بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده فیزیک

آزمون نهایی درس الکترومغناطیس II

دوشنبه ۱۳۹۷/۳/۲۱

۱ـ موجی در هوا به طور عمود بر سطح رسانایی فرود می‌آید و از آن باز می‌تابد. الف) از $\hat{r}_{12s} = |\hat{r}_{12s}| e^{i\alpha_s}$ نشان دهید که انتقال فاز بردار E برابر است با

$$\alpha_s = \tan^{-1} \frac{2k}{n^2 + k^2 - 1}$$

۲ـ روابط بین ثابتهای اپتیکی و بخشهای حقیقی و موهومی ثابت دی‌الکتریک یعنی روابط زیر را بدست آورید. برای دو وضعیت الف) $|K_r| \gg |K_i|$ و $K_r > 0$ و ب) $|K_r| \gg |K_i|$ و $K_r < 0$ ، این روابط را به شکل خیلی ساده بیان کنید.

$$n = \sqrt{\frac{1}{2}\Big[K_r + \sqrt{K_r^2 + K_i^2}\Big]}$$

$$k = \sqrt{\frac{1}{2}\Big[-K_r + \sqrt{K_r^2 + K_i^2}\Big]}$$

۳ـ می‌دانیم که چگالی جریان و بردار قطبش بصورت $\mathbf{J} = \dfrac{d\mathbf{P}}{dt}$ با یکدیگر رابطه دارند. برای یک موج تکفام مشتق زمانی را می‌توان با $-i\omega$ جایگزین کرد. همچنین روابط زیر بین بردار جابجایی، بردار قطبش و بردار میدان الکتریکی وجود دارند.

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad , \quad \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad , \quad \epsilon = K\epsilon_0$$

از این روابط استفاده کرده و روابط بین بخشهای حقیقی و موهومی ثابت دی‌الکتریک ($\hat{K} = K_r + iK_i$) و بخشهای حقیقی و موهومی رسانندگی g را بدست آورید.

۴ـ مولفه‌های میدان الکتریکی یک موج تخت در فضا بصورت زیر است:

$$E_x = -E_y = \frac{\sqrt{2}}{2} E_0 \cos\Big(\frac{\sqrt{3}}{3} k_0 (x + y + z) - \omega t\Big)$$

$$E_z = 0$$

میدان مغناطیسی مربوط به این میدان را در خلاء به صورت تابعی از مکان و زمان بدست آورید. فرض کنید این موج در خلاء در فضای زیر صفحه xy $(z < 0)$ در حال انتشار است و محیط بالای صفحه xy $(z > 0)$ از یک ماده دی‌الکتریک با ثابت دی‌الکتریک n پر شده. موج الکترومغناطیس فوق بصورت مایل به فصل مشترک این دو محیط فرود می‌آید. راستاهای s و p را مشخص کرده و قطبش موج تخت فوق را مشخص کنید. همچنین مطلوبست میدان الکتریکی منعکس شده و منتقل شده به محیط دی‌الکتریک بصورت تابعی از مکان و زمان.

۵ـ (اختیاری) مولفه‌های میدان الکتریکی یک موج تخت در فضا بصورت زیر است:

$$E_x = E_y = \frac{\sqrt{2}}{2} E_0 \exp(-k_0 x) \sin(k_0 x - k_0 y - \omega t - \frac{\pi}{3})$$

$$E_z = E_0 \exp(-k_0 x) \cos(k_0 x - k_0 y - \omega t - \frac{\pi}{3})$$

با توجه به ضریب نمایی، این محیط رسانندگی محدودی دارد. الف) بردار عدد موج مختلط ($\hat{\kappa}$) این موج تخت را بدست آورید. ب) ضریب شکست مختلط (ثابتهای اپتیکی) این محیط را بدست آورید.($\hat{\kappa} \cdot \hat{\kappa} = \hat{n}^2 \omega^2 / c^2$) پ) مطلوبست محاسبه میدان مغناطیسی مرتبط با این میدان الکتریکی بصورت تابعی از مکان و زمان.

$$\hat{\mathbf{B}} = \frac{n}{c} \mathbf{u} \times \hat{\mathbf{E}} \quad , \quad \kappa = n \frac{\omega}{c}$$

$$r_{12s} = \frac{n_1 \cos\theta_1 - n_2 \cos\theta_2}{n_1 \cos\theta_1 + n_2 \cos\theta_2} \quad , \quad t_{12s} = \frac{2 n_1 \cos\theta_1}{n_1 \cos\theta_1 + n_2 \cos\theta_2}$$

$$r_{12p} = \frac{n_2 \cos\theta_1 - n_1 \cos\theta_2}{n_2 \cos\theta_1 + n_1 \cos\theta_2} \quad , \quad t_{12p} = \frac{2 n_1 \cos\theta_1}{n_2 \cos\theta_1 + n_1 \cos\theta_2}$$

$$r_{12s} = \frac{\sin(\theta_2 - \theta_1)}{\sin(\theta_2 + \theta_1)} \quad , \quad t_{12s} = \frac{2 \cos\theta_1 \sin\theta_2}{\sin(\theta_2 + \theta_1)}$$

$$r_{12p} = \frac{\tan(\theta_1 - \theta_2)}{\tan(\theta_1 + \theta_2)} \quad , \quad t_{12p} = \frac{2 \cos\theta_1 \sin\theta_2}{\sin(\theta_1 + \theta_2)\cos(\theta_1 - \theta_2)}$$

موفق باشید

Maxwell's equations (using *D* and *H*)

Differential form:		Integral form:	
$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_{\text{free}}$	(7.58)	$\oint_{\text{closed surface}} \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_{\text{volume}} \rho_{\text{free}}\, \mathrm{d}\tau$	(7.59)
$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$	(7.60)	$\oint_{\text{closed surface}} \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = 0$	(7.61)
$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$	(7.62)	$\oint_{\text{loop}} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$	(7.63)
$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}_{\text{free}} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$	(7.64)	$\oint_{\text{loop}} \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = I_{\text{free}} + \int_{\text{surface}} \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$	(7.65)

$\boldsymbol{D}$	displacement field	$\boldsymbol{E}$	electric field
ρ_{free}	free charge density (in the sense of $\rho = \rho_{\text{induced}} + \rho_{\text{free}}$)	$\mathrm{d}\boldsymbol{s}$	surface element
		$\mathrm{d}\tau$	volume element
$\boldsymbol{B}$	magnetic flux density	$\mathrm{d}\boldsymbol{l}$	line element
$\boldsymbol{H}$	magnetic field strength	Φ	linked magnetic flux ($=\int \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$)
$\boldsymbol{J}_{\text{free}}$	free current density (in the sense of $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}_{\text{induced}} + \boldsymbol{J}_{\text{free}}$)	I_{free}	linked free current ($=\int \boldsymbol{J}_{\text{free}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$)
		t	time

$D = \varepsilon E$

$H = B/\mu$

Gradient

Rectangular coordinates	$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\boldsymbol{y}} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\boldsymbol{z}}$ (2.25)	f scalar field $\hat{}$ unit vector
Cylindrical coordinates	$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\hat{\boldsymbol{\rho}} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\boldsymbol{z}}$ (2.26)	ρ distance from the z axis
Spherical polar coordinates	$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{\boldsymbol{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}$ (2.27)	
General orthogonal coordinates	$\nabla f = \frac{\hat{\boldsymbol{q}}_1}{h_1}\frac{\partial f}{\partial q_1} + \frac{\hat{\boldsymbol{q}}_2}{h_2}\frac{\partial f}{\partial q_2} + \frac{\hat{\boldsymbol{q}}_3}{h_3}\frac{\partial f}{\partial q_3}$ (2.28)	q_i basis h_i metric elements

Divergence

Rectangular coordinates	$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$ (2.29)	$\boldsymbol{A}$ vector field A_i ith component of $\boldsymbol{A}$
Cylindrical coordinates	$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$ (2.30)	ρ distance from the z axis
Spherical polar coordinates	$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(A_\theta\sin\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}$ (2.31)	
General orthogonal coordinates	$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(A_1h_2h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2}(A_2h_3h_1) + \frac{\partial}{\partial q_3}(A_3h_1h_2)\right]$ (2.32)	q_i basis h_i metric elements

Curl

Rectangular coordinates	$\nabla\times\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{z}} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$ (2.33)	$\hat{}$ unit vector $\boldsymbol{A}$ vector field A_i ith component of $\boldsymbol{A}$
Cylindrical coordinates	$\nabla\times\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{\rho}}/\rho & \hat{\boldsymbol{\phi}} & \hat{\boldsymbol{z}}/\rho \\ \partial/\partial \rho & \partial/\partial \phi & \partial/\partial z \\ A_\rho & \rho A_\phi & A_z \end{vmatrix}$ (2.34)	ρ distance from the z axis
Spherical polar coordinates	$\nabla\times\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{r}}/(r^2\sin\theta) & \hat{\boldsymbol{\theta}}/(r\sin\theta) & \hat{\boldsymbol{\phi}}/r \\ \partial/\partial r & \partial/\partial \theta & \partial/\partial \phi \\ A_r & rA_\theta & rA_\phi\sin\theta \end{vmatrix}$ (2.35)	
General orthogonal coordinates	$\nabla\times\boldsymbol{A} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{q}}_1h_1 & \hat{\boldsymbol{q}}_2h_2 & \hat{\boldsymbol{q}}_3h_3 \\ \partial/\partial q_1 & \partial/\partial q_2 & \partial/\partial q_3 \\ h_1A_1 & h_2A_2 & h_3A_3 \end{vmatrix}$ (2.36)	q_i basis h_i metric elements

Radial forms[a]

$\nabla r = \frac{\boldsymbol{r}}{r}$	(2.37)	$\nabla(1/r) = \frac{-\boldsymbol{r}}{r^3}$	(2.41)
$\nabla\cdot\boldsymbol{r} = 3$	(2.38)	$\nabla\cdot(\boldsymbol{r}/r^2) = \frac{1}{r^2}$	(2.42)
$\nabla r^2 = 2\boldsymbol{r}$	(2.39)	$\nabla(1/r^2) = \frac{-2\boldsymbol{r}}{r^4}$	(2.43)
$\nabla\cdot(r\boldsymbol{r}) = 4r$	(2.40)	$\nabla\cdot(\boldsymbol{r}/r^3) = 4\pi\delta(\boldsymbol{r})$	(2.44)

[a]Note that the curl of any purely radial function is zero. $\delta(\boldsymbol{r})$ is the Dirac delta function.

Laplacian (scalar)

Rectangular coordinates	$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (2.45)$$	f scalar field
Cylindrical coordinates	$$\nabla^2 f = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (2.46)$$	ρ distance from the z axis
Spherical polar coordinates	$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} \quad (2.47)$$	
General orthogonal coordinates	$$\nabla^2 f = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial f}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_3 h_1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial f}{\partial q_3}\right)\right] \quad (2.48)$$	q_i basis h_i metric elements

Differential operator identities

$\nabla(fg) \equiv f\nabla g + g\nabla f$	(2.49)	
$\nabla\cdot(f\boldsymbol{A}) \equiv f\nabla\cdot\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}\cdot\nabla f$	(2.50)	
$\nabla\times(f\boldsymbol{A}) \equiv f\nabla\times\boldsymbol{A} + (\nabla f)\times\boldsymbol{A}$	(2.51)	
$\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) \equiv \boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B}) + (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) + (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}$	(2.52)	
$\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) \equiv \boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})$	(2.53)	f,g scalar fields
$\nabla\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) \equiv \boldsymbol{A}(\nabla\cdot\boldsymbol{B}) - \boldsymbol{B}(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) + (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} - (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}$	(2.54)	$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ vector fields
$\nabla\cdot(\nabla f) \equiv \nabla^2 f \equiv \triangle f$	(2.55)	
$\nabla\times(\nabla f) \equiv \boldsymbol{0}$	(2.56)	
$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A}) \equiv 0$	(2.57)	
$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) \equiv \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) - \nabla^2\boldsymbol{A}$	(2.58)	

Vector integral transformations

Gauss's (Divergence) theorem	$$\int_V (\nabla\cdot\boldsymbol{A})\,\mathrm{d}V = \oint_{S_\mathrm{c}} \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}$$	(2.59)	$\boldsymbol{A}$ vector field $\mathrm{d}V$ volume element S_c closed surface V volume enclosed
Stokes's theorem	$$\int_S (\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \oint_L \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$$	(2.60)	S surface $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ surface element L loop bounding S $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ line element
Green's first theorem	$$\oint_S (f\nabla g)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_V \nabla\cdot(f\nabla g)\,\mathrm{d}V$$	(2.61)	f,g scalar fields
	$$= \int_V [f\nabla^2 g + (\nabla f)\cdot(\nabla g)]\,\mathrm{d}V$$	(2.62)	
Green's second theorem	$$\oint_S [f(\nabla g) - g(\nabla f)]\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_V (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f)\,\mathrm{d}V$$	(2.63)	