ترجمهٔ تعدادی از مسائل فصل ٦

۱- یک سیستم شامل دو جامد اینشتین را در نظر بگیرید. اولین جامد فقط یک نوسانگر دارد در حالی که جامد دوم شامل 100 نوسانگر است. تعداد کلّ واحدهای انرژی 500 است. با استفاده از کامپیوتر جدولی برای تابع فراوانی سیستم برای تمام حالاتی که انرژی جامد اول بین صفر و 20 باشد، تهیه کنید. سپس نمودار انرژی نسبت به تابع فراوانی جامد اول را کشیده و بحث کنید که آیا انتظار چنین شکلی را داشتید یا نه. همچنین نمودار لگاریتم تابع فراوانی کل را نیز بکشید و روی شکل آن بحث کنید.

۲- ثابت کنید که احتمال یافتن یک اتم در یک حالت انرژی خاص برابر است با $P(E)=\frac{1}{Z}e^{-F/kT}$ که در آن F=U-TS و آنتروپی هر حالت انرژی k برابر لگاریتم تبهگنی آن حالت است.

۵- ذره‌ای را تصور کنید که می‌تواند فقط در سه حالت با انرژی‌های 0.05 eV+، 0 eV، 0.05 eV- باشد. این ذره با یک منبع گرمایی در دمای 300K در تعادل است.

الف) تابع پارش را برای این ذره حساب کنید.

ب) احتمالِ بودن ذره در هر حالت را حساب کنید.

پ) چون مبدأ انرژی دلخواه است می‌توانستیم بگوییم که انرژی حالت‌های ذره برابر 0.10 eV+، 0.05 eV، 0 eV هستند. دوباره بخش‌های (الف) و (ب) را برای این انرژی‌ها حل کنید و توضیح دهید کدام کمیّت‌ها تغییر کرده و کدام تغییر نمی‌کنند.

۹- در محاسبهٔ عددی متن درس، فقط نسبت احتمال‌های رخ‌دادن دو حالت مختلف اتم هیدروژن را محاسبه شد. در دماهای پایین احتمال مطلق رخ‌دادن حالت بر انگیختهٔ اول عملاً برابر به نسبت احتمال رخ‌دادن این حالت به حالت پایه است. البته چون اتم هیدروژن دارای بیشمار حالت بر انگیخته است، اثبات این موضوع کمی سخت می‌باشد.

الف) تابع پارش اتم هیدروژن را در دمای 5800K با جمع کردن تمام حالاتی که در شکل ٦.٢ نشان داده شده‌اند، تخمین بزنید. (برای راحتی انرژی حالت پایه را صفر بگیرید و انرژی‌های دیگر را بر این اساس تغییر دهید.)

ب) نشان دهید که اگر تمام حالات بر انگیخته در نظر گرفته شوند، تابع پارش در هر دمای غیر صفر بینهایت می‌شود.

پ) وقتی که اتم هیدروژن در حالت انرژی n ام است، شعاع تابع موج الکترون حدوداً $a_0 n^2$ است (شعاع بوهر برابر است با $a_0=5\times10^{-11}$cm). با برگشت به معادله ٦.٣ نشان دهید که عبارت PdV برای n های بزرگ قابل صرف نظر کردن نیست و بنابراین نتیجه قسمت (الف) و نه قسمت (ب) تابع پارش فیزیکی را به ما می‌دهد. در این مورد بحث کنید.

۱۰- یک مولکول آب می‌تواند در حالت‌های مختلفی نوسان کند، ولی ساده‌ترین آنها این است که اتم‌های هیدروژن نسبت به هم دور و نزدیک شوند، ولی طول پیوند HO ثابت بماند. این نوسانات تقریباً نوسانات هماهنگ ساده با فرکانس $f=4.8\times10^{13}$ Hz هستند و مانند هر نوسانگر کوانتمی دارای حالت‌های انرژی $1/2\ hf$، $3/2\ hf$ ، $5/2\ hf$ و به همین ترتیب هستند. هیچ کدام از این حالت‌ها تبهگن نیستند.

الف) احتمال اینکه مولکول آب در حالت پایه و در دو حالت بر انگیختهٔ اول باشد، را با فرض تعادل گرمایی با منبع دمای 300K حساب کنید.

ب) محاسبات را برای دمای 700K تکرار کنید.

۱۱- هستهٔ لیتیوم می‌تواند چهار اسپین مختلف داشته باشد که با اعداد کوانتمی $m=-3/2, -1/2, 1/2, 3/2$ نمایش داده می‌شوند. در میدان مغناطیسی B انرژی این چهار حالت برابر $E=m\mu B$ است که ثابت μ برابر 1.03×10^{-7} eV/T است. در آزمایش پورسل-پوند که در بخش ۳.۳ توضیح داده شد، حداکثر قدرت میدان مغناطیسی 0.63T و دما 300K بوده است. احتمال وجود هسته را در هر یک از این حالات اسپینی حساب کنید. سپس نشان دهید که اگر میدان به طور ناگهانی معکوس شود، احتمال رخ‌دادن این چهار حالت از توزیع بولتزمان در دمای 300K- تبعیت می‌کند.

۱۳- در دماهای بسیار بالا (مثلا در آغاز ایجاد جهان)، می‌توان پروتون و نوترون را حالت‌های مختلف یک ذره به نام نوکلئون دانست. (واکنش‌هایی که پروتون را به نوترون یا بر عکس تبدیل می‌کنند به جذب یک الکترون یا پوزیترون یا نوترینو احتیاج دارند که این ذرات در دماهای بالا فراوانند.) با توجه به اینکه جرم نوترون از جرم پروتون به اندازهٔ 2.3×10^{-30}kg بیشتر است، انرژی آن نیز به همین مقدار ضرب در c^2 بیشتر است. حال فرض کنید که در جهان ابتدایی، نوکلئون‌ها در تعادل گرمایی با بقیهٔ جهان در دمای 10^{11} K بوده‌اند. چه کسری از نوکلئون‌ها پروتون و چه کسری نوترون بوده‌اند؟

۱٤- با استفاده از فاکتور بولتزمان، رابطهٔ نمایی اتمسفر هم‌دما را که در مساله‌های ۱.۱٦ و ۳.۳۷ نیز به دست آمده، حساب کنید. (راهنمایی: فرض کنید که سیستم، یک تک مولکول هوا است و s_1 حالت مولکول در سطح دریا و s_2 حالت مولکول در ارتفاع z است.)