روش فهرست نویسی

6-2) $R = f(V_x, V_y, g)$ $\quad R = f((V_x)^a (V_y)^b (g)^c)$

$$\begin{cases} R \doteq L \\ V_x \doteq V_y \doteq LT^{-1} \\ g \doteq LT^{-2} \end{cases}$$

$$L_x = (L_x T^{-1})^a (L_y T^{-1})^b (L_y T^{-2})^c \Rightarrow \begin{cases} L_x : 1 = a \\ L_y : 0 = b + c \\ T : 0 = -a - b - 2c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = -1 \end{cases}$$

$$R = f\left((V_x)^1 (V_y)^1 (g)^{-1}\right) = f\left(V_x^1 V_y^1 g^{-1}\right)$$

$$R = f\left[\frac{(V\cos\theta)(V\sin\theta)}{g}\right] = f\left(\frac{V^2 \sin 2\theta}{2g}\right)$$

$$R = f\left(\frac{V_x V_y}{g}\right) \qquad V_x = V\cos\theta \qquad V_y = V\sin\theta$$

$$\boxed{R = f\left(\frac{V^2 \sin 2\theta}{g}\right)}$$

جواب سوال 6-10 :

الف) $F_D = f(V, \mu, D)$

تعیین ابعاد متغیرها : (MLT)

$F_D : MLT^{-2}$ $\quad V : LT^{-1}$ $\quad \mu : ML^{-1}T^{-1}$ $\quad D : L$

$n=4$ $\quad (M,L,T)$ $j=3$ $\quad k = n-j = 1$ تعداد گروه های بی بعد

چون فقط یک گروه داریم، آن گروه باید برابر یک عدد ثابت (C) باشد. متغیرهای تکرارشونده D و μ و V را انتخاب می‌کنیم و متغیر وابسته F_D را با آن‌ها ترکیب می‌کنیم :

$$\Pi_1 = F_D \times V^a \times \mu^b \times D^c \Rightarrow M^0L^0T^0 = (MLT^{-2})(LT^{-1})^a (ML^{-1}T^{-1})^b (L)^c$$

برای M : $1+b=0 \Rightarrow b=-1$

برای T : $-2-a-b=0 \Rightarrow -2-a-(-1)=0 \Rightarrow a=-1$

برای L : $1+a-b+c=0 \Rightarrow 1-1-(-1)+c=0 \Rightarrow c=-1$

بنابراین گروه بی بعد بدست می‌آید :

$$\Pi_1 = F_D \times V^{-1} \times \mu^{-1} \times D^{-1} = \frac{F_D}{\mu \times V \times D} \Rightarrow \frac{F_D}{DV\mu} = C$$

ب) $h = f(D, \sigma, \gamma)$

تعیین ابعاد متغیرها : (FLT)

$h : L$ $\quad D : L$ $\quad \sigma : FL^{-1}$ $\quad \gamma = FL^{-3}$

$n=4$ $\quad (F,L)$ $j=2$ $\quad k = n-j = 4-2 = 2$ تعداد گروه های بی بعد

متغیرهای تکرارشونده را (γ و D) انتخاب می‌کنیم (شامل هر 2 بُعد F و L هستند)

گروه Π_1 (ترکیب با h) : $\quad \Pi_1 = \frac{h}{D}$

گروه Π_2 (ترکیب با σ) : $\quad \Pi_2 = \sigma \times \gamma^a \times D^b \Rightarrow F^0L^0 = (FL^{-1})(FL^{-3})^a (L)^b$

برای F : $1+a=0 \Rightarrow a=-1$

برای L : $-1-3a+b=0 \Rightarrow -1-3(-1)+b=0 \Rightarrow b=-2$

$\Pi_2 = \sigma \gamma^{-1} D^{-2} = \frac{\sigma}{\gamma D^2} \Rightarrow \frac{h}{D} = f\left(\frac{\sigma}{\gamma D^2}\right)$

ج) $\Delta h = f(t, \rho, D, \gamma, h)$

تعیین ابعاد متغیرها: (MLT)

$\Delta h : L \quad t : T \quad \rho : ML^{-3}$

$D : L \quad \gamma : ML^{-2}T^{-2} \quad h : L$

$n = 6$

$(M, L, T)\ j = 3 \qquad K = n - j = 3$ تعداد گروه های بی بعد

متغیر های تکرار شونده را γ و D و ρ انتخاب می کنیم (حاوی ابعاد مستقل T و L و M هستند)

گروه Π_1 (ترکیب با Δh): $\Pi_1 = \frac{\Delta h}{D}$

گروه Π_2 (ترکیب با h): $\Pi_2 = \frac{h}{D}$

گروه Π_3 (ترکیب با t): $\Pi_3 = t \rho^a \times D^b \times \gamma^c \Rightarrow M^0 L^0 T^0 = (T)(ML^{-3})^a (L)^b (ML^{-2}T^{-2})^c$

برای M: $a + c = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$

برای T: $1 - 2c = 0 \Rightarrow c = \frac{1}{2}$

برای L: $-3a + b - 2c = 0 \Rightarrow b = -\frac{1}{2}$

$\Pi_3 = t \times \rho^{-\frac{1}{2}} \times D^{-\frac{1}{2}} \times \gamma^{\frac{1}{2}} = t \times \sqrt{\frac{\gamma}{\rho D}} \Rightarrow \Pi_3 = \frac{\gamma t^2}{\rho D}$

$\Rightarrow \frac{\Delta h}{D} = f\left(\frac{\gamma t^2}{\rho D}, \frac{h}{D}\right)$

جواب سوال 6-16 : تعیین ابعاد متغیرها (MLT) قضیه پی باکینگهام

$\Delta p: ML^{-1}T^{-2}$ $\rho: ML^{-3}$ $\mu: ML^{-1}T^{-1}$ $D: L$ Length : L

$\epsilon: L$ $V = LT^{-1}$

$n = 5$ $(M, L, T)\ j = 3$ گروه‌های بی‌بعد $k = n - j = 5 - 3 = 2$

باید ۳ متغیر را انتخاب کنیم که هرسه بعد T و L و M را پوشش دهد، انتخاب معقول D و V و ρ است.

گروه Π_1 (ترکیب با افت فشار Δp): $\Pi_1 = \Delta p \times \rho^a \times V^b \times D^c \Rightarrow \Pi_1 = \frac{\Delta p}{\rho V^2}$ → عدد اویلر (Eu)

گروه Π_2 (ترکیب با لزجت μ): $\Pi_2 = \mu \times \rho^a \times V^b \times D^c \Rightarrow \Pi_2 = \frac{\mu}{\rho V D}$ → معکوس عدد رینولدز (Re)

گروه Π_3 (ترکیب با طول L): $\Pi_3 = \frac{L}{D}$

گروه Π_4 (ترکیب با زبری ϵ): $\Pi_4 = \frac{\epsilon}{D}$

طبق قضیه پی باکینگهام می‌توان گروه بی‌بعد حاوی متغیر وابسته (Π_1) را به صورت تابعی از سایر گروه‌های بی‌بعد نوشت:

$$\Pi_1 = F(\Pi_2, \Pi_3, \Pi_4) \Rightarrow \frac{\Delta p}{\rho V^2} = F\left(Re, \frac{L}{D}, \frac{\epsilon}{D}\right)$$

← جواب گزینه ①

جواب سوال 6-21 : تعیین ابعاد متغیرها (MLT) بی‌بُعد — قضیه پی باکینگهام

$Q = L^3T^{-1}$ $\quad D: L$ $\quad \frac{\Delta H}{\ell}: (1)$ $\quad P: ML^{-3}$ $\quad \mu: ML^{-1}T^{-1}$

$n = 5$ $\quad (M, L, T)$ $\quad j = 3$ $\quad k = n - j = 2$

گروه‌های بی‌بعد

از آن جایی که پارامتر $\frac{\Delta h}{\ell}$ از قبل بدون بعد است این پارامتر مستقیماً اولین گروه بی‌بعد است.

$$\Pi_1 = \frac{\Delta h}{\ell}$$

این گروه (رهید رولیک) به عنوان شیب هیدرولیک شناخته می‌شود.

سه متغیر D و Q و ρ را انتخاب می‌کنیم و آن‌ها را با متغیر باقی مانده یعنی μ ترکیب می‌کنیم:

$$\Pi_2 = \mu \times \rho^a \times Q^b \times D^c \Rightarrow (M^0L^0T^0) = (ML^{-1}T^{-1}) \times (ML^{-3})^a \times (L^3T^{-1})^b \times (L)^a$$

برای M: $1+a=0 \Rightarrow a=-1$ برای T: $-1-b=0 \Rightarrow b=-1$

برای L: $-1-3a+3b+c=0 \Rightarrow c=1$

$$\Pi_2 = \mu \times \rho^{-1} \times Q^{-1} \times D^1 = \frac{\mu D}{\rho Q} \Rightarrow \Pi_2 = \frac{\mu D}{\rho Q}$$

جواب سوال 6-26 : تعیین ابعاد متغیرها (MLT) قضیه پی باکینگهام

$P = f(h, b, V, \mu)$ $\quad P: ML^{-1}T^{-2}$ $\quad h: L$ $\quad b: L$ $\quad V: LT^{-1}$

$\mu = ML^{-1}T^{-1}$

$n = 5$ $\quad (M, L, T)$ $\quad j = 3$ $\quad k = n - j = 2$ گروه های پی بعد

بهترین انتخاب (در این جا متغیرهای μ و V و h هستند ارتفاع نماینده طول، سرعت نماینده زمان، لزجت نماینده جرم حالا دو متغیر باقی مانده یعنی فشار و عرض صفحه را با متغیرهای تکرار شونده ترکیب می‌کنیم تا ۲ گروه بی بعد ساخته شود.

گروه Π_1 با متغیر فشار : $\Pi_1 = P \times \mu^A \times V^B \times h^C \Rightarrow M^0L^0T^0 = (ML^{-1}T^{-2}) \times (ML^{-1}T^{-1})^A \times (LT^{-1})^B \times (L)^C$

برای M : $1 + A = 0 \Rightarrow A = -1$

برای L : $-1 - A + B + C = 0 \Rightarrow C = 1$

برای T : $-2 - A - B = 0 \Rightarrow B = -1$

$$\Pi_1 = P \times \mu^{-1} \times V^{-1} \times h^1 = \frac{P \times h}{\mu \times V}$$

گروه Π_2 با متغیر عرض (b) : از آن جایی که عرض (b) و ارتفاع (h) هر دو از جنس طول هستند، نسبت آن ها مستقیماً یک پارامتر بدون بعد است

$\Pi_2 = b \times \mu^{A'} \times V^{B'} \times h^{C'} \Rightarrow M^0L^0T^0 = (L) \times (ML^{-1}T^{-1})^{A'} \times (LT^{-1})^{B'} \times (L)^{C'}$

برای M : $A' = 0$

برای T : $-A' - B' = 0 \Rightarrow B' = 0$

برای L : $1 - A' + B' + C' = 0 \Rightarrow C' = -1$

جایگذاری ⇐

$$\Pi_2 = b \times h^{-1} = \frac{b}{h}$$

بر اساس قضیه باکینگهام می‌توانیم گروه بی بعد حاوی متغیر وابسته را تابعی از سایر گروه های بی بعد بنویسیم:

$$\Pi_1 = f(\Pi_2) \Rightarrow \frac{\rho h}{\mu v} = f_3\left(\frac{b}{h}\right)$$

جواب سوال 6-33 : روش هانسیکر و رایت مایر

$\mu = ML^{-1}T^{-1}$

تعیین ابعاد متغیرها (MLT):

$F_D: MLT^{-2}$ $\quad d_1: L$ $\quad d_2: L$ $\quad V: LT^{-1}$ $\quad \rho = ML^{-3}$

تشکیل معادله عمومی:

$$\Pi = F_D^a \times d_1^b \times d_2^c \times V^d \times \rho^e \times \mu^f \Rightarrow (MLT^{-2})^a \times (L)^b \times (L)^c \times (LT^{-1})^d \times (ML^{-1}T^{-1})^f = M^0 L^0 T^0$$

برای M: $a+e+f=0$ ① برای T: $-2a-d-f=0$ ②

برای L: $a+b+c+d-3e-f=0$ ③

این سیستم شامل ۳ معادله و ۶ مجهول است، برای یافتن ۳ گروه بی بعد مستقل باید ۳ متغیر را به عنوان متغیرهای پایه فرض کرده و بقیه را برحسب آن ها بیان کنیم.

از معادله ① $\Rightarrow e = -a-f$ از معادله ② $\Rightarrow d = -2a-f$

جای گذاری در معادله ③ $\Rightarrow a+b+c+(-2a-f)-3(-a-f)-f=0 \Rightarrow b = -2a-c-f$

گروه Π_1: برای رسیدن به F_D فرض می کنیم $f=0$ و $a=0$ و $a=1$:

$e=-1$, $d=-2$, $b=-2 \Rightarrow \Pi_1 = F_D^1 \times d_1^{-2} \times d_2^0 \times V^{-2} \rho^{-1} \times \mu^0 = \dfrac{F_D}{\rho V^2 d_1^2}$

گروه Π_2: برای رسیدن به d_2 فرض می کنیم $f=0$ و $a=0$ و $a=1$

$e=0$, $d=0$, $b=-1$ $\quad \Pi_2 = F_D^0 \times d_1^{-1} \times d_2^1 \times V^0 \rho^0 \times \mu^0 = \dfrac{d_2}{d_1}$

گروه Π_3 : برای رسیدن به μ فرض می‌کنیم $f=1$ و $c=0$ و $a=0$:

$$\Pi_3 = F_D^{0} \times d_1^{-1} \times d_2^{0} \times v^{-1} \times \rho^{-1} \times \mu^{1} = \frac{\mu}{\rho v d_1} \qquad e=-1 \text{ و } d=-1 \text{ و } b=-1$$

با استفاده از این روش جبری، تابع بی بعد نهایی به صورت زیر به دست می‌آید :

$$\frac{F_D}{\rho v^2 d_1^2} = \phi\left(\frac{d_2}{d_1}, \frac{\rho v d_1}{\mu}\right)$$

جواب سوال 6-38 : $t = f(g, l)$ روش پی باکینگهام

تعیین ابعاد متغیرها: $t : T \quad g : LT^{-2} \quad l : L$

چون ۳ متغیر (t, g, l) و ۲ بعد اساسی (L, T) داریم براساس قضیه پی باکینگهام تنها ① گروه بی بعد داریم

$$\Pi = t^a \times g^b \times l^c \Rightarrow (T)^a \times (LT^{-2})^b \times (L)^c = M^0 L^0 T^0$$

برای T : $a - 2b = 0 \Rightarrow a = 2b$ برای L : $b + c = 0 \Rightarrow c = -b$

$$a = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{2} \Rightarrow c = -b = -\frac{1}{2}$$ فرض :

$$\Pi = t^1 \times g^{\frac{1}{2}} \times l^{-\frac{1}{2}} = t\sqrt{\frac{g}{l}} \Rightarrow t\sqrt{\frac{g}{l}} = a \rightarrow t = a\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$a = t\sqrt{\frac{g}{l}}$$ با استفاده از داده های جدول ثابت a را محاسبه می کنیم

$$\begin{cases} t = 0,648 \\ l = 0,149 \end{cases} \Rightarrow a_1 = 0,648 \times \sqrt{\frac{9,81}{0,149}} \simeq 4,446$$

$$\begin{cases} t = 0,783 \\ l = 0,305 \end{cases} \Rightarrow a_2 = 0,783 \times \sqrt{\frac{9,81}{0,305}} \simeq 4,44$$

$$\begin{cases} t = 0,949 \\ l = 0,449 \end{cases} \Rightarrow a_3 = 0,949 \times \sqrt{\frac{9,81}{0,449}} \simeq 4,438$$

$$\begin{cases} t = 1,174 \\ l = 0,686 \end{cases} \Rightarrow a_4 = 1,174 \times \sqrt{\frac{9,81}{0,686}} \simeq 4,439$$

• میانگین مقادیر به‌دست آمده برای ثابت c تقریباً برابر ۴٫۴۴ است.

$$t = ۴٫۴۴ \times \sqrt{\frac{l}{g}}$$

6-43) $\theta = f(\omega, \mu, K, D_1, D_2, \ell)$ بدون بعد است θ $\omega \doteq T^{-1}$ $\mu \doteq FL^{-2}T$ $K \doteq FL$

$D_1 \doteq D_2 \doteq \ell \doteq L$ ابعاد اولیه: (F, L, T) متغیرهای تکراری: K, ω, ℓ روش باکینگهام روایت ماتریس

$$\begin{cases} \ell \doteq L \\ \omega \doteq T^{-1} \\ K \doteq FL \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L \doteq \ell \\ T \doteq \omega^{-1} \\ F \doteq KL^{-1} \doteq K\ell^{-1} \end{cases}$$

$$\mu \doteq FL^{-2}T \doteq (K\ell^{-1})(\ell^{-2})(\omega^{-1}) \doteq K\ell^{-3}\omega^{-1}$$

$$\pi_1 = \theta \qquad \pi_2 = \frac{D_1}{\ell} \qquad \pi_3 = \frac{D_2}{\ell} \qquad \pi_4 = \frac{\mu\omega\ell^3}{K}$$

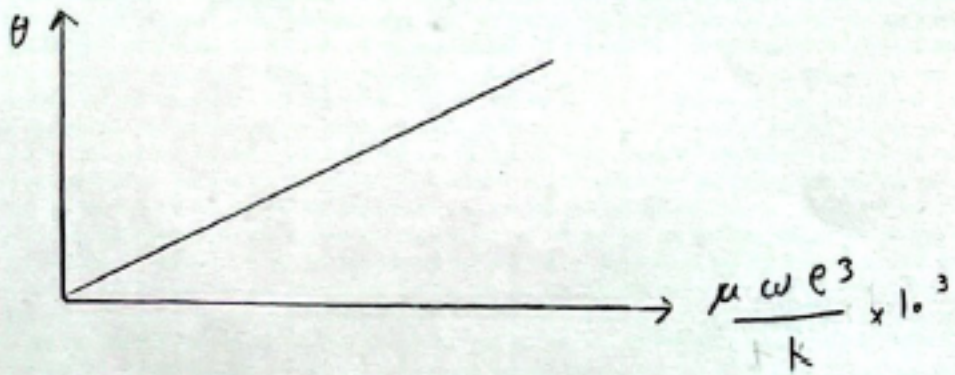
$$\theta = f\left(\frac{\mu\omega\ell^3}{K}, \frac{D_1}{\ell}, \frac{D_2}{\ell}\right) \qquad \theta = \phi\left(\frac{\mu\omega\ell^3}{K}\right)$$

$$\phi = \frac{\theta \times 13.6}{0.84 \times \omega \times 0.3^3} \xrightarrow[\text{جوابها}]{\text{یاگین}} \phi = 1788.9871$$

θ (rad)	0	0.89	1.5	2.51	3.05	4.28	5.52	6.4
ω (rad/s)	0	0.3	0.5	0.82	1.05	1.43	1.86	2.14
ϕ	0	1778.95	1798.94	1835.51	1741.83	1794.75	1779.6	1793.31

$$\theta = 1788.9871\left(\frac{\mu\omega\ell^3}{K}\right)$$

$$\theta = 1788.9871\,\frac{\mu\omega\,0.3^3}{13.6} = \boxed{3.55\mu\omega}$$



جواب سوال 6-50 : برای حل این مسائل از آنالیز ابعادی و تشابه استفاده می کنیم (در جریان های نوسانی

(روی لوله که اثرات لزجت مهم است عدد بدون بعدی که باید در مدل و نمونه اصلی برابر باشد از ترکیب عدد

رینولدز و استروهال بدست می آید

$$\Pi = \frac{\rho \omega D^2}{\mu}$$

برقراری تشابه دینامیکی $\Rightarrow \left(\frac{\rho \omega D^2}{\mu}\right)_m = \left(\frac{\rho \omega D^2}{\mu}\right)_p$

صورت سوال گفته سیال در مدل شبیه سیال به کار رفته در نمونه اصلی است $\Leftarrow$ ρ و μ هر دو حالت یکسان

$$\Rightarrow \omega_m \times D_m^2 = \omega_p \times D_p^2 \Rightarrow \omega_m = \omega_p \times \left(\frac{D_p}{D_m}\right)^2$$

فرکانس نمونه اصلی : $\omega_p = 10 \ rad/s$

مقیاس مدل $\frac{D_m}{D_p} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{D_p}{D_m} = 4$

فرکانس مدل $\omega_m = 10 \times (4)^2 = 10 \times 16 = 160 \ rad/s$

جواب سوال 6-53 : از این مسئله با ۲ نیروی غالب روبرو هستیم، نیروی گرانش و لزجت بنابراین برای برقراری شبیه سازی کامل باید هم زمان تشابه فرود و رینولدز برقرار باشد.

محاسبه لزجت سینماتیکی روغن آب مدل : با توجه به پارامتر های $(t, d, \Omega, \rho, U, h, g)$ با استفاده از قضیه باکینگهام گروه بدون بعدی که شامل لزجت است :

$$\Pi = \frac{u}{\rho_x \sqrt{g} \times h^{\frac{3}{2}}} = \frac{\nu}{\sqrt{g} \times h^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\nu_m}{\sqrt{g_m} \times h_m^{\frac{3}{2}}} = \frac{\nu_p}{\sqrt{g_p} \times h_p^{\frac{3}{2}}}$$

فرض : $g_m = g_p \Rightarrow \frac{\nu_m}{\nu_p} = \left(\frac{h_m}{h_p}\right)^{\frac{3}{2}} = (L_r)^{\frac{3}{2}}$

$L_r = \frac{1}{4} \Rightarrow \nu_m = \nu_p \times \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}} \rightarrow \nu_m = 0{,}89378 \times 10^{-6} \ m^2/s$ لزجت سینماتیکی مورد نظر

گروه بدون بعد مربوط به زمان به صورت زیر است (برگرفته از تشابه فرود)

$$\Pi' = t\sqrt{g/h} \Rightarrow t_m \sqrt{\frac{g_m}{h_m}} = t_p \sqrt{\frac{g_p}{h_p}} \Rightarrow \frac{t_m}{t_p} = \sqrt{\frac{h_m}{h_p}} = \sqrt{L_r}$$

$$\Rightarrow t_p = \frac{t_m}{\sqrt{L_r}} \Rightarrow \begin{cases} t_m = 4{,}83 \\ L_r = \frac{1}{4} \end{cases} \rightarrow t_p = \frac{4{,}83}{\sqrt{\frac{1}{4}}} = 9{,}66 \text{ minutes}$$

زمان تخلیه در نمونه اصلی

جواب سوال 6-62 : برای اجسامی مانند هواپیما که کاملاً در سیال (هوا) غوطه ور هستند، شرط اصلی تشابه برابر بودن عدد رینولدز (Re) در مدل و نمونه اصلی است.

$$Re = \frac{\rho V L}{\mu}$$

شرط تشابه رینولدز

$$Re_m = Re_p \Rightarrow \frac{\rho_m V_m L_m}{\mu_m} = \frac{\rho_p V_p L_p}{\mu_p}$$

در صورت سوال ذکر شده که فشار و درجه حرارت در مدل و فضا یکسان فرض شده است این یعنی چگالی (ρ) و لزجت (μ) هوا برای هر دو حالت برابر است $\mu_m = \mu_p$ و $\rho_m = \rho_p$

$$\Rightarrow V_m L_m = V_p L_p \Rightarrow V_m = V_p \times \left(\frac{L_p}{L_m}\right)$$

$$\begin{cases} V_p = 640 \ km/h \\ \frac{L_m}{L_p} = \frac{1}{20} \Rightarrow \frac{L_p}{L_m} = 20 \end{cases}$$

$$\Rightarrow V_m = 640 \times 20 = 12800 \ km/h$$

سرعت هواپیما در تونل باد

گزینه (۴)

جواب سوال 6-68 : این سرریز اصلی ۶ره متر مکعب بر ثانیه است و می‌خواهیم این مدل رابدست آوریم

در مدل سازی سرریز ها (جریان با سطح آزاد) از تشابه فرود استفاده می‌شود ، در این تشابه رابطه بین

نسبت این ها و نسبت طول ها به صورت زیر است

$$Fr \leftarrow \frac{V}{\sqrt{gL}} \Rightarrow V \propto \sqrt{L} \quad , \quad Q = A \times V \quad A \propto L^2$$

$$\Rightarrow Q \propto L^2 \times L^{\frac{1}{2}} \Rightarrow Q \propto L^{\frac{5}{2}}$$

$$\Rightarrow Q_r = L_r^{\frac{5}{2}} \Rightarrow Q_r = \left(\frac{1}{25}\right)^{\frac{5}{2}} = \frac{1}{3125}$$

$$Q_p = 0.6 \Rightarrow Q_m = Q_p \times Q_r = 0.6 \times \frac{1}{3125} = 1.92 \times 10^{-4} \ \frac{m^3}{s}$$

پس این مدل ← گزینه (۲)