۲–۱ میدان سرعت سه‌بعدی جریان سیالی به‌صورت زیر داده شده است:

$$\vec{V} = 3yz^2\hat{i} + xz\hat{j} + y\hat{k}$$

رابطه‌هایی برای شتاب در جهت‌های x، y و z به‌دست آورید.

پاسخ:

باتوجه به بردار سرعت داده شده، رابطه‌های (۱–۱۰) الی (۱–۱۲) به‌صورت زیر درمی‌آید:

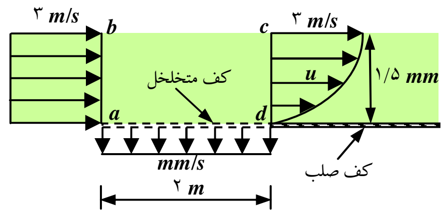
$$u = 3yz^2 \quad ; \quad v = xz \quad ; \quad w = y$$

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = 0 + \left(3yz^2\right)(0) + (xz)\left(3z^2\right) + (y)(6yz) \quad ; \quad \underline{\underline{a_x = 3xz^3 + 6y^2z}}$$

$$a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = 0 + \left(3yz^2\right)(z) + (xz)(0) + (y)(x) \quad ; \quad \underline{\underline{a_y = 3yz^3 + xy}}$$

$$a_z = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = 0 + \left(3yz^2\right)(0) + (xz)(1) + (y)(0) \quad ; \quad \underline{\underline{a_z = xz}}$$

۱–۴ جریان آب از روی صفحه‌ای با عرض ۱/۵ m عبور می‌کند. در ابتدای این صفحه [مقطع (a-d)]، کف متخلخل است. سرعت آب در مقطع ورودی (a-b) و هنگام عبور از کف متخلخل [مقطع (a-d)] یکنواخت است. توزیع سرعت در مقطع (c-d) به شکل زیر است:



$$\frac{u}{V}=3\left(\frac{y}{\delta}\right)-2\left(\frac{y}{\delta}\right)^{1.5}$$

که در آن $V=۳\ m/s$ و $\delta=۱/۵\ mm$ است. مقدار دبی جرمی را در مقطع bc به‌دست آورید.

پاسخ:

حجم کنترل ثابت شامل آب بین مقاطع (a-b)، (b-c)، (c-d) و (a-d) است. چون مشخصات مسأله با زمان تغییر نمی‌کند، جریان پایدار است. رابطه‌ی پیوستگی، رابطه‌ی (۱–۱۳) برای این حجم کنترل به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\int_{cs}\rho(\vec{v}.\vec{n})dA=0 \quad ; \quad \int_{ab}\rho(\vec{v}.\vec{n})dA+\int_{ad}\rho(\vec{v}.\vec{n})dA+\int_{dc}\rho(\vec{v}.\vec{n})dA+\int_{bc}\rho(\vec{v}.\vec{n})dA=0 \qquad (۱)$$

برای مقاطع (a-b) و (a-d) که توزیع سرعت در آن یکنواخت است، انتگرال رابطه‌ی پیوستگی با استفاده از سرعت یکنواخت، رابطه‌ی (۱–۱۳)، به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\int_{ab}\rho(\vec{v}.\vec{n})dA=-\rho V_{ab}A_{ab}=-\left(1000\,kg/m^3\right)(3\,m/s)\left[\left(1.5\times10^{-3}\,m\right)(1.5\,m)\right]=-6.75\,kg/s$$

$$\int_{ad}\rho(\vec{v}.\vec{n})dA=+\rho V_{ad}A_{ad}=\left(1000\,kg/m^3\right)(0.0002\,m/s)\left[(2\,m)(1.5\,m)\right]=0.60\,kg/s$$

برای مقطع (c-d) از توزیع سرعت داده شده در مسأله به‌صورت زیر استفاده می‌شود:

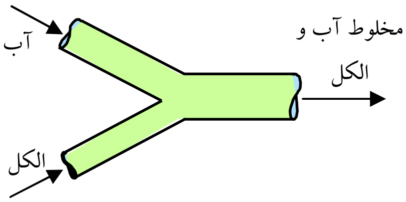
$$\int_{dc}\rho(\vec{v}.\vec{n})dA=\rho b\int_{dc}v\,dy=\rho b\int_0^{\delta}V\left[3\frac{y}{\delta}-2\left(\frac{y}{\delta}\right)^{1.5}\right]dy=\rho bV\left|\frac{3}{2}\frac{y^2}{\delta}-\frac{2\delta}{2.5}\left(\frac{y}{\delta}\right)^{2.5}\right|_0^{\delta}=\rho bV\left(\frac{3}{2}\delta-\frac{2\delta}{2.5}\right)$$

$$\int_{dc}\rho(\vec{v}.\vec{n})dA=0.7\rho bV\delta=0.7\left(1000\,kg/m^3\right)(1.5\,m)(3\,m/s)\left(1.5\times10^{-3}\,m\right)=4.73\,kg/s$$

با جایگزینی جملات فوق، رابطه‌ی (۱) به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\int_{bc}\rho(\vec{v}.\vec{n})dA=\dot{m}_{bc}=6.75-0.60-4.73 \quad ; \quad \underline{\underline{\dot{m}_{bc}=1.42\ \ kg/s}}$$

۱-۶ آب با دبی $0/1\ m^3/s$ و الکل $(SG = 0/8)$ با دبی $0/3\ m^3/s$ در یک سه‌راهی y-شکل با همدیگر مخلوط می‌شوند. مقدار متوسط چگالی مخلوط آب و الکل چقدر است؟



پاسخ:

چون مشخصات مسأله نسبت به زمان تغییر نمی‌کند، جریان پایدار است. رابطه‌ی پیوستگی [رابطه‌ی (۱-۱۴)] برای حجم کنترل ثابت شامل سیالات موجود در سه‌راهی (سیالات تراکم‌ناپذیر) در مخزن به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\int_{CS} \rho(\vec{v}\cdot\hat{n})dA = \sum_{out}\dot{m} - \sum_{in}\dot{m} = 0 \quad ; \quad \rho_w Q_w + \rho_{al} Q_{al} = \rho_m Q_m \qquad (1)$$

چون مخلوط از سیالات تراکم‌ناپذیر تشکیل شده و هیچگونه واکنش شیمیایی باهمدیگر ندارند، دبی حجمی نیز در حال تعادل است.

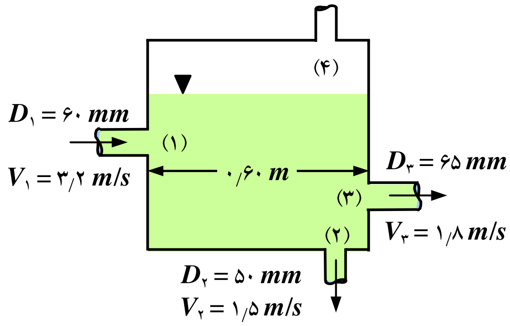
$$Q_w + Q_{al} = Q_m \qquad (2)$$

با ترکیب رابطه‌های (۱) و (۲) خواهیم داشت:

$$\rho_w Q_w + \rho_{al} Q_{al} = \rho_m (Q_w + Q_{al}) \quad ; \quad \rho_m = \frac{\rho_w Q_w + \rho_{al} Q_{al}}{Q_w + Q_{al}}$$

$$\rho_m = \frac{\rho_w (Q_w + SG_{al} Q_{al})}{Q_w + Q_{al}} = \frac{(1000\,kg/m^3)\left[(0.1\,m^3/s) + 0.8(0.3\,m^3/s)\right]}{(0.1\,m^3/s) + (0.3\,m^3/s)} \quad ; \quad \underline{\underline{\rho_m = 850 \quad kg/m^3}}$$

۸–۱ آب با سرعت ۳/۲ m/s از طریق لوله‌ی (۱) وارد مخزن استوانه‌ای به قطر ۰/۶۰ m می‌گردد و با سرعت‌های ۱/۵ m/s و ۱/۸ m/s به‌ترتیب از لوله‌های (۲) و (۳) خارج می‌گردد. لوله‌ی (۴) یک لوله‌ی تهویه به قطر ۶۰ mm است که از آن هوا خارج و یا وارد مخزن می‌گردد. با انتخاب مخزن به عنوان حجم کنترل، مقدار dh/dt را به‌دست آورید که در آن h ارتفاع آب در مخزن در هر لحظه است. اگر جریان هوا از لوله‌ی (۴) تراکم‌ناپذیر فرض شود، مقدار سرعت متوسط هوا در این لوله را به‌دست آورید.



پاسخ:

در این مسأله از حجم کنترل شکل‌پذیر استفاده می‌کنیم، اگرچه می‌توان حجم کنترل ثابت نیز انتخاب کرد. حجم کنترل شامل مخزن است و ابتدا فقط سیال آب درنظر گرفته می‌شود. ارتفاع آب در این حجم کنترل در هر لحظه برابر h است. چون ارتفاع آب تغییر می‌کند، جریان ناپایدار است. رابطه‌ی پیوستگی برای جریان یکنواخت و تراکم‌ناپذیر به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\forall_w)+\sum_{out}Q-\sum_{in}Q=0 \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial t}\int_{cv}(A_t h)-Q_1+Q_2+Q_3=0$$

$$A_t\frac{dh}{dt}-\left[\frac{\pi}{4}D_1^2\right]V_1+\left[\frac{\pi}{4}D_2^2\right]V_2+\left[\frac{\pi}{4}D_3^2\right]V_3=0$$

$$\frac{\pi}{4}(0.60m)^2\frac{dh}{dt}-\left[\frac{\pi}{4}(0.06m)^2\right](3.2m/s)+\left[\frac{\pi}{4}(0.050mm)^2\right](1.5m/s)+\left[\frac{\pi}{4}(0.065m)^2\right](1.8m/s)=0$$

$$\underline{\underline{\frac{dh}{dt}=0.00046\ m/s=0.46\quad mm/s}}$$

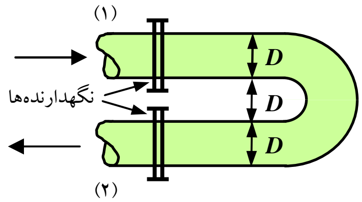
حال همان مراحل را برای هوا به‌صورت زیر درنظر بگیرید:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\forall_w)+\sum_{out}Q-\sum_{in}Q=0 \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial t}\int_{cv}(A_t h)-Q_4=0 \quad ; \quad A_t\frac{dh}{dt}=Q_4=A_4\bar{V}_4$$

$$\left[\frac{\pi}{4}(0.60m)^2\right](0.00046m/s)=\left[\frac{\pi}{4}(0.060m)^2\right]\bar{V}_4 \quad ; \quad \underline{\underline{\bar{V}_4=0.046\quad m/s}}$$

۱ – ۱۰، مم، ۸۷

فرض کنید فشار نسبی در هر دو مقطع ۱ و ۲ شکل زیر در یک زانویی افقی (در یک صفحه)، یکسان است. جریان سیال در زانویی دارای دانسیته ρ، دبی Q و سرعت V می‌باشد. سطح مقطع لوله A است. مقدار نیروی وارد به نگهدارنده‌ها جهت نگه‌داری زانویی در محل خود کدام است؟ (از نیروی ثقل و افت انرژی صرف‌نظر کنید)



۱) pA

۲) $۲\rho QV$

۳) $۲pA+\rho QV$

۴) $۲pA+۲\rho QV$

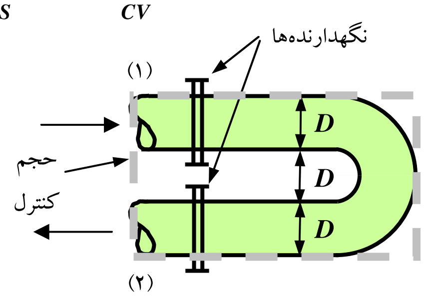
پاسخ:

گزینه‌ی (۴). با کاربرد رابطه‌ی (۱–۱۶) در جهت جریان برای حجم کنترل ثابت نشان داده شده درشکل خواهیم داشت:

$$\sum_{CS}\rho QV_x=\sum_{CV}F_x \quad ; \quad (-\dot{m}_1)(+V_1)+(\dot{m}_2)(-V_2)=p_1A_1+p_2A_2-R_x \qquad (۱)$$

از داده‌های مسأله، $A=A_۱=A_۲$، $p=p_۱=p_۲$ است.

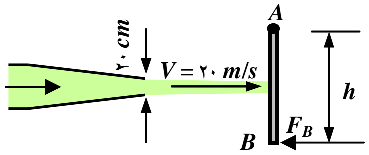
بنابر رابطه‌ی پیوستگی [رابطه‌ی (۱–۱۳)] برای همان حجم کنترل خواهیم داشت، $\dot{m}_1=\dot{m}_2=\dot{m}$، و چون سطح مقطع ثابت است، $V_۱=V_۲$. بنابراین، رابطه‌ی (۱) به‌صورت زیر ساده می‌شود:



$$\underline{\underline{R_x=2pA+2\rho QV}}$$

۱ - ۱۲، مع، ۸۳

فوران آب از یک نازل به قطر ۲۰ cm با سرعت ۳۰ m/s به مرکز یک صفحه‌ی قایم برخورد می‌کند. صفحه در قسمت فوقانی A مطابق شکل لولا شده است. برای اینکه صفحه به‌حالت قایم نگه‌داشته شود، نیروی F_B وارد بر انتهای پایین دریچه چند کیلونیوتن باید باشد ($g = ۱۰\ m/s^۲$، $\rho = ۱۰۰۰\ kg/m^۳$).



۱) ۶/۲۸ کیلونیوتن
۲) ۸/۶۲ کیلونیوتن
۳) ۱۲/۵۶کیلونیوتن
۴) ۲۵/۱۳ کیلونیوتن

پاسخ:

گزینه‌ی (۱). رابطه‌ی اندازه حرکت برای حجم کنترل ثابت در راستای جت آب به‌صورت زیر درمی‌آید:

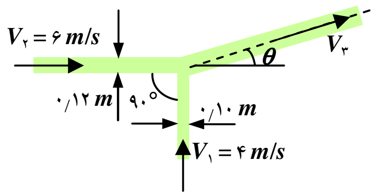
$$\sum_{CS} \rho Q V_x = \sum_{CV} F_x$$

$$R_x = \rho Q V = \rho V^2 A = \left(1000\, kg/m^3\right)\left(20\, m/s\right)^2 \left[\frac{\pi}{4}\left(0.20\, m\right)^2\right] = 12566\, N = 12.56\, kN$$

برای تعادل صفحه، لنگر نیروی محرک (R_x) با لنگر نیروی مقاوم برابر است. لذا، خواهیم داشت:

$$R_x\left(\frac{h}{2}\right) = F_B\left(h\right) \quad ; \quad F_B = \frac{1}{2} R_x = \frac{1}{2}\left(12.56\, kN\right) \quad ; \quad \underline{\underline{F_B = 6.28 \quad kN}}$$

۱ - ۱۴، مع، ۸۰

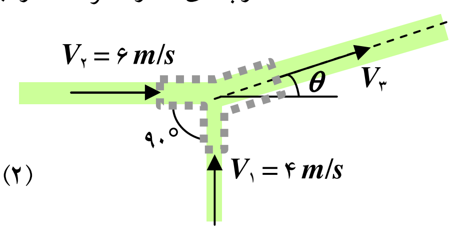


دو جت آب با یکدیگر برخورد نموده و یک جت یکپارچه‌ای را مطابق مشخصات داده شده در شکل ایجاد می‌کننـد. در این‌صورت سرعت جت حاصل چند m/s خواهد بود؟

۱) ۳/۸۲ ۲) ۴/۲۹ ۳) ۵/۷۳ ۴) ۷/۲۱

پاسخ:

گزینه‌ی (۲). همان‌طور که می‌دانیم، فشار در مقطع جت برابر فشار آتمسفر است. حجم کنترل ثابت در شکل با خط‌چین خاکستری نشان داده شده است. رابطه‌ی اندازه حرکت در جهت‌های قایم و افقی به‌صورت زیر ساده می‌شود:



$$\sum_{CS}\rho QV_z = \sum_{CV}F_z$$

$$(-\rho Q_1)(+V_1)+(\rho Q_3)(+V_3)\sin\theta = 0 \qquad (۱)$$

$$\sum_{CS}\rho QV_x = \sum_{CV}F_x \quad ; \quad (-\rho Q_2)(+V_2)+(\rho Q_3)(+V_3)\cos\theta = 0 \qquad (۲)$$

نیروی عکس‌العمل در دو جهت یادشده برابر صفر است، چون مرز سختی وجود ندارد که این عکس‌العمل‌ها ایجاد شود. نیروی فشاری در مقاطع نیز صفر است. از تقسیم دو رابطه‌ی (۱) و (۲) خواهیم داشت:

$$tg\theta = \frac{Q_1V_1}{Q_2V_2} = \frac{V_1^2A_1}{V_2^2A_2} = \frac{(4\,m/s)^2\left[\pi/4(0.10\,m)^2\right]}{(6\,m/s)^2\left[\pi/4(0.12\,m)^2\right]} = 0.309 \quad ; \quad \theta = 17.15^\circ$$

از طرفی، رابطه‌ی پیوستگی به‌صورت زیر درمی‌آید:

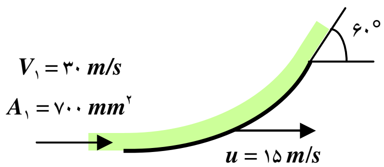
$$Q_3 = Q_1 + Q_2 = V_1A_1 + V_2A_2 \qquad (۳)$$

با جایگزینی رابطه‌ی (۳) در رابطه‌ی (۱) و ساده‌سازی، خواهیم داشت:

$$V_3 = \frac{V_1^2A_1}{(V_1A_1+V_2A_2)\sin\theta} = \frac{(4\,m/s)^2\left[\pi/4(0.10\,m)^2\right]}{\left\{(4\,m/s)\left[\pi/4(0.10\,m)^2\right]+(6\,m/s)\left[\pi/4(0.12\,m)^2\right]\right\}\sin(17.15^\circ)}$$

$$\underline{\underline{V_3 = 4.29 \quad m/s}}$$

۱۶-۱ جت آب با سرعت $۳۰\ m/s$ به پره‌ی انحنادار که در صفحه‌ی افق قرار دارد برخورد می‌کند. پره نیز با سرعت $۱۵\ m/s$ در حرکت است. زاویه‌ی خروج جت آب برابر ۶۰° است. اگر سطح مقطع جت ثابت بماند، مقدار توان پره و سرعت مطلق خروجی جت آب چقدر است؟ از اصطکاک هوا و آب صرف‌نظر کنید.



پاسخ:

مقدار توان از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$P = \vec{F} \cdot \vec{V} = R_x V_v$$

که در آن R_x نیروی عکس‌العمل آب بر پره و V_v سرعت پره است. با استفاده از رابطه‌ی پیوستگی می‌توان نشان داد که دبی نسبی ورودی و خروجی یکسان است (جریان پایدار). چون سطح مقطع جت ثابت است، مقدار سرعت نسبی جریان در مقطع ورودی و مقطع خروجی یکی است، اما سرعت نسبی در مقطع خروجی دارای زاویه‌ی ۶۰° است. سرعت نسبی در مقطع ورودی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$V_{r_1} = V_{r_2} = V_1 - V_v = (30\,m/s) - (15\,m/s) = 15\,m/s$$

رابطه‌ی اندازه حرکت [رابطه‌ی (۱-۱۷)] در جهت افقی برای حجم کنترل متحرک که شامل آب باشد، به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$-R_x = \int_{CV} \rho V_{rx} (\vec{V}_r \cdot \vec{n}) dA = \rho A V_{r_1 x} \left[V_{r_2 x} - V_{r_1 x} \right] = \rho A V_{r_1} \left[V_{r_1} \cos 60^\circ - V_{r_1} \right]$$

$$R_x = \rho A V_{r_1}^{\ 2} \left(1 - \cos 60^\circ\right) = \left(1000\,kg/m^3\right)\left(0.0007\,m^2\right)\left[15\,m/s\right]^2 \left(1 - \cos 60^\circ\right) = 78.8\,N$$

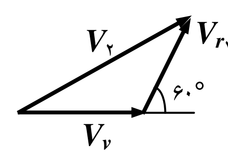
لذا توان به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$P = (78.8\,N)(15\,m/s) \quad ; \quad \underline{\underline{P = 1182 \quad W}}$$

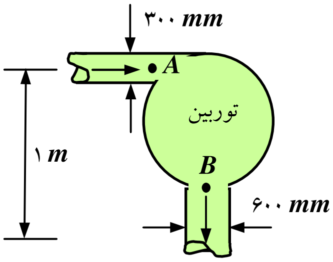
سرعت مطلق با استفاده از مثلث برداری که در شکل نشان داده شده است به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\vec{V}_2 = \vec{V}_v + \vec{V}_{r_2} \quad ; \quad V_2 = \sqrt{V_{r_2}^2 + V_v^2 - 2 V_{r_2} V_v \cos 120^\circ}$$

$$V_2 = \sqrt{(15\,m/s)^2 + (15\,m/s)^2 - 2(15\,m/s)(15\,m/s)\cos 120^\circ} \quad ; \quad \underline{\underline{V_2 = 26.0 \quad m/s}}$$



۱ – ۱۸، مع، ۷۹ آب از توربین نشان داده شده در شکل با دبی $0/36\ m^3/s$ می‌گـذرد و فشـار در نقـاط A و B به‌تـرتیـب $150\ kPa$ و $-40\ kPa$ می‌باشـد. قطـر لولــه‌ها نیـز در شـکل نشـان داده شـده اسـت. مقــدار تــوان هیــدرولیکی توربیــن برحسـب کیلووات چقدر می‌باشـد؟ ($\gamma_{آب} = 10^4\ kN/m^3$ ، $g = 10\ m/s^2$).



۱) ۴۴　　۲) ۶۲　　۳) ۷۶　　۴) ۹۱

پاسخ:

گزینه‌ی (۳). حجم کنترل ثابت شامل آب از مقطع بالادست پمپ [مقطع (A)] تا مقطع پایین‌دست پمپ [مقطع (B)] است. از انتقال گرما و انرژی داخلی صرف‌نظر شده است. رابطه‌ی انرژی [رابطه‌ی (۱–۱۸)] به‌صورت زیر در می‌آید:

$$\dot{W}_{shaft} = \sum_{out} \dot{m}\left(\frac{p}{\rho}+\frac{V^2}{2}+gZ\right)-\sum_{in} \dot{m}\left(\frac{p}{\rho}+\frac{V^2}{2}+gZ\right) \qquad (1)$$

مقادیر دبی جرمی و سرعت به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\dot{m}_{out} = \dot{m}_{in} = \rho Q = \left(1000\,kg/m^3\right)\left(0.36\,m^3/s\right) = 360\,kg/s$$

$$V_A = \frac{Q}{A_A} = \frac{\left(0.36\,m^3/s\right)}{\pi/4\left(0.30\,m\right)^2} = 5.09\,m/s \quad ; \quad V_B = \frac{Q}{A_B} = \frac{\left(0.36\,m^3/s\right)}{\pi/4\left(0.60\,m\right)^2} = 1.27\,m/s$$

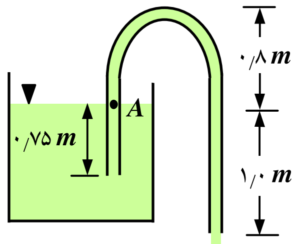
لذا رابطه‌ی (۱) به‌صورت زیر ساده می‌شود:

$$\dot{W}_{shaft} = \dot{m}\left[\left(\frac{p_B}{\rho}+\frac{V_B^2}{2}+gZ_B\right)-\left(\frac{p_A}{\rho}+\frac{V_A^2}{2}+gZ_A\right)\right]$$

$$\dot{W}_{shaft} = \left(360\,kg/s\right)\left\{\left[\frac{\left(-40000\,Pa\right)}{\left(1000\,kg/m^3\right)}+\frac{\left(1.27\,m/s\right)^2}{2}+0\right]-\left[\frac{\left(150000\,Pa\right)}{\left(1000\,kg/m^3\right)}+\frac{\left(5.09\,m/s\right)^2}{2}+\left(10\,m/s^2\right)\left(1\,m\right)\right]\right\}$$

$$\underline{\underline{\dot{W}_{shaft} = -76373\,W \cong -76\quad kW}}$$

۱ – ۲۰، مع، ۸۳ مایعی در سیفون نشان داده شده در شکل،جریان دارد. با صرف‌نظر کردن از هر گونه افت انرژی در مسیر، فشار مطلق در نقطه‌ی A برابر کدامیک از مقادیر زیر است؟ فشار هوا در محل برابر p_a پاسکال و وزن مخصوص مایع γ نیوتن بر هر متر مکعب می‌باشند. قطر سیفون ثابت است.



۱) $p_a - \gamma$ ۲) $۰/۸\,\gamma$ ۳) $p_a - ۰/۷۵\,\gamma$ ۴) $p_a + ۰/۸\,\gamma$

پاسخ:

گزینه‌ی (۱). حجم کنترل ثابت شامل آب از سطح مقطع A تا مقطع خروجی لوله (سطح مقطع B) است. رابطه‌ی هد انرژی [رابطه‌ی (۱-۱۹)] با صرف‌نظر کردن از افت هد انرژی به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{p_A}{\gamma}+\frac{V_A^2}{2g}+Z_A=\frac{p_B}{\gamma}+\frac{V_B^2}{2g}+Z_B \quad ; \quad \frac{p_A}{\gamma}+\frac{V_A^2}{2g}+0=\frac{p_a}{\gamma}+\frac{V_B^2}{2g}-(1.0\,m)$$

چون قطر سیفون ثابت است، باتوجه به رابطه‌ی پیوستگی، $V_A = V_B$ است. لذا، رابطه‌ی فوق به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{p_A}{\gamma}=\frac{p_a}{\gamma}-(1.0\,m) \quad ; \quad \underline{\underline{p_A = p_a - \gamma}}$$

۱-۲۲ مؤلفه‌های سرعت در یک جریان دوبعدی پایدار، توسط رابطه‌های $u=-a\,y$ و $v=a\,x$ داده شده است. مقدار نرخ چرخش چقدر است؟

پاسخ:

برای جریان دوبعدی در صفحه‌ی x-y، فقط مؤلفه‌ی سرعت زاویه‌ای حول محور z وجود دارد. نرخ چرخش یا نرخ سرعت زاویه‌ای از رابطه‌ی (۱-۲۰) به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\omega_z=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x}(ax)-\frac{\partial}{\partial y}(-ay)\right] \quad ; \quad \underline{\underline{\omega_z=a}}$$

۱-۲۴ میدان سرعت سیالی به صورت زیر داده شده است:

$$\vec{V}=x^2y\hat{i}-(3x-3z)\hat{j}+5z^2\hat{k}$$

نرخ چرخش را در نقطه‌ای به مختصات (۴، ۲–، ۱) m به‌دست آورید.

پاسخ:

بردار نرخ چرخش از رابطه‌ی (۱-۲۱) به‌دست می‌آید. مؤلفه‌های نرخ‌های چرخش حول محورهای مختصات و بردار نرخ چرخش به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\omega_x=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)=\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left(5z^2\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left[-(3x-3z)\right]\right\} \quad ; \quad \omega_x=-\frac{3}{2}$$

$$\omega_y=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(x^2y\right)-\frac{}{\partial x}\left(5z^2\right)\right] \quad ; \quad \omega_y=0$$

$$\omega_z=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[-(3x-3z)\right]-\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2y\right)\right\} \quad ; \quad \omega_z=-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}x^2$$

$$\vec{\omega}=\omega_x\hat{i}+\omega_y\hat{j}+\omega_z\hat{k} \quad ; \quad \vec{\omega}=-\frac{3}{2}\hat{i}-\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}x^2\right)\hat{k}$$

نرخ چرخش در نقطه‌ای به مختصات (۴، ۲–، ۱) m به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\vec{\omega}=-\frac{3}{2}\hat{i}-\left[\frac{3}{2}+\frac{1}{2}(4m)^2\right]\hat{k} \quad ; \quad \underline{\underline{\vec{\omega}=-\frac{3}{2}\hat{i}-\frac{19}{2}\hat{k}}}$$

۱-۲۶ تانسور نرخ کرنش را برای میدان سرعت داده شده در مسأله‌ی (۱-۲۴) به‌دست آورده مقدار آن را در نقطه‌ای به مختصات (۴، ۱، ۲−) m محاسبه کنید.

پاسخ:

مقادیر نرخ کرنش و تانسور آن از رابطه ی (۱-۲۸) به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 y\right)=2xy \quad ; \quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left[-\left(3x-3z\right)\right]=0 \quad ; \quad \frac{\partial w}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}\left[5z^2\right]=10z$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)=\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 y\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left[-\left(3x-3z\right)\right]\right\}=x^2-3 \quad ; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)=\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(x^2 y\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(5z^2\right)\right]=0$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)=\left\{\frac{\partial}{\partial z}\left[-\left(3x-3z\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left(5z^2\right)\right\}=3$$

$$\varepsilon_{ij}=\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right) & \left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right) & \left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}=\underline{\underline{\begin{pmatrix} 2xy & x^2-3 & 0 \\ x^2-3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 10z \end{pmatrix}}}$$

تانسور نرخ کرنش در نقطه‌ای به مختصات (۴، ۱، ۲−) m به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\varepsilon_{ij}=\begin{pmatrix} 2(4m)(1m) & (4m)^2-3 & 0 \\ (4m)^2-3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 10(-2m) \end{pmatrix} \quad ; \quad \underline{\underline{\varepsilon_{ij}=\begin{pmatrix} 8 & 13 & 0 \\ 13 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -20 \end{pmatrix}\frac{1}{s}}}$$

۱–۲۸ مؤلفه‌های سرعت در یک جریان سه‌بعدی تراکم‌ناپذیر و پایدار به‌صورت زیر داده شده است:

$$u = x^2 + y^2 + z^2 \quad ; \quad v = xy + yz + z^2 \quad ; \quad w = -3xz - \frac{z^2}{2} + 4$$

بردار ورتیسیته را به‌دست آورید. آیا جریان غیرچرخشی است؟

پاسخ:

مؤلفه‌های رابطه‌ی ورتیسیته [رابطه‌ی (۱–۳۳)]، به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\begin{cases} \zeta_z = \left(\dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}\right) = (y - 2y) = -y \\ \zeta_x = \left(\dfrac{\partial w}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial z}\right) = \left[0 - (y + 2z)\right] = -(y + 2z) \\ \zeta_y = \left(\dfrac{\partial u}{\partial z} - \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) = \left[2z - (-3z)\right] = 5z \end{cases} \quad ; \quad \underline{\underline{\vec{\zeta} = -(y + 2z)\vec{i} + 5z\vec{j} - y\vec{k}}}$$

<u>جریان چرخشی است</u>.