ترجمه تعدادی از مسائل فصل سوم کتاب مکانیک آماری شرودر

سیدجواد هاشمی فر

۱- با استفاده از جدول **3.1** ، دمای جامد **A** و جامد **B** را وقتی $q_A = 1$ است، محاسبه کنید. سپس دمای این دو جامد را در حالت $q_A = 60$ محاسبه کنید. ابتدا جواب‌های خود را برحسب ε/k بیان کنید و سپس با فرض $\varepsilon = 0.1$ eV جواب ها را در واحد کلوین بیان کنید.

۳- شکل **3.3** نمودار انرژی بر حسب آنتروپی دو جسم **A** و **B** را نشان می‌دهد. نمودارها در مقیاس یکسانی رسم شده‌اند. انرژی اولیه دو جسم در شکل معین شده است. اگر این دو جسم در تماس گرمایی با یکدیگر قرار بگیرند، بدون استفاده از واژه دما، توضیح دهید که چه اتفاقی رخ می‌دهد.

۵- با شروع از نتیجه مساله ۱۷ فصل دوم، رابطه‌ای برای دمای یک جامد هماهنگ در حد $q \ll N$ بدست آورید. سپس این رابطه را برحسب انرژی حل کنید تا معادله زیر را بدست آورید:

$$U = N\varepsilon e^{-\varepsilon/kT}$$

ε اندازه یک واحد انرژی است.

۷- با استفاده از نتیجه مساله ۴۲ فصل دوم، دمای یک سیاه‌چاله را برحسب جرم آن M محاسبه کنید (انرژی برابر Mc^2 است). مقدار عددی دما را برای یک سیاه‌چاله به جرم یک جرم خورشیدی (2×10^{30} kg) بدست آورید. همچنین نمودار آنتروپی برحسب انرژی را بکشید و شکل نمودار را تحلیل کنید.

۸- با شروع از نتیجه مساله ۵ فصل سوم، ظرفیت گرمایی یک جامد هماهنگ را در حد دماهای پایین بدست آورید و نمودار آن را برحسب دما بکشید. (نکته آموزشی: نتیجه بدست آمده با نتایج آزمایشگاهی مطابقت ندارد. برای تولید نتایج آزمایشگاهی، محاسبات دقیق‌تری نیاز است که در فصل هفتم ارائه خواهد شد).

۱۱- برای تولید آب گرم مناسب برای استحمام، ۵۰ لیتر آب داغ در دمای $55\ ^{o}C$ را با ۲۵ لیتر آب سرد در دمای $10\ ^{o}C$ مخلوط می‌کنیم. در اثر این مخلوط سازی چقدر آنتروپی جدید تولید می‌شود؟

۱۴- اندازه‌گیری‌های آزمایشگاهی نشان می‌دهد که ظرفیت گرمایی آلومینیم در دماهای پایین توسط رابطه زیر توصیف می‌شود:

$$C_V = aT + bT^3$$

در این رابطه C_V ظرفیت گرمایی یک مول آلومینیم است و ضرایب ثابت a و b تقریبا a=0.00135 J/K^2 و b=2.48×10^{-5} J/K^4 است. با استفاده از این اطلاعات، رابطه‌ای برای آنتروپی یک مول آلومینیم برحسب دما بدست

آورید. مقدار عددی آنتروپی را در دماهای ۱ و ۱۰ کلوین تعیین کنید. (نکته آموزشی: در فصل هفتم، خواهیم دید که چرا ظرفیت گرمایی فلزات در دماهای پایین به این شکل است.)

۱۶- یک بیت از حافظه رایانه، یک شیء فیزیکی است که می‌تواند دو حالت مختلف داشته باشد، که اغلب صفر و یک نامیده می‌شود. یک بایت از ۸ بیت تشکیل شده، یک کیلوبایت معادل ۱۰۲۴ (=2^{10}) بایت، یک مگابایت معادل ۱۰۲۴ کیلوبایت و یک گیگابایت معادل ۱۰۲۴ مگابایت است.

الف) فرآیند پاک شدن یک گیگابایت از یک حافظه رایانه را در نظر بگیرید، به گونه‌ای که هیچ اطلاعاتی در آن باقی نمی‌ماند. توضیح دهید که که حداقل مقدار آنتروپی تولید شده در این فرآیند چقدر می‌تواند باشد؟

ب) اگر این آنتروپی در محیط مستهلک شود (در دمای اتاق)، چقدر گرما به محیط خواهد داد؟ ایا این مقدار گرما چشم‌گیر است؟

۱۸- با استفاده از یک رایانه، جدول **3.2** و نمودار متناظر در مورد آنتروپی، دما، ظرفیت گرمایی، و ممان مغناطیسی را بازتولید کنید.

۲۰- یک پارامغناطیس دوحالتی ایده‌آل در نظر بگیرید که ذرات آن الکترون با ممان مغناطیسی $\mu_B = 9.3\times10^{-24}\ \mathrm{J/T}$ (مغناطیدگی بوهر) هستند (نظیر **DPPH** که یک ماده پارامغناطیس واقعی است). در یک شرایط آزمایشگاهی با شدت میدان مغناطیسی $2.06\mathrm{T}$ و دمای $2.2\mathrm{K}$ ، انرژی، ممان مغناطیسی و آنتروپی سیستم را به صورت کسری از مقادیر بیشینه‌شان محاسبه کنید. شرایط آزمایشگاهی چگونه باید تنظیم شود، تا ممان مغناطیسی سیستم به 99% بیشترین مقدار خود می‌رسید؟

۲۲ - نمودار تغییرات آنتروپی یک پارامغناطیس دو حالتی را برحسب دما رسم کنید (استفاده از رایانه بلامانع است). توضیح دهید که در صورت تغییر میدان مغناطیسی، این نمودار چگونه تغییر خواهد کرد.

۲۳ - نشان دهید که آنتروپی یک پارامغناطیس دو حالتی برحسب دما به صورت زیر بیان می‌شود:

$$S = Nk\left[\ln(2\cosh x) - x\tanh x\right] \quad , \quad x = \frac{\mu B}{kT}$$

صحت رفتار این رابطه را در حدود $\mathrm{T}\to 0$ و $\mathrm{T}\to\infty$ بررسی کنید.

۲۴ - به روشی که در ادامه توضیح داده می‌شود آنتروپی، دما و ظرفیت گرمایی یک جامد هماهنگ (انشتین) را با استفاده از رایانه بررسی کنید. فرض کنید که جامد شامل ۵۰ نوسان‌گر و صفر تا ۱۰۰ بسته‌ی انرژی است. مشابه جدول **3.2** جدولی تشکیل دهید که هر ردیف آن مربوط به یک مقدار متفاوت انرژی (در بازه‌ی صفر تا ۱۰۰) است. از ستون‌های متفاوتی برای نمایش انرژی، تابع فراوانی، آنتروپی، دما و ظرفیت گرمایی استفاده کنید. برای تعیین دمای هر ردیف جدول، رابطه‌ی

$\Delta U/\Delta S$ را برای دو ردیف مجاور جدول، محاسبه کنید. (یادآوری می‌کنیم که $U=q\varepsilon$ که ε یک مقدار ثابت است). ظرفیت گرمایی $(\Delta U/\Delta T)$ نیز به روش مشابهی قابل محاسبه است. چند ردیف اول جدول باید مشابه زیر باشد:

q	Ω	S / k	kT / ε	C / Nk
0	1	0	0	---
1	50	3.91	0.28	0.12
2	1275	7.15	0.33	0.45

در این جدول، مشتقات با تقریب مشتق مرکزی محاسبه شده‌اند. به عنوان مثال دمای 0.28 در سطر دوم، از داده‌های سطر اول و سوم به صورت $(2-0)/(7.15-0)$ بدست آمده است. با استفاده از اطلاعات جدول، نمودار آنتروپی بر حسب انرژی و نمودار ظرفیت گرمایی بر حسب دما را رسم کنید. در مرحله‌ی دوم، تعداد نوسان‌گرها را به ۵۰۰۰ افزایش دهید (به منظور بررسی حد دماهای پایین) و مجددا نمودار ظرفیت گرمایی برحسب دما را محاسبه و رسم کنید. نتایج خود در مورد ظرفیت گرمایی را شرح دهید و آن‌ها را با نتایج اندازه‌گیری شده در مورد سرب، آلومینیوم و الماس (ارایه شده در شکل **1.14**) مقایسه کنید. با استفاده از این مقایسه، مقدار عددی ε را برای هر یک از این جامدات واقعی تخمین بزنید.

۲۵ - در مساله ۱۸ فصل دوم نشان دادید که تابع فراوانی یک جامد هماهنگ شامل N نوسانگر و q بسته‌ی انرژی به طور تقریبی برابر است با:

$$\Omega(N,q) \approx \left(\frac{q+N}{q}\right)^q \left(\frac{q+N}{N}\right)^N$$

الف) با استفاده از این رابطه، عبارتی برای آنتروپی جامد هماهنگ برحسب N و q بیابید. شرح دهید که چرا در حد N و q های بزرگ، ضرایب چشم‌پوشی شده در رابطه‌ی فوق (نسبت به رابطه‌ی به دست آمده در مساله ۱۸ فصل دوم) تاثیری در آنتروپی ندارند.

ب) با استفاده از نتیجه الف، دمای جامد هماهنگ را برحسب انرژی ($U=q\varepsilon$ که ε یک ثابت است.) بدست آورید و نتیجه را تا حد ممکن ساده‌سازی کنید.

ج) رابطه بدست آمده را وارون کنید تا انرژی برحسب دما بدست آید و سپس با مشتق‌گیری، ظرفیت گرمایی را بدست آورید.

د) نشان دهید که در حد $T \to \infty$ ظرفیت گرمایی $C=Nk$ خواهد بود. آیا این نتیجه منطقی است؟ کمی توضیح دهید.

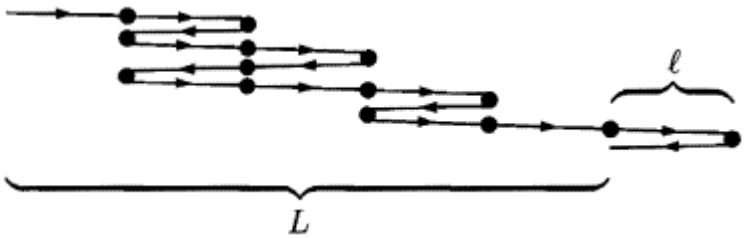
۲۸- یک لیتر هوا، که ابتدا در دمای اتاق و فشار جو قرار دارد، در فشار ثابت گرم می‌شود تا حجمش دو برابر شود. افزایش آنتروپی این سامانه را طی این فرآیند محاسبه کنید.

۳۳- با استفاده از معادله مشخصه ترمودینامیک، رابطه‌ای برای ظرفیت گرمایی به صورت زیر بدست آورید:

$$C_V = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V$$

این رابطه در برخی موارد، از رابطه‌ای که در آن ظرفیت گرمایی برحسب انرژی U توصیف می‌شود، مناسب‌تر است. سپس رابطه‌ی مشابهی برای C_P بدست آورید. بدین منظور ابتدا dH را برحسب dS و dP بنویسید.

۳۴- پلیمرها، نظیر لاستیک، از مولکول‌های خیلی بلند و غالبا درهم‌پیچیده‌ای تشکیل شده‌اند که منجر به پیکربندی‌های با آنتروپی زیاد شده است. به عنوان یک مدل بسیار ساده از یک نوار لاستیکی، زنجیره‌ای از N پیوند هر یک به طول l در نظر بگیرید (مطابق شکل **3.17**). تصور کنید که هر پیوند، فقط دو حالت ممکن دارد، جهت‌گیری به سمت چپ یا راست. طول کل نوار لاستیکی L معادل برآیند همه پیوندها از ابتدا تا انتهای نوار خواهد بود:



شکل 3.17، مدل‌سازی ساده‌ی یک نوار لاستیکی به عنوان یک زنجیره از پیوندهایی که هریک فقط می‌توانند به سمت راست یا چپ جهت‌گیری کنند.

الف) رابطه‌ای برای آنتروپی این سامانه بر حسب N و N_R (تعداد پیوندهای به سمت راست)، بیابید.

ب) رابطه‌ای برای L برحسب N و N_R بنویسید.

ج) طول یک سامانه یک‌بعدی نظیر این نوار، معادل حجم در یک سامانه سه بعدی است. به طور مشابهی معادل فشار در یک سامانه یک بعدی، نیروی کششی F است. با فرض این که جهت مثبت F متناظر با کشش نوار به سمت داخل است (تراکم نوار)، یک معادله مشخصه ترمودینامیکی مناسب برای این سامانه بنویسید و آن را توضیح دهید.

د) با استفاده از معادله مشخصه ترمودینامیکی، می‌توانید نیروی کششی F را برحسب مشتقات جزئی آنتروپی بیان کنید. بدین روش، نیروی کششی را برحسب L، T، N و l محاسبه کنید.

ه) نشان دهید که وقتی $Nl >> L$ نیروی کششی تناسب مستقیم با L دارد (قانون هوک).

و) وابستگی نیروی کششی به دما را توضیح دهید. اگر دمای یک نوار لاستیکی را افزایش دهیم، تمایل به منبسط شدن دارد یا منقبض شدن؟ ایا رفتار مشاهده شده، بامَعنی است.

۳۶- یک جامد هماهنگ که در آن هر دو کمیت N و q خیلی بزرگ تر از یک هستند، در نظر بگیرید. هر نوسانگر را به عنوان یک ذره در نظر بگیرید.

الف) نشان دهید که پتاسیل شیمیایی از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\mu = -kT \ln\left(\frac{N+q}{N}\right)$$

ب) نتیجه بدست آمده را در حدهای $N \gg q$ و $q \gg N$ تحلیل کنید، با تمرکز براین سوال که وقتی یک ذره بدون انرژی به سامانه افزاده می‌شود، آنتروپی سامانه چقدر افزایش پیدا می‌کند. ایا رابطه بالا با شهود فیزیکی سازگار است؟

۳۷- یک گاز ایده‌آل تک‌اتمی در نظر بگیرید که در ارتفاع z بالای سطح دریا قرار دارد، بنابراین هر اتم علاوه بر انرژی جنبشی، یک انرژی پتانسیل mgz نیز دارد.

الف) نشان دهید که پتانسیل شیمیایی این سامانه مشابه گاز در سطح دریاست که یک جمله mgz به آن افزوده شده است:

$$\mu = -kT \ln\left[\frac{V}{N}\left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{3/2}\right] + mgz$$

(این نتیجه را می‌توان از هر یک از روابط $\mu = -T(\partial S/\partial N)_{U,V}$ و $\mu = (\partial U/\partial N)_{S,V}$ یا بدست آورد)

ب) تصور کنید که دو مخزن گاز هلیم، یکی در سطح دریا و دیگری در ارتفاع **z** داریم، که حجم و دمای یکسانی دارند. با فرض تعادلی پخشی بین این دو مخزن، نشان دهید که تعداد اتم‌ها در مخزن بالایی از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$N(z) = N(0)e^{-mgz/kT}$$

این نتیجه، با نتیجه بدست آمده در مساله ۱۶ فصل اول سازگار است.

۳۹- در مساله ۳۲ فصل دوم، شما آنتروپی یک گاز ایده‌آل تک‌اتمی را در یک جهان دوبعدی محاسبه کردید. با مشتق‌گیری جزئی نسبت به U ، A و N ، دما، فشار و پتانسیل شیمیایی این گاز را محاسبه کنید. (در دوبعد، فشار به صورت نیرو در واحد طول تعریف می‌شود). نتایج بدست آمده را تا حد امکان ساده سازی کنید و توضیح دهید که آیا این نتایج منطقی هستند.