فصل ۱

اصول مقدماتی

به‌طورکلی می‌توان گفت که مکانیک سیالات علمی است که در آن به مطالعه‌ی رفتار سیال پرداخته می‌شود. همان‌طور که از تعریف سیال برمی‌آید، سیال همیشه تمایل به حرکت دارد. تنش‌های برشی و یا فشاری باعث حرکت سیال می‌شوند.

ابتدای این فصل اختصاص به ارایه مفهوم لزجت دارد و در ادامه دیدگاه‌های اویلری و لاگرانژی در تحلیل مسایل به‌صورت مختصرآمده است. سپس مفهوم حجم کنترل برای تحلیل حرکت سیال بیان شده و معادلات اساسی حرکت سیال در فرم انتگرالی بیان می‌گردد. این معادلات شامل رابطه‌ی پیوستگی (بقای جرم)، رابطه‌ی اندازه حرکت و رابطه‌ی انرژی است. سپس، مفاهیمی از سینماتیک سیال شامل تغییرمکان، چرخش و دوران بیان می‌شود. در بیشتر حالت‌های بررسی در این فصل، سیال تراکم‌ناپذیر مورد توجه قرار گرفته است.

۱-۱ مفهوم لزجت

هنگامی‌که دو سطح جامد نسبت به‌همدیگر شروع به حرکت کنند، نیروی اصطکاک در سطح تماس در خلاف جهت حرکت به‌وجود می‌آید. برای مثال، برای حرکت کردن میزی بر روی زمین، بایستی نیرویی بر میز وارد کرد که بیشتر از نیروی اصطکاک بین پایه‌های میز و زمین است. زمانی‌که سیال بر روی سطح جامد حرکت می‌کند و یا دو لایه‌ی سیال در کنار یکدیگر حرکت می‌کنند، شرایط مشابهی نیز ایجاد می‌شود. حرکت اجسام در هوا به‌مراتب آسان‌تر از حرکت در آب و روغن است. آزمایش‌ها نشان می‌دهد که سقوط یک توپ شیشه‌ای درون استوانه‌ای که با روغن پر شده است، بسیار کندتر از حرکت آن در آب است. به‌نظر می‌رسد که خاصیتی از سیال وجود دارد که معرف مقاومت سیال در برابر جریان‌یافتن و یا سیال بودن است. این خاصیت از سیال، لزجت[۱] نامیده می‌شود.

به‌منظور یافتن رابطه‌ای برای لزجت در جریان آرام، لایه‌ای از سیال را در بین دو صفحه با فاصله‌ی L درنظر بگیرید، شکل (۱-۱). در این حالت چنانچه نیروی ثابت (F) به صفحه‌ی بالایی وارد شود و در عین حال، صفحه‌ی پایینی ثابت نگاه داشته شود، صفحه‌ی بالایی با سرعت ثابت و برابر V به‌صورت پیوسته به‌حرکت در می‌آید. سیال در تماس با لایه‌ی بالایی به صفحه چسبیده (بنابر اصل عدم لغزش[۲]) و با همان سرعت صفحه‌ی بالایی حرکت می‌کند و در نتیجه، تنش برشی اعمالی به لایه‌ی سیال برابر $\tau = F/A$ است که A سطح تماس بین صفحه و سیال است. باتوجه به اصل عدم لغزش سیال، سرعت سیال در تماس با صفحه‌ی پایینی برابر با سرعت صفحه پایینی یعنی صفر است. در جریان پایدار و آرام، سرعت سیال بین دو صفحه به‌صورت خطی بین دو مقدار صفر و V تغییر می‌کند. بنابراین، توزیع سرعت و گرادیان سرعت به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$u(y) = \frac{y}{L}V \qquad ; \qquad \frac{du}{dy} = \frac{V}{L} \tag{۱-۱}$$

که در آن y فاصله‌ی عمودی از صفحه‌ی پایینی است. در بازه‌ی زمانی dt، صفحه‌ی بالایی به‌حرکت درآمده و نقطه‌ی N به اندازه‌ی $da = Vdt$ در امتداد صفحه حرکت کرده تا به نقطه‌ی N' می‌رسد. لذا، ذرات سیال در امتداد خط MN به‌اندازه‌ی $d\beta$ می‌چرخند. تغییرمکان زاویه‌ای یا کرنش المان MN و از آنجا نرخ کرنش در اثر تنش برشی τ، از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

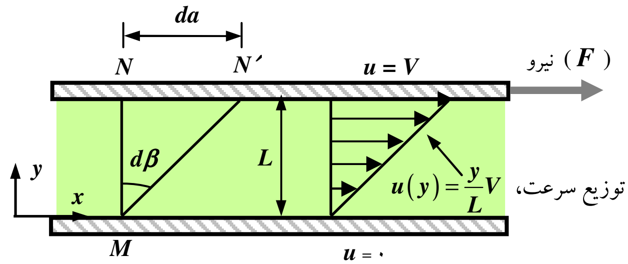
$$d\beta \approx \tan(d\beta) = \frac{da}{L} = \frac{Vdt}{L} = \frac{du}{dy}dt \qquad ; \qquad \frac{d\beta}{dt} = \frac{du}{dy} \tag{۲-۱}$$

رابطه‌ی (۱-۲) نشان می‌دهد که نرخ کرنش برشی المان سیال، معادل گرادیان سرعت (du/dy) است. به‌علاوه، مطالعات آزمایشگاهی نشان می‌دهد که برای سیالات در جریان آرام، نرخ کرنش (گرادیان سرعت) با تنش برشی τ متناسب است. بنابراین، رابطه‌ی (۱-۲) به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\tau \propto \frac{d\beta}{dt} \qquad ; \qquad \tau \propto \frac{du}{dy} \tag{۳-۱}$$

۱-Viscosity ۲- No-slip condition

شکل ۱-۱ رفتار سیال درجریان آرام بین دو صفحه‌ی موازی، هنگامی‌که صفحه‌ی بالایی با سرعت ثابت V حرکت کند.



سیالاتی که در آنها ارتباط تنش برشی و نرخ کرنش خطی است، سیالات نیوتنی[۱] نامیده می‌شوند. انتخاب این نام به این دلیل است که این نظریه برای اولین بار در سال ۱۶۸۷ توسط اسحاق نیوتن[۲] بیان گردید. بیشتر سیالات مانند آب، هوا، گازوییل و روغن از سیالات نیوتنی محسوب می‌شوند. برای جریان‌های آرام یک‌بعدی سیالات نیوتنی، رابطه‌ی (۱-۳) به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \qquad (۱-۴)$$

که در آن μ لزجت دینامیکی[۳] و یا لزجت نامیده می‌شود. واحد لزجت دینامیکی $N.s/m^2$ $(Pa.s)$ است.

در مکانیک سیالات و انتقال حرارت، نسبت لزجت دینامیکی به چگالی معمولاً در رابطه‌ها ظاهر می‌شود. این نسبت لزجت سینماتیکی[۴] نامیده شده است و به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\upsilon = \frac{\mu}{\rho} \qquad (۱-۵)$$

که در آن ρ چگالی سیال است. واحد لزجت سینماتیکی، m^2/s است.

لزجت سیال هم به فشار و هم به دما بستگی دارد. البته وابستگی آن به فشار کمتر از دما است. در مایعات، لزجت دینامیکی و لزجت سینماتیکی هر دو مستقل از تغییرات فشار هستند (مگر در فشارهای خیلی زیاد). در مورد گازها، لزجت دینامیکی در فشارهای کم تا متوسط مستقل از تغییرات فشار است، لیکن لزجت سینماتیکی باتوجه به اینکه چگالی با فشار تغییر می‌کند، همواره به فشار وابسته است.

۱-۲ دیدگاه‌های اویلری و لاگرانژی

برای تحلیل مسایل در مکانیک سیالات دو دیدگاه وجود دارد. باتوجه به اینکه سیال از مولکول‌های بسیاری تشکیل شده است، امکان بررسی حرکت تک‌تک مولکول‌ها وجود ندارد. درعوض، از تعداد متوسطی از مولکول‌ها که حجم بسیار کوچکی دارند استفاده می‌گردد. این حجم که ذره[۵] نامیده می‌شود، در مقایسه با قلمروی مکانی مورد مطالعه کوچک است، اما در مقایسه با فاصله‌ی مولکولی سیال بزرگ است. لذا، خواص سیال (از قبیل تنش، فشار، چگالی و غیره) را می‌توان با بیان خواص تک‌تک ذرات آن نسبت به زمان تعیین کرد. از طرفی دیگر، می‌توان گفت که خصوصیات سیال در تمام قلمروی مکانی

۱- Newtonian fluids ۲- Issac Newton ۳- Dynamic viscosity ۴- Kinematic viscosity ۵- Particle

به‌صورت پیوسته تغییر می‌کند و سیال به عنوان یک ماده‌ی پیوسته درنظر گرفته می‌شود. از آنجایی‌که این مفهوم در تمام موارد بررسی حرکت سیال صادق است، در یک زمان معین می‌توان خواص سیال را نسبت به موقعیت مکانی آن بیان کرد.

در دیدگاه لاگرانژی[۱]، مانند آنچه که در درس فیزیک با آن آشنا شده‌اید، به تعقیب ذرات سیال در حال حرکت پرداخته می‌شود و تغییرات خواص سیال در ارتباط با این ذرات نسبت به زمان بررسی می‌شود. در دیدگاه اویلری[۲]، از مفهوم توصیف قلمروی مکانی استفاده می‌شود. در این دیدگاه، خواص سیال در نقاط معینی که در قلمروی سیال قرار دارند بررسی خواهد شد. در حقیقت، در اینجا خواص ذرات سیال هنگامی که از نقاط مختلف می‌گذرند، قابل بررسی است.

اگر در دیدگاه‌های لاگرانژی و یا اویلری سرعت کلیه‌ی ذرات و یا کلیه‌ی نقاط در قلمروی سیال معلوم باشد، در آن‌صورت قلمروی سرعت[۳] سیال معلوم خواهد شد. قلمروی سرعت سیال در دستگاه مختصات کارتزین[۴] به‌صورت زیر بیان می‌گردد:

$$\vec{V} = u(x,y,z,t)\hat{i} + v(x,y,z,t)\hat{j} + w(x,y,z,t)\hat{k} \qquad (۱-۶)$$

که در آن u، v و w به‌ترتیب مؤلفه‌های سرعت در جهت‌های x، y و z هستند.

بنابرتعریف، شتاب برابر با نرخ زمانی سرعت ذره است. بنابراین، قلمروی شتاب[۵] در دستگاه مختصات کارتزین به‌صورت زیر بیان می‌گردد:

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(\vec{V}) = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}\frac{dt}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z}\frac{dz}{dt} \qquad (۱-۷)$$

هر ترم دوم الی چهارم سمت راست رابطه‌ی (۱-۷) شامل مشتق مکانی سرعت و مؤلفه‌ی سرعت در آن جهت است. لذا، رابطه‌ی (۱-۷) به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(\vec{V}) = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + u\frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w\frac{\partial \vec{V}}{\partial z} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{V} \qquad (۱-۸)$$

که در آن $\vec{\nabla}$ عملگر گرادیان است که در دستگاه مختصات کارتزین به‌صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial(\;)}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial(\;)}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial(\;)}{\partial z}\hat{k} \qquad (۱-۹)$$

رابطه‌ی (۱-۸) یک رابطه‌ی برداری است که مؤلفه‌های آن (a_x، a_y و a_z) به‌صورت زیر است:

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} \qquad (۱-۱۰)$$

$$a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} \qquad (۱-۱۱)$$

$$a_z = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} \qquad (۱-۱۲)$$

۱- Lagrangain approach ۲- Eulerain approach ۳- Velocity field ۴- Cartesian coordinates
۵- Acceleration field

مثال ۱-۱: یک میدان جریان با توزیع سرعت زیر داده شده است:

$$\vec{V} = \left(x^2 y\right)\hat{i} + \left(-xy^2\right)\hat{j}$$

بردار شتاب را به‌دست آورید.

پاسخ: با جایگزینی مؤلفه‌های سرعت در رابطه‌های (۱-۱۰) و (۱-۱۲)، بردار شتاب به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$a_x = \cancel{\frac{\partial u}{\partial t}} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = \left(x^2 y\right)\left(2xy\right) + \left(-xy^2\right)\left(x^2\right) + 0 = x^3 y^2$$

$$a_y = \cancel{\frac{\partial v}{\partial t}} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = \left(x^2 y\right)\left(-y^2\right) + \left(-xy^2\right)\left(-2xy\right) + 0 = x^2 y^3$$

مسایل ۱-۱ الـــی ۱-۳

$$\underline{\underline{\vec{a} = \left(x^3 y^2\right)\hat{i} + \left(x^2 y^3\right)\hat{j}}}$$

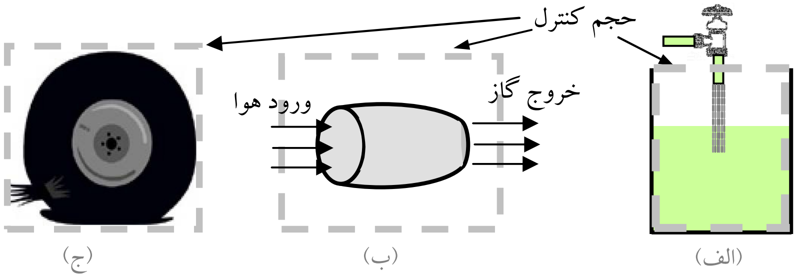
۱-۳ حجم کنترل

سیال ماده‌ای است که به آسانی حرکت می‌کند و ذرات تشکیل‌دهنده‌ی سیال در اثر نیروی برشی، نسبت به هم جابه‌جا می‌شوند. برای تعیین ویژگی‌های سیال از قانون‌های فیزیکی نظیر قانون‌های بقای جرم، اندازه حرکت و انرژی می‌توان استفاده کرد که برای سیستم سیال صادق است. بنابر تعریف، سیستم[۱] مجموعه‌ای از ماده با مقدار ثابت (با تعداد اتم یا ذرات سیال ثابت) است که می‌تواند جابه‌جا شود. به‌کاربردن مفهوم سیستم برای جامدات به‌راحتی صورت می‌گیرد، ولی شکل و اندازه‌ی یک سیستم سیال ممکن است تغییر کند و یا اینکه سیستم متحرک باشد. مولکول‌ها یا ذرات تشکیل‌دهنده‌ی یک جسم جامد در هنگام حرکت نسبت به‌هم جابه‌جایی ندارند، ولی در سیالات این جابه‌جایی صورت می‌گیرد.

در سیالات از مفهوم . حجم کنترل[۲] استفاده می‌شود. حجم کنترل (*CV*) شکلی اختیاری در فضا است که شامل تعدادی از نقاط ثابت در قلمروی سیال است. هیچ‌گونه قانون خاصی برای انتخاب شکل خاصی از حجم کنترل وجود ندارد، اما شکلی انتخاب می‌شود که تحلیل مسأله را آسان‌تر کند. چون سیال هنگام حرکت وارد حجم کنترل می‌گردد و یا از آن خارج می‌شود، مقدار ویژگی یک حجم کنترل می‌تواند نسبت به زمان تغییر کند. سطوح تشکیل‌دهنده‌ی یک حجم کنترل سطوح کنترل[۳] (*CS*) نامیده می‌شود.

انواع حجم کنترل در شکل (۱-۲) با خط‌چین خاکستری نشان داده شده است. در شکل (۱-۲-الف)، حجم کنترل ثابت[۴] (برای مثال، پرشدن یک مخزن) نشان داده شده است. حجم کنترل متحرک[۵] در شکل (۱-۲-ب)، برای مثال، شامل موتور هواپیمای در حال پرواز است. این حجم کنترل نسبت به ناظری که بر روی کره‌ی زمین قرار دارد، حجم کنترل متحرک است، اما نسبت به ناظر واقع در هواپیما ثابت است.

۱- System ۲- Control volume ۳- Control surfaces ۴- Fixed ۵- Moving



شکل ۱-۲: انواع حجم کنترل؛ الف) حجم کنترل ثابت، ب) حجم کنترل متحرک، ج) حجم کنترل شکل‌پذیر.

در شکل (۱-۲-ج)، حجم کنترل شکل‌پذیر[1] شامل یک تایر ماشین است که در حال پنچرشدن است. با گذشت زمان ابعاد تایر کاهش می‌یابد و حجم آن کم می‌شود. در بعضی موارد، ترکیبی از حالات فوق نیز حاصل می‌شود. برای مثال، تایر ماشین متحرکی را درنظر بگیرید که در حال پنچرشدن است. اگر حجم کنترل را تایر درنظر بگیریم، به مرور زمان حجم آن کاهش می‌یابد (حجم کنترل شکل‌پذیر) و در حال حرکت (حجم کنترل متحرک) است.

۱-۴ رابطه‌های انتگرالی جریان

۱-۴-۱ رابطه‌ی پیوستگی (بقای جرم)

اصل بقای جرم[2] یکی از قوانین حرکت سیال است که برای حجم کنترل به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} \rho d\forall}_{\text{نرخ زمانی تغییرجرم در داخل حجم کنترل}} + \underbrace{\int_{CS} \rho\left(\vec{V}\cdot\hat{n}\right)dA}_{\text{نرخ زمانی خالص جرم گذرنده از سطوح کنترل}} = 0 \qquad (۱۳-۱)$$

رابطه‌ی (۱-۱۳) رابطه‌ی پیوستگی[3] برای حجم کنترل ثابت و بدون تغییرشکل است. این رابطه نشان می‌دهد که تغییرات جرم گذرنده از سطوح کنترل نسبت به زمان، برابر تغییرات جرم در داخل حجم کنترل نسبت به زمان است. اگر جریان پایدار و تراکم‌ناپذیر باشد، رابطه‌ی (۱-۱۳) به‌صورت زیر ساده می‌شود:

$$\sum_{out} Q = \sum_{in} Q \qquad \left[Q = \int_A u dA\right] \qquad (۱۴-۱)$$

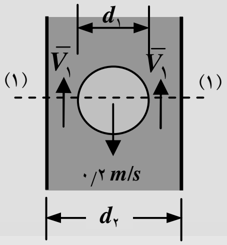
که در آن Q دبی حجمی، u مؤلفه‌ی سرعت عمود بر سطح A است. برای حجم کنترل متحرک (بدون شتاب) که در آن از سرعت نسبی سیال استفاده می‌شود، رابطه‌ی پیوستگی به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} \rho d\forall + \int_{CS} \rho\left(\vec{V}_r\cdot\hat{n}\right)dA = 0 \qquad \left[\vec{V} = \vec{V}_r + \vec{V}_{cv}\right] \qquad (۱۵-۱)$$

که در آن $\vec{V}$ سرعت مطلق، $\vec{V}_r$ سرعت نسبی و $\vec{V}_{cv}$ سرعت حجم کنترل است.

۱- Deforming　　۲- Conservation of mass　　۳- Continuity equation

مثال ۱-۲: کره‌ای به قطر $d_۱ = ۴۰۰\ mm$ با سرعت $۰/۲\ m/s$ در امتداد محور تقارن یک استوانه درحال سقوط است. قطر استوانه $d_۲ = ۵۰۰\ mm$ است. مقدار سرعت متوسط سیال اطراف جسم در مقطع وسط نیم‌کره [مقطع (۱-۱)]، $\bar{V}_۱$، چقدر است؟



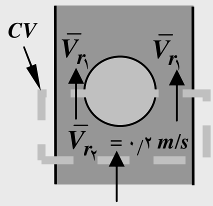
پاسخ: بر اثر سقوط کره در داخل استوانه، سیال اطراف کره جابه‌جا شده و به سمت بالا حرکت می‌کند. از حجم کنترل متحرک که با همان سرعت کره به‌سمت پایین حرکت می‌کند، استفاده می‌شود. در هر لحظه حجم کنترل شامل نیم‌کره و سیال اطراف و پایین کره خواهد بود. از اطراف کره، سیال با سرعت متوسط نسبی $\bar{V}_{r_۱}$ به سمت بالا حرکت می‌کند. اگرچه سیال پایین کره ساکن است، اما نسبت به این حجم کنترل با سرعت متوسط نسبی $\bar{V}_{r_۲} = ۰/۲\ m/s$ به‌سمت بالا حرکت می‌کند. باتوجه به اینکه مشخصات سیال (از قبیل سرعت) نسبت به زمان تغییری نمی‌کند، جریان پایدار و سیال نیز تراکم‌ناپذیر است. رابطه‌ی پیوستگی [رابطه‌ی (۱-۱۵)] برای حجم کنترل متحرک، سرعت نسبی مقطع (۱)، و از آنجا سرعت مطلق به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$Q_{r_1} = Q_{r_2}$$

$$\bar{V}_{r_1}\left\{\frac{\pi}{4}\left[(0.500\,m)^2-(0.400\,m)^2\right]\right\} = (0.2\,m/s)\left[\frac{\pi}{4}(0.500\,m)^2\right]$$

$$\bar{V}_{r_1} = 0.56\ m/s$$

$$\bar{V}_1 = \bar{V}_{r_1} + V_{CV} = \left[0.56\,m/s + (-0.2\,m/s)\right] \quad ; \quad \underline{\underline{\bar{V}_1 = 0.36\ \ m/s}}$$



۱-۴-۲ رابطه‌ی اندازه حرکت

قانون دوم نیوتن رابطه‌ی حرکت اجسام و نیروهای وارده بر آنها را بیان می‌کند. رابطه‌ی اندازه حرکت برای حجم کنترل ثابت و بدون تغییرشکل به‌صورت زیر خواهد بود:

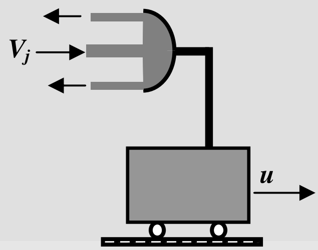
$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\vec{V}\rho d\forall}_{\text{نرخ زمانی تغییرات اندازه حرکت خطی در داخل حجم کنترل}} + \underbrace{\int_{CS}\vec{V}\rho\left(\vec{V}\cdot\hat{n}\right)dA}_{\text{نرخ زمانی خالص اندازه حرکت خطی گذرنده از سطوح کنترل}} = \underbrace{\sum_{CV}\vec{F}}_{\text{نیروهای وارد بر حجم کنترل}} \qquad (۱-۱۶)$$

رابطه‌ی (۱-۱۶) رابطه‌ی اندازه حرکت خطی[1] برای حجم کنترل ثابت و بدون تغییرشکل است. برای جریان پایدار، رابطه‌ی اندازه حرکت برای حجم کنترل متحرک بدون شتاب به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\int_{CS}\vec{V}_r\rho\left(\vec{V}_r\cdot\hat{n}\right)dA = \sum_{CV}\vec{F} \qquad (۱-۱۷)$$

۱- Linear momentum equation

مثال ۱ – ۳، مم، ۸۶ جت آب مطابق شکل روبه‌رو به یک پره برخورد نموده و به انـدازه‌ی 180° تغییـر مسیـر می‌دهـد. سرعت پره برابر با مقدار معلوم u است. اگر بدانیم که توان انتقالی به پره ماکزیمـم خـود را دارد، سـرعت جـت آب چقـدر اسـت؟



پاسخ: با به‌کارگیری رابطه‌ی (۱–۱۷) برای حجم کنترلی شامل جت آب و در راستای حرکت اتومبیل خواهیم داشت:

$$\sum_{CV} F_x = \int_{CS} \rho V_{rx} \left(\vec{V}_r \cdot \vec{n}\right) \quad ; \quad R_x = 2\rho A_j \left(V_j - u\right)^2 \qquad (۱)$$

که در آن R_x نیروی عکس‌العمل بر جت ، V_j سرعت مطلق جت آب در مقطع ورودی و A_j سطح مقطع جت است. توان انتقالی به پره به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$P = \vec{R}.\vec{u} = R_x u = 2\rho A_j \left(V_j - u\right)^2 u$$

با مشتق‌گیری از رابطه‌ی فوق، مقدار V_j در ازای توان حداکثر به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{dP}{du} = 2\rho A_j \left(3u^2 - 4V_j u + V_j^2\right) = 0 \quad ; \quad \underline{\underline{V_j = 3u}}$$

۱–۴–۳ رابطه‌ی انرژی

اصل اول ترمودینامیک[۱] یا اصل بقای انرژی[۲]، بیانگر آن است که انرژی در یک فرایند نه تولید می‌شود و نه از بین می‌رود، بلکه تغییرشکل می‌دهد. برای حجم کنترل بدون تغییرشکل، رابطه‌ی انرژی به‌صورت زیر خلاصه می‌شود:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\left(\breve{u} + \frac{V^2}{2} + gZ\right)\rho d\forall + \int_{CS}\left(\breve{u} + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gZ\right)\rho\left(\vec{V}\cdot\hat{n}\right)dA = \dot{Q}_{\substack{net\\in}} + \dot{W}_{\substack{shaft\\net\,in}} \qquad (۱–۱۸)$$

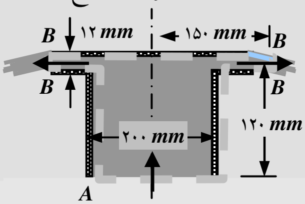
که در آن $\breve{u}$ انرژی داخلی[۳] در واحد جرم، Z ارتفاع از سطح مبنا، p فشار، $\dot{Q}_{net\ in}$ نرخ زمانی خالص انتقال گرما[۴] و $\dot{W}_{shaft}$ توان محور چرخشی است. رابطه‌ی (۱–۱۸) برای سیستم‌های بدون شتاب یا با شتاب، صادق است. رابطه‌ی (۱–۱۸) برای جریان پایدار، یکنواخت بودن خصوصیات سیال، که فقط یک جریان ورودی و یک جریان خروجی موجود است، به‌صورت زیر درمی‌آید (رابطه‌ی هد انرژی):

$$\frac{p_{in}}{\gamma} + \frac{V_{in}^2}{2g} + Z_{in} + h_{shaft} = \frac{p_{out}}{\gamma} + \frac{V_{out}^2}{2g} + Z_{out} + h_L \qquad (۱–۱۹)$$

که در آن $h_{shaft} = \dot{W}_{shaft} / \gamma Q$، γ وزن مخصوص و h_L تلفات هد انرژی است.

۱- First law of thermodynamics
۲- Conservation of energy
۳- Internal energy
۴- Heat transfer

مثال ۱-۴: آب در داخل یک لوله‌ی عمودی در جریان است و جت آب از فضای انتهای لوله (مقطع $B-B$) که بین لوله و یک صفحه‌ی مدور محصور است به‌صورت شعاعی خارج می‌شود. اگر مقدار تلفات هد انرژی بین مقاطع A و B برابر $۰/۲\, V_B^2/2g$ و فشار مطلق در مقطع A برابر $۱۱۰\ kPa$ باشد، مقدار دبی جریان در لوله را به‌دست آورید.



پاسخ: حجم کنترل انتخابی شامل یک مقطع ورودی و یک مقطع خروجی است. رابطه‌ی (۱-۱۹) برای حجم کنترل نشان داده شده در شکل، با فرض توزیع یکنواخت به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{p_A}{\gamma}+\frac{V_A^2}{2g}+Z_A=\frac{p_B}{\gamma}+\frac{V_B^2}{2g}+Z_B+h_L$$

با درنظر گرفتن سطح $(A-A)$ به‌عنوان سطح مبنا و فشار آتمسفر استاندارد برابر با $۱۰۱۳۰۰\ Pa$ داریم:

$$\frac{110000\,Pa}{9810\,N/m^3}+\frac{V_A^2}{2g}+0=\frac{101300\,Pa}{9810\,N/m^3}+\frac{V_B^2}{2g}+0.12+0.2\frac{V_B^2}{2g}\quad ;\quad \frac{1.2V_B^2-V_A^2}{2g}=0.767 \quad (۱)$$

رابطه‌ی پیوستگی نیز برای همان حجم کنترل به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$Q=V_A A=V_B B$$

$$V_A\left[\frac{\pi}{4}(0.2m)^2\right]=V_B\left[2\pi(0.15m)(0.012m)\right]\quad ;\quad V_A=0.36V_B \quad (۲)$$

با ترکیب رابطه‌های (۱) و (۲)، سرعت در مقطع B و از آنجا دبی جریان به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

مسایل ۱-۴ الی ۱-۲۱

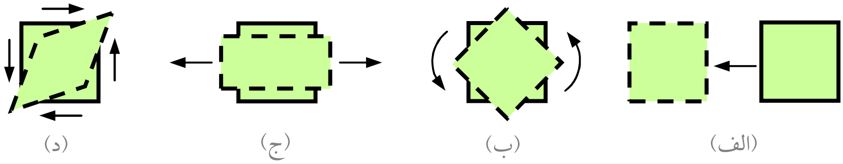
$$\frac{1.2V_B^2-(0.36V_B)^2}{2g}=0.767\quad ;\quad V_B=3.75\,m/s$$

$$Q=V_B A_B=3.75\left[2\pi(0.15m)(0.012m)\right]\quad ;\quad \underline{\underline{Q=0.042\quad m^3/s}}$$

۱-۵ حرکت و تغییرشکل المان

هر المان در مکانیک سیالات مانند مکانیک جامدات دارای چهار نوع حرکت و یا تغییرشکل[۱] است که در شکل (۱-۳) نشان داده شده است. این چهار نوع تغییرشکل عبارتند از انتقال[۲]، چرخش[۳]، تغییرشکل محوری[۴] و تغییرشکل برشی[۵]. در موارد پیچیده ممکن است در المان سیال هر چهار نوع حرکت و یا تغییرشکل به‌وجود آید. سیال در حال حرکت است و معمولاً حرکت و تغییرشکل المان سیال برحسب نرخ[۶] آن بیان می‌شود. بنابراین در این بخش، مباحثی در ارتباط با سرعت (نرخ انتقال)، سرعت زاویه‌ای[۷] (نرخ چرخش)، نرخ کرنش طولی و نرخ کرنش برشی بیان می‌گردد. این مقادیر نرخ برحسب سرعت و مشتقات آن ارایه خواهد شد، زیرا در فرمول‌بندی‌های بعدی که در این کتاب ارایه می‌گردد، این فرم سودمندتر است.

۱- Deformation ۲- Translation ۳- Rotation ۴- Linear deformation ۵- Shear deformation
۶- Rate ۷- Angular velocity



شکل ۱–۳: انواع حرکت و تغییرشکل المان سیال؛ الف) انتقال، ب) چرخش، ج) تغییرشکل محوری، د) تغییرشکل برشی.

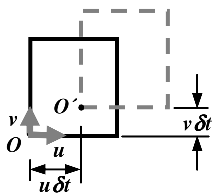
۱–۵–۱ نرخ انتقال

در این حالت تمام نقاط المان سیال با سرعت یکسان حرکت می‌کنند. برای توصیف نرخ انتقال از بردار سه‌بعدی استفاده می‌شود. نرخ انتقال همان بردار سرعت است، رابطه (۱–۶). در شکل (۱–۴)، یک المان دوبعدی درنظر گرفته شده است. نقطه‌ی O یا هر نقطه‌ی دیگر از المان سیال در جهت مثبت محور x در مدت زمان δt به اندازه‌ی $u\,\delta t$ جابه‌جا شده است و u مثبت است. این المان سیال در جهت مثبت محور y در مدت زمان δt به اندازه‌ی $v\,\delta t$ جابه‌جا شده است و v مثبت است. این المان در جهت محور z هیچ‌گونه حرکتی ندارد و لذا $w=0$ است. موقعیت جدید این نقطه پس از گذشت مدت زمان δt نقطه‌ی O' است.

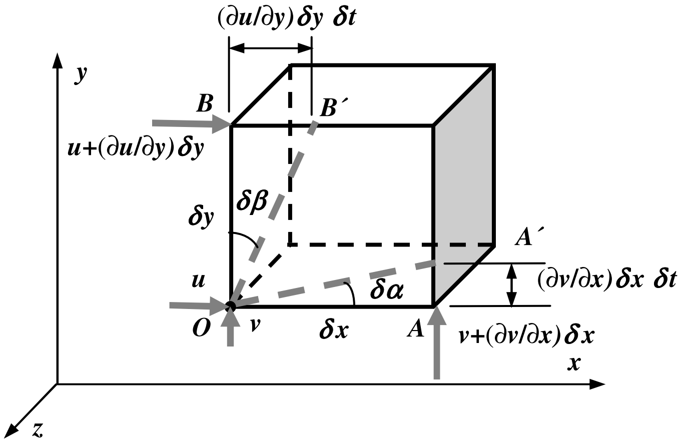
۱–۵–۲ نرخ چرخش

نرخ چرخش یا سرعت زاویه‌ای یک نقطه در صفحه برابر متوسط نرخ چرخش دو المان خطی عمود برهم است که از آن نقطه می‌گذرد. در شکل (۱–۳– ب) نقطه‌ای را در گوشه‌ی سمت چپ پایین درنظر بگیرید. از این نقطه دو المان خطی عمود برهم گذر می‌کند. این دو المان خطی در جهت خلاف عقربه‌های ساعت چرخش کرده‌اند و زاویه‌ی بین این دو خط 90° باقی می‌ماند. لذا، مقدار چرخش این دو المان خطی، یکسان است و صرفاً با مؤلفه‌ی سرعت زاویه‌ای در این صفحه برابر است.

در اکثر موارد، المان سیال علاوه بر چرخش، انتقال نیز دارد. المان سیال در شکل (۱–۵) در دستگاه مختصات کارتزین را درنظر بگیرید. برای محاسبه‌ی نرخ سرعت زاویه‌ای حول محور z، دو المان خطی عمود برهم OA و OB با طول‌های δx و δy را در صفحه‌ی x-y درنظر بگیرید که از نقطه‌ی O عبور کرده است. مؤلفه‌های سرعت در نقطه‌ی O برابر u و v است. چون ابعاد المان بسیار کوچک است، فرض می‌شود که تغییرات سرعت در این المان سیال به‌صورت خطی است. لذا، با استفاده از بسط تیلور می‌توان نشان داد که سرعت سیال در نقاط A و B به‌ترتیب برابر $v+(\partial v/\partial x)\,\delta x$ و $u+(\partial u/\partial y)\,\delta y$ است. پس از گذشت زمان δt و به علت تفاوت سرعت نقاط A و B با سرعت نقطه‌ی O، این دو المان به‌ترتیب با زوایای $\delta\alpha$ و $\delta\beta$ چرخش کرده و به‌صورت خطوط OA' و OB' درمی‌آیند. باتوجه به کوچک‌بودن زوایای $\delta\alpha$ و $\delta\beta$، سرعت زاویه‌ای المان OA، ω_{OA}، به‌صورت زیر درمی‌آید:



شکل ۱–۴: انتقال یک المان.



شکل ۱-۵: چرخش در یک المان سیال.

$$\omega_{OA} = \lim_{\delta t\to 0} \frac{\delta\alpha}{\delta t} = \lim_{\delta t\to 0} \frac{tg\,\delta\alpha}{\delta t} = \lim_{\delta t\to 0} \frac{\left[(\partial v/\partial x)\,\delta x\,\delta t\right]/\delta x}{\delta t} \quad ; \quad \omega_{OA} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

به‌روشی مشابه برای المان OB خواهیم داشت:

$$\omega_{OB} = \lim_{\delta t\to 0} \frac{\delta\beta}{\delta t} = \lim_{\delta t\to 0} \frac{\left[(\partial u/\partial y)\,\delta y\,\delta t\right]/\delta y}{\delta t} \quad ; \quad \omega_{OB} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

لذا، سرعت زاویه‌ای المان سیال حول محور z که از نقطه‌ی O می‌گذرد به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \qquad (۱-۲۰)$$

مقدار ω_{OB} به‌علت چرخش در جهت عقربه‌های ساعت، منفی درنظر گرفته شده است. در یک جریان سه‌بعدی، به روشی مشابه آنچه در بالا گفته شد، می‌توان مقدار چرخش المان سیال حول محورهای x و y را به‌دست آورد. بردار سرعت زاویه‌ای در دستگاه مختصات کارتزین به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\vec{\omega} = \omega_x\hat{i} + \omega_y\hat{j} + \omega_z\hat{k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\hat{i} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\hat{j} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\hat{k} \qquad (۱-۲۱)$$

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} curl\,\vec{V} = \frac{1}{2}\vec{\nabla}\times\vec{V} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} \qquad (۱-۲۲)$$

رابطه‌ی (۱-۲۲) نشان می‌دهد که المان سیال در صورتی مانند یک جسم جامد حول محور z چرخش می‌کند که $\partial u/\partial y = -\partial v/\partial x$ باشد. درغیر این‌صورت، چرخش دارای تغییرشکل زاویه‌ای[۱] و جریان چرخشی[۲] است. درصورتی‌که $\partial u/\partial y = \partial v/\partial x$ باشد، چرخش المان حول محور z صفر است. این نوع جریان را جریان غیرچرخشی[۳] می‌نامند.

۱- Angular deformation ۲- Rotational flow ۳- Irrotational flow

۱-۵-۳ نرخ کرنش محوری

در این نوع کرنش، میدان سرعت هم‌راستای المان است، درحالی‌که در چرخش میدان سرعت عمود بر المان است. این نوع کرنش، شبیه کرنش محوری است که در مقاومت مصالح به آن اشاره شده است. المان خطی OA در شکل (۱-۶) را درنظر بگیرید که نقطه‌ی O دارای سرعت u است. در اثر وجود اختلاف سرعت یا گرادیان سرعت، ذرات این المان خطی دارای سرعت متفاوتی می‌باشند. باتوجه به مطالبی که در بند (۱-۵-۲) گفته شد، فرض می‌شود که سرعت نقطه‌ی A برابر $u+(\partial u/\partial x)\,\delta x$ باشد. پس از گذشت زمان δt، المان خطی در راستای x تغییرشکل می‌دهد و نقطه‌ی O به نقطه‌ی O' و نقطه‌ی A به نقطه‌ی A' تغییرمکان می‌دهد. لذا، نرخ کرنش محوری المان به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\varepsilon_{OA}=\frac{d}{dt}\left(\frac{O'A'-OA}{OA}\right)=\frac{\left[\delta x+\left(u+\partial u/\partial x\,\delta x\right)\delta t-u\delta t\right]-\delta x}{\delta x}=\frac{\partial u}{\partial x} \qquad (۲۳-۱)$$

با روشی مشابه می‌توان نشان داد که در حالت سه‌بعدی، نرخ کرنش محوری به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\varepsilon_{xx}=\frac{\partial u}{\partial x}\quad;\quad \varepsilon_{yy}=\frac{\partial v}{\partial y}\quad;\quad \varepsilon_{zz}=\frac{\partial w}{\partial z} \qquad (۲۴-۱)$$

همچنانکه در شکل (۱-۳- ج) نشان داده شده است، با کرنش محوری المان در راستای افقی، المان در این راستا کشیده شده و در جهت قایم فشرده می‌شود. لذا، نرخ کرنش محوری المان در راستای افقی مثبت و در راستای عمودی منفی است. اگر سیال تراکم‌ناپذیر باشد، حجم المان سیال در اثر کرنش محوری ثابت باقی می‌ماند. نرخ تغییرحجم المان سیال در واحد حجم را نرخ کرنش حجمی[1] یا نرخ انبساط حجمی[2] می‌نامند. نرخ کرنش حجمی در دستگاه مختصات کارتزین به‌صورت زیر درمی‌آید:

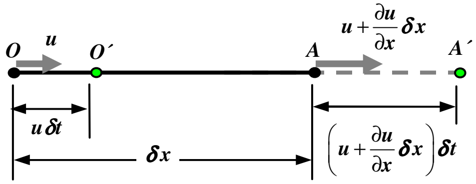
$$\frac{1}{\forall}\frac{d\forall}{dt}=\varepsilon=\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}+\varepsilon_{zz}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=\vec{\nabla}\cdot\vec{V} \qquad (۲۵-۱)$$

که در آن $\forall$ حجم المان سیال است. نرخ کرنش حجمی برای سیال تراکم‌ناپذیر صفر است.

۱-۵-۴ نرخ کرنش برشی

نرخ کرنش برشی یک نقطه در صفحه برابر نرخ کاهش زاویه‌های بین دو المان خطی عمود برهم است که از آن نقطه می‌گذرد. باتوجه به شکل (۱-۵)، گرادیان‌های سرعت $\partial u/\partial y$ و $\partial v/\partial x$ علاوه بر چرخش المان می‌توانند باعث تغییرشکل زاویه‌ای شوند و در نتیجه شکل المان نیز عوض می‌شود. کاهش اندازه‌ی زوایای بین دو المان خطی OA و OB که در ابتدا °۹۰ بوده است (کرنش برشی)، به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\delta\theta=\delta\alpha+\delta\beta \qquad (۲۶-۱)$$



شکل ۱-۶: کرنش محوری المان خطی در جهت x.

1- Volumetric strain rate
2- Bulk strain rate

نرخ $\delta\theta$ برابر نرخ کرنش برشی یا نرخ تغییرشکل زاویه‌ای است. باتوجه به مقدار زوایای $\delta\alpha$ و $\delta\beta$ که در بند (۱-۵-۲) به‌دست آمد، نرخ کرنش برشی به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\varepsilon_{xy}=\frac{d}{dt}(\delta\theta)=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x} \tag{۱-۲۷}$$

با ترکیب کرنش‌های برشی و محوری، تانسور نرخ کرنش[1] به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\varepsilon_{ij}=\begin{pmatrix}\varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz}\\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz}\\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right) & \left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\\ \left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)\\ \left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right) & \left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right) & \frac{\partial w}{\partial z}\end{pmatrix} \tag{۱-۲۸}$$

باتوجه به تقارن ماتریس (۱-۲۸)، یک و فقط یک محور وجود دارد که در آن عناصر غیرقطری ماتریس برابر صفر است. به عبارت دیگر، در این حالت نرخ کرنش برشی حذف می‌گردد. به این محورها محورهای اصلی[2] می‌گویند که در این حالت، تانسور نرخ کرنش به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\begin{pmatrix}\varepsilon_1 & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon_2 & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_3\end{pmatrix} \tag{۱-۲۹}$$

۱-۵-۵ فرم ماتریسی روابط انتقال و تغییرشکل

ماتریس گرادیان سرعت به‌صورت مجموع سه ماتریس نرخ چرخش $(\boldsymbol{R})$، نرخ انبساط $(\boldsymbol{E})$ و نرخ تغییرشکل برشی $(\boldsymbol{D})$ بیان می‌شود [۱]. تانسور نرخ چرخش قسمتی از گرادیان سرعت است که منجر به چرخش المان بدون تغییر در شکل و حجم آن می‌گردد [رابطه‌ی (۱-۲۲)] که به‌صورت تانسوری زیر بیان می‌شود:

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}\right)\\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)\\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y}\right) & 0\end{pmatrix} \tag{۱-۳۰}$$

تانسور نرخ انبساط منجر به تغییر حجم المان بدون چرخش و تغییر در شکل اولیه‌ی المان می‌شود. با فرض همسان‌گرد[3] بودن سیال، رابطه‌ی (۱-۲۵) به‌صورت زیر ارایه می‌شود [۱]:

۱- Strain rate tensor
۲- Principle axes
۳- Isotropic

$$E = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right) \end{pmatrix} \qquad (۱-۳۱)$$

تانسور نرخ تغییرشکل برشی که تغییرشکل ناشی از حجم و یا چرخش المان را شامل نمی‌شود، از تفاضل رابطه‌ی (۱-۳۱) از رابطه‌ی (۱-۲۸) به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$D = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right) & \left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right) & \left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right) & \frac{\partial v}{\partial y}-\frac{1}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right) & \left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right) & \left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right) & \frac{\partial w}{\partial z}-\frac{1}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right) \end{pmatrix} \qquad (۱-۳۲)$$

۱-۵-۶ ورتیسیته و دوران

ورتیسیته[۱] ($\vec{\zeta}$) برداری است که دو برابر بردار نرخ چرخش است و به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\vec{\zeta} = 2\vec{\omega} = \vec{\nabla}\times\vec{V} = \left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)\hat{i}+\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)\hat{j}+\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\hat{k} \qquad (۱-۳۳)$$

علت تعریف ورتیسیته، رهایی از ضریب ۰/۵ است که در نرخ چرخش به‌دست آمده است. مؤلفه‌های رابطه‌ی (۱-۳۳) برای جریان غیرچرخشی به‌صورت زیر ساده می‌شود:

$$\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial z} \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial w}{\partial x} \quad ; \quad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y} \qquad (۱-۳۴)$$

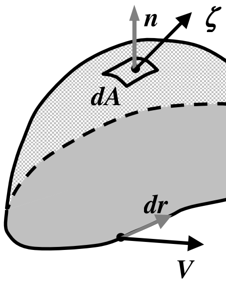
همان‌طورکه مشاهده شد، در تعریف ورتیسیته از کرل استفاده شده است.

تئوری استوکس[۲] چنین بیان می‌کند که انتگرال بردار سرعت روی یک منحنی بسته که دوران[۳] (Γ) نامیده می‌شود، برابر انتگرال ورتیسیته روی سطح دربرگیرنده منحنی بسته است. با استفاده از رابطه‌ی (۱-۳۳)، تئوری استوکس به‌صورت زیر درمی‌آید، شکل (۱-۷):

$$\Gamma = \oint \vec{V}.\vec{dr} = \iint_A \left(\vec{\zeta}.\vec{n}\right)dA = \iint_A \left(\vec{\nabla}\times\vec{V}\right)dA \qquad (۱-۳۵)$$

که در $\vec{dr}$ بردار طولی در راستای خط بسته، $\vec{n}$ بردار یکه‌ی سطح و dA المان سطح است.

۱- Vorticity ۲- Stokes ۳- Circulation

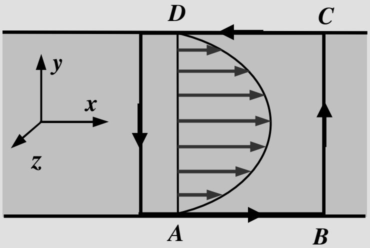


شکل ۱-۷: شمای کلی توصیف رابطه‌ی استوکس.

مثال ۱-۵: میدان سرعت در داخل لوله‌ای به صورت زیر داده شده است:

$$u(y) = K\left[1-\left(\frac{y}{h}\right)^2\right] \quad ; \quad v = w = 0$$

که در آن K ضریب ثابت است. مقدار دوران بر روی مسیر مستطیلی‌شکل $ABCD$ را به‌دست آورید.



پاسخ: رابطه‌ی (۱-۳۵) به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\Gamma = \oint \vec{V}.\vec{dr} = \int_0^{L_{AB}} u_{AB} d\vec{r}_{AB} + \int_0^{L_{BC}} v_{BC} d\vec{r}_{BC} + \int_0^{L_{CD}} u_{CD} d\vec{r}_{CD} + \int_0^{L_{DA}} v_{DA} d\vec{r}_{DA}$$

$$\Gamma = \int_0^{L_{AB}} \left\{K\left[1-\left(\frac{y}{h}\right)^2\right]\right\}\hat{i}.\left(dx\hat{i}\right)+0+\int_0^{L_{CD}} \left\{K\left[1-\left(\frac{y}{h}\right)^2\right]\right\}\hat{i}.\left(-dx\hat{i}\right)+0$$

مسایل ۱-۲۲ الـی ۱-۲۹

$$\Gamma = K\left[1-\left(\frac{y}{h}\right)^2\right]\left\{\int_0^{L_{AB}} dx - \int_0^{L_{CD}} dx\right\} = K\left[1-\left(\frac{y}{h}\right)^2\right]\left(L_{AB}-L_{CD}\right) \quad ; \quad \underline{\underline{\Gamma = 0}}$$

۱-۶ مسایل

(اگر در مسأله‌ای ویژگی سیال داده نشده است، $\rho_{\text{آب}} = ۱۰۰۰\ kg/m^۳$ و $\rho_{\text{هوا}} = ۱/۲۳\ kg/m^۳$ درنظر گرفته شود)

۱-۱ میدان سرعت سه‌بعدی جریان سیالی به‌صورت زیر داده شده است:

$$u = 6xt + y^2z + 15 \quad ; \quad v = 3xy^2 + t^2 + y \quad ; \quad w = 2 + 3ty$$

رابطه‌ی سرعت را در نقطه‌ای به مختصات (۳، ۲، ۴)m در زمان $t = ۱\ s$ به‌دست آورید. مقدار سرعت در این نقطه چقدر است؟

۲-۱ میدان سرعت سه‌بعدی جریان سیالی به‌صورت زیر داده شده است:

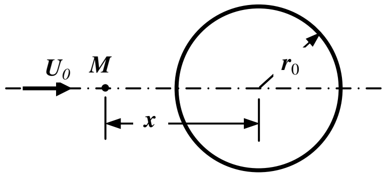
$$\vec{V} = 3yz^2\hat{i} + xz\hat{j} + y\hat{k}$$

رابطه‌هایی برای شتاب در جهت‌های x، y و z به‌دست آورید.

جواب: $a_x = ۳xz^۳ + ۶y^۲z$ $\quad a_y = ۳yz^۳ + xy$ $\quad a_z = xz$

۳-۱ نتایج آزمایش در یک تونل باد که بر روی یک کره انجام شده است نشان می‌دهد که مقدار سرعت در امتداد محور کره در بالادست آن (نقطه‌ی M در شکل) از رابطه‌ی ذیل تبعیت می‌کند:

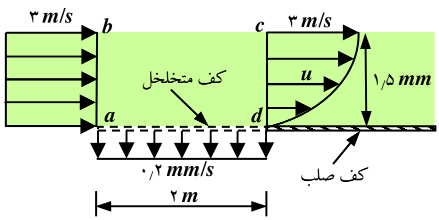
$$u = -\frac{U_0}{\left(1 - r_0^3/x^3\right)}$$



که در آن U_0 سرعت باد در تونل باد، r_0 شعاع کره و x فاصله تا مرکز کره است. رابطه‌ای برای مقدار شتاب هوا در راستای محور در نقطه‌ای به فاصله‌ی x (M) به‌دست آورید.

۴-۱ جریان آب از روی صفحه‌ای با عرض $۱/۵\ m$ عبور می‌کند. در ابتدای این صفحه [مقطع (a-d)]، کف متخلخل است. سرعت آب در مقطع ورودی (a-b) و هنگام عبور از کف متخلخل [مقطع (a-d)] یکنواخت است. توزیع سرعت در مقطع (c-d) به شکل زیر است:

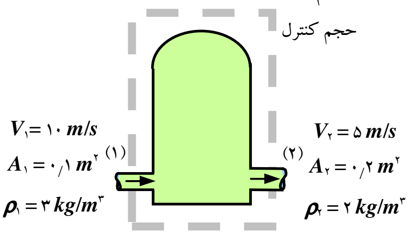
$$\frac{u}{V} = 3\left(\frac{y}{\delta}\right) - 2\left(\frac{y}{\delta}\right)^{1.5}$$



که در آن $V = ۳\ m/s$ و $\delta = ۱/۵\ mm$ است. مقدار دبی جرمی را در مقطع bc به‌دست آورید.

جواب: $\dot{m}_{bc} = ۱/۴۲\ kg/s$

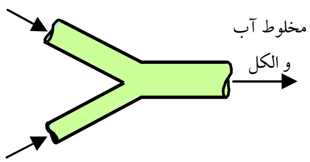
۱ – ۵، مع، ۸۷ سیال گازی‌شکل از دو لوله‌ی متصل به مخزن نشان داده شده وارد و خارج می‌گردد. در حالت نشان داده شده کدام‌یک از عبارت‌های زیر در مورد کاربرد حجم کنترل برای قانون پیوستگی صحیح نیست؟ (N_{sys} خاصیت در سیستم، η خاصیت در واحد جرم، v سرعت و $\forall$ نشان‌دهنده‌ی حجم است)



۱) $N_{sys} \neq ۰$ ۲) $\frac{dN_{sys}}{dt} = ۰$

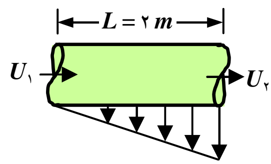
۳) $\frac{d}{dt}\int_{CV} \rho d\forall \neq ۰$ ۴) $\sum_{CS} \eta \rho \vec{v}.\vec{A} = ۰$

۱–۶ آب با دبی $۰/۱\ m^۳/s$ و الکل $(SG = ۰/۸)$ با دبی $۰/۳\ m^۳/s$ در یک سه‌راهی y–شکل با همدیگر مخلوط می‌شوند. مقدار متوسط چگالی مخلوط آب و الکل چقدر است؟



جواب: $\rho_m = ۸۵۰\ kg/m^۳$

۱ – ۷، مش، ۸۳ آب با سرعت $۸\ m/s$ به لوله‌ای به قطر $۰/۳\ m$ و طول $۲\ m$ وارد می‌شود. بخشی از آب از انتهای لوله و باقیمانده‌ی آن از منافذ موجود روی دیواره‌ی لوله خارج می‌شود. با فرض اینکه سرعت خروج آب از دیواره به‌صورت خطی $[U = ۰/۴U_۲(x/L)]$ تغییر کند و در این رابطه $U_۲$ سرعت خروج از انتهای لوله باشد، دبی جرمی خروجی از دیواره چقدر می‌باشد؟

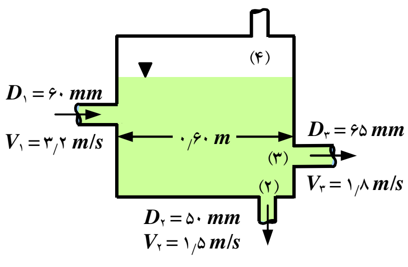


۱) ۸۹ کیلوگرم بر ثانیه ۲) ۴۷۶ کیلوگرم بر ثانیه

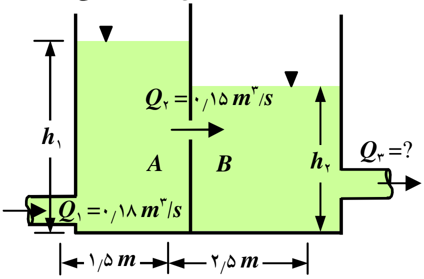
۳) ۵۶۵ کیلوگرم بر ثانیه ۴) ۶۵۴ کیلوگرم بر ثانیه

۱–۸ آب با سرعت $۳/۲\ m/s$ از طریق لوله‌ی (۱) وارد مخزن استوانه‌ای به قطر $۰/۶۰\ m$ می‌گردد و با سرعت‌های $۱/۵\ m/s$ و $۱/۸\ m/s$ به‌ترتیب از لوله‌های (۲) و (۳) خارج می‌گردد. لوله‌ی (۴) یک لوله‌ی تهویه به قطر $۶۰\ mm$ است که از آن هوا خارج و یا وارد مخزن می‌گردد. با انتخاب مخزن به عنوان حجم کنترل، مقدار dh/dt را به‌دست آورید که در آن h ارتفاع آب در مخزن در هر لحظه است. اگر جریان هوا از لوله‌ی (۴) تراکم‌ناپذیر فرض شود، مقدار سرعت متوسط هوا در این لوله را به‌دست آورید.

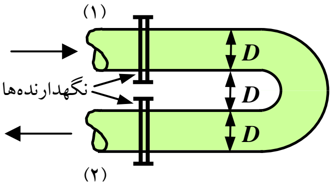
جواب: $dh/dt = ۰/۴۶\ mm/s$ ؛ $\bar{V}_۴ = ۰/۰۴۶\ m/s$



۱–۹ آب با دبی ۰/۱۸ m^3/s از لوله‌ی (۱) وارد مخزن A به طول ۱/۵ m و عرض ۱/۵ m می‌گردد. سپس، آب با دبی ۰/۱۵ m^3/s از لوله‌ی (۲) وارد مخزن B می‌گردد. اگر سطح آب در مخزن B با سرعت ۶۰ mm/s افت کند، مقدار دبی لوله‌ی (۳) چه مقدار است؟ مخزن B به طول ۲/۵ m و عرض ۱/۵ m است. مقدار نرخ ارتفاع h_1 را محاسبه کنید.



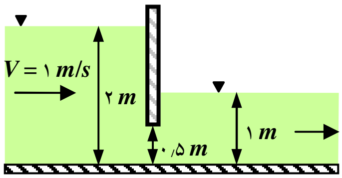
۱ – ۱۰، مم، ۸۷ فرض کنید فشار نسبی در هر دو مقطع ۱ و ۲ شکل زیر در یک زانویی افقی (در یک صفحه)، یکسان است. جریان سیال در زانویی دارای دانسیته ρ، دبی Q و سرعت V می‌باشد. سطح مقطع لوله A است. مقدار نیروی وارد به نگهدارنده‌ها جهت نگه‌داری زانویی در محل خود کدام است؟ (از نیروی ثقل و افت انرژی صرف‌نظر کنید)



۱) pA ۲) ۲ρQV ۳) ۲$pA+\rho QV$ ۴) ۲pA+۲ρQV

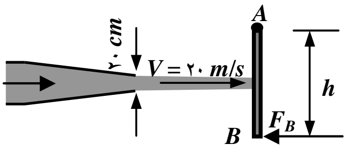
جواب: گزینه‌ی (۴)

۱ – ۱۱، مع، ۸۷ در شکل روبه‌رو آب از زیر دریچه‌ای به پهنای ۲ متر در حال عبور است. نیروی افقی وارد بر دریچه برابر است با ($g =$ ۱۰ m/s^2، $\rho =$ ۱۰۰۰ kg/m^3):



۱) ۳۰۰۰۰ N ۲) ۴۰۰۰ N ۳) ۲۰۰۰۰ N ۴) ۲۶۰۰۰ N

۱ – ۱۲، مع، ۸۳ فوران آب از یک نازل به قطر ۲۰ cm با سرعت ۳۰ m/s به مرکز یک صفحه‌ی قایم برخورد می‌کند. صفحه در قسمت فوقانی A مطابق شکل لولا شده است. برای اینکه صفحه به‌حالت قایم نگه‌داشته شود، نیروی F_B وارد بر انتهای پایین دریچه چند کیلونیوتن باید باشد ($g =$ ۱۰ m/s^2، $\rho =$ ۱۰۰۰ kg/m^3).

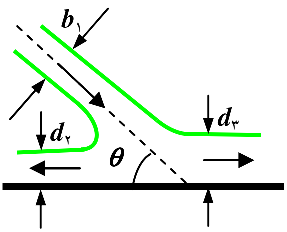


۱) ۶/۲۸ کیلونیوتن ۲) ۸/۶۲ کیلونیوتن

۳) ۱۲/۵۶کیلونیوتن ۴) ۲۵/۱۳ کیلونیوتن

جواب: گزینه‌ی (۱)

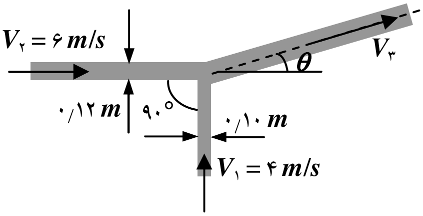
۱ – ۱۳، مک، ۸۴ در شکل زیر یک جریان جت به دیوار مقابل برخورد می‌کند. اگر سرعت در مقاطع ۱، ۲ و ۳ مساوی بوده و از اثر شتاب ثقل صرف‌نظر شود، d_3 به عنوان تابعی از b_1 و θ کدام می‌باشد؟



۱) $d_۳ = cos\theta(b_۱/۲)$

۲) $d_۳ = b_۱(۱-cos\theta)$

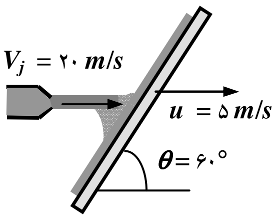
۳) $d_۳ = b_۱/۲(۱+cos\theta)$ ۴) $d_۳ = b_۱/۲(۱-۲cos\theta)$



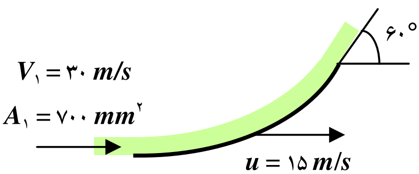
۱-۱۴، مع، ۸۰ دو جت آب با یکدیگر برخورد نموده و یک جت یکپارچه‌ای را مطابق مشخصات داده شده در شکل ایجاد می‌کنند. در این‌صورت سرعت جت حاصل چند m/s خواهد بود؟

۱) ۳/۸۲ ۲) ۴/۲۹ ۳) ۵/۷۳ ۴) ۷/۲۱

جواب: گزینه‌ی (۲)

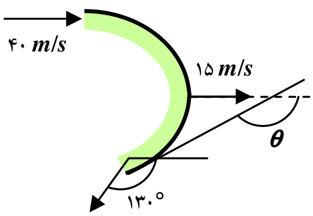


۱-۱۵ جت آب به مساحت $۷۰۰\ mm^۲$ و سرعت $۲۰\ m/s$ به صفحه‌ی عمودی که با سرعت $۵\ m/s$ نیز در راستای جت حرکت می‌کند برخورد می‌کند. اگر دبی آب در مقاطع (۱) و (۲) به ترتیب به نسبت یک به سه و دو به سه تقسیم شود، نیروی افقی وارد بر صفحه را به‌دست آورید. از اصطکاک هوا و آب صرف‌نظر کنید و فرض کنید که سرعت جت پس از انحراف نیز ثابت می‌ماند.

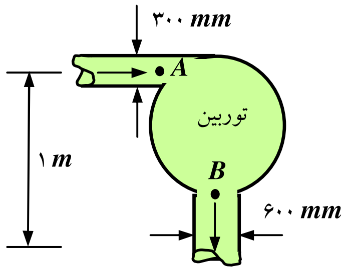


۱-۱۶ جت آب با سرعت $۳۰\ m/s$ به پره‌ی انحنادار که در صفحه‌ی افق قرار دارد برخورد می‌کند. پره نیز با سرعت $۱۵\ m/s$ در حرکت است. زاویه‌ی خروج جت آب برابر ۶۰° است. اگر سطح مقطع جت ثابت بماند، مقدار توان پره و سرعت مطلق خروجی جت آب چقدر است؟ از اصطکاک هوا و آب صرف‌نظر کنید.

جواب: $P = ۱۱۸۲\ W$ $V_۲ = ۲۶\ m/s$



۱-۱۷ جت آب با سرعت $۴۰\ m/s$ به پره‌ی انحنادار که در صفحه‌ی افق قرار دارد، برخورد می‌کند. پره نیز با سرعت $۱۵\ m/s$ در حرکت است. زاویه‌ی سرعت مطلق خروجی جت آب برابر ۱۳۰° است. اگر سطح مقطع جت ثابت بماند، مقدار زاویه‌ی پره درمقطع خروجی (زاویه‌ی θ در شکل روبه‌رو) را به‌دست آورید. از اصطکاک هوا و آب صرف‌نظر کنید.

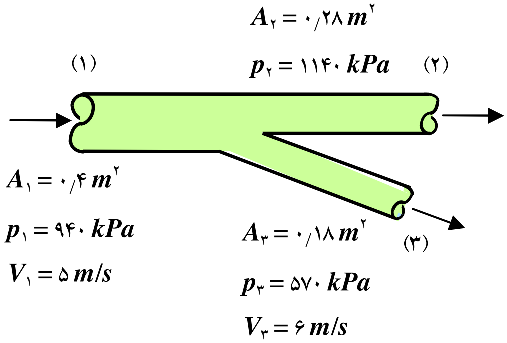


۱ – ۱۸، مع، ۷۹ آب از توربین نشان داده شده در شکل با دبی $۰/۳۶\ m^۳/s$ می‌گذرد و فشار در نقاط A و B به‌ترتیب $۱۵۰\ kPa$ و $-۴۰\ kPa$ می‌باشد. قطر لوله‌ها نیز در شکل نشان داده شده است. مقدار توان هیدرولیکی توربین برحسب کیلووات چقدر می‌باشد؟ ($\gamma_{آب} = ۱۰^۴\ kN/m^۳$، $g = ۱۰\ m/s^۲$).

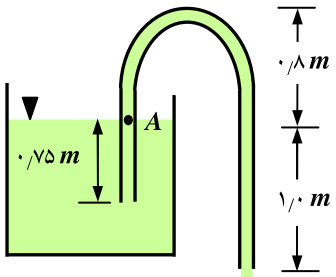
۱) ۴۴ ۲) ۶۲ ۳) ۷۶ ۴) ۹۱

جواب: گزینه‌ی (۳)

۱–۱۹ در یک سه‌راهی نشان داده شده در شکل روبه‌رو، آب در لوله‌ی شماره (۱) با سرعت $۵\ m/s$ و فشار $۹۴۰\ kPa$ جریان دارد. مقادیر سرعت و فشار در لوله‌های (۲) و (۳) نیز در شکل نشان داده شده است. مقدار توان تلف شده در این سه‌راهی که در صفحه‌ی افق قرار دارد، چقدر است؟



۱ – ۲۰، مع، ۸۳ مایعی در سیفون نشان داده شده در شکل، جریان دارد. با صرف‌نظر کردن از هر گونه افت انرژی در مسیر، فشار مطلق در نقطه‌ی A برابر کدامیک از مقادیر زیر است؟ فشار هوا در محل برابر p_a پاسکال و وزن مخصوص مایع γ نیوتن بر هر مترمکعب می‌باشند. قطر سیفون ثابت است.

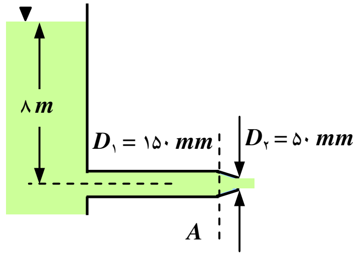


۱) $p_a - \gamma$

۲) $۰/۸\ \gamma$

۳) $p_a - ۰/۷۵\ \gamma$ ۴) $p_a + ۰/۸\ \gamma$

جواب: گزینه‌ی (۱)



۱ – ۲۱، مع، ۸۱ اگر در شکل زیر ارتفاع نظیر انرژی تلف‌شده تا مقطع A معادل $5V_1^2/2g$ و در نازل معادل $0/05V_1^2/2g$ باشد، دبی سیستم چند لیتر بر ثانیه است؟ (از افت انرژی فرعی صرف نظر شده)

۱) ۳۱/۲ ۲) ۲۶/۹ ۳) ۲۳/۳ ۴) ۱۵/۴

۱–۲۲ مؤلفه‌های سرعت در یک جریان دوبعدی پایدار، توسط رابطه‌های $u = -ay$ و $v = ax$ داده شده است. مقدار نرخ چرخش چقدر است؟

جواب: $\omega_z = a$

۱–۲۳ میدان سرعت جریان دوبعدی به‌صورت زیر داده شده است:

$$\vec{V} = \left(2x^2y + x\right)\hat{i} + \left(2xy^2 + y + 1\right)\hat{j}$$

نرخ چرخش یا سرعت زاویه‌ای یک المان سیال که در نقطه‌ای به مختصات $x = 0/5\ m$ و $y = 1/0\ m$ قرار دارد را محاسبه کنید.

۱–۲۴ میدان سرعت سیالی به صورت زیر داده شده است:

$$\vec{V} = x^2y\hat{i} - (3x - 3z)\hat{j} + 5z^2\hat{k}$$

نرخ چرخش را در نقطه‌ای به مختصات (۴، ۲–، ۱) m به‌دست آورید.

جواب: $\vec{\omega} = -\frac{3}{2}\hat{i} - \frac{19}{2}\hat{k}$

۱–۲۵ مؤلفه‌های سرعت سه‌بعدی سیالی به‌صورت زیر داده شده است:

$$u = x^2 + y^2 + z^2 \quad ; \quad v = xy + yz + z^2 \quad ; \quad w = -3xz - \frac{z^2}{2} + 4$$

(الف) نرخ کرنش حجمی چقدر است؟

(ب) بردار نرخ چرخش را به‌دست آورید.

۱–۲۶ تانسور نرخ کرنش را برای میدان سرعت داده شده در مسأله‌ی (۱–۲۴) به‌دست آورده و مقدار آن را در نقطه‌ای به مختصات (۴، ۱، ۲–) m محاسبه کنید.

جواب: $$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 8 & 13 & 0 \\ 13 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -20 \end{pmatrix} \frac{1}{s}$$

۱–۲۷ مؤلفه‌ی سرعت در یک جریان یک‌بعدی برابر $u = ay + by^2$ است که در آن a و b ثابت هستند. آیا جریان غیرچرخشی است؟ به‌ازای چه‌مقادیری از a و b نرخ تغییرشکل زاویه‌ای صفر است؟

۱–۲۸ مؤلفه‌های سرعت در یک جریان سه‌بعدی تراکم‌ناپذیر و پایدار به‌صورت زیر داده شده است:

$$u = x^2 + y^2 + z^2 \quad ; \quad v = xy + yz + z^2 \quad ; \quad w = -3xz - \frac{z^2}{2} + 4$$

بردار ورتیسیته را به‌دست آورید. آیا جریان غیرچرخشی است؟

جواب: $\vec{\zeta} = -\left(\frac{y}{2} + z\right)\vec{i} + \frac{5z}{2}\vec{j} - \frac{y}{2}\vec{k}$ خیر

۱–۲۹ میدان سرعت در صفحه xy به صورت زیر داده شده است:

$$u = 2x - 3y \quad ; \quad v = 3x - 2y$$

مقدار دوران حول دایره‌ی C به معادله‌ی زیر را به‌دست آورید.

$$C : (x-1)^2 + (y-6)^2 = 4$$