌تر از محاسبه‌ی مقادیر ویژه‌ی ماتریس مجاورت یک گراف است و نمی‌توانیم به راحتی قاعده‌ای را برای طیف فاصله و انرژی فاصله‌ای گراف‌های گوناگون ارائه کنیم.

مبحث چندجمله‌ای مشخصه‌ی ماتریس فاصله و طیف مربوط به آن در سال‌های ۱۹۷۲ در [۷] توسط گراهام و پولاک، در سال ۱۹۷۶ توسط ادلبرگ^۳ و گری^۴ و گراهام در [۳] و در ۱۹۷۸ در مقاله‌ی [۵] توسط گراهام و لواژ^۵ بررسی گردید. در سال‌های اخیر نیز کارهایی در زمینه‌ی طیف فاصله و انرژی فاصله‌ای انواع مختلف گراف‌ها در سال‌های ۲۰۰۷، ۲۰۰۸ و ۲۰۰۹ توسط ایندلال^۶ گوتمن^۷ استوانویچ^۸، وی‌جی کومار^۹، رامن^{۱۰} و روانکار^{۱۱} در [۱۲]، [۱۳]، [۱۴]، [۱۵]، [۱۸] و [۱۹]، انجام شده است که ایندلال در اکثر مقاله‌های سال‌های اخیر سهیم بوده است.

در این پایان نامه سعی کرده‌ایم به مبحث ماتریس فاصله و انرژی فاصله‌ای انواع گراف‌های ساده و همچنین مبحث گراف‌های هم‌طیف و غیر هم‌طیف، هم‌انرژی و غیر هم‌انرژی بپردازیم، و همچنین خاصیت‌هایی برای طیف فاصله و انرژی فاصله‌ای گراف‌ها بیان می‌کنیم.

در فصل اول برخی تعاریف اولیه در زمینه گراف‌ها، ماتریس مجاورت و بیشتر ماتریس فاصله‌ی گراف‌ها را بیان می‌کنیم. در فصل دوم به برخی از قضایای مقدماتی در مورد طیف متعارف و طیف فاصله‌ی گراف‌ها اشاره کرده و در فصل سوم پایان نامه که در آن اصول کار را عنوان کرده‌ایم، به بررسی طیف فاصله و انرژی فاصله‌ای گراف‌های مختلف و ترکیباتی از آنها می‌پردازیم. در فصل چهارم خاصیت‌هایی برای طیف فاصله و انرژی فاصله‌ای گراف‌ها را عنوان کرده و در پایان برنامه‌ی کامپیوتری برای محاسبه‌ی آسان طیف فاصله و انرژی فاصله‌ای گراف را به همراه چند مثال بیان می‌کنیم.

^۳ Edlberg

^۴ Garey

^۵ Lovasz

^۶ Indulal

^۷ Gutman

^۸ Stevanovic

^۹ Vijaykumar

^{۱۰} Ramane

^{۱۱} Revankar