$$\frac{P_1}{\gamma} + z_1 + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{P_{atm}}{\gamma} + z_2 + \frac{v_2^2}{2g}$$

(1) داخل (2) خروج و

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} + (H+2) = 0 + 0 + \frac{v_2^2}{2g}$$

بالقسمة بـ A نجد $\Leftarrow$ $v_1 = v_2$

$$P_1 = -\gamma(H+2) \rightarrow (1070 - 10 \times 3000) = -9810(H+2)$$

$$H = 8.16m$$

جواب سوال 5-67 :

ابتدا مساحت مقطع روزنه خروجی (A) را حساب می‌کنیم :

$$A = \frac{\pi \times d^2}{4} = \frac{\pi \times (0.05)^2}{4} \simeq 0.00196 \ m^2 \qquad V = \frac{Q}{A} = \frac{0.10}{0.00196} \simeq 5.093 \ m/s$$

فشار در کف مخزن (دقیقاً قبل از خروج) باید به اندازه‌ای باشد که انرژی جنبشی این جت را تأمین کند ، معادله برنولی را بین سطح سیال و خروجی روزنه می نویسیم :

فشار کل در کف مخزن (P_{bottom}) ناشی از فشار هوا (P_1) وزن ستون بنزین و وزن ستون آب است :

$$P_{bottom} = P_1 + (\rho_{oil} \times g \times h_1) + (\rho_{water} \times g \times h_2) \qquad \begin{cases} \rho_{water} = 1000 \ kg/m^3 \\ g = 9.81 \ m/s^2 \end{cases}$$

چگالی بنزین : $\rho_{oil} = SG \times \rho_{water} = 0.68 \times 1000 = 680 \ kg/m^3$

$$P_{bottom} = P_1 + (680 \times 9.81 \times 0.5) + (1000 \times 9.81 \times 0.78) \Rightarrow P_{bottom} = P_1 + 10492.9$$

طبق معادله برنولی ، این فشار کل در خروجی به انرژی جنبشی جت آب تبدیل می‌شود .

$$P_{bottom} = \frac{1}{2} \times \rho_{water} \times V^2 \Rightarrow P_{bottom} = \frac{1}{2} \times 1000 \times (5.093)^2 \simeq 12949.5 \ Pa$$

حالا دو رابطه را برابر قرار می‌دهیم :

$$P_1 + 10492.9 = 12949.5 \Rightarrow P_1 = 2276.6 \ Pa$$

فشار لازم در سیستم حدود $2.28 \ kPa$ است .

جواب سوال 5-63 : ارتفاع آب تا مرکز روزنه $h_c = 2\ m$ ارتفاع روزنه $d = 0.2\ m$ عرض روزنه $b = 0.4\ m$

$g = 9.81\ m/s^2$

فاصله سطح آب تا لبه بالایی $h_1 = h_c - \frac{d}{2} = 2 - 0.1 = 1.9\ m$ تا لبه پایینی $h_2 = h_c + \frac{d}{2} = 2 + 0.1 = 2.1\ m$

حالت اول : توزیع سرعت غیر یکنواخت :

سرعت در هر عمق y با استفاده از رابطه تورریچلی $V = \sqrt{2gy}$ متغیر است .

$$Q_{exact} = \int_{h_1}^{h_2} V\,dA = \int_{h_1}^{h_2} \sqrt{2gy}\,(b\,dy) \Rightarrow Q_{exact} = b\sqrt{2g}\left[\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right]_{h_1}^{h_2} = \frac{2}{3}b\sqrt{2g}\left(h_2^{\frac{3}{2}} - h_1^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$\Rightarrow Q_{exact} = \frac{2}{3} \times 0.4 \times \sqrt{2 \times 9.81} \times \left(2.1^{1.5} - 1.9^{1.5}\right) \Rightarrow Q_{exact} \approx 0.101\ m^3/s$$

حالت دوم : توزیع سرعت یکنواخت

$$V_{avg} = \sqrt{2gh_c} \Rightarrow Q_{approx} = A \times V_{avg} = (b \times d) \times \sqrt{2gh_c}$$

$$Q_{approx} = (0.4 \times 0.2) \times \sqrt{2 \times 9.81 \times 2} \approx 0.101\ m^3/s$$

مقایسه : همان طور که مشاهده شد مقدار دبی در هر دو حالت تقریباً با هم برابر است ($0.101\ m^3/s$) این نشان می دهد زمانی که ارتفاع روزنه (d) نسبت به عمق آب (h) کوچک باشد ، فرض توزیع یکنواخت سرعت تقریب بسیار خوبی برای حل مسائل مهندسی است .

جواب سوال (5-57)

$$\frac{P_2}{\gamma}+\frac{V_2^2}{2g}+Z_2=\frac{P_3}{\gamma}+\frac{V_3^2}{2g}+Z_3 \quad \Rightarrow Z_2=Z_3$$

$$V_2A_2=V_3A_3 \Rightarrow V_2\times\frac{\pi}{4}(0/42)^2=V_3\times\frac{\pi}{4}(0/65)^2$$

$$\Rightarrow V_2=4/128\,V_3$$

$$P_1=-\gamma_w h=-9810\times 0/42 \Rightarrow P_2=-1942$$

$$\frac{-1942}{12/1}+\frac{(4/128V_3)^2}{2g}+0=0+\frac{V_3^2}{2\times 9/81}+0 \Rightarrow 9/14$$

$$Q=A_3V_3=\frac{\pi}{4}(0/65)^2\times 9/14 \Rightarrow Q=0/611$$

$$V_1=V_2 \Longrightarrow \frac{P_1}{\gamma}+\frac{V_1^2}{2g}+Z_1=\frac{P_3}{\gamma}+\frac{V_3^2}{2g}+Z_3$$

$$\Rightarrow P_1=P_3=0$$

جواب سوال 5-54 :

برای اینکه جریان غیر چرخشی باشد مجموع مشتقات دوم تابع جریان باید صفر باشد :

$$\nabla^2\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0$$

با توجه به تابع جریان داده شده : $\psi = x^2 + y^2$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = 2x \Rightarrow \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = 2 \qquad \frac{\partial\psi}{\partial y} = 2y \Rightarrow \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 2$$

$\nabla^2\psi = 2+2 = 4 \neq 0 \Leftarrow$ چون حاصل صفر نشد ، جریان چرخشی است .

چون جریان چرخشی است ، باید ببینیم آیا دو نقطه روی یک خط جریان قرار دارند یا خیر

مقدار ψ در نقطه (1و1) : $\psi_1 = 2$

مقدار ψ در نقطه (2و1) : $\psi_2 = 5$

چون $\psi_1 \neq \psi_2 \Leftarrow$ این دو نقطه روی یک خط جریان قرار ندارند

نتیجه گیری : چون جریان چرخشی است و نقاط روی یک خط جریان نیستند نمی توان از معادله برنولی استفاده کرد

جواب سوال 3-91 : ضریب تصحیح انرژی جنبشی (α) برای در نظر گرفتن عدم یکنواختی توزیع سرعت در مقطع لوله استفاده می‌شود، از نظر ریاضی این ضریب همیشه برای هر توزیع سرعت غیر یکنواختی بزرگتر از ① است.

تنها در صورتی که توزیع سرعت کاملاً یکنواخت باشد (یعنی سرعت در تمام نقاط مقطع برابر باشد) مقدار α برابر با ① می‌شود و α هرگز نمی‌تواند کوچکتر از ① باشد.

از آن جائی که در هر سه شکل (a) و (b) و (c) توزیع سرعت در مقطع لوله متغیر و غیر یکنواخت است در هر سه حالت $\alpha > 1$ خواهد بود ← گزینه ①

جواب سوال 3-87 : ابتدا نقطه کار پمپ را پیدا کنیم که محل تلاقی منحنی مشخصه پمپ و منحنی سیستم است.

نمودار رسم شده یک خط راست است که از دو نقطه $(Q=0 , hp=50)$ و $(Q=2 , hp=0)$ می‌گذرد

معادله خط پمپ $\Rightarrow hp = -25Q + 50$ شیب $m = \frac{0-50}{2-0} = -25$

با نوشتن معادله برنولی بین سطح آب دو مخزن (نقطه 1 و 2) داریم:

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 + hp = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + hf$$

$P_1 = P_2 = 0$, $V_1 = V_2 \approx 0$, $z_2 - z_1 = 40m$ اختلاف ارتفاع

$\Rightarrow$ معادله ساده می‌شود $h_{sys} = hp = 40 + hf$

محاسبه افت هد در لوله (hf) بر حسب دبی (Q)

$$A = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi \times (0.15)^2}{4} \approx 0.0176\ m^2 \Rightarrow V = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{0.0176}$$

$$hf = \frac{20\,V^2}{2g} = \frac{20}{2 \times 9.81} \times \left(\frac{Q}{0.0176}\right)^2 \approx 1.019 \times 3203.4 \times Q^2 \approx 3265\,Q^2$$

$$\Rightarrow h_{sys} = 40 + 3265\,Q^2$$

تقاطع دو منحنی : حل معادله درجه 2 به روش دلتا $-25Q + 50 = 40 + 3265\,Q^2 \Rightarrow 3265\,Q^2 + 25Q - 10 = 0$

$$Q = \frac{-25 \pm \sqrt{3265}}{2 \times 3265} \Rightarrow Q \approx 0.017\ \frac{m^3}{s}$$ دبی جریان در لوله

جواب سوال 83-3 : از معادله برنولی بین سطح آب مخزن (نقطه ۱) و خروجی سیفون (نقطه ۲) استفاده می‌کنیم.

معادله برنولی :
$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + Z_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + Z_2$$

فشار در سطح مخزن و خروجی سیفون برابر فشار اتمسفر است : $P_1 = P_2 = 0$

چون مخزن بزرگ است، سرعت پایین آمدن آب تقریباً صفر است $V_1 \simeq 0$

اختلاف ارتفاع بین سطح آب و خط تقارن لوله خروجی برابر ۱۵ متر است، اگر صدا ارتفاع را خروجی لوله در نظر بگیریم

$Z_1 = 10\,m$ ، $Z_2 = 0$

$g = 9{,}81\ m/s^2$

سرعت خروجی $V_2 = V$

جای گذاری در معادله : $0 + 0 + 15 = 0 + \frac{V_2^2}{2g} + 0 \Rightarrow \frac{V_2^2}{2g} = 15$

$$V = \sqrt{2 \times 9{,}81 \times 15} \simeq \underline{17{,}155\ m/s}$$

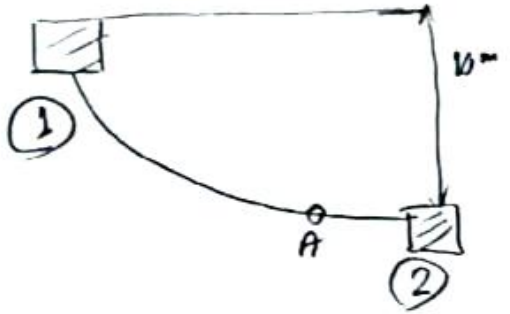
if $g = 10 \Rightarrow \underline{V = 17{,}2\ m/s}$

حال دبی جریان (Q) را می‌یابیم :

$$A = \frac{\pi \times D^2}{4} = \frac{\pi \times (0{,}2)^2}{4} = 0{,}01\pi \simeq 0{,}0314\ m^2$$

$$Q = A \times V = 0{,}0314 \times 17{,}2 \simeq 0{,}540\ \frac{m^3}{s} \times 1000 = \underline{540\ L/s}$$

گزینه ① ⇐



$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + Z_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + Z_2 + h_L \Rightarrow h_L = 10 \qquad (80-3$$

$$\frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + Z_2 + h_p = \frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + Z_1 + h_L \rightarrow h_p = 20\,m$$

2 تزنیه

جواب سوال 3-75 :

نوشتن معادله انرژی : معادله انرژی را بین سطح آزاد آب (مخزن) و خروجی سیال از توربین می نویسیم :

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + h_t + h_L$$

$P_1 = P_2 = 0$ ← فشار در سطح مخزن و خروجی توربین برابر فشار اتمسفر است .

$V_1 = 0$ سرعت پایین آمدن سطح آب در مخزن بزرگ تقریباً صفر است . $z_1 - z_2 = h$ ← اختلاف ارتفاع سطح آب و لوله

$h_L = 0$: طبق صورت سوال از افت مسیر صرف نظر می شود . $V_2 = V$: سرعت خروج آب از توربین

h_t : هد استخراجی توسط توربین

جای گذاری در معادله انرژی :

$$h = \frac{V^2}{2g} + h_t \Rightarrow h_t = h - \frac{V^2}{2g}$$

توان توربین :

$$P = \gamma Q h_t = \rho A V h_t \qquad A = \frac{\pi D^2}{4} \;,\; Q = AV$$

$$P = \rho g A V \left(h - \frac{V^2}{2g}\right) = \rho g A \left(hV - \frac{V^3}{2g}\right) \quad (1)$$

شرط حداکثر شدن توان :

$$\frac{dP}{dV} = 0 \Rightarrow \rho g A \left(h - \frac{3V^2}{2g}\right) = 0 \Rightarrow h - \frac{3V^2}{2g} = 0 \Rightarrow V = \sqrt{\frac{2gh}{3}}$$

جای گذاری در (1)

$$\Rightarrow P_{max} = \rho g A \left(\sqrt{\frac{2gh}{3}}\right)\left(h - \frac{\frac{2gh}{3}}{2g}\right) \Rightarrow P_{max} = \rho g \left(\frac{\pi D^2}{4}\right)\left(\sqrt{\frac{2gh}{3}}\right)\left(h - \frac{h}{3}\right)$$

$$\Rightarrow P_{max} = \frac{\pi}{6} \rho g D^2 h \sqrt{\frac{2gh}{3}}$$

جواب سوال 5-76 : جریان شبه پایدار فرض شده است ، $V_S = 0/1 \ m/hr$

معادله پیوستگی :

$$\dot{Q}_{in} - Q_{out} = \frac{dV}{dt} \Rightarrow -Q_{out} = A_{surface} \times \frac{dz}{dt}$$

$$A_{surface} = \pi R^2$$

می دانیم که سرعت پایین آمدن سطح آب $V_S = -\frac{dz}{dt}$ مقدار ثابتی است

$$Q_{out} = \pi R^2 \times V_S$$

قانون تورریچلی : $V_e = \sqrt{2gz} \Rightarrow Q_{out} = a \times V_e = \left(\frac{\pi d^2}{4}\right) \times \sqrt{2gz}$

و رابطه به دست آمده برای Q_{out} را برابر قرار می دهیم.

(و رابطه بدست آمده برای Q_{out} را برابر قرار می دهیم) : $(\pi R^2) V_S = \left(\frac{\pi d^2}{4}\right) \sqrt{2gz} \Rightarrow R^2 = \frac{d^2 \sqrt{2g}}{4 V_S} \times \sqrt{z}$

$$\Rightarrow R = \sqrt{\frac{d^2 \times \sqrt{2g}}{4 V_S} \times z^{\frac{1}{4}}} \qquad V_S = 0/1 \ \frac{m}{hr} = \frac{1}{36000} \ m/s$$

جایگذاری در رابطه R : $R = \sqrt{\frac{(0/005)^2 \times \sqrt{2 \times 9/81}}{4 \times \frac{1}{36000}} \times z^{0/25}} \Rightarrow R \simeq 0/998 \times z^{0/25}$

جواب سوال 3 : $P_1 = 100\ kPa$; $D_2 = 150\ mm$; $D_1 = 300\ mm$; $Q = 0.2\ m^3/s$

$W_{bend} = 500\ N$ وزن خم ; $\rho_{water} = 1000\ kg/m^3$; $V = 0.1\ m^3$

$$A_1 = \frac{\pi D_1^2}{4} = \frac{\pi \times (0.3)^2}{4} \simeq 0.0707\ m^2 \quad , \quad V_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{0.2}{0.0707} \simeq 2.83\ m/s$$

$$A_2 = \frac{\pi \times D_2^2}{4} = \frac{\pi \times (0.15)^2}{4} \simeq 0.0177\ m^2 \quad , \quad V_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{0.2}{0.0177} \simeq 11.31\ m/s$$

اختلاف ارتفاع بین مرکز لوله‌ی سرباب است با شعاع لوله‌ی بالا + فاصله بین دو لوله + شعاع لوله‌ی پایین

$$\Delta Z = Z_1 - Z_2 = 100 + 100 + 75 = 275\ mm$$

با نوشتن معادله‌ی برنولی بین مقطع ۱ و ۲ :

$$100000 + \frac{1}{2}(1000)(2.83)^2 + (1000)(9.81)(0.275) = P_2 + \frac{1}{2}(1000)(11.31)^2 + 0$$

$$\Rightarrow P_2 = 59274\ Pa$$

محاسبه نیروهای تکیه‌گاهی با معادله‌ی مومنتم : جهت مثبت محور x ← سمت راست

محور x :

نیروهای وارد بر سیال : ۱- نیروی فشار در مقطع ① ۲- نیروی فشار در مقطع ② ۳- نیروی عکس‌العمل تکیه‌گاه (R_x)

$$\Sigma F_x = \dot{m}(V_{2x} - V_{1x}) \Rightarrow P_1 A_1 + P_2 A_2 + R_x = \rho Q(-V_2 - V_1)$$

$$\Rightarrow (100000 \times 0.0707) + (59274 \times 0.0177) + R_x = 1000 \times 0.2 \times (-11.31 - 2.83)$$

$$\Rightarrow R_x = -1705\ N \longrightarrow \text{به سمت چپ}$$

محور y : نیروهای وارد بر سیال در راستای عمود شامل وزن آب، وزن خم و نیروی عکس‌العمل (R_y) است

$$\Sigma F_y = \dot{m}(V_{2y} - V_{1y}) = 0 \Rightarrow R_y - W_{water} - W_{bend} = 0$$

$$R_y = \rho A g + W_{bend} = 981 + 500 = 1481\ N \longrightarrow \text{به سمت بالا}$$

مقدار نیروی عکس‌العمل (R) :

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(-1705)^2 + (1481)^2} \simeq 17.13\ kN$$