فصل ۲

استاتیک سیالات

همانند علم مکانیک جامدات، علم مکانیک سیالات نیز شامل دو بخش اساسی استاتیک و دینامیک سیال است. استاتیک سیال[1]، علمی است که در آن به بررسی سیالات در حال سکون پرداخته می‌شود. سیالات در حال سکون طیف وسیعی از مسایل مانند مخازن ذخیره‌ی آب و مخازن سدها را دربر دارد. برای طراحی بدنه‌ی سدها و مخازن، برآورد نیروی وارد از طرف سیال بر بدنه، اجتناب‌ناپذیر است. عامل ایجاد نیرو در سیالات در حال سکون، فشار است که برابر با نیروی عمودی وارده از طرف سیال در واحد سطح می‌باشد.

از آنجایی که نیروهای مؤثر در استاتیک سیالات شامل نیروی وزن و نیروی فشار است، مطالب این فصل اختصاص به تشریح مفهوم فشار دارد. در ابتدای این فصل به بررسی فشار در یک نقطه، تغییرات فشار در عمق، فشار نسبی و فشار مطلق پرداخته می‌شود. در ادامه‌ی فصل به معرفی وسایل اندازه‌گیری فشار و نیروی وارد از طرف سیال بر سطوح مستغرق با حالت‌های مستوی و منحنی پرداخته می‌شود. در انتهای فصل نیز به مفهوم شناوری و مباحث پایداری اجسام شناور پرداخته می‌شود.

با توجه به اینکه در سرتاسر این فصل از مبحث تعادل نیرو در اجسام در حالت سکون استفاده می‌شود، به خوانندگان توصیه می‌شود مباحث مرتبط با تعادل نیروها در درس استاتیک را مرور کنند.

۱- Fluid statics

۲-۱ فشار

فشار[1] نیروی عمودی اعمال شده از طرف سیال در واحد سطح است. مفهوم فشار در سیالات (مایعات و گازها) مطرح می‌باشد. در جامدات به‌جای فشار از مفهوم تنش نرمال[2] استفاده می‌شود. واحد فشار، نیوتن بر متر مربع (N/m^2) یا پاسکال (Pa) است. واحدهای دیگری از فشار مانند بار[3] و آتمسفر استاندارد[4] نیز وجود دارد که هر ۱ بار معادل 10^5 پاسکال و هر ۱ آتمسفر استاندارد معادل ۱۰۱/۳۳ کیلوپاسکال است.

با توجه به اینکه فشار از تقسیم نیرو بر سطح به‌دست می‌آید، با یک نیروی معین، هرچه سطح اثر نیرو کاهش یابد، فشار افزایش می‌یابد. به‌همین دلیل است که چنانچه فردی کل وزن بدن خود را روی یکی از پاهایش قرار دهد، فشار وارد بر پا دو برابر می‌شود. همچنین، دلیل این که برای بریدن اجسام توسط چاقویی با لبه‌ی تیز به نیروی کمی نیاز است، آن است که سطح مقطع تماس چاقوی تیز با اجسام، بسیار کوچک است و به‌همین دلیل فشار وارد بر سطح افزایش می‌یابد.

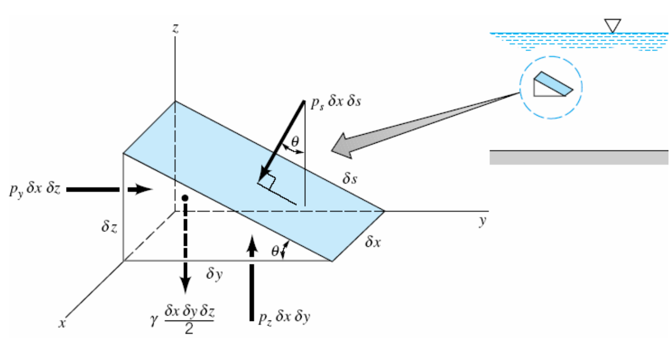
۲-۱-۱ فشار در یک نقطه

مفهوم فشار در سیال به‌صورت نیروی عمود بر واحد سطح در یک نقطه‌ی مشخص و بر روی صفحه‌ای مشخص از جرم سیال مورد مطالعه است. سؤالی که در اینجا مطرح است آن است که چگونه فشار در یک نقطه با تغییر راستای صفحه‌ای که از آن نقطه می‌گذرد، تغییر می‌کند و به‌عبارت دیگر، آیا فشار در یک نقطه در راستاهای مختلف با همدیگر برابر است یا خیر؟

به‌منظور پاسخ‌گویی به این سؤال، المانی گوه‌ای شکل از سیال را مطابق شکل (۲-۱) درنظر بگیرید. با درنظرگرفتن این شکل از المان می‌توان فشار را در سه راستای افقی، قایم و مایل بررسی کرد. چون در سیالات در حال سکون، تنش برشی وجود ندارد، تنها نیروهای وارد بر این المان از سیال، نیروی وزن سیال در راستای قایم و نیروهای ناشی از فشار در سطوح المان است، شکل (۲-۱).

$$\Sigma F_y = p_y \overbrace{\delta x\,\delta z}^{A} - p_s \overbrace{\delta x\,\delta s\,\sin\theta}^{A} = \overbrace{\rho\frac{\delta x\,\delta y\,\delta z}{2}}^{m} a_y \qquad (۲-۱)$$

با به‌کارگیری قانون دوم نیوتن ($\sum F = ma$) در جهت‌های y و z، رابطه‌های زیر به‌دست می‌آید:



شکل ۲-۱ نیروهای اعمالی بر المانی گوه‌ای‌شکل از سیال [۲].

۱- Pressure ۲- Normal stress ۳- Bar ۴- Standard atmosphere

$$\Sigma F_z = p_z \overbrace{\delta x\,\delta y}^{A} - p_s \overbrace{\delta x\,\delta s \cos\theta}^{A} - \gamma \overbrace{\frac{\delta x\,\delta y\,\delta z}{2}}^{w} = \rho \overbrace{\frac{\delta x\,\delta y\,\delta z}{2}}^{m} a_z \qquad (۲-۲)$$

که در آن p_s، p_y و p_z فشار متوسط بر روی سطوح المان گوه‌ای شکل و a_y و a_z به‌ترتیب شتاب در راستای y و راستای z است. با جایگزینی $\delta z = \delta s\, sin\theta$ و $\delta y = \delta s\, cos\theta$ در رابطه‌های (۲-۱) و (۲-۲)، رابطه‌های زیر به‌دست می‌آیند:

$$p_y - p_s = \rho a_y \frac{\delta y}{2} \qquad (۳-۲)$$

$$p_z - p_s = (\rho a_z + \gamma)\frac{\delta z}{2} \qquad (۴-۲)$$

با توجه به اینکه هدف، محاسبه‌ی فشار در یک نقطه است، در شرایط حدی هنگامی‌که δz، δs و δy به‌سمت صفر میل می‌کنند، در نتیجه $p_s = p_z$ و $p_s = p_y$ و یا $p_z = p_y = p_s$ است. چون θ می‌تواند هر زاویه‌ی دلخواهی باشد، می‌توان نتیجه گرفت که فشار در یک نقطه‌ی سیال، چه در حال سکون و چه در حال حرکت تا زمانی‌که هیچ‌گونه تنش برشی در سیال وجود نداشته باشد، در همه‌ی جهت‌ها با هم برابر است. این نتیجه‌ی مهم به افتخار بلیس پاسکال[1] به‌نام قانون پاسکال نامیده شد [۲].

۲-۱-۲ تغییرات فشار در قلمروی سیال

همان‌طور که اشاره شد، مقدار فشار در یک نقطه از سیال در تمام جهات با هم برابر است. سؤال دیگری که می‌تواند مطرح شود آن است که تغییرات فشار از یک نقطه‌ی سیال به نقطه‌ی دیگر چگونه است؟

به‌منظور پاسخ‌گویی به این سؤال، المان مکعب‌شکل از سیال مطابق شکل (۲-۲) را در نظر بگیرید که در آن فقط دو دسته نیرو شامل نیروهای سطحی ناشی از فشار بر وجوه المان و نیروهای بدنه شامل وزن،

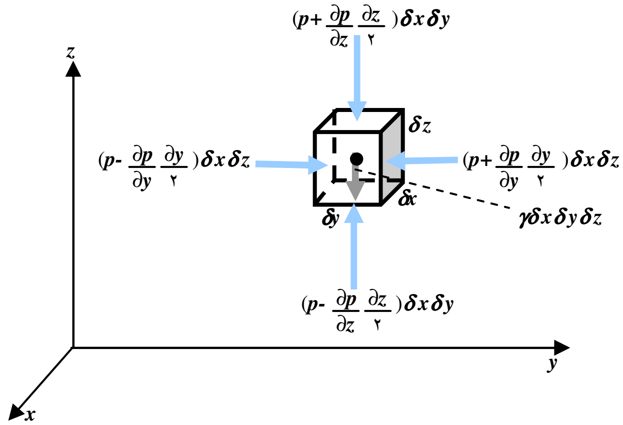
معرفی یک دانشمند

بلیس پاسکال (۱۶۶۲-۱۶۲۳)

این دانشمند در شهر کلرمونت در کشور فرانسه به‌دنیا آمد. هنگامی‌که او تنها سه سال داشت، مادر او از دنیا رفت و او همراه با خانواده‌اش به پاریس رفت. پدرش تا سن ۱۵ سالگی به او تعلیمات دینی می‌آموخت و به او اجازه‌ی یادگیری ریاضیات را نمی‌داد، لیکن کنجکاوی او در مورد هندسه و ریاضیات بسیار زیاد بود تا جایی که توانست کشف کند که مجموع زوایای داخلی مثلث ۱۸۰ درجه است. او یک ریاضی‌دان، فیزیک‌دان و فیلسوف بود. وی در ۱۹ سالگی، یک کامپیوتر محاسباتی برای کمک به پدرش که کارمند جمع‌آوری مالیات بود، اختراع کرد. وی همچنین اصول و مفاهیم زیادی در مکانیک سیالات را کشف کرد. واحد فشار نیز به افتخار ایشان پاسکال نامیده شد. وی در سن ۳۹ سالگی در اثر سرطان درگذشت.

---

[1]- Blaise Pascal



شکل ۲-۲ نیروهای اعمال شده بر سطح و بدنه‌ی المان سیال.

بر المان سیال اثر می‌کنند. چنانچه مقدار فشار در مرکز المان، p باشد، با استفاده از بسط سری تیلور، مقدار متوسط فشار در وجه‌های دیگر المان بر اساس p و مشتقات آن به‌دست می‌آید. از حاصل‌ضرب مقادیر فشار در هر وجه در مساحت آن وجه، نیروی اعمالی بر آن وجه به‌دست می‌آید. برای مثال، برایند نیروهای فشار وارده بر المان در جهت y، به‌صورت زیر محاسبه می‌شود [۲]:

$$\delta F_{p_y}=\left(p-\frac{\partial p}{\partial y}\frac{\delta y}{2}\right)\delta x\delta z-\left(p+\frac{\partial p}{\partial y}\frac{\delta y}{2}\right)\delta x\delta z=-\frac{\partial p}{\partial y}\delta x\delta y\delta z \qquad (۵-۲)$$

به‌طور مشابه، برایند نیروهای فشار در جهت‌های x و z نیز به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\delta F_{p_x}=-\frac{\partial p}{\partial x}\delta x\delta y\delta z \quad ; \quad \delta F_{p_z}=-\frac{\partial p}{\partial z}\delta x\delta y\delta z \qquad (۶-۲)$$

بنابراین برایند نیروهای فشار وارد بر المان به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\delta\vec{F}_p=\delta F_{p_x}\hat{i}+\delta F_{p_y}\hat{j}+\delta F_{p_z}\hat{k}=-\overbrace{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial p}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial p}{\partial z}\hat{k}\right)}^{\vec{\nabla}p}\delta x\delta y\delta z$$

$$\delta\vec{F}_p=-\vec{\nabla}p\forall \qquad (۷-۲)$$

که در آن $\hat{i}$، $\hat{j}$ و $\hat{k}$ به‌ترتیب بردارهای یکه در راستای محورهای x، y و z، نشانه‌ی $\vec{\nabla}$ عملگر گرادیان و $\forall$ حجم المان است.

نیروی وزن سیال نیز که در راستای محور z عمل می‌کند، به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\delta w\hat{k}=-(\gamma\forall)\hat{k} \qquad (۸-۲)$$

علامت منفی در رابطه‌ی (۲-۸) نشان می‌دهد که جهت نیروی وزن، خلاف جهت مثبت محور z است. با به‌کارگیری قانون دوم نیوتن و درنظرگرفتن رابطه‌های (۲-۷) و (۲-۸)، رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$\sum\delta\vec{F}=\delta m\,\vec{a} \quad ; \quad \delta\vec{F}_p-\delta w\hat{k}=(\rho\forall)\vec{a}$$

$$-\vec{\nabla}p\forall-\gamma\forall\hat{k}=\rho\forall\vec{a}$$

$$-\vec{\nabla} p - \gamma \hat{k} = \rho \vec{a} \qquad (۹-۲)$$

رابطه‌ی (۲-۹) برای حرکت سیال که در آن هیچ‌گونه تنش برشی وجود ندارد، نیز صادق است.

۲-۲ تغییرات فشار در سیال ساکن

طیف وسیعی از مسایل مانند مخازن ذخیره و سدها وجود دارند که سیال در آنها در حالت سکون است. در این‌گونه مسایل، با توجه به اینکه بردار شتاب برابر صفر است، رابطه‌ی کلی حرکت برای سیال [رابطه‌ی (۲-۹)] به‌صورت زیر ساده می‌شود:

$$\vec{\nabla} p + \gamma \hat{k} = 0 \qquad (۱۰-۲)$$

اگر عملگر گرادیان بر حسب اجزاء آن در رابطه‌ی (۲-۱۰) جایگزین شود، عبارات زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\gamma \qquad (۱۱-۲)$$

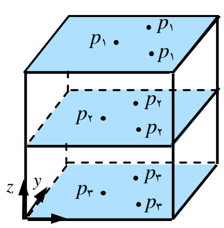
رابطه‌ی (۲-۱۱) نشان می‌دهد که تغییرات فشار در جهت‌های x و y برابر صفر است. چنانچه در صفحه‌ی افقی (موازی صفحه x-y) از نقطه‌ای به نقطه‌ی دیگر حرکت کنیم، مقدار فشار تغییر نمی‌کند. با توجه به عبارت $\partial p/\partial z = -\gamma$، تغییرات فشار در جهت محور z صفر نبوده و در نتیجه از یک صفحه‌ی افقی به صفحه‌ی دیگر مقدار آن تغییر می‌کند، شکل (۲-۳).

از آنجایی که مقدار فشار تنها تابع z است، لذا به‌جای استفاده از مشتق جزیی می‌توان از مشتق کامل به‌صورت رابطه‌ی زیر استفاده کرد:

$$\frac{dp}{dz} = -\gamma \qquad (۱۲-۲)$$

رابطه‌ی (۲-۱۲) رابطه‌ی اساسی سیالات ساکن برای تعیین چگونگی تغییرات فشار در عمق است. این رابطه نشان می‌دهد که گرادیان فشار در راستای عمودی منفی است، یعنی چنانچه در درون سیال به‌طرف بالا حرکت کنیم، فشار کاهش می‌یابد. رابطه‌ی (۲-۱۲) برای سیالات تراکم‌ناپذیر مانند مایعات و برای سیالات تراکم‌پذیر مانند گازها صادق است.

برای تعیین فرم صریح رابطه‌ی (۲-۱۲) بین دو نقطه از سیال لازم است، از دو طرف انتگرال‌گیری شود و لذا لازم است، مشخص شود که تغییرات وزن مخصوص سیال (γ) نسبت به عمق چگونه است؟ به‌همین دلیل در ادامه با تقسیم‌بندی سیال به دو دسته‌ی تراکم‌ناپذیر و تراکم‌پذیر، روابط تغییر فشار در عمق برای هر کدام به‌طور جداگانه آمده است.



شکل ۲-۳ تغییرات فشار در صفحات موازی صفحه‌ی x-y.

۲-۲-۱ تغییرات فشار در عمق برای سیالات تراکم‌ناپذیر

با توجه به اینکه وزن مخصوص سیال از حاصل‌ضرب چگالی در شتاب ثقل به‌دست می‌آید ($\gamma = \rho g$) و به‌دلیل اینکه در بیشتر مسایل مهندسی از تغییرات شتاب ثقل صرف‌نظر می‌شود، چنانچه بتوان از تغییرات چگالی سیال نسبت به عمق صرف‌نظر کرد، می‌توان وزن مخصوص سیال را در عمق، ثابت فرض کرد. در مایعات معمولاً از تغییرات چگالی نسبت به عمق (حتی برای فاصله‌های عمودی زیاد) می‌توان صرف‌نظر کرد و لذا مایعات، تراکم‌ناپذیر هستند. از دو طرف رابطه‌ی (۲-۱۲) به‌صورت زیر انتگرال‌گیری می‌شود:

$$\int_{p_1}^{p_2} dp = -\gamma \int_{z_1}^{z_2} dz \quad ; \quad p_2 - p_1 = -\gamma(z_2 - z_1) \qquad (۲\text{-}۱۳)$$

$$p_1 - p_2 = \gamma(z_2 - z_1) = \gamma h \quad ; \quad p_1 = \gamma h + p_2 \qquad (۲\text{-}۱۴)$$

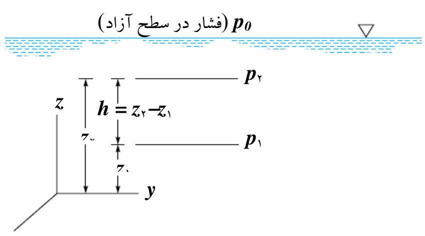
که در آن p_1 و p_2 به‌ترتیب مقدار فشار در دو صفحه (یا دو نقطه) با ارتفاع‌های z_1 و z_2 و h فاصله‌ی عمودی بین دو صفحه است، شکل (۲-۴). این‌گونه توزیع فشار، به‌نام توزیع هیدرواستاتیک[1] معروف است و بیانگر این نکته است که در سیالات تراکم‌ناپذیر ساکن، تغییرات فشار نسبت به عمق خطی است. به بیان ساده، فشار در هر نقطه از سیال برابر وزن ستون سیال بالای آن نقطه است، لذا هرچه نقطه در ارتفاع پایین‌تری از سیال باشد، وزن ستون سیال بالای آن بیشتر و در نتیجه مقدار فشار بیشتر است.

از رابطه‌ی (۲-۱۴) می‌توان اختلاف فشار بین دو نقطه از سیال را بر حسب ارتفاع h به‌صورت زیر محاسبه کرد:

$$h = \frac{p_1 - p_2}{\gamma} \qquad (۲\text{-}۱۵)$$

که در آن h هد فشار[2] است که معادل ارتفاعی از ستون سیال با وزن مخصوص مشخص است که فشاری معادل اختلاف فشار بین دو نقطه ($p_1 - p_2$) ایجاد کند. چنانچه اختلاف فشار بین دو نقطه از سیال بر وزن مخصوص سیال تقسیم شود، ارتفاع معادل ستون سیال به‌دست می‌آید. برای مثال، اختلاف فشار ۱۰۱/۳۵ کیلوپاسکال معادل ۱۰/۳۳ متر آب ($\gamma = ۹/۸۱\ kN/m^3$) و یا ۰/۷۶ متر جیوه ($\gamma = ۱۳۳\ kN/m^3$) است [۲].

هنگام کار با مایعات، معمولاً یک سطح آزاد مطابق شکل (۲-۴) وجود دارد که می‌توان برای راحتی از این سطح به‌عنوان سطح مبنا کمک گرفت. چنانچه فشار بر روی سطح آزاد به‌عنوان فشار مرجع، p_0 و سطح (یا نقطه‌ی) (۲) در شکل (۲-۴) بر روی سطح آزاد در نظر گرفته شود، می‌توان رابطه‌ی(۲-۱۴)



شکل ۲-۴ نمادهای به‌کار رفته برای تغییرات فشار در عمق سیال با سطح آزاد [۲].

۱- Hydrostatic pressure　　۲- Pressure head

را به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

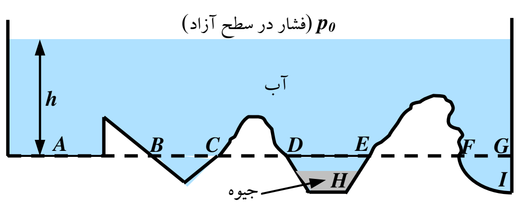
$$p = \gamma h + p_0 \tag{۱۶-۲}$$

که در آن p فشار در هر نقطه‌ی دلخواه به‌فاصله‌ی h از سطح آزاد سیال است. رابطه‌ی (۲-۱۶) نشان می‌دهد که فشار در سیال همگن تراکم‌ناپذیر تنها تابع عمق سیال نسبت به یک سطح مرجع است و به اندازه و شکل ظرف حاوی سیال بستگی ندارد، شکل (۲-۵). با توجه به اینکه نقاط A، B، C، D، E، F و G همگی نسبت به سطح آزاد آب در یک فاصله (h) قرار دارند، فشار در این نقاط با هم برابر است. نقاط H و I در یک تراز قرار دارند، اما باتوجه به اینکه سیال بالای نقطه‌ی H، تا قسمتی جیوه و سپس آب است، سیال همگن نبوده و فشار در نقطه‌ی H و I با هم متفاوت است. بنابراین، قرارگیری نقاط در تراز یکسان نمی‌تواند منجر به یکسان‌شدن فشار در آن نقاط گردد، بلکه بایستی علاوه بر تراز یکسان، نقاط، درون یک سیال قرار داشته باشند و خطی که نقاط را به‌هم متصل می‌کند، کاملاً درون یک سیال قرار گیرد.

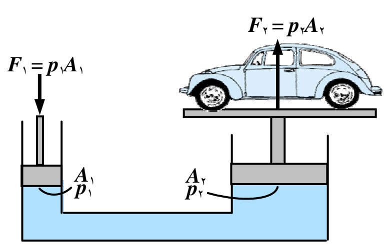
کاربرد عملی این نکته که در ترازهای یکسان درون سیال، فشارها یکسان هستند، در جک‌های هیدرولیکی، بالابرها و سیستم ترمز نمایان است. یعنی فشار اعمالی بر سیال محصور، به تمام قسمت‌های سیال انتقال می‌یابد. این یافته همان قانون پاسکال نامیده می‌شود. پاسکال همچنین دریافت که نیروی اعمالی از سیال با سطح تماس متناسب است. یعنی چنانچه دو استوانه، یکی با سطح مقطع بزرگ و دیگری کوچک را به همدیگر متصل کرده و درون آن از سیالی پر شود، با اعمال نیروی کوچکی بر سطح استوانه‌ی کوچک‌تر می‌توان نیروی بزرگ‌تری در سطح استوانه بزرگ‌تر ایجاد کرد و به‌همین دلیل، می‌توان مطابق شکل (۲-۶)، اجسام سنگینی مانند ماشین را به‌راحتی توسط یک نیروی کوچک بلند کرد.

مطابق شکل (۲-۶)، چون هر دو پیستون در یک ارتفاع قرار دارند، $p_۲ = p_۱$ است و نسبت نیروها از رابطه‌ی (۲-۱۷) به‌دست می‌آیند:

$$p_1 = p_2 \quad ; \quad \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \quad ; \quad \frac{F_2}{F_1} = \frac{A_2}{A_1} \tag{۱۷-۲}$$



شکل ۲-۵ تغییرات فشار در عمق [۳].

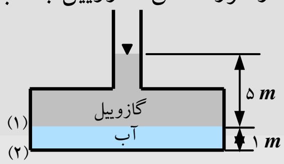


شکل ۲-۶ بلند کردن جسم سنگینی با اعمال نیروی کوچک با استفاده از به‌کارگیری قانون پاسکال [۳].

برای مثال، در جک‌های هیدرولیکی ماشین، چنانچه A_2/A_1=۱۰۰ باشد، می‌توان با اعمال تنها ۱۰۰ نیوتن (۱۰ کیلوگرم نیرو)، یک ماشین به وزن ۱۰۰۰۰ نیوتن (۱۰۰۰ کیلوگرم نیرو) را بلند کرد.

مثال ۲-۱: تغییر فشار در عمق (سیال تراکم ناپذیر).

به‌علت نشت در کف مخزن گازوییلی که درون زمین قرار دارد، آب تا عمق مشخص مطابق شکل به‌درون مخزن نفوذ کرده است. اگر چگالی نسبی گازوییل، ۰/۶۸ باشد، فشار در مرز تماس گازوییل با آب و همچنین فشار در کف مخزن چقدر است؟ فشار در سطح آزاد گازوییل $101/33\ kPa$ است.



پاسخ:

با توجه به اینکه مایعات مورد نظر ساکن هستند، توزیع فشار هیدرواستاتیک است و می‌توان از رابطه‌ی (۲-۱۶)، فشار در هر نقطه را تعیین کرد. چنانچه فشار در سطح آزاد گازوییل p_0 باشد، فشار در مرز تماس گازوییل با آب یعنی سطح (۱)، به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$p_1 = \gamma_{(gasoline)} h + p_0 = SG\,\gamma_{H_2O} h + p_0$$

$$= (0.68)\left(9806\,N/m^3\right)(5m) + 101330\left(N/m^2\right) = \underline{\underline{134670.4 \quad Pa}}$$

برای محاسبه‌ی فشار در کف مخزن از مقدار فشار در مقطع (۱) به‌صورت زیر استفاده می شود: مسایل ۲-۵ الی ۲-۹

$$p_2 = \gamma_{H_2O} h_{H_2O} + p_1 = \left(9806\,N/m^3\right)(1m) + 134670.4\,Pa = \underline{\underline{144476.4 \quad Pa}}$$

۲-۲-۲ تغییرات فشار در عمق برای سیالات تراکم‌پذیر

در سیالات تراکم‌پذیر مانند هوا، اکسیژن و نیتروژن، چگالی سیال با دما و فشار به‌طور مشخص تغییر می‌کند. بنابراین، بایستی قبل از انتگرال‌گیری از رابطه‌ی (۲-۱۲)، تغییرات وزن مخصوص نسبت به عمق، مشخص باشد. با توجه به مطالبی که در فصل اول به آن اشاره شد، وزن مخصوص گازها نسبت به مایعات بسیار کوچک‌تر است و لذا، تغییرات فشار در عمق نیز در مقایسه با مایعات حتی در فواصل ۱۰۰ متری ناچیز بوده و مقدار فشار در عمق تقریباً ثابت می‌ماند. برای فواصل بیشتر بایستی توجه ویژه‌ای به تغییرات وزن مخصوص داشت. در فصل اول، رابطه‌ی حالت برای گاز کامل به‌صورت $p = \rho RT$ ارایه گردید که در آن p فشار مطلق، ρ چگالی، T دمای مطلق و R ثابت گاز است. چنانچه ρ از رابطه‌ی گاز ایده‌آل محاسبه شود و در رابطه‌ی (۲-۱۲) قرار گیرد، رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{gp}{RT} \qquad (۲\text{-}۱۸)$$

با جداسازی متغیرها، رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$\int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{p} = ln\frac{p_2}{p_1} = -\frac{g}{R}\int_{z_1}^{z_2}\frac{dz}{T} \qquad (۲\text{-}۱۹)$$

که در آن R و g در فاصله‌ی z_1 تا z_2 ثابت فرض می‌شوند.

قبل از انتگرال‌گیری بایستی نحوه‌ی تغییرات دما با عمق نیز مشخص شود. برای مثال، چنانچه فرایند هم‌دما برای گاز وجود داشته باشد، دمای T_0 در محدوده‌ی z_1 تا z_2 ثابت فرض می‌شود و در نتیجه، رابطه‌ی زیر پس از انتگرال‌گیری از رابطه‌ی (۲-۱۹) به‌دست می‌آید:

$$p_2 = p_1 \, exp\left[-\frac{g\left(z_2 - z_1\right)}{RT_0}\right] \qquad (۲-۲۰)$$

مثال ۲-۲: تغییر فشار در عمق (سیال تراکم پذیر).

چنانچه ارتفاع یک برج ساختمانی بلند ۳۸۱ متر باشد، مطلوب است؛

(الف) نسبت فشار در بالاترین قسمت ساختمان به پایین‌ترین قسمت آن درصورتی‌که دما ثابت و برابر $15°C$ باشد،

(ب) چنانچه هوا تراکم‌ناپذیر فرض شود، نسبت فشار در بالاترین قسمت ساختمان به پایین‌ترین قسمت آن چقدر است؟ وزن مخصوص هوا در شرایط استاندارد $12/014\ N/m^3$ و فشار در پایین‌ترین قسمت ساختمان $101/35\ kPa$ است.

پاسخ:

(الف) با توجه به اینکه فرایند هم‌دما برای گاز وجود دارد، با استفاده از رابطه‌ی (۲-۲۰) نسبت فشار در بالای ساختمان به فشار در پایین ساختمان به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{p_2}{p_1} = exp\left(-\frac{g\left(z_2 - z_1\right)}{RT_0}\right)$$

$$= exp\left[-\frac{\left(9.81 m/s^2\right)\left(381 m\right)}{\left(287 J/kg.K\right)\left[\left(15+273.14\right)K\right]}\right] = \underline{\underline{0.956}}$$

(ب) چنانچه هوا سیالی تراکم ناپذیر فرض شود، می‌توان از رابطه‌ی (۲-۱۶) نسبت فشار در بالای ساختمان به فشار در پایین ساختمان را به‌صورت زیر به‌دست آورد:

$$p_2 = p_1 - \gamma\left(z_2 - z_1\right) \quad ; \quad \frac{p_2}{p_1} = 1 - \frac{\gamma\left(z_2 - z_1\right)}{p_1}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 - \frac{\left(12.014 N/m^3\right)\left(381 m\right)}{101350 Pa} = \underline{\underline{0.953}}$$

با حل این مثال مشخص گردید که برای فواصل کم در آتمسفر، فرض تراکم‌پذیری یا تراکم‌ناپذیری هوا تأثیر ناچیزی بر جواب مسأله دارد.

مسایل ۲-۱۰ الی ۲-۱۳

۲-۳ آتمسفر استاندارد

به علت وجود هوا در اطراف زمین، همواره در اطراف بدن ما فشار آتمسفر وجود دارد. این فشار ناشی از وزن ستون هوا بالای سطح زمین است. مقدار این فشار در حدود ۱۰۱/۳۳ kPa است. چنانچه به‌طور متوسط، سطح پوست بدن انسان ۲ m^2 باشد، نیرویی معادل ۲۰۲/۶۶ kN بر انسان وارد می‌شود که این نیرو معادل تقریباً ۲۰۰۰۰۰ دانه سیب و یا ۲۰ تن است. خوشبختانه درون بدن انسان، فشاری مساوی فشار آتمسفر و در خلاف جهت آن وجود دارد که باعث می‌شود بدن انسان فشار آتمسفر را احساس نکند.

بر روی ارتفاعات، فشار آتمسفر کمتر از مقدار آن بر روی سطح زمین است و ممکن است در بعضی افراد، فشار درون بدن از فشار آتمسفر بیشتر شود و این افراد دچار خونریزی دماغ شوند. همچنین، با توجه به کاهش فشار در ارتفاعات، آب در دمای پایین‌تری به‌جوش می‌آید. در کابین هواپیما نیز با توجه به اینکه هواپیما در ارتفاع‌های بالا پرواز می‌کند، بایستی فشار داخل کابین کنترل شود. چنانچه به هر دلیل فشار داخل کابین از فشار آتمسفر کمتر شود، فشار داخل بدن افزایش یافته و باعث می‌شود تا گازهای محلول در خون و عضلات مانند نیتروژن به‌صورت حباب درآیند که نهایتاً می‌تواند به مرگ فرد منجر شود.

فشار آتمسفر بر روی سطح زمین متغیر است، به‌نحوی که بر روی ارتفاعات مقدار آن کمتر است و در اثر گردش زمین و تغییرات دمایی، مقدار آن تغییر می‌کند. لذا، انتخاب فشار معرف که بیان‌کننده‌ی شرایط متوسط آتمسفر زمین است، ضروری است. ایده‌ی آتمسفر استاندارد[۱] اولین بار در سال ۱۹۲۰ مطرح گردید و در آن زمان، کمیته‌های ملی و بین‌المللی زیادی جهت توسعه‌ی چنین استانداردی مطالعاتی را انجام دادند و شرایط آتمسفر استاندارد بر اساس گزارشی در سال ۱۹۶۲ مورد پذیرش همگان واقع شد. در این گزارش، آتمسفر استاندارد برای شرایط متوسطی از ارتفاع و چرخش سالانه‌ی زمین به‌دست آمده بود. در جدول (۲-۱) برخی از ویژگی‌های آتمسفر استاندارد در سطح دریا ارایه شده است [۲].

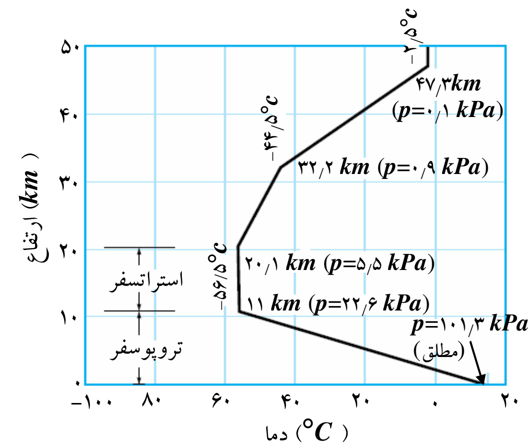
در شکل (۲-۷)، تغییرات دمایی آتمسفر استاندارد در ارتفاع نشان داده شده است. همان‌طور که در شکل مشخص است، در نواحی نزدیک به زمین در جو به‌نام تروپوسفر[۲] با افزایش ارتفاع، دما کاهش و در لایه‌ی بعدی به‌نام استراتسفر[۳] دما ثابت می‌ماند. با افزایش بیشتر ارتفاع مجدداً دما افزایش می‌یابد.

با توجه به شکل مشخص است که در لایه‌ی تروپوسفر تغییرات دما خطی است. تغییرات دما در این لایه

جدول ۲-۱ برخی از ویژگی‌های آتمسفر استاندارد در سطح دریا.

ویژگی	مقدار	ویژگی	مقدار	ویژگی	مقدار
دما	۲۸۸ K (۱۵ $^\circ C$)	چگالی	۱/۲۲۵ kg/m^3	وزن مخصوص	۱۲/۰۱۴ N/m^3
فشار	۱۰۱/۳۳ kPa	لزجت	۱/۷۸۹×۱۰$^{-5}$ $Pa.s$		

۱- Standard atmosphere ۲- Troposphere ۳- Stratosphere



شکل ۲-۷ تغییرات دمای آتمسفر استاندارد برحسب ارتفاع [۲].

(به‌ضخامت ۱۱ کیلومتر) را می‌توان به‌صورت زیر ارایه کرد:

$$T = T_a - \beta z \qquad (۲-۲۱)$$

که در آن T_a دما در سطح دریا و β نرخ تغییرات دما با ارتفاع است. برای آتمسفر استاندارد در تروپوسفر، $\beta = 0/0065\ K/m$ است.

با جایگزینی رابطه‌ی (۲-۲۱) در رابطه‌ی (۲-۱۹) و انتگرال‌گیری، رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$p = p_a \left(1 - \frac{\beta z}{T_a}\right)^{g/R\beta} \qquad (۲-۲۲)$$

که در آن p_a فشار در نزدیکی سطح دریا است. مقادیر T_a و p_a از جدول (۲-۱) به‌دست می‌آید.

تغییرات ویژگی‌های آتمسفر استاندارد مانند دما، چگالی، فشار و لزجت بر حسب ارتفاع در جدول (پ-۵) پیوست آمده است. لازم به‌ذکر است که چگالی هوا با افزایش ارتفاع، کاهش می‌یابد و به ازای حجم مشخصی از هوا، مقدار اکسیژن کمتری به ریه‌های انسان وارد می‌شود. به‌همین دلیل، راه رفتن در ارتفاعات سریعاً باعث احساس خستگی می‌شود.

۲-۴ فشار مطلق و فشار نسبی

فشار در یک نقطه از سیال می‌تواند به دو صورت فشار مطلق[۱] و فشار نسبی[۲] بیان شود. فشار مطلق نسبت به خلأ کامل (فشار مطلق صفر) سنجیده می‌شود، در حالی‌که فشار نسبی نسبت به فشار آتمسفر محلی اندازه‌گیری می‌شود. چنانچه فشار نسبی در نقطه‌ای صفر باشد، بدان معنی است که فشار در آن نقطه با فشار آتمسفر محلی برابر است. با توجه به اینکه فشار مطلق نسبت به خلأ کامل (فشار مطلق صفر) اندازه‌گیری می‌شود، همیشه مقدار آن مثبت است. مقدار فشار نسبی بسته به اینکه بیشتر از فشار آتمسفر محلی یا کمتر از آن باشد، می‌تواند مثبت و یا منفی باشد. البته، وسایل اندازه‌گیری فشار به نحوی کالیبره شده‌اند که فشار

۱- Absolute pressure　　۲- Gage pressure

آتمسفر را برابر صفر قرایت کنند.

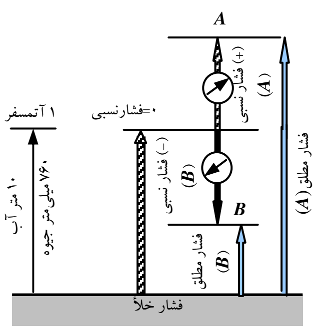
چنانچه فشار نسبی در نقطه‌ای منفی باشد، بدان معنی است که در آن نقطه، فشار موجود از فشار آتمسفر محلی کمتر است و لذا به آن فشار مکش[1] گفته می‌شود. مفهوم فشار مطلق و فشار نسبی به‌صورت گرافیکی در شکل (۲–۸) نشان داده شده است. با توجه به شکل (۲–۸) مشخص است که فشار مطلق در یک نقطه از سیال برابر با مجموع فشار آتمسفر محلی و فشار نسبی در آن نقطه است.

با توجه به اینکه برای تبدیل فشار مطلق به فشار نسبی به مقدار فشار آتمسفر محلی نیاز است، بایستی فشار آتمسفر محلی به‌نحوی اندازه‌گیری شود. برای اندازه‌گیری فشار آتمسفر محلی از بارومتر جیوه‌ای استفاده می‌شود. این روش توسط اوانگلیستا توریچلی[2] در سال ۱۶۴۴ معرفی گردید. بارومتر جیوه‌ای مطابق شکل (۲–۹) از یک لوله‌ی شیشه‌ای ساده که یک‌طرف آن بسته است و از طرف باز آن (به‌صورت وارونه) درون یک ظرف محتوی جیوه فرو رفته است، تشکیل شده است. نحوه‌ی کار نیز بدین صورت است که ابتدا لوله‌ی شیشه‌ای از جیوه پر می‌شود و سپس لوله وارونه شده و از انتهای باز، درون یک ظرف محتوی جیوه فرو می‌رود. سپس ستون جیوه به یک موقعیت تعادلی می‌رسد به نحوی که وزن ستون جیوه‌ی داخل شیشه به‌علاوه‌ی نیروی ناشی از فشار بخار (در بالای ستون جیوه) برابر با فشار آتمسفر خواهد شد. بنابراین خواهیم داشت:

$$p_{atm} = \gamma_{Hg} h + p_{vapor} \qquad (۲۳–۲)$$

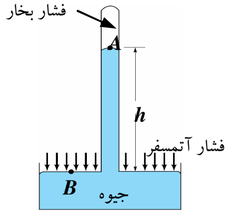
که در آن γ_{Hg} وزن مخصوص جیوه است. در عمل، سهم فشار بخار مایع ناچیز و قابل صرف‌نظر کردن است، لذا $p_{atm} \approx \gamma_{Hg} h$ است. لازم به ذکر است که طول لوله و سطح مقطع آن اثری بر میزان بالا آمدگی جیوه در لوله ندارد. چنانچه از این وسیله برای اندازه‌گیری فشار آتمسفر استاندارد استفاده شود، مقدار بالاآمدگی جیوه در لوله، معادل ۷۶۰ میلی‌متر جیوه و یا ۱۰/۳ متر آب خواهد شد.

معمولاً در مسایل مکانیک سیالات از فشار نسبی استفاده می‌شود، مگر اینکه از فشار مطلق نام برده شود. برای نشان دادن مقدار فشار مطلق از کلمه‌ی ***abs*** یا ***absolute*** در کنار واحد فشار استفاده می‌شود.



شکل ۲–۸ نمایش گرافیکی فشـــار مطلـــق و فشـار نسبی.

۱- Suction pressure ۲- Evangelista Torricelli



شکل ۲-۹ بارومتر جیوه‌ای.

مثال ۲-۳: فشارهای مطلق و نسبی.

دریاچه‌ای کوهستانی به عمق ۴۰ متر و با متوسط دمای $10°C$ را در نظر بگیرید. چنانچه فشار هوا ۵۹۸ $mmHg$ باشد، مطلوب است تعیین فشار مطلق و نسبی در عمیق‌ترین نقطه‌ی دریاچه برحسب پاسکال.

پاسخ:

وزن مخصوص جیوه از جدول (۱-۳)، ۱۳۳ kN/m^3 است. ابتدا فشار آتمسفر p_0 برحسب کیلوپاسکال به‌صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{p_0}{\gamma_{Hg}} = 598\,mm = 0.598\,m \quad ; \quad p_0 = (0.598\,m)(133\,kN/m^3) = 79.5\,kN/m^2$$

از جدول (پ-۳) پیوست، چگالی آب در دمای $10°C$ برابر ۹۹۹٫۷ kg/m^3 است و وزن مخصوص آب برابر ۹٫۸۰۴ kN/m^3 خواهد بود. فشار مطلق از رابطه‌ی (۲-۱۶) به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$p_{abs} = (9.804\,kN/m^3)(40\,m) + (79.5\,kN/m^2) = \underline{\underline{472 \quad kPa\,(abs)}}$$

از فشار مطلق محاسبه شده، مقدار فشار آتمسفر به‌صورت زیر کسر می‌گردد تا فشار نسبی به‌دست آید:

مسایل ۲-۱۴ الی ۲-۲۰

$$p_{gage} = (472\,kPa) - (79.5\,kPa) = \underline{\underline{392.5 \quad kPa}}$$

۲-۵ فشارسنج لوله‌ای

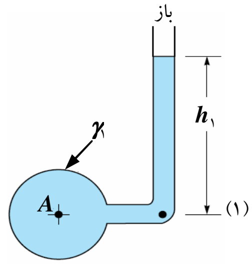
مطابق رابطه‌ی (۲-۱۵) اختلاف فشار بین دو نقطه از مایع را می‌توان بر حسب ارتفاع معادل ستون سیال با وزن مخصوص مشخص بیان کرد. یک روش استاندارد برای اندازه‌گیری فشار، تبدیل آن به ستون قایم یا مایلی از مایع و اندازه‌گیری ارتفاع آن است. وسیله‌ای که بر اساس تبدیل فشار به ارتفاع معادل مایع عمل فشارسنج لوله‌ای[۱] نامیده می‌شوند. فشارسنج لوله‌ای بر حسب کاربرد و شکل ظاهری به سه دسته‌ی فشارسنج لوله‌ای پیزومتر[۲]، فشارسنج لوله‌ای مایل[۳] و فشارسنج لوله‌ای U-شکل[۴] تقسیم‌بندی می‌شوند.

ک ۲-۱

۲-۵-۱ فشارسنج لوله‌ای پیزومتر

فشارسنج لوله‌ای پیزومتر ساده‌ترین و ارزان‌ترین ابزار برای اندازه‌گیری فشار به‌شمار می‌آید. فشارسنج لوله‌ای پیزومتر مطابق شکل (۲-۱۰) شامل یک لوله‌ی قایم است که انتهای پایین آن به نقطه‌ای که اندازه‌گیری فشار مورد نظر است، متصل شده و انتهای دیگر آن با آتمسفر در ارتباط است. چنانچه فشـار

۱ Manometers ۲ Piezometer tube ۳ Inclined tube manometer ۴ U-tube manomete



شکل ۲-۱۰ فشارسنج لوله‌ای پیزومتر.

در نقطه‌ی مورد نظر از فشار آتمسفر بیشتر باشد، مایع درون لوله تا ارتفاعی که متناسب با فشار نسبی آن نقطه است، بالا می‌آید.

برای محاسبه‌ی فشار در نقطه‌ی A در شکل (۲-۱۰)، از رابطه‌ی فشار هیدرواستاتیک استفاده می‌شود. در اینجا، ابتدا از نقطه‌ی A به‌صورت افقی (در یک مایع) حرکت کرده تا به نقطه‌ی (۱) برسیم. چون در سطوح افقی فشار یکسان است، فشار نقطه‌ی A با فشار نقطه‌ی (۱) برابر است. سپس، از نقطه‌ی (۱) به سمت بالا حرکت کرده تا به سطح آزاد برسیم. چون در اینجا حرکت به سمت بالا است، از مقدار فشار به اندازه‌ی γh_1 کاسته می‌شود. چون در سطح آزاد مقدار فشار (فشار نسبی) صفر است، می‌توان فشار نسبی نقطه‌ی A را به‌صورت زیر به‌دست آورد:

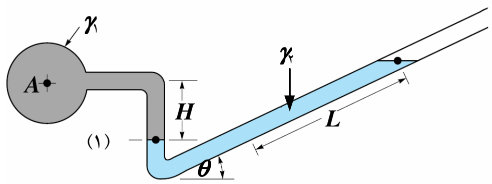
$$p_A - \gamma_1 h_1 = 0 \quad ; \quad p_A = \gamma_1 h_1 \qquad (۲-۲۴)$$

بنابراین، چنانچه بتوان مقدار بالاآمدگی مایع درون فشارسنج لوله‌ای پیزومتر، h_1، را اندازه‌گیری کرد، می‌توان فشار نسبی در نقطه‌ی مورد نظر را تعیین کرد.

اگرچه اندازه‌گیری فشار توسط فشارسنج لوله‌ای پیزومتر بسیار ساده و دقیق است، لیکن استفاده از این ابزار محدودیت‌هایی نیز دربر دارد. از فشارسنج لوله‌ای پیزومتر نمی‌توان برای اندازه‌گیری فشار کمتر از فشار آتمسفر، فشار خیلی زیاد و یا فشار خیلی کم استفاده کرد. اگر فشار مطلق محل مورد نظر کمتر از فشار آتمسفر محلی باشد، فشار نسبی منفی سبب می‌شود که هوا از آتمسفر به درون فشارسنج لوله‌ای پیزومتر کشیده شود. در فشار نسبی خیلی زیاد، هد ارتفاعی معادل سیال در فشارسنج لوله‌ای پیزومتر افزایش یافته و ممکن است طول فشارسنج لوله‌ای پیزومتر به حدی نباشد که بتواند این ارتفاع را نشان دهد. چنانچه فشار نسبی مورد نظر نیز خیلی کم باشد، ارتفاع معادل سیال در لوله ممکن است به‌قدری ناچیز باشد که نتوان با دقت مناسبی آن را اندازه‌گیری کرد.

۲-۵-۲ فشارسنج لوله‌ای مایل

فشارسنج لوله‌ای مایل معمولاً برای اندازه‌گیری فشارهای نسبی کم به‌کار می‌رود، شکل (۲-۱۱). به ازای هد ارتفاعی مشخص از مایع چنانچه لوله‌ی فشارسنج لوله‌ای با زاویه θ نسبت به افق قرار گیرد، طول ستون مایع درون لوله‌ی مایل، L، برابر با $H/\sin\theta$ خواهد شد. بنابراین، طول ستون مایع درون لوله‌ی مایل از حالتی که لوله به‌صورت قایم قرار گیرد، بیشتر می‌شود و می‌توان قرایت را با دقت بالاتری انجام داد. انتظار می‌رود که هرچقدر زاویه‌ی لوله‌ی مایل با افق کمتر شود، طول ستون مایع درون لوله‌ی مایل بیشتر شود.

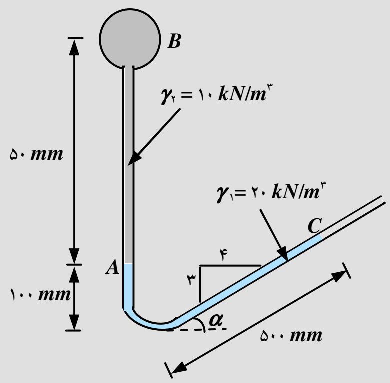


شکل ۲-۱۱ فشارسنج لوله‌ای مایل.

بایستی توجه داشت که با کاهش زاویه‌ی θ از حد خاصی، اثرات مویینگی و کشش سطحی باعث می‌شود تا نتوان با دقت مناسبی، تراز سطح مایع را اندازه‌گیری کرد. برای لوله‌ی شیشه‌ای که سیال درون آن آب باشد، بهتر است زاویه‌ی θ از 20° کمتر نباشد.

مثال ۲ - ۴، مع، ۸۴

مقدار فشـــار در مرکز لوله (B)، بر حسب کیـلو پاسکال برابر است بـــا؟ (از C تا A مایـــع شمـــاره‌ی ۱ و از A به بالا مایـــع شماره‌ی ۲ وجود دارد در ضمن در شکل، B وســـط دایـــره‌ی انتـــهایی اســـت.)



پاسخ:

چنانچه رابطه‌ی فشار هیدرواستاتیک بین نقاط B و C به‌کار گرفته شود، رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

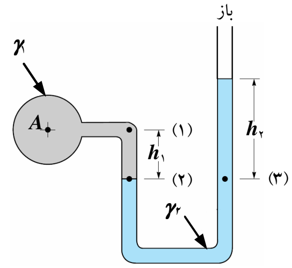
مسایل ۲-۲۱ و ۲-۲۲

$$p_B + \overbrace{\gamma_2}^{10\,kN/m^3}(0.5\,m) + \overbrace{\gamma_1}^{20\,kN/m^3}(0.1\,m) - \overbrace{\gamma_1}^{20\,kN/m^3}(0.5\sin\alpha) = 0$$

$$\underline{\underline{p_B = -1 \quad kN/m^2}}$$

۲-۵-۳ فشارسنج لوله‌ای U-شکل

فشارسنج لوله‌ای U-شکل از دو لوله‌ی قایم به شکل U تشکیل شده است، شکل (۲-۱۲). در این نوع فشارسنج می‌توان از دو سیال متفاوت برای محفظه و لوله‌ی آن استفاده کرد. چنانچه از این نوع فشارسنج برای اندازه‌گیری فشارهای خیلی زیاد استفاده شود، برای جلوگیری از افزایش طول لوله‌ی فشارسنج، می‌توان از سیالات سنگین‌تری مانند جیوه درون لوله‌ی فشارسنج استفاده کرد. برای اندازه‌گیری فشارهای کم، می‌توان از سیالات سبک‌تر مانند آب استفاده کرد تا به‌حد کافی آب، درون لوله‌ی فشارسنج بالا بیاید و بتوان با دقت مناسبی آن را قرایت کرد.



شکل ۲-۱۲ فشارسنج لوله‌ای U-شکل.

رابطه‌ی فشار هیدرواستاتیک برای شکل (۲-۱۲) به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$p_A + \gamma_1 h_1 - \gamma_2 h_2 = 0 \quad ; \quad p_A = \gamma_2 h_2 - \gamma_1 h_1 \tag{۲-۲۵}$$

چنانچه سیال مورد استفاده در محفظه‌ی A، هوا باشد، با توجه به اینکه وزن مخصوص هوا ناچیز است، می‌توان از $\gamma_1 h_1$ در رابطه‌ی (۲-۲۵) نیز صرف‌نظر کرد و لذا فشار در نقطه‌ی A برابر $\gamma_2 h_2$ خواهد بود.

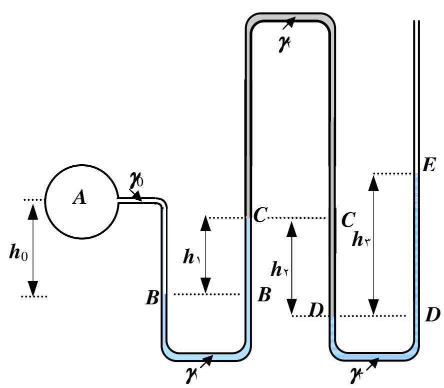
چنانچه فشار بسیار زیاد باشد، می‌توان از ترکیب چند فشارسنج U-شکل استفاده کرد، شکل (۲-۱۳). در این حالت می‌توان از سیالات مختلفی در هر کدام از فشارسنج‌های لوله‌ای استفاده کرد. رابطه‌ی فشار هیدرواستاتیک برای شکل (۲-۱۳) به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$p_A + \gamma_0 h_0 - \gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 - \gamma_3 h_3 = p_0 \quad ; \quad p_A = -\gamma_0 h_0 + \gamma_1 h_1 - \gamma_2 h_2 + \gamma_3 h_3 \tag{۲-۲۶}$$

چنانچه از فشارسنج U-شکل برای اندازه‌گیری اختلاف فشار بین دو نقطه استفاده شود به آن فشارسنج U-شکل تفاضلی[1] گفته می‌شود. نمونه‌ای از فشارسنج U-شکل تفاضلی در شکل (۲-۱۴) نشان داده شده است. رابطه‌ی فشار هیدرواستاتیک برای شکل (۲-۱۴) به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

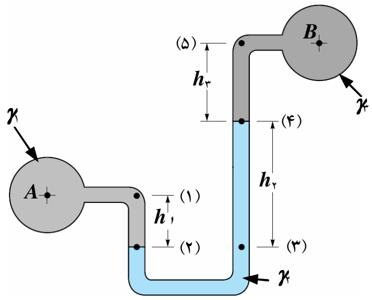
$$p_A + \gamma_1 h_1 - \gamma_2 h_2 - \gamma_3 h_3 = p_B \quad ; \quad p_A - p_B = \gamma_2 h_2 + \gamma_3 h_3 - \gamma_1 h_1 \tag{۲-۲۷}$$

چنانچه سیال مورد استفاده در محفظه‌های A و B هوا باشد و با توجه به اینکه وزن مخصوص هوا ناچیز است، اختلاف فشار برابر $\gamma_2 h_2$ خواهد بود.

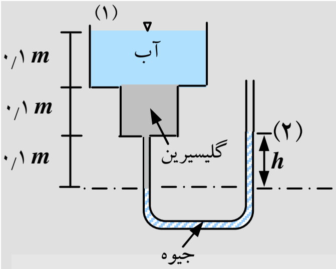


شکل ۲-۱۳ فشارسنج لوله‌ای U-شکل ترکیبی برای اندازه‌گیری فشارهای بسیار زیاد.

۱- Differential U-tube manometer



شکل ۲-۱۴ فشارسنج U-شکل تفاضلی.



مثال ۲ - ۵، م‌ک، ۸۱

درصورتی که وزن مخصوص آب، گلیسیرین و جیوه به‌ترتیب ۹۸۱۰، ۱۲۴۰۰ و ۱۳۳۰۰ نیوتن بر متر مکعب باشد، در شکل زیر مقدار h چند میلی‌متر است؟

پاسخ:

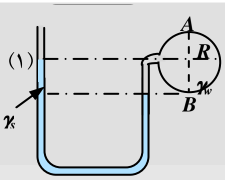
چنانچه از نقطه‌ی (۱) به طرف نقطه‌ی (۲) حرکت کرده و با حرکت به سمت پایین، علامت فشار مثبت و با حرکت به سمت بالا، علامت فشار منفی فرض شود، رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$0+0.1\gamma_w+0.2\gamma_{glycrin}-h\,\gamma_{Hg}=0$$

با جایگزینی مقادیر وزن مخصوص مایعات، مقدار h به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$(0.1m)\left(9810\,N/m^3\right)+(0.2m)\left(12400\,N/m^3\right)=h\left(13300\,N/m^3\right)$$

$$\underline{\underline{h=0.26m=260\quad mm}}$$



مثال ۲ - ۶، م‌ک، ۸۵

در شکل نشان داده شده، فشار در سقف لوله (نقطه‌ی A) و فشار در کف لوله (نقطه‌ی B) عبارتند از: (لوله حاوی آب است و $\gamma_s=۰/۸\gamma_w$)؟

پاسخ:

چنانچه رابطه‌ی فشار بین نقطه‌ی (A) و نقطه‌ی (۱) برقرار شود، رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

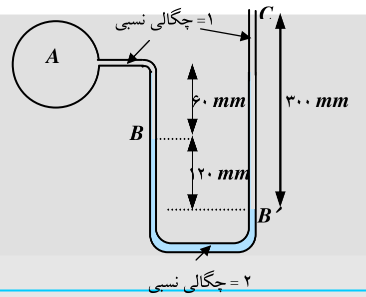
$$p_A+2R\gamma_w-R\gamma_s=0\quad;\quad p_A=R\left(\overbrace{\gamma_s}^{0.8\gamma_w}-2\gamma_w\right)\quad;\quad \underline{\underline{p_A=-1.2\gamma_w R}}$$

رابطه‌ی بین نقاط A و B به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$p_B = p_A + 2R\gamma_w = -1.2R\gamma_w + 2R\gamma_w \quad ; \quad \underline{\underline{p_B = 0.8R\gamma_w}}$$

مثال ۲ - ۷ ، مع، ۸۰

در شکل مقابل فشار نسبی نقطه‌ی A چقدر است؟



پاسخ:

اگر رابطه‌ی فشار هیدرواستاتیک بین نقطه‌ی (A) و نقطه‌ی (C) برقرار شود، رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید: مسایل ۲-۲۳ الی ۲-۳۴

$$p_A + 0.06\overbrace{\gamma_1}^{\gamma_w} + 0.12\overbrace{\gamma_2}^{2\gamma_w} - 0.3\overbrace{\gamma_1}^{\gamma_w} = 0 \quad ; \quad \underline{\underline{p_A = 0}}$$

برای اندازه‌گیری فشارهای نوسانی، استفاده از فشارسنج لوله‌ای U-شکل مشکل است، زیرا بایستی تراز سیال در دو لوله پی‌درپی قرایت شود. چنانچه سطح مقطع یکی از شاخه‌های فشارسنج نسبت به سطح مقطع شاخه‌ی دیگر بسیار بزرگ‌تر باشد، در نتیجه نوسانات شاخه‌ی پیزومتر با سطح مقطع بزرگ‌تر بسیار ناچیز بوده و می‌توان از آن به‌عنوان مبنایی برای قرایت استفاده کرد. شکل (۲-۱۵) نمونه‌ای از این فشارسنج‌های لوله‌ای را نشان می‌دهد که به فشارسنج لوله‌ای از نوع چاه[۱] شناخته می‌شود. در این نوع فشارسنج لوله‌ای، چنانچه سطح مقطع لوله‌ی بزرگ‌تر با A و سطح مقطع لوله‌ی کوچک‌تر با a نشان داده شود و با توجه به اینکه حجم مایع جابه‌جا شده در دو شاخه بایستی با هم برابر باشند، می‌توان رابطه‌ی زیر را به‌دست آورد:

$$A(h) = a(H) \quad ; \quad \frac{h}{H} = \frac{a}{A} \qquad (۲-۲۸)$$

اختلاف فشار بین دو نقطه‌ی (۱) و (۲) نیز از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

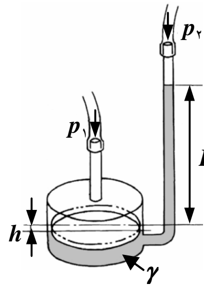
$$p_1 - \gamma(h+H) = p_2 \quad ; \quad p_1 - p_2 = \gamma(h+H) \qquad (۲-۲۹)$$

چنانچه مقدار h از رابطه‌ی (۲-۲۸) در رابطه‌ی (۲-۲۹) جایگزین شود، رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$p_1 - p_2 = \gamma\left(\frac{a}{A}H + H\right) \quad ; \quad p_1 - p_2 = \gamma H\left(\frac{a}{A}+1\right) \approx \gamma H \qquad (۲-۳۰)$$

لازم به ذکر است که در استخراج رابطه‌ی (۲-۳۰)، فرض شده است که نسبت سطح مقطع لوله‌ی کوچک‌تر (a) به سطح مقطع لوله‌ی بزرگ‌تر (A)، بسیار ناچیز است [۱]. مسایل ۲-۳۵ و ۲-۳۶

۱- Well type manometer

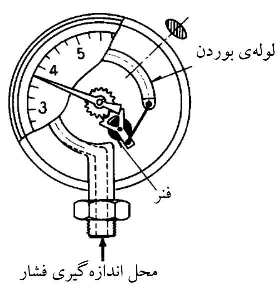


شکل ۲-۱۵ فشارسنج لوله‌ای تفاضلی از نوع چاه.

۲-۶ ابزارهای مکانیکی و الکترونیکی اندازه‌گیری فشار

اگرچه فشارسنج لوله‌ای به‌طور وسیع برای اندازه‌گیری فشار به‌کار می‌رود، لیکن از این نوع ابزارها نمی‌توان برای اندازه‌گیری فشارهای بسیار زیاد و یا فشار نقاطی که نسبت به زمان تغییرات سریعی دارند، استفاده کرد. همچنین، اندازه‌گیری فشار توسط فشارسنج لوله‌ای بسیار وقت‌گیر است. به‌همین دلیل ابزارهای متنوعی برای اندازه‌گیری فشار توسعه یافته‌اند. در تمام این وسایل از این ایده استفاده می‌شود که هنگامی که به جسم الاستیک نیرویی در اثر تغییر فشار اعمال شود، آن نیرو باعث تغییرشکل جسم می‌شود. چنانچه بتوان تغییرشکل را با تغییر فشار متناسب کرد، می‌توان با اندازه‌گیری تغییرشکل، فشار را محاسبه کرد. مشهورترین فشارسنج مکانیکی که بر این اساس کار می‌کند، فشارسنج بوردن[1] است. شکل (۲-۱۶) مقطع فشارسنج بوردن را نشان می‌دهد. فشارسنج بوردن از یک لوله با مقطع بیضوی که یک انتهای آن بسته است و می‌تواندآزادانه حرکت کند، تشکیل شده است. هنگامی‌که فشار درون لوله زیاد می‌شود، مقطع این لوله از حالت بیضی به دایره‌ای تبدیل شده و انتهای آن به‌طرف بیرون کشیده می‌شود. در اثر این تغییرشکل، عقربه‌ی مدرج شروع به‌حرکت کرده و فشار نسبی نقطه‌ی مورد نظر را نشان می‌دهد. ک ۲-۲

یکی از معایب فشارسنج بوردن این است که از این نوع وسیله نمی‌توان برای اندازه‌گیری فشار نقاطی که به‌طور پیوسته با زمان تغییر می‌کنند، استفاده کرد. به‌همین منظور در این موارد از وسایل دیگری به‌نام دستگاه‌های الکترونیکی مبدل فشار[2] استفاده می‌شود. در این نوع از وسایل، با به‌کارگیری دیافراگم‌های نازک، تغییرشکل ناشی از تغییرات فشار وارد بر دیافراگم از طرف سیال به ولتاژ الکتریکی تبدیل و اندازه‌گیری می‌شود.



شکل ۲-۱۶ فشارسنج بوردن.

۱- Bourdon gage ۲- Pressure transducer

۲-۷ نیروی فشار هیدرواستاتیک

۲-۷-۱ مقدمه

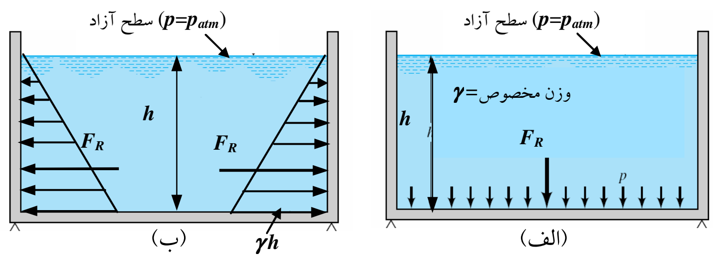
همان‌طور که قبلاً گفته شد، استاتیک سیال علمی است که در آن به بررسی سیالات در حال سکون پرداخته می‌شود. با توجه به اینکه سیالات شامل گازها و مایعات هستند، بررسی رفتار مایعات در حال سکون، هیدرواستاتیک[۱] و بررسی رفتار گازهای در حال سکون آیرواستاتیک[۲] نامیده شده است [۳].

در سیالات در حال سکون، با توجه به اینکه هیچ حرکت نسبی بین لایه‌های مجاور سیال وجود ندارد، هیچ‌گونه تنش برشی (تنش مماسی) بین لایه‌های سیال برای تغییرشکل آن وجود ندارد. تنها تنشی که در سیال در حال سکون وجود دارد، تنش قایم یا فشار است که در اثر وزن ستون سیال ایجاد می‌شود. چنانچه سطح جامدی درون سیال قرار گیرد، به علت عدم وجود تنش برشی، هیچ حرکت نسبی بین سیال و سطح جامد وجود ندارد و در نتیجه هیچ‌گونه نیروی موازی سطح ایجاد نمی‌شود. بنابراین، در سیالات در حال سکون، نیرو همواره به‌صورت عمود بر سطح به جسم وارد می‌شود.

از استاتیک سیالات برای تعیین نیروی وارد بر اجسام شناور و یا مستغرق استفاده می‌شود. طراحی بسیاری از سازه‌های مهندسی شامل بدنه‌ی سدها، مخازن ذخیره‌ی مایعات و ... با استفاده از علم استاتیک سیالات انجام می‌شود. در ادامه‌ی این فصل، سطوح جامد واقع در سیال به دو دسته‌ی سطوح مستوی (صاف) و سطوح منحنی (خمیده) تقسیم‌بندی می‌شود و در هر قسمت به تعیین مقدار، جهت و راستای نیروی وارد از طرف سیال بر سطح مورد نظر پرداخته می شود.

۲-۷-۲ نیروی هیدرواستاتیک بر روی سطوح مستوی (صاف)

هنگامی که یک سطح مستوی (بدون انحناء) درون سیال قرار می‌گیرد، از طرف سیال بر آن نیرو وارد می‌شود. این نیرو در اثر وجود فشار در تمامی نقاط سطح مورد نظر ایجاد می‌شود. با توجه به مطالبی که در قسمت (۲-۲-۱) بیان گردید، فشار در سیالات ساکن و تراکم‌ناپذیر به‌صورت خطی با عمق تغییر می‌کند. مطابق شکل (۲-۱۷- الف) برای صفحات افقی مانند کف مخازن ذخیره که تمامی نقاط روی آن در یک ارتفاع نسبت به سطح آزاد قرار دارند، فشار برابر و توزیع فشار یکنواخت است. لذا، به‌راحتی می‌توان از حاصل‌ضرب فشار در مساحت کف مخزن، نیروی برایند وارد بر کف مخزن، F_R، را محاسبه کرد. با توجه به اینکه توزیع فشار یکنواخت است، محل اثر نیروی برایند در وسط قرار می‌گیرد.



شکل ۲-۱۷ توزیع فشار و نیروی وارد بر سطح مستوی؛ الف) سطوح افقی، ب) سطوح قایم.

۱- Hydrostatics
۲- Aerostatics

برای سطوح عمودی مانند دیواره‌های قایم ظروف [شکل (۲-۱۷- ب)] و با توجه به اینکه با افزایش عمق فشار نیز به‌صورت خطی افزایش می‌یابد، توزیع فشار مثلثی است و توزیع فشار روی سطح، مقدار نیرو و محل اثر از انتگرال‌گیری به‌دست می‌آید. به‌منظور به‌دست آوردن رابطه‌ی کلی برای محاسبه‌ی مقدار، جهت و محل اثر نیروی برایند وارد از طرف سیال بر سطوح مستوی، یک صفحه‌ی مستوی با شکلی دلخواه مطابق شکل (۲-۱۸) و به‌صورت مایل درنظر گرفته شده است. در شکل (۲-۱۸) دید از کنار و دید از جلوی صفحه‌ی مستوی نشان داده شده است. این صفحه طوری قرار گرفته است که امتداد آن، سطح آزاد سیال را در نقطه‌ی O با زاویه‌ی θ قطع می‌کند و محور y در راستای جسم و در صفحه‌ی دید از جلوی جسم قرار گرفته است. با توجه به اینکه بر روی هر المان کوچک از صفحه (dA) که در عمق h از سطح آزاد سیال قرار گرفته است، فشاری برابر با γh وارد می‌شود، نیروی وارد بر این المان کوچک عمود بر سطح و برابر با $\gamma h dA$ است. بنابراین، نیروی برایند، F_R، به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$F_R = \int dF_R = \int_A \gamma h dA = \int_A \gamma y \sin\theta dA \tag{۲-۳۱}$$

با فرض ثابت بودن γ و θ، رابطه‌ی (۲-۳۱) به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$F_R = \gamma \sin\theta \int_A y dA \tag{۲-۳۲}$$

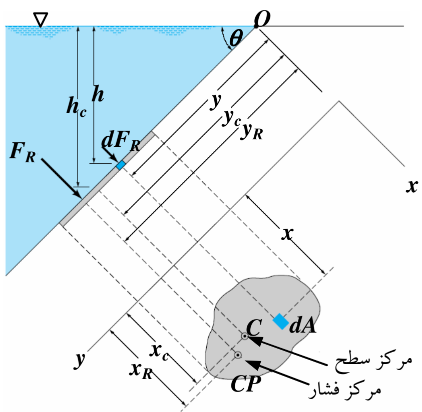
انتگرال ظاهر شده در طرف راست رابطه‌ی (۲-۳۲)، همان گشتاور اول سطح[۱] نسبت به محور x است که به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\int_A y dA = y_c A \tag{۲-۳۳}$$

که در آن y_c فاصله‌ی مرکز سطح[۲] صفحه نسبت به مبدأ O است. با جایگزینی رابطه‌ی (۲-۳۳) در رابطه‌ی (۲-۳۲)، رابطه‌ی (۲-۳۴) به‌دست می‌آید:

$$F_R = \gamma A y_c \sin\theta \tag{۲-۳۴}$$

چنانچه در رابطه‌ی (۲-۳۴) مقدار $h_c = y_c \sin\theta$ جایگزین شود، رابطه‌ی (۲-۳۵) به‌دست می‌آید:



شکل ۲-۱۸ نیروی هیدرواستاتیک وارد بر سطح مستوی مایل با شکل دلخواه [۲].

۱- First moment of the area ۲- Centroid

$$F_R = \gamma h_c A \qquad (۲-۳۵)$$

که در آن h_c فاصله‌ی عمودی مرکز سطح صفحه نسبت به سطح آزاد سیال است، شکل (۲-۱۸).

مطابق رابطه‌ی (۲-۳۵)، مقدار برایند نیروی وارد بر سطح مستوی که به‌صورت مایل درون سیال قرار گرفته است، به زاویه‌ی θ بستگی نداشته و این نیرو فقط به وزن مخصوص سیال، γ، مساحت صفحه، A، و فاصله‌ی عمودی مرکز سطح جسم نسبت به سطح آزاد، h_c، بستگی دارد. بنابراین، چنانچه زاویه‌ی قرارگیری صفحه تغییر کند، ولی فاصله‌ی عمودی مرکز سطح جسم تا سطح آزاد سیال تغییر نکند، در مقدار نیروی وارد بر صفحه هیچ تغییری ایجاد نمی‌شود. با توجه به اینکه فشار در مرکز سطح صفحه برابر با γh_c است، رابطه‌ی (۲-۳۵) نشان می‌دهد که نیروی برایند وارد بر صفحه‌ی مستوی از حاصل‌ضرب مقدار فشار مرکز سطح صفحه در مساحت کل صفحه به‌دست می‌آید. با توجه به اینکه راستای تمام جزء نیروها عمود بر سطح صفحه هستند، راستای نیروی برایند نیز بر صفحه‌ی مستوی عمود خواهد بود.

اگرچه در نگاه اول به نظر می‌رسد که نیروی برایند بایستی در مرکز سطح جسم وارد شود، ولی در ادامه اثبات می‌شود که محل اثر نیروی برایند بر مرکز سطح جسم منطبق نمی‌باشد. برای یافتن مختصات محل اثر نیرو در راستای محور y، یعنی y_R، بایستی مجموع گشتاور جزء نیروها را با گشتاور نیروی برایند نسبت به محور x به‌صورت زیر برابر قرار داد:

$$F_R y_R = \int_A y dF = \int_A \gamma \sin\theta y^2 dA \qquad (۲-۳۶)$$

با جایگزینی رابطه‌ی (۲-۳۴) در رابطه‌ی (۲-۳۶)، رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$y_R = \frac{\int_A y^2 dA}{y_c A} \qquad (۲-۳۷)$$

انتگرال طرف راست رابطه‌ی (۲-۳۷)، گشتاور دوم سطح[۱] یا ممان اینرسی[۲] سطح، I_x، حول محور x است. بنابراین، می‌توان رابطه‌ی (۲-۳۷) را به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$y_R = \frac{I_x}{y_c A} \qquad (۲-۳۸)$$

برای محاسبه‌ی I_x می‌توان از قانون انتقال ممان اینرسی بین دو محور موازی به‌صورت زیر استفاده کرد:

$$I_x = I_{xc} + A y_c^2 \qquad (۲-۳۹)$$

که در آن I_{xc} ممان اینرسی سطح نسبت به محوری است که از مرکز سطح جسم می‌گذرد و موازی محور x است. با جایگزینی رابطه‌ی (۲-۳۹) در رابطه‌ی (۲-۳۸)، رابطه‌ی زیر برای محاسبه‌ی محل اثر نیروی برایند در راستای محور y به‌دست می‌آید:

$$y_R = \frac{I_{xc}}{y_c A} + y_c \qquad (۲-۴۰)$$

۱- Second moment of the area　　۲- Moment of inertia

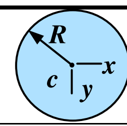
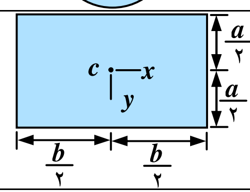
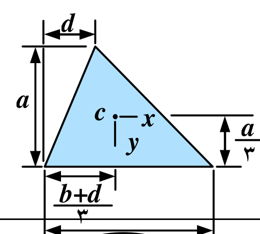
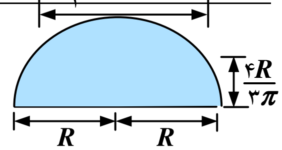
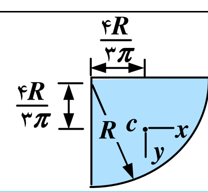
رابطه‌ی (۲-۴۰) نشان می‌دهد که محل اثر نیروی برایند همواره کمی پایین‌تر از مرکز سطح جسم است ($y_R>y_c$)، زیرا مقدار عبارت I_{xc}/y_cA همواره مثبت است.

با توجه به اینکه برای محاسبه‌ی مقدار و محل اثر نیروی برایند بر صفحه‌ی مستوی، به محاسبه‌ی مرکز سطح و ممان اینرسی نیاز است، مرکز سطح و ممان اینرسی برای برخی از شکل‌های معمول هندسی در جدول (۲-۲) ارایه شده است.

مختصات x نقطه‌ی اثر نیروی برایند نیز به‌طور مشابه با گشتاورگیری جزء نیروها نسبت به محور y به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$F_R x_R = \int_A \gamma \sin\theta \, xydA \quad ; \quad x_R = \frac{\int_A xydA}{y_c A} = \frac{I_{xy}}{y_c A} \tag{۴۱-۲}$$

جدول ۲-۲ مشخصات مرکز سطح، ممان اینرسی و مساحت برخی شکل‌های هندسی.

شکل هندسی	A	I_{xc}	I_{yc}	I_{xyc}
	$\pi R^{۲}$	$\frac{\pi R^{۴}}{۴}$	$\frac{\pi R^{۴}}{۴}$	صفر
	ab	$\frac{ba^{۳}}{۱۲}$	$\frac{ab^{۳}}{۱۲}$	صفر
	$\frac{ab}{۲}$	$\frac{ba^{۳}}{۳۶}$	—	$\frac{ba^{۲}}{۷۲}(b-۲d)$
	$\frac{\pi R^{۲}}{۲}$	$۰/۰۳۴۹R^{۴}$	$۰/۳۹۲۷R^{۴}$	صفر
	$\frac{\pi R^{۲}}{۴}$	$۰/۰۵۴۸۸R^{۴}$	$۰/۰۵۴۸۸R^{۴}$	$-۰/۰۱۶۴۷R^{۴}$

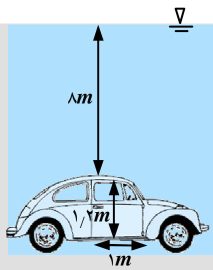
که در آن I_{xy} ممان اینرسی حاصل‌ضرب [۱] نسبت به دو محور متعامد[۲] است. به‌طور مشابه چنانچه از قانون انتقال ممان اینرسی بین محورهای موازی استفاده شود، رابطه ی زیر به‌دست می‌آید:

$$x_R = \frac{I_{xyc}}{y_c A} + x_c \qquad (۴۲-۲)$$

که در آن I_{xyc} ممان اینرسی حاصل‌ضرب نسبت به دو محور متعامد است که از مرکز سطح جسم می‌گذرد. لازم به ذکر است که I_{xyc} هنگامی که جسم مورد نظرحول یکی از محورهای x یا y متقارن باشد، صفر خواهد بود و $x = x_c$ خواهد شد.

محل اثر برایند نیروهای هیدرواستاتیکی وارد بر صفحه، مرکز فشار[۳] (CP) نامیده می‌شود. به‌طور خلاصه می‌توان بیان کرد که برای محاسبه‌ی نیروی وارد بر سطوح مستوی مستغرق در سیال کافی است مرکز سطح جسم را تعیین و عمق سیال بالای این نقطه تا سطح آزاد سیال، h_c اندازه‌گیری شود. سپس از رابطه‌ی $F_R = \gamma h_c A$ مقدار نیرو محاسبه می‌شود. برای محاسبه‌ی مرکز اثر نیروی برایند یا مرکز فشار نیز می‌توان از رابطه‌های (۲-۴۰) و (۲-۴۲) استفاده کرد.

مثال ۲-۸: محاسبه‌ی نیروی هیدرواستاتیک وارد بر درب ماشین مستغرق.



در اثر سانحه‌ی تصادف، ماشینی مطابق شکل درون دریاچه‌ای سقوط کرده است. چنانچه ماشین در کف دریاچه بر روی چرخ‌های خود ایستاده باشد،نیروی مورد نیاز برای بازکردن درب ماشین و محل اثر آن را تعیین کنید. عرض و ارتفاع درب ماشین به‌ترتیب ۱ و ۱/۲ متر است.

پاسخ:

اگر درب ماشین، مستطیلی فرض شود، مرکز سطح درب ماشین در وسط آن قرارگرفته است و نیروی برایند وارد بر درب ماشین به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$F_R = \gamma h_c A = \left(9810\, N/m^3\right)\left[(8m) + \left(\frac{1.2}{2}m\right)\right]\left[(1m)(1.2m)\right] = \underline{\underline{101.3 \quad kN}}$$

با توجه به اینکه درب ماشین، مستطیلی فرض شده است، محل اثر نیروی برایند بر روی خط تقارن درب قرار دارد ($x_R = x_c$) و تنها بایستی فاصله‌ی عمودی این نقطه نسبت به سطح آزاد از رابطه‌ی (۲-۴۰) محاسبه شود. مقادیر y_c و I_{xc} و از آنجا y_R به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

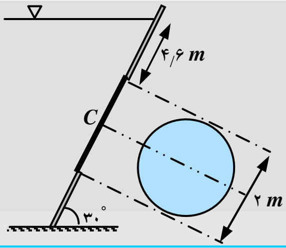
$$y_c = (8m) + \left(\frac{1.2}{2}m\right) = 8.6m \quad ; \quad I_{xc} = \frac{ba^3}{12} = \frac{(1m)(1.2m)^3}{12} = 0.144\,m^4$$

$$y_R = y_c + \frac{I_{xc}}{y_c A} = (8.6m) + \left(\frac{0.144\,m^4}{(8.6m)\left[(1m)(1.2m)\right]}\right) = \underline{\underline{8.61 \quad m}}$$

۱- Product of inertia ۲- Orthogonal coordinates ۳- Center of pressure

مثال ۲ - ۹ ، م‌ک، ۸۴

نیروی هیدرواستاتیکی آب بر دریچه‌ی دایره‌ای شکل زیر (با قطر ۲ متر) چند کیـــلو نیوتن است؟($\gamma_w = ۱۰\ kN/m^۳$)



پاسخ:

با توجه به اینکه دریچه دایره‌ای است، فاصله‌ی مرکز سطح دریچه از سطح آزاد در راستای دریچه (y_c) برابر با ۵٫۶ متر است. فاصله‌ی عمودی مرکز سطح دریچه (نقطه‌ی C) از سطح آزاد و از آنجا نیروی برایند وارد بر دریچه از رابطه‌ی (۲–۳۵) به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$h_c = y_c \sin\theta = (5.6m)\sin 30 \quad ; \quad h_c = 2.8m$$

مسایل ۲-۳۷ الی ۲-۴۸

$$F = \gamma h_c A = \left(10kN/m^3\right)(2.8m)\left[\pi\frac{(2m)^2}{4}\right] = \underline{\underline{28\pi \quad kN}}$$

۲-۷-۳ منشور فشار

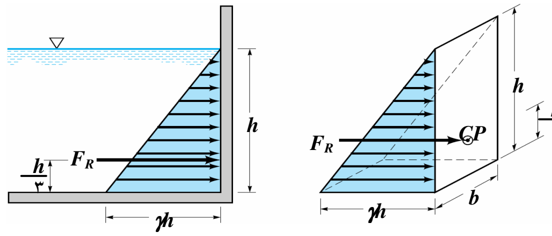
چنانچه شکل سه بعدی توزیع فشار در عمق بر روی صفحه‌ی مستطیلی مطابق شکل (۲–۱۹) ترسیم شود، حجمی سه بعدی به‌دست می‌آید که به آن منشور فشار[۱] گفته می‌شود. منشور فشار، یک ارایه‌ی ترسیمی از تغییرات سه‌بعدی فشار است. از آنجایی‌که انتگرال تغییرات فشار روی سطح مورد نظر، همان نیروی وارد بر سطح می‌باشد، حجم منشور فشار برابر با نیروی وارد بر سطح مورد نظر است که به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$F_R = volume = \frac{1}{2}(\gamma h)(bh) = \gamma\left(\frac{h}{2}\right)A \qquad (۲–۴۳)$$

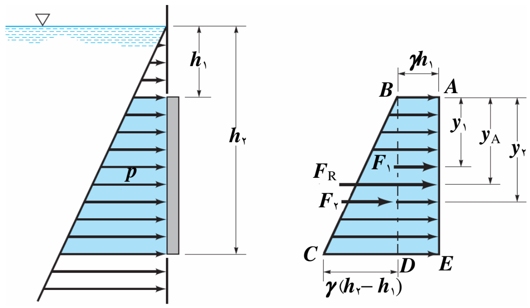
همچنین، مرکز حجم منشور فشار، محل اثر نیروی برایند وارد بر صفحه است. با توجه به اینکه توزیع فشار بر روی صفحه‌ی مورد نظر مثلثی است، نیروی برایند در فاصله‌ی $h/۳$ از قاعده‌ی مثلث قرار می‌گیرد. لازم به ذکر است که چنانچه از رابطه‌های قبلی (۲–۳۵) و (۲–۳۷) نیز استفاده شود، همین نتایج به‌دست می‌آید.

چنانچه صفحه‌ی مورد نظر در ارتفاع مشخصی از سیال واقع شود [شکل (۲–۲۰)]، توزیع فشار بر روی سطح مورد نظر ذوزنقه‌ای خواهد شد. توزیع ذوزنقه‌ای فشار بدین دلیل است که فشار نسبی بر روی سطح آزاد سیال برابر صفر است و با توجه به اینکه فشار با افزایش عمق افزایش می‌یابد، فشار نسبی در وجه بالایی صفحه‌ی مورد نظر (نقطه‌ی A) برابر $\gamma h_۱$ است. در این حالت ذوزنقه به مستطیل $ABDE$ و مثلث BCD تفکیک می‌شود و در هر قسمت، نیرو و محل اثر آن مشخص می‌شود، شکل (۲–۲۰).

۱- Pressure prism



شکل ۲-۱۹ منشور فشار و برآیند نیروهای وارد بر صفحه‌ی قایم (سطح آزاد سیال منطبق بر وجه بالایی صفحه‌ی مورد نظر) [۲].



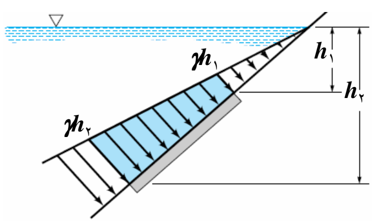
شکل ۲-۲۰ منشور فشار و برآیند نیروهای وارد بر صفحه‌ی مستطیلی قایم (سطح آزاد سیال بالاتر از وجه بالایی صفحه‌ی مورد نظر).

سپس با استفاده از رابطه‌های زیر مقدار نیروی برایند و محل اثر آن مشخص می‌شود:

$$F_R = F_1 + F_2 \quad (۲-۴۴)$$

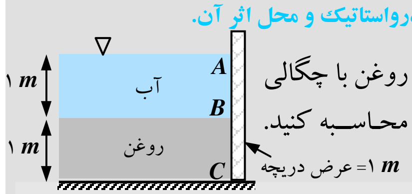
$$F_R y_R = F_1 y_1 + F_2 y_2 \quad (۲-۴۵)$$

برای سطوح مستوی که به‌صورت مایل درون سیال قرار می‌گیرند، می‌توان مطابق شکل (۲-۲۱)، منشور فشار را ترسیم کرد و سپس با محاسبه‌ی حجم منشور فشار، مقدار نیروی برایند را به‌دست آورد [۲]. لازم به ذکر است از منشور فشار برای حل مسایلی استفاده می‌شود که مقطع صفحه مستطیلی است. چنانچه مقطع صفحه مستطیلی نباشد، برای تعیین حجم و مرکز حجم منشور فشار بایستی انتگرال‌گیری انجام شود که در این‌گونه مسایل توصیه می‌شود از همان رابطه‌های (۲-۳۵) و (۲-۳۷) استفاده شود.



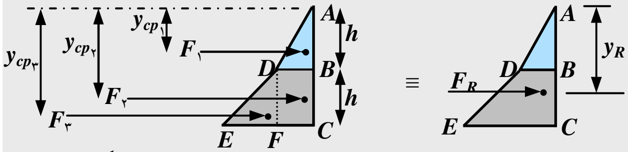
شکل ۲-۲۱ تغییرات فشار بر روی صفحه‌ی مستطیلی مستوی مایل.

مثال ۲-۱۰: استفاده از مفهوم منشور فشار برای محاسبه‌ی نیروی هیدرواستاتیک و محل اثر آن.



مطابق شکل، نیمی از فضای پشت دیوار از آب و نیمی دیگر از روغن با چگالی نسبی ۱/۵ پر شده است. اندازه و محل اثر نیروی برایند را محاسبه کنید.

پاسخ:



به‌منظور محاسبه‌ی مقدار و محل اثر نیروی برایند با استفاده از مفهـــوم استفاده از مفهوم منشور فشار، منحنی تغییرات فشار بر قسمت AC از دیوار در قسمت چپ شکل روبه‌رو ترسیم شده است که در آن منشور فشار به سه قسمت ABD، $BCFD$ و DFE تقسیم شده است. همچنین فرض شده است که مطابق شکل سمت راست، نیروی برایند، F_R، در فاصله‌ی y_R از نقطه‌ی A قرار گرفته باشد. چون دو شکل راست و چپ باید معادل باشند، مقدار نیروی برایند در شکل سمت راست، برابر مجموع نیروها در شکل سمت چپ است، یعنی $F_R = F_۱+F_۲+F_۳$ است. همچنین، بایستی مجموع گشتاور نیروها در شکل سمت چپ حول نقطه‌ی دلخواهی مانند A با گشتاور نیروی برایند در شکل سمت راست حول همان نقطه برابر باشد. به‌منظور محاسبه‌ی نیروی برایند بایستی ابتدا تک تک نیروهای مذکور محاسبه شوند. مقادیر نیروهای $F_۱$، $F_۲$ و $F_۳$ به‌ترتیب برابر با حجم قسمت‌های ABD، $BCFD$ و DFE است. برای محاسبه‌ی حجم این قسمت‌ها و با توجه به اینکه عرض دیوار عمود بر صفحه‌ی شکل برابر ۱ m است، کافی است تا مساحت این قسمت‌ها محاسبه و در عرض دیوار ضرب گردند. به‌منظور محاسبه‌ی مساحت مثلث ABD، مستطیل $BCFD$ و مثلث DEF ابتدا بایستی اندازه‌ی اضلاع DB و EF محاسبه شوند. اندازه‌ی اضلاع مذکور و از آنجا مقادیر نیروها و نیروی برایند به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$DB = FC = \gamma_w h_1 = \left(9810\, N/m^3\right)(1m) = 9810\, Pa$$

$$EF = \gamma_{oil} h_2 = SG_{oil}\gamma_w h_2 = (1.5)\left(9810\, N/m^3\right)(1m) = 14715\, Pa$$

$$F_1 = \left(\frac{1}{2}DB\right)(h_1)(b) = \frac{1}{2}(9810\, Pa)(1m)(1m) = 4905\, N$$

$$F_2 = (FC)(h_2)(b) = (9810\, Pa)(1m)(1m) = 9810\, N$$

$$F_3 = \frac{1}{2}(EF)(h_2)(b) = \frac{1}{2}(14715\, Pa)(1m)(1m) = 7357.5\, N$$

$$F_R = F_1 + F_2 + F_3 = (4905\, N) + (9810\, N) + (7357.5\, N) = \underline{\underline{22072.5 \quad N}}$$

به‌منظور محاسبه‌ی محل اثر نیروی برایند، y_R، گشتاور تک تک نیروها حول نقطه‌ی A با گشتاور نیروی برایند حول همان نقطه برابر قرار داده می‌شود. لازم به ذکر است که هر نیرو در مرکز سطح قسمت مربوطه عمل می‌کند. برای مثال، نیروی $F_۱$ در مرکز سطح مثلث ABD اثر می‌کند. مطابق جدول (۲-۱) مرکز سطح مثلث در فاصله‌ی $\frac{۲}{۳}$ ارتفاع مثلث از رأس آن قرار دارد، بنابراین $y_{cp۱} = \frac{۲}{۳}\, m$ است.

$$F_R y_R = F_1 y_{cp_1} + F_2 y_{cp_2} + F_3 y_{cp_3}$$

$$y_R = \frac{(4905\, N)\left[\left(\frac{2}{3}\right)(1m)\right] + (9810\, N)\left[(1m) + \left(\frac{1}{2}m\right)\right] + (7357.5\, N)\left[(1m) + \left(\frac{2}{3}m\right)\right]}{22072.5\, N}$$

$$\underline{\underline{y_R = 1.37 \quad m}}$$

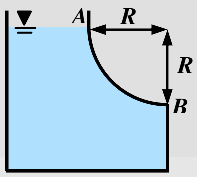
مسایل ۲-۴۹ الی ۲-۵۶

۲-۷-۴ نیروی هیدرواستاتیکی بر روی سطوح منحنی (خمیده)

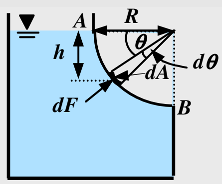
هنگامی که یک سطح منحنی درون سیال قرار گیرد، با تغییر انحنای سطح جسم، نیروی وارد بر آن نیز تغییر جهت می‌دهد. برای محاسبه‌ی مقدار نیرو می‌توان از روش مستقیم انتگرال‌گیری مطابق رابطه‌ی (۲-۳۱) استفاده کرد. در زیر با حل یک مثال استفاده از روش مستقیم شرح داده می‌شود. ک ۲-۳

مثال ۲-۱۱: استفاده از روش مستقیم انتگرال‌گیری برای محاسبه‌ی نیروی هیدرواستاتیک بر روی سطوح منحنی.

در شکل مقابل، مطلوب است محاسبه‌ی نیروی برایند وارد بر قسمت AB به روش مستقیم (عرض عمود بر صفحه‌ی ظرف ۱ متـــر است).



پاسخ:



به‌منظور محاسبه‌ی مقدار نیرو به روش مستقیم می‌توان از رابطـه‌ی (۲-۳۱) استفاده کرد. بدین منظور بایستی مطابق شکل روبه‌رو، جزء نیـروی وارد بر المانی از سطح منحنی به مساحت dA محاسبه شود و سپس با انتگرال‌گیری روی کل سطح مقدار کل نیرو را به‌دست آورد. با توجه به اینکه بر روی هر المان کوچک از سطح منحنی (dA) که در عمق h از سطح آزاد سیال قرار گرفته است، فشاری برابر با γh وارد می‌شود، نیروی وارد بر این المان کوچک، عمود بر سطح و برابر با $\gamma h dA$ است. بنابراین، نیروی برایند به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$F_R = \int_A \gamma h dA$$

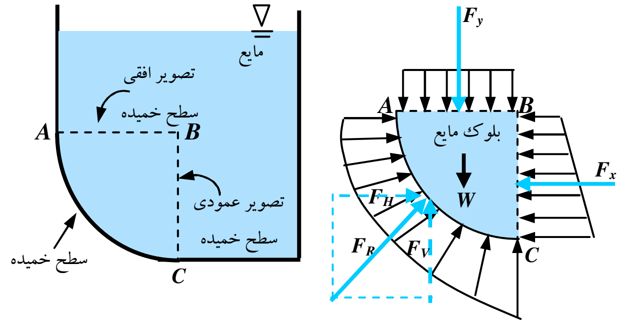
با توجه به اینکه $dA = Rd\theta$ و $h = R\sin\theta$ است، بنابراین خواهیم داشت:

$$F_R = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \gamma R^2 \sin\theta d\theta = \underline{\underline{\gamma R^2}}$$

مسایل ۲-۵۷ و ۲-۵۸

برای محاسبه‌ی نیروی وارد بر سطوح منحنی، غیر از روش انتگرال‌گیری مستقیم، روش دیگری نیز وجود دارد که استفاده از آن به‌مراتب راحت‌تر از روش مستقیم است. در این روش، ابتدا مطابق شکل (۲-۲۲) دیاگرام جسم آزاد بلوکی از سیال که یک وجه آن سطح منحنی و دو وجه دیگر آن سطوح افقی و قایم سطح منحنی باشد، انتخاب و از تعادل بلوک سیال، مؤلفه‌ی افقی (F_H) و مؤلفه‌ی قایم (F_V) نیروی برایند محاسبه می‌شود [۳]. در واقع سطح منحنی در دو راستای افقی و عمودی تصویر شده است و محاسبه‌ی این نیروها از رابطه‌های قبلی مربوط به سطوح مستوی به‌راحتی امکان‌پذیر است. با توجه به اینکه بلوک سیال نشان داده شده در شکل (۲-۲۲) درحال تعادل است، رابطه‌های زیر به‌دست می‌آید: ک ۲-۴

$$F_H = F_x \qquad (۲\text{-}۴۶)$$



شکل ۲-۲۲ محاسبه‌ی نیروی برآیند وارد بر سطح منحنی با درنظرگرفتن تصویر افقی و تصویر قایم سطح خمیده.

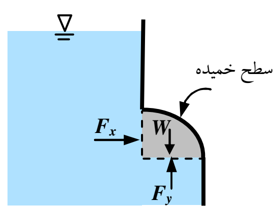
$$F_V = F_y + W \quad (۲-۴۷)$$

که در آن F_x و F_y به‌ترتیب عکس‌العمل مایع در دو راستای x و y است. لازم به ذکر است که علامت جمع در رابطه‌ی (۲-۴۷) به شکل برداری است. یعنی چنانچه دو بردار F_y و W در یک جهت باشند، با همدیگر جمع و چنانچه در دو جهت مخالف هم باشند، از همدیگر کم می‌شوند.

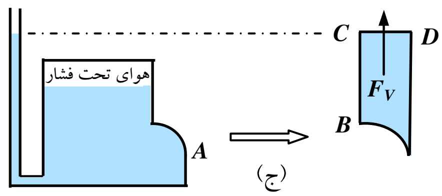
برای مثال در شکل (۲-۲۳) که سطح منحنی بالای سطح مایع قرارگرفته است، بردار نیروی وزن به‌سمت پایین و بردار نیروی F_y به‌سمت بالا است. بنابراین، برای محاسبه‌ی مؤلفه‌ی قایم نیروی برایند کافی است این دو نیرو از هم کسر گردند. با توجه به اینکه نیروی F_y همواره با وزن مایع در بالای سطح افقی تصویرشده برابر است، برای محاسبه‌ی مؤلفه‌ی قایم نیروی برایند F_V، کافی‌است دو خط قایم از نقطه‌ی ابتدایی و انتهایی سطح منحنی ترسیم و آنها را تا سطح آزاد مایع ادامه دهیم. بنابراین، سطحی ایجاد می‌شود که در طرفین آن دو خط قایم و در بالا و پایین آن به‌ترتیب سطح آزاد سیال و سطح منحنی قرار دارند [سطح $ABCD$ در شکل (۲-۲۴-ب)]. وزن سیالی که درون این حجم قرار گیرد (خواه سیال وجود داشته باشد و یا وجود نداشته باشد) برابر با مؤلفه‌ی قایم نیروی برایند وارد بر سطح منحنی است.

در شکل (۲-۲۴) نمونه‌هایی از نحوه‌ی محاسبه‌ی مؤلفه‌ی قایم نیروی برایند ارایه شده است. لازم به ذکر است که چنانچه در بالای سطح مایع، فشاری غیر از فشار آتمسفر وجود داشته باشد، ابتدا بایستی سطح آزاد معادل را به‌دست آورد و این سطح آزاد را مبنای محاسبات قرار داد، شکل (۲-۲۴- ج).

برای تعیین جهت نیروی F_V، کافی است به جهت نیروی برایند وارده از طرف سیال به سطح AB دقت شود. چنانچه مؤلفه‌ی قایم نیروی برایند به سمت بالا باشد، جهت F_V نیز به سمت بالا است و برعکس، چنانچه مؤلفه‌ی قایم نیروی برایند به سمت پایین باشد، جهت F_V نیز به سمت پایین است. بنابراین برای محاسبه‌ی F_V، ابتدا بهتر است سطح مورد نظر را از لحاظ جهت مؤلفه‌ی قایم نیروی برایند بررسی کرده و چنانچه جهت مؤلفه‌ی قایم نیروی برایند در قسمت‌های مختلف از سطح با همدیگر متفاوت است، به‌طور جداگانه آنها را بررسی کرد.



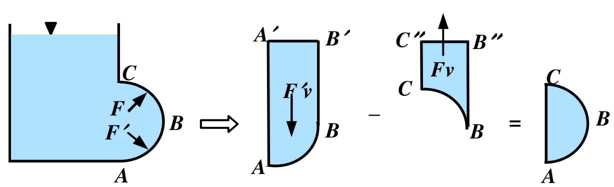
شکل ۲-۲۳ تعیین نیروی وارد بر سطح منحنی واقع در بالای سطح مایع.



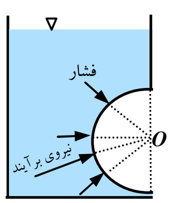
شکل ۲-۲۴ نمونه‌هایی از نحوه‌ی محاسبه‌ی مؤلفه‌ی قایم نیروی برایند؛ الف) سیال بالای سطح مورد نظر، ب) سیال پایین سطح مورد نظر، ج) سیال پایین سطح مورد نظر و تحت فشار.

برای مثال، در شکل (۲-۲۵) چنانچه هدف تعیین مؤلفه‌ی قایم نیروی برایند وارد بر سطح ABC باشد، بایستی سطح AB و سطح BC به‌طور جداگانه بررسی شود، زیرا مطابق شکل جهت مؤلفه‌ی قایم نیروی برایند F وارد بر سطح BC به‌سمت بالا و جهت مؤلفه‌ی قایم نیروی برایند F' وارد بر سطح AB به‌سمت پایین است. برای محاسبه‌ی مؤلفه‌ی قایم نیروی برایند F' وارد بر سطح AB یعنی F'_V بایستی حجم قسمت $ABB'A'$ محاسبه شود و سپس در وزن مخصوص سیال ضرب گردد، شکل (۲-۲۴- الف). برای محاسبه‌ی مؤلفه‌ی قایم نیروی برایند F وارد بر سطح BC یعنی F_V بایستی وزن سیال در قسمت $BCC''B''$ محاسبه شود، شکل (۲-۲۴- ب). با توجه به اینکه جهت‌های F_V و F'_V مخالف همدیگر است، لذا بایستی حجم دو قسمت $ABB'A'$ و $BCC''B''$ ازهمدیگر کسر شود که در این‌صورت تنها حجم ABC باقی خواهد ماند. بنابراین برای محاسبه‌ی مؤلفه‌ی قایم نیروی برایند وارد بر سطح ABC کافی است، حجم ABC محاسبه و در وزن مخصوص سیال ضرب شود.

چون همواره نیرو عمود بر سطح است، در سطوحی که قسمتی از قوس دایره هستند، جهت نیروی برایند طوری قرار می‌گیرد که از مرکز دایره می‌گذرد، شکل (۲-۲۶). چنانچه مؤلفه‌ی قایم و افقی نیروی برایند وارد بر سطح مورد نظر، مشخص باشد، به‌راحتی می‌توان مرکز اثر نیروی برایند را تعیین کرد.

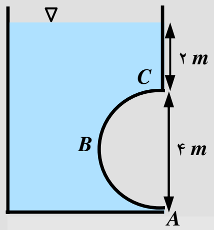


شکل ۲-۲۵ نحوه‌ی محاسبه‌ی مؤلفه‌ی قایم نیروی برایند در سطوحی که جهت مؤلفه‌ی قایم نیروی برایند در قسمت‌های مختلف سطح، با همدیگر متفاوت است.



شکل ۲-۲۶ نیروی هیدرواستاتیک وارد از طرف سیال بر سطح دایره‌ای.

مثال ۲-۱۲: محاسبه‌ی نیروی هیدرواستاتیک وارد بر سطوح منحنی.



در شکل روبه‌رو اگر عرض تانک ۳ متر و سیال مورد استفاده آب باشد، مطلوب است نیروی برایند وارد بر سطح نیم‌دایره‌ای ABC و زاویه‌ی این نیرو با افق.

پاسخ:

برای محاسبه‌ی نیروی برایند وارد بر سطح ABC ابتدا بایستی نیروی افقی و نیروی قایم وارد بر این سطح به‌طور جداگانه محاسبه شوند. برای محاسبه‌ی نیروی افقی وارد بر سطح، بایستی سطح ABC در راستای قایم تصویر شود. با توجه به اینکه عرض عمود بر صفحه ۳ متر است، لذا تصویر قایم سطح ABC در راستای قایم، مستطیلی به طول ۴ متر و عرض ۳ متر خواهد بود. با توجه به اینکه مرکز سطح مستطیل در وسط آن قرار دارد، با احتساب ۲ متر آب بالای نقطه‌ی C، ۴ متر آب بالای مرکز سطح مستطیل قرار می‌گیرد. لذا، نیروی افقی وارد بر سطح ABC به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$F_H = \gamma h_c A = \left(9.81\,kN/m^3\right)\left[(2m)+\left(\frac{4m}{2}\right)\right]\left[(4m)(3m)\right] = 470.9\,kN$$

برای محاسبه‌ی نیروی عمودی وارد بر سطح ABC نیز کافی است مطابق شکل (۲-۲۵)، حجم مایع در نیم‌دایره‌ی ABC، محاسبه گردیده و در وزن مخصوص آب ضرب شود:

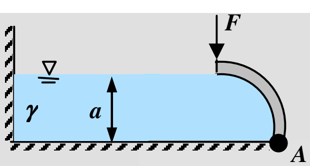
$$F_V = \gamma \forall_{ABC} = \left(9.81\,kN/m^3\right)\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{4}(4m)^2\right](3m)\right\} = 184.9\,kN$$

نیروی برایند و زاویه‌ی بردار آن با افق به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$F_R = \sqrt{{F_H}^2 + {F_V}^2} = \sqrt{(470.9\,kN)^2 + (184.9.8\,kN)^2} = \underline{\underline{505.9 \quad kN}}$$

$$\theta = tan^{-1}\left(\frac{F_V}{F_H}\right) = tan^{-1}\left(\frac{470.9\,kN}{184.9\,kN}\right) = \underline{\underline{21.43^\circ}}$$

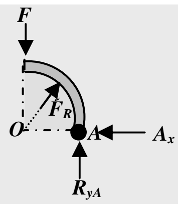
مثال ۲ – ۱۳ ، مع، ۸۵



در شکل روبه‌رو دریچه‌ی ربع دایره‌ای‌شکل به شعاع a آزادانه حول مفصل A دوران می‌کند. اگر دوران دریچه توسط نیروی قایم F مهار شده باشد، عکس العمل قایم وارد بر تکیه‌گاه A (R_{yA}) در واحد عرض دریچه برابر است با:

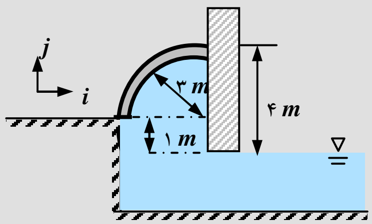
پاسخ:

برای محاسبه‌ی عکس العمل قایم تکیه‌گاه A، بایستی دیاگرام جسم آزاد دریچه رسم شود. با توجه به اینکه



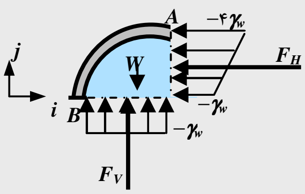
دریچه قسمتی از دایره است، راستای نیروی برایند وارد بر دریچه از طرف مایع، F_R، از مرکز دایره (نقطه‌ی O) عبور می‌کند.در مفصل A، نیز دو نیروی افقی و عمودی وجود دارد. از آنجا که دریچه تحت نیروهای وارده در تعادل است، گشتاور کلیه‌ی نیروها، حول نقطه‌ی O، بایستی برابر صفر باشد.
با توجه به اینکه راستای نیروهای F ،F_R و A_x از نقطه‌ی O می‌گذرد، این نیروها گشتاوری حول این نقطه ایجاد نمی‌کنند. بنابراین، گشتاور نیروی R_{yA} حول نقطه‌ی O نیز باید برابر صفر باشد. چون اندازه‌ی بازوی نیروی R_{yA} حول نقطه‌ی O، یعنی فاصله‌ی OA، مخالف صفر است، لذا عکس العمل قایم نقطه‌ی A، R_{yA}، برابر صفر خواهد بود.

مثال ۲ - ۱۴ ، مع، ۸۸



سطح منحنی فلزی نشان داده شده در شکل روبه‌رو درنظر گرفته می‌شود. حجم زیرین این سطح کلاً از سیال پر شده است. بردار نیروهای وارد بر سطح در واحد عرض بر حسب کیلونیوتن چقدر است؟ ($g = ۱۰\ m/s^۲$ ،$\pi = ۳$ ،$\gamma = ۱۰۰۰۰\ N/m^۳$)

پاسخ:



برای محاسبه‌ی نیروهای وارد بر سطح فلزی، مطابق شکل (۲-۲۲) سطح در دو راستای افقی و قایم تصویر می‌شود. نیروی برایند، F_R، از نیروی اعمال شده از طرف سیال بر صفحه در دو راستای افقی و قایم محاسبه می‌شود. برای محاسبه‌ی نیروی افقی از مفهوم منشور فشار استفاده می‌شود. فشار در نقطه‌ی A به‌علت اینکه ازسطح آزاد سیال ۴ متر بالاتر است، برابر با $-۴\gamma_w$ و در نقطه‌ی B ، به‌علت اینکه ۱ متر بالاتر از سطح آزاد سیال قرار دارد، برابر با $-\gamma_w$ است. برای محاسبه‌ی F_H و F_V کافی است به‌ترتیب مساحت ذوزنقه و مستطیل در عرض عمود بر صفحه ضرب شود، تا حجم منشور فشار به‌صورت زیر به‌دست آید:

$$F_h = \left(\frac{-\gamma_w - 4\gamma_w}{2}\right)(3m)(1m) = -7.5\gamma_w = -7.5\left(10kN/m^3\right) = -75kN$$

$$F_v = -\gamma_w\,(3m)(1m) = -3\gamma_w = -3\left(10kN/m^3\right) = -30kN$$

برای محاسبه‌ی نیروی وزن کافیست تا حجم سیال در ربع دایره در وزن مخصوص سیال ضرب شود:

$$W = \gamma_w \forall = \gamma_w\left[\frac{\pi}{4}(3m)^2\right](1m) = 6.75\,\gamma_w = 6.75\left(10kN/m^3\right) = 67.5kN$$

برای محاسبه‌ی نیروی برایند، F_R از رابطه‌ی برداری به‌صورت زیر استفاده می‌شود: مسایل ۲-۵۹ الی ۲-۸۶

$$F_R = -F_H\hat{i} + \left(F_V - W\right)\hat{j} = -\left(-75kN\right)\hat{i} + \left(-30kN - 67.5kN\right)\hat{j} = \underline{\underline{75\hat{i} - 97.5\hat{j}}}$$

۲-۸ شناوری

اگر جسمی در درون مایعی وزن شود، ترازو وزن آن را کمتر از مقدار آن در هوا نشان می‌دهد و یا اجسامی سبک در طبیعت وجود دارند که بر سطح آب شناور می‌مانند. این مشاهدات نشان می‌دهد که از طرف مایع بر جسم غوطه‌ور در آن، نیرویی به سمت بالا اثر می‌کند. چنانچه جسمی درون مایع غوطه‌ور و یا شناور شود، به‌طوری‌که قسمتی و یا کل جسم درون مایع قرار گیرد، از طرف مایع بر جسم نیرویی بالابرنده اثر می‌کند که به آن نیروی شناوری[1] گفته می‌شود.

ک ۲-۵

نیروی شناوری به‌علت افزایش فشار سیال در عمق به‌وجود می‌آید. برای مثال، چنانچه صفحه‌ای با سطح مقطع A و با ضخامت t مطابق شکل (۲-۲۷) به‌طور افقی درون مایعی با چگالی ρ_f قرار گیرد، بر سطح بالایی صفحه نیرویی معادل $\rho_f ghA$ وارد می‌شود. به‌طور مشابه بر سطح پایینی صفحه نیز نیرویی معادل $\rho_f g(h+t)A$ وارد می‌شود.

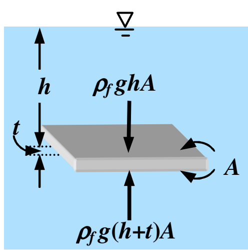
با توجه به اینکه جهت نیروهای وارد بر بالا و پایین صفحه مخالف همدیگر است، بنابراین نیروی برایند که همان نیروی شناوری، F_B، است، از تفاضل این دو نیرو به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$F_B = F_{bottom} - F_{top} = \rho_f g\left(h+t\right)A - \rho_f ghA = \rho_f g\forall \qquad (۲\text{-}۴۸)$$

که $\forall = A\times t$ حجم جسم مورد نظر است. مقدار $\rho_f g\forall$ در رابطه‌ی (۲-۴۸) برابر با وزن مایعی است که حجم آن با حجم جسم برابر است. مطابق رابطه‌ی (۲-۴۸) نیروی شناوری به فاصله‌ی قرارگیری صفحه در سیال، h، و چگالی صفحه بستگی ندارد. لازم به ذکر است که رابطه‌ی (۲-۴۸) برای صفحه‌ای با هندسه‌ی ساده به‌دست آمد، لیکن این رابطه برای صفحاتی با هندسه‌ی غیرمشخص دیگر نیز صادق است. مطابق رابطه‌ی (۲-۴۸) می‌توان نتیجه گرفت که نیروی شناوری وارد بر صفحه برابر با وزن سیال هم حجم آن است. محل اثر نیروی شناوری در مرکز حجم جابه‌جاشده (قسمتی که در آب فرو رفته است) قرار دارد. این نظریه برای اولین بار توسط ارشمیدس[2] مطرح گردید.

برای اجسام شناور، بایستی وزن جسم با نیروی شناوری برابر باشد. نیروی شناوری برابر با وزن سیالی است که حجم آن برابر حجم قسمت مستغرق ($\forall_{sub}$) جسم است. بنابراین، رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید [۳]:

$$F_B = W \quad ; \quad \rho_f g\forall_{sub} = \rho_{body} g\forall_{total} \quad ; \quad \frac{\forall_{sub}}{\forall_{total}} = \frac{\rho_{body}}{\rho_f} \qquad (۲\text{-}۴۹)$$



شکل ۲-۲۷ دیاگرام جسم آزاد برای صفحه‌ی تخت غوطه‌ور در سیال.

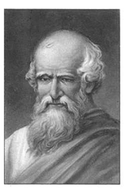
۱- Buoyant force ۲- Archimedes

نسبت حجمی استغراق جسم غوطه‌ور ($\forall_{sub}/\forall_{total}$) برابر با نسبت چگالی متوسط جسم به چگالی سیال است. هنگامی‌که نسبت چگالی متوسط جسم به چگالی سیال برابر یا بزرگ‌تر از ۱ باشد، جسم شناور کاملاً مستغرق خواهد شد. هر چه چگالی سیال بیشتر باشد، نیروی شناوری بزرگ‌تر و حجم کوچک‌تری از جسم مستغرق می‌شود. بنابراین، کشتی در سواحل شهر بمبئی هندوستان که چگالی آب شور آن از سواحل انگلستان بیشتر است، سریع‌تر و راحت‌تر حرکت می‌کند. اگر کشتی در سواحل بمبئی بارگیری کند و به‌طرف سواحل انگلستان حرکت کند، با نزدیک شدن به سواحل انگلستان، با توجه به اینکه چگالی آب کاهش می‌یابد، حجم بیشتری از کشتی مستغرق می‌شود که ممکن است خطرآفرین باشد. ک ۲–۶

چنانچه جسمی درون سیالی غوطه‌ور باشد و چگالی متوسط آن با چگالی سیال برابر باشد، جسم در همان موقعیت ثابت می‌ماند. حال چنانچه چگالی جسم از چگالی سیال بزرگ‌تر باشد، جسم درون سیال غرق شده و به سمت پایین سقوط می‌کند و درصورتی‌که چگالی جسم از چگالی سیال کوچک‌تر باشد، جسم به طرف بالا (سطح سیال) حرکت کرده و شناور می‌شود، شکل (۲–۲۸).

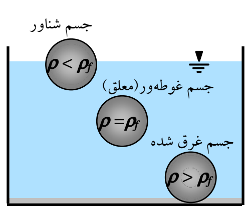
با توجه به مطالب ارایه شده در خصوص نیروی شناوری می‌توان گفت که بر هر جسم که در سیال سقوط کند، مانند سقوط ذرات رسوب در آب و یا سقوط سیب از درخت، علاوه بر نیروی وزن جسم و نیروی مقاومت ناشی از سیال در برابر حرکت، نیروی شناوری (ارشمیدس) نیز بایستی درنظر گرفته شود.

معرفی یک دانشمند



ارشمیدس (۲۱۲– ۲۸۷ قبل از میلاد مسیح)

این دانشمند در در کشور یونان به‌دنیا آمد. ارشمیدس بزرگ‌ترین ریاضی‌دان، فیزیک‌دان و مهندس در یونان باستان به‌شمار می‌رود. وی نظریه‌ی معروف شناوری را ارایه کرد. وی در کودکی اخترشناسی را از پدر آموخت و دستگاه‌هایی برای مشاهدات ابداع کرد. وی همچنین اصول و مفاهیم زیادی در دینامیک سیالات و جامدات را کشف کرد. وی جزو معدود افرادی است که هم در عمل و هم در تئوری مشهور بوده است. از کشف‌های ایشان می‌توان به مرکز شناوری، مرکز ثقل، ساخت پمپ‌های پروانه‌ای اشاره کرد. وی در جنگ به‌منظور از بین بردن کشتی‌های حمله‌کننده دشمن از اصول چیدمان آیینه‌ها استفاده نمود. ارشمیدس در سال ۲۱۲ قبل از میلاد مسیح، توسط سربازی رومی در خلال محاصره‌ی شهر سیراکیوس در جنوب سیسیل کشته شد.



شکل ۲–۲۸ حالت‌های مختلف قرارگیری جسم در درون سیال بر اساس مقایسه‌ی بین چگالی سیال و چگالی جسم [۳].

چون نیروی شناوری برابر وزن مخصوص سیال در حجم جسم است، چنانچه سیال مورد نظر گاز باشد، با توجه به اینکه وزن مخصوص گازها در مقابل مایعات ناچیز است، ممکن است بتوان از نیروی شناوری صرف‌نظر کرد. البته حالت‌های خاصی از حرکت در گازها مانند بالا رفتن هوای گرم در یک محیط سرد و نیز بالا رفتن بالن‌های تحت گاز هلیم در هوا وجود دارند که از نیروی شناوری نمی‌توان صرف‌نظر کرد. در بالن‌های با گاز هلیم، بالن در اثر وجود نیروی شناوری تا جایی به طرف بالا حرکت می‌کند که چگالی هوا که با افزایش ارتفاع در حال کاهش است با چگالی گاز هلیم برابر شود.

مثال ۲ - ۱۵ ، م‌ک، ۸۵

یک مکعب به ضلع ۴ متر و به جرم ۱۶ تن تا چه عمقی در آب با وزن مخصوص ۱۰۰۰۰ نیوتن بر مترمکعب فرو می‌رود؟ ($g = 10 m/s^2$)

پاسخ:

برای محاسبه‌ی عمق فرورفتن مکعب در آب (y)، بایستی وزن جسم با نیروی شناوری برابر قرار داده شود. نیروی شناوری به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

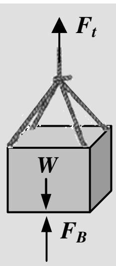
$$F_B = \gamma_w \forall_{sub} = \left(10000\, N/m^3\right)\left[(4m)(4m)\,y\right] = 160000\,y\,N = 160\,y\,kN$$

وزن جسم و سپس با برابر قرار دادن نیروهای وزن و شناوری مقدار y به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$W = mg = (16 Ton)(10 kN/Ton) = 160 kN$$

$$W = F_B \quad ; \quad 160 kN = 160\,y\,kN \quad ; \quad \underline{\underline{y = 1 \quad m}}$$

مثال ۲-۱۶: کاهش وزن بلوک بتنی در آب دریا.



برای ساختمان یک پروژه در زیر سطح آب دریا، بلوک‌های بتنی به ابعاد $0.4\, m \times 0.4\, m \times 3\, m$ توسط جرثقیلی جابه‌جا می‌شود. چنانچه چگالی آب دریا، $1025\, kg/m^3$ و چگالی بتن $2300\, kg/m^3$ باشد، مطلوب است تعیین نیروی کابل جرثقیل، F_t،

(الف) هنگامی که بلوک بتنی در هوا باشد، **(ب)** هنگامی که بلوک بتنی در آب باشد.

پاسخ:

(الف) برای محاسبه‌ی نیروی کشش کابل در هوا، با توجه به اینکه وزن مخصوص هوا ناچیز است از نیروی شناوری وارد از طرف هوا بر بلوک مکعبی‌شکل صرف‌نظر می‌شود. بنابراین، تنها نیروهای حاکم وزن بلوک بتنی و نیروی کشش کابل هستند که به‌صورت زیر بایستی با همدیگر برابر باشند:

$$F_T = W = \rho_{concrete}\, g \forall = \left(2300\, kg/m^3\right)\left(9.81\, m/s^2\right)\left[\underbrace{(0.4m)(0.4m)(3m)}_{\forall = 0.48m^3}\right]$$

$$\underline{F_T = 10830 \quad N}$$

(ب) هنگامی‌که بلوک بتنی درون آب دریا قرار می‌گیرد، علاوه بر وزن و نیروی کشش کابل، نیروی شناوری نیز به سمت بالا بر جسم وارد می‌شود. بنابراین، رابطه‌ی تعادل جسم به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$F_T = W - F_B = W - \rho_f\, g \forall = (10830\, N) - \left(1025\, kg/m^3\right)\left(9.81\, m/s^2\right)\left(\underbrace{0.48m^3}_{\forall}\right)$$

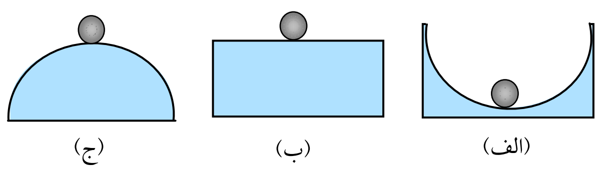
$$\underline{\underline{F_T = 6004 \quad N}}$$

کشش کابل در حالتی که بلوک بتنی درون آب قرار گیرد، کمتر از حالتی است که بلوک بتنی در هوا معلق باشد.

مسایل ۲-۸۷ الی ۲-۹۸

۲-۹ پایداری اجسام غوطه‌ور و شناور

یکی از کاربردهای مهم مفهوم شناوری، پایداری اجسام شناور و غوطه‌ور است. پایداری اجسام شناور و غوطه‌ور نقش مهمی در طراحی کشتی‌ها و زیردریایی‌ها دارد. به‌صورت کیفی پایداری اجسام به دو دسته‌ی پایداری در عمق و پایداری چرخشی تقسیم می‌شود. برای روشن شدن مفهوم پایداری و ناپایداری، در شکل (۲-۲۹)، سه توپ در وضعیت‌های مختلف قرارگیری روی کف زمین نشان داده شده است. در حالت اول، توپ در وضعیت پایدار[۱] قرار دارد، یعنی چنانچه به هر دلیلی توپ از موقعیت اولیه‌ی خود به طرف راست و یا چپ منحرف شود، دوباره با یک نیروی بازگرداننده توپ به موقعیت ابتدایی خود برمی‌گردد، شکل (۲-۲۹- الف) را نشان می‌دهد. حالت دوم قرارگیری، حالت پایدار خنثی[۲] را نشان می‌دهد. یعنی در این حالت چنانچه توپ از حالت اولیه‌ی خود خارج شود، دوباره در موقعیت جدید، پایداری خود را به دست می‌آورد. بنابراین جسم در این حالت نه تمایلی به برگشت به موقعیت ابتدایی دارد و نه به حرکت خود ادامه می‌دهد، شکل (۲-۲۹- ب). حالت سوم قرارگیری توپ روی کف نشان‌دهنده‌ی وضعیت ناپایدار[۳] است. یعنی ممکن است در یک لحظه توپ در حال تعادل و سکون باشد، ولی با کوچک‌ترین نیرویی، از حالت پایدار خارج شده و به‌طرف پایین شیب حرکت می‌کند. در این حالت هیچ‌گاه جسم به موقعیت اولیه‌ی خود باز نمی‌گردد و به‌طرف یک موقعیت تعادلی جدید نیز پیش نمی‌رود [۳].



شکل ۲-۲۹ وضعیت قرارگیری توپ روی کف زمین؛ الف) حالت پایدار، ب) پایدار خنثی، ج) ناپایدار.

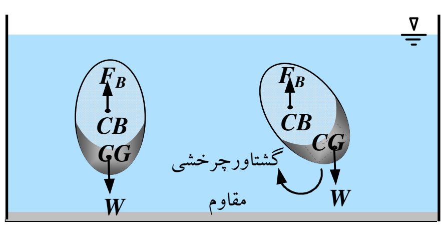
۱- Stable
۲- Neutrally stable
۳- Unstable

برای اجسام غوطه‌ور و شناور در حال تعادل استاتیکی، نیروی وزن با نیروی شناوری در توازن است و در نتیجه این اجسام ذاتاً در جهت عمودی پایدار هستند. لیکن، نوع پایداری آنها در دو حالت غوطه‌ور و شناور با همدیگر متفاوت است. در حالت غوطه‌ور، پایداری جسم از نوع پایداری خنثی است، زیرا با اعمال نیرو بر جسم و حرکت آن، جسم در موقعیت دیگری مجدداً در حال تعادل قرار می‌گیرد. اجسام شناور در راستای عمودی کاملاً پایدار بوده و چنانچه جسم شناور توسط نیروی خارجی کمی به‌طرف بالا و یا پایین کشیده شود، مجدداً پس از برداشتن نیروی خارجی، به حالت اولیه‌ی خود بر می‌گردد.

پایداری چرخشی اجسام غوطه‌ور بستگی به موقعیت نسبی مرکز ثقل، **CG** و مرکز شناوری، **CB** (مرکز حجم جابه‌جا شده) دارد. یک جسم غوطه‌ور زمانی پایدار است که مرکز ثقل جسم به‌طور مستقیم پایین مرکز شناوری قرار داشته باشد. به‌عبارت دیگر مرکز ثقل جسم حتی الامکان در قسمت پایین آن قرار داشته باشد و یا به اصطلاح سنگینی جسم در قسمت پایین باشد. در این حالت چنانچه یک گشتاور چرخشی به جسم اعمال شود و بخواهد تعادل آن را به‌هم بزند، یک گشتاور چرخشی مقاوم آن را به حالت اول خود باز می‌گرداند، شکل (۲-۳۰). به‌همین دلیل در طراحی زیردریایی‌ها سعی می‌شود تا حتی الامکان موتور و کابین کارکنان کشتی در نیمه‌ی پایینی زیردریایی باشد تا محل اثر نیروی وزن به قسمت پایینی زیردریایی منتقل گردد. لازم به ذکر است که چنانچه محل اثر نیروی وزن و شناوری در یک نقطه باشند، یعنی جسم غوطه‌ور همگن باشد، جسم در حال پایدار خنثی خواهد بود.

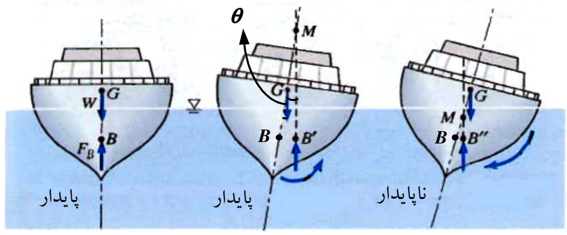
پایداری چرخشی اجسام شناور نیز مانند اجسام غوطه‌ور است و تا زمانی که موقعیت مرکز ثقل در راستای عمودی پایین‌تر از موقعیت مرکز شناوری باشد، جسم پایدار است. در مورد اجسام شناور حتی اگر موقعیت مرکز ثقل در راستای عمودی بالاتر از موقعیت مرکز شناوری باشد، ممکن است در بعضی شرایط، مطابق شکل (۲-۳۱)، جسم پایدار باقی بماند. با توجه به شکل (۲-۳۱)، چنانچه به جسم شناور، گشتاوری در جهت واژگون کردن آن اعمال شود، حجم قسمتی که داخل سیال قرار می‌گیرد، تغییر می‌کند و در نتیجه موقعیت مرکز شناوری از نقطه‌ی **B** به نقطه‌ی **B′** منتقل می‌شود. با توجه به اینکه موقعیت مرکز ثقل معمولاً ثابت است، چنانچه فاصله‌ی نقطه‌ی **B′** نسبت به **B** قابل ملاحظه باشد، گشتاور چرخشی مقاوم ناشی از نیروی ثقل و شناوری به‌وجود می‌آید که تمایل دارد جسم را به حالت اول خود باز گرداند. ک ۲-۷

پایداری اجسام شناور بر اساس ارتفاع متاسنتریک[1] سنجیده می‌شود. ارتفاع متاسنتریک، **GM**، در واقع فاصله‌ی بین مرکز ثقل و نقطه‌ی متاسنتر، **M**، است. نقطه‌ی متاسنتر نیز از تقاطع خطوط اثر نیروی شناوری قبل و بعد از چرخش حاصل می‌شود.



شکل ۲-۳۰ پایداری چرخشی اجسام غوطه‌ور در حالتی که مرکز ثقل پایین‌تر از مرکز شناوری باشد.

[1]- Metacentric height



شکل ۲-۳۱ پایداری چرخشی اجسام شناور و موقعیت قرارگیری متاسنتر [۳].

در اجسام شناور چنانچه نقطه‌ی متاسنتر، M، بالاتر از مرکز ثقل، G، قرار بگیرد، یعنی فاصله‌ی GM (ارتفاع متاسنتریک) مثبت باشد، جسم پایدار است و برعکس، چنانچه نقطه‌ی متاسنتر، M، پایین‌تر از مرکز ثقل، G، قرار بگیرد، یعنی فاصله‌ی GM منفی باشد، جسم ناپایدار خواهد بود. لازم به ذکر است در حالتی‌که ارتفاع متاسنتریک منفی باشد، اعمال کوچکترین گشتاور ناشی از باد و یا هر عامل دیگر منجر به واژگونی جسم خواهد شد. اندازه‌ی ارتفاع متاسنتریک، درجه‌ی پایداری جسم شناور را نشان می‌دهد. هرچه اندازه‌ی ارتفاع متاسنتریک بیشتر باشد، درجه‌ی پایداری جسم بیشتر خواهد بود.

برای تعیین ارتفاع متاسنتریک، می‌توان از رابطه‌ی زیر استفاده کرد:

$$\overline{GM} = \overline{BM} - \overline{BG} = \frac{I}{\forall} - \overline{BG} \qquad (۲-۵۰)$$

که در آن I ممان اینرسی سطح مقطع جسم شناور در محل تماس سطح آزاد آب، حول محور افقی است که چرخش حول آن انجام می‌شود و $\forall$ حجم سیال جابه‌جا شده توسط جسم است.

چنانچه زاویه‌ی بین خطوط اثر نیروی شناوری قبل و بعد از چرخش مطابق شکل (۲-۳۱) برابر θ باشد، مقدار گشتاور مورد نیاز برای چرخش جسم به اندازه‌ی θ از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$M = W\,\overline{GM}\sin\theta \qquad (۲-۵۱)$$

که در آن M گشتاور مورد نیاز برای چرخش جسم شناور و W وزن جسم است.

چنانچه گشتاور اعمالی وارد بر جسم شناور برداشته شود، جسم شناور حول محور چرخش شروع به نوسان می‌کند. برای محاسبه‌ی زمان تناوب یک دور کامل از نوسان جسم شناور، T، می‌توان از رابطه‌ی زیر استفاده کرد [۴]:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{k^2}{g\overline{GM}}} \qquad (۲-۵۲)$$

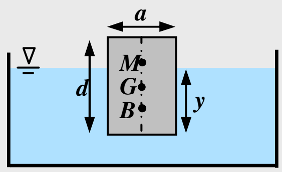
که در آن k شعاع ژیراسیون حول محور چرخش است و از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$k = \sqrt{\frac{gI}{W}} \qquad (۲-۵۳)$$

مثال ۲ - ۱۷ ، م‌ک، ۸۲

مکعب مستطیلی به قاعده‌ی مربع (ابعاد a) و ارتفاع d با چگالی نسبی s در روی سطح آب قرار گرفته است. حداقل نسبت a/d برای پایداری چقدر است؟

پاسخ:



برای محاسبه‌ی مقدار ارتفاع بلوک که در آب فرو رفته است، بایستی نیروی شناوری با وزن بلوک مکعب مستطیل برابر باشد. عمق فرورفتن بلوک مکعبی، y به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$F_B = W \quad ; \quad \rho_w g \overbrace{a^2 y}^{\forall_{sub}} = \overbrace{\rho_{solid}}^{s\rho_w} g \overbrace{a^2 d}^{\forall_{cube}} \quad ; \quad y = s\,d$$

برای محاسبه‌ی اندازه‌ی GM از رابطه‌ی (۲-۵۰)، ابتدا بایستی فاصله بین مرکز ثقل جسم و مرکز شناوری تعیین شود. مرکز ثقل مکعب مستطیل روی محور تقارن آن و در وسط ارتفاع مکعب یعنی $d/2$ است. مرکز ثقل قسمت مستغرق نیز در وسط ارتفاع قسمت مستغرق، $y/2$ قرار می‌گیرد، لذا خواهیم داشت:

$$\overline{BG} = \frac{d}{2} - \frac{y}{2} = \frac{d}{2} - \frac{sd}{2} \quad ; \quad \overline{BG} = (1-s)\frac{d}{2}$$

برای محاسبه‌ی I در رابطه‌ی (۲-۵۰) بایستی ممان اینرسی مقطع مکعب مستطیل یعنی مربع محاسبه شود. بدین منظور از روابط جدول (۲-۲) استفاده می‌شود. بنابراین، خواهیم داشت:

$$I = \frac{1}{12}(a)(a^3) = \frac{1}{12}a^4$$

همچنین حجم سیال جابه‌جا شده و از آنجا ارتفاع متاسنتریک به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\forall = a^2 y = a^2 sd$$

$$\overline{GM} = \overline{BM} - \overline{BG} = \frac{I}{\forall} - \overline{BG} = \frac{\frac{1}{12}a^4}{a^2 sd} - (1-s)\frac{d}{2} = \frac{a^2}{12sd} - (1-s)\frac{d}{2}$$

به‌منظور پایداری، بایستی ارتفاع متاسنتریک مثبت باشد، بنابراین خواهیم داشت:

مسایل ۲-۹۹ الی ۲-۱۰۳

$$\overline{GM} = \frac{a^2 - 6sd^2(1-s)}{12sd} \geq 0 \quad ; \quad \underline{\underline{\frac{a}{d} \geq \sqrt{6s(1-s)}}}$$