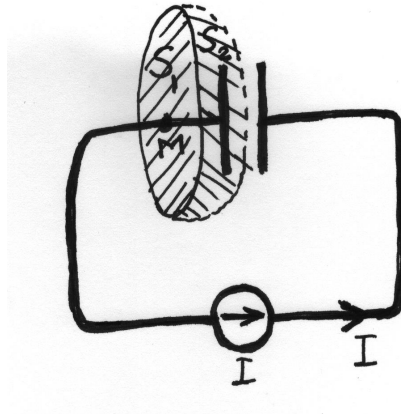


۱- در شکل زیر هر دو سطح S_1 و S_2 به مرز یکسانی که با مسیر بسته C مشخص شده محدود هستند. سطح S_1 سیم حامل جریان را در نقطه M قطع می‌کند و سطح S_2 بدون اینکه سیم را قطع کند از وسط صفحات خازن عبور می‌کند. خازن مورد استفاده یک خازن ایده‌ال با صفحات موازی بسیار نزدیک به هم با فاصله d و سطح A است و فضای بین صفحات هواسـت. انتگرال سطحی قانون آمپر ($\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$) روی این دو سطح را بر حسب جریان I و پارامترهای دیگر مسئله محاسبه کرده و نشان دهید که هر دو انتگرال مقدار یکسانی برای

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$$

بدست می‌دهند.



۲- از معادلات ماکسول برای خلاء و حذف میدان مغناطیسی معادله موج را برای میدان الکتریکی بدست آورید. با مقایسه معادله موج $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$ (که در آن v سرعت فاز موج است) و معادله بدست آمده برای میدان الکتریکی سرعت فاز موج الکترومغناطیس در خلاء را بدست آورید.

۳- خازنی با صفحات دایره‌ای با شعاع R و فاصله صفحات d در نظر بگیرید و فرض کنید $d \ll R$ طوری که میدان بین صفحات تقریباً یکنواخت است. جریان ثابت I به این خازن وارد می‌شود. بردار میدان مغناطیسی و الکتریکی در فضای بین صفحات خازن را بر حسب فاصله از محور خازن بدست آورید. بردار پوئین تینگ روی استوانه مرزی خازن را بدست آورید. انتگرال بردار پوئین تینگ روی این سطح مرزی را بدست آورده و تعبیر فیزیکی آن را بیان کنید.

۴- مولفه‌های میدان الکتریکی یک موج تخت در فضا بصورت زیر است:

$$E_x = E_y = \frac{\sqrt{2}}{2} E_0 \sin(\omega t - k_0 x + k_0 y - \frac{\pi}{3})$$

$$E_z = E_0 \cos(\omega t - k_0 x + k_0 y - \frac{\pi}{3})$$

اندازه بردار میدان الکتریکی را در یک نقطه دلخواه بر حسب مختصات و زمان بدست آورید. این میدان را بصورت یک میدان موهومی بیان کنید (که بخش حقیقی آن مولفه‌هایی بصورت بالا داشته باشد). راستای انتشار، بردار عدد موج و نوع قطبش (پلاریزاسیون) این موج را بدست آورید. بردار موهومی و سپس مولفه‌های بردار میدان مغناطیسی را بصورت تابعی از مکان و زمان بدست آورید. ($\hat{\mathbf{B}} = \frac{n}{c} \mathbf{u} \times \hat{\mathbf{E}}$)

موفق باشید

Maxwell's equations (using D and H)

Differential form:	Integral form:
$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{\text{free}} \quad (7.58)$	$\oint_{\text{closed surface}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\text{volume}} \rho_{\text{free}} d\tau \quad (7.59)$
$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (7.60)$	$\oint_{\text{closed surface}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (7.61)$
$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (7.62)$	$\oint_{\text{loop}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (7.63)$
$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_{\text{free}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (7.64)$	$\oint_{\text{loop}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_{\text{free}} + \int_{\text{surface}} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} \quad (7.65)$
\mathbf{D} displacement field ρ_{free} free charge density (in the sense of $\rho = \rho_{\text{induced}} + \rho_{\text{free}}$) \mathbf{B} magnetic flux density \mathbf{H} magnetic field strength \mathbf{J}_{free} free current density (in the sense of $\mathbf{J} = \mathbf{J}_{\text{induced}} + \mathbf{J}_{\text{free}}$)	\mathbf{E} electric field $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ $d\mathbf{s}$ surface element $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu$ $d\tau$ volume element $d\mathbf{l}$ line element Φ linked magnetic flux ($= \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$) I_{free} linked free current ($= \int \mathbf{J}_{\text{free}} \cdot d\mathbf{s}$) t time

Gradient

Rectangular coordinates	$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}$	(2.25)	f scalar field $\hat{}$ unit vector
Cylindrical coordinates	$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}$	(2.26)	ρ distance from the z axis
Spherical polar coordinates	$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi}$	(2.27)	
General orthogonal coordinates	$\nabla f = \frac{\hat{q}_1}{h_1} \frac{\partial f}{\partial q_1} + \frac{\hat{q}_2}{h_2} \frac{\partial f}{\partial q_2} + \frac{\hat{q}_3}{h_3} \frac{\partial f}{\partial q_3}$	(2.28)	q_i basis h_i metric elements

Divergence

Rectangular coordinates	$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	(2.29)	\mathbf{A} vector field A_i i th component of \mathbf{A}
Cylindrical coordinates	$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	(2.30)	ρ distance from the z axis
Spherical polar coordinates	$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(A_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$	(2.31)	
General orthogonal coordinates	$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (A_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (A_2 h_3 h_1) + \frac{\partial}{\partial q_3} (A_3 h_1 h_2) \right]$	(2.32)	q_i basis h_i metric elements

Curl

Rectangular coordinates	$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$	(2.33)	$\hat{}$ unit vector \mathbf{A} vector field A_i i th component of \mathbf{A}
Cylindrical coordinates	$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \hat{\rho}/\rho & \hat{\phi} & \hat{z}/\rho \\ \partial/\partial \rho & \partial/\partial \phi & \partial/\partial z \\ A_\rho & \rho A_\phi & A_z \end{vmatrix}$	(2.34)	ρ distance from the z axis
Spherical polar coordinates	$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \hat{r}/(r^2 \sin \theta) & \hat{\theta}/(r \sin \theta) & \hat{\phi}/r \\ \partial/\partial r & \partial/\partial \theta & \partial/\partial \phi \\ A_r & r A_\theta & r A_\phi \sin \theta \end{vmatrix}$	(2.35)	
General orthogonal coordinates	$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} \hat{q}_1 h_1 & \hat{q}_2 h_2 & \hat{q}_3 h_3 \\ \partial/\partial q_1 & \partial/\partial q_2 & \partial/\partial q_3 \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix}$	(2.36)	q_i basis h_i metric elements

Radial forms^a

$\nabla r = \frac{\mathbf{r}}{r}$	(2.37)	$\nabla(1/r) = \frac{-\mathbf{r}}{r^3}$	(2.41)
$\nabla \cdot \mathbf{r} = 3$	(2.38)	$\nabla \cdot (\mathbf{r}/r^2) = \frac{1}{r^2}$	(2.42)
$\nabla r^2 = 2\mathbf{r}$	(2.39)	$\nabla(1/r^2) = \frac{-2\mathbf{r}}{r^4}$	(2.43)
$\nabla \cdot (r\mathbf{r}) = 4r$	(2.40)	$\nabla \cdot (\mathbf{r}/r^3) = 4\pi\delta(\mathbf{r})$	(2.44)

^aNote that the curl of any purely radial function is zero. $\delta(\mathbf{r})$ is the Dirac delta function.

Laplacian (scalar)

Rectangular coordinates	$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (2.45)$	f scalar field
Cylindrical coordinates	$\nabla^2 f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (2.46)$	
Spherical polar coordinates	$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} \quad (2.47)$	ρ distance from the z axis
General orthogonal coordinates	$\nabla^2 f = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial f}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial f}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial f}{\partial q_3} \right) \right] \quad (2.48)$	

Differential operator identities

$\nabla(fg) \equiv f\nabla g + g\nabla f$	(2.49)	f, g scalar fields A, B vector fields
$\nabla \cdot (fA) \equiv f\nabla \cdot A + A \cdot \nabla f$	(2.50)	
$\nabla \times (fA) \equiv f\nabla \times A + (\nabla f) \times A$	(2.51)	
$\nabla(A \cdot B) \equiv A \times (\nabla \times B) + (A \cdot \nabla)B + B \times (\nabla \times A) + (B \cdot \nabla)A$	(2.52)	
$\nabla \cdot (A \times B) \equiv B \cdot (\nabla \times A) - A \cdot (\nabla \times B)$	(2.53)	
$\nabla \times (A \times B) \equiv A(\nabla \cdot B) - B(\nabla \cdot A) + (B \cdot \nabla)A - (A \cdot \nabla)B$	(2.54)	
$\nabla \cdot (\nabla f) \equiv \nabla^2 f \equiv \Delta f$	(2.55)	
$\nabla \times (\nabla f) \equiv \mathbf{0}$	(2.56)	
$\nabla \cdot (\nabla \times A) \equiv 0$	(2.57)	
$\nabla \times (\nabla \times A) \equiv \nabla(\nabla \cdot A) - \nabla^2 A$	(2.58)	

Vector integral transformations

Gauss's (Divergence) theorem	$\int_V (\nabla \cdot A) dV = \oint_{S_c} A \cdot ds \quad (2.59)$	A vector field dV volume element S_c closed surface V volume enclosed
Stokes's theorem	$\int_S (\nabla \times A) \cdot ds = \oint_L A \cdot dl \quad (2.60)$	S surface ds surface element L loop bounding S dl line element
Green's first theorem	$\oint_S (f\nabla g) \cdot ds = \int_V \nabla \cdot (f\nabla g) dV \quad (2.61)$ $= \int_V [f\nabla^2 g + (\nabla f) \cdot (\nabla g)] dV \quad (2.62)$	f, g scalar fields
Green's second theorem	$\oint_S [f(\nabla g) - g(\nabla f)] \cdot ds = \int_V (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f) dV \quad (2.63)$	