جواب سوال 3-68 : فرمول ضریب تصحیح موضوع

$$\beta = \frac{1}{A}\int_A \left(\frac{u}{v_{avg}}\right)^2 dA$$

تابع توزیع سرعت :

$$u(y) = v_{max}\left(1 - \frac{y}{r}\right)$$

محاسبه سرعت متوسط :

$$v_{avg} = \frac{1}{r}\int_0^r u(y)\,dy = \frac{1}{r}\int_0^r v_{max}\left(1-\frac{y}{r}\right)dy \Rightarrow v_{avg} = \frac{v_{max}}{r}\left[y - \frac{y^2}{2r}\right]_0^r$$

$$= \frac{v_{max}}{r}\left(r - \frac{r}{2}\right) = \frac{v_{max}}{2}$$

صورت کسر ضریب β :

$$\frac{1}{r}\int_0^r u^2 dy = \frac{1}{r}\int_0^r v_{max}^2\left(1-\frac{y}{r}\right)^2 dy = \frac{1}{r}\int_0^r u^2 dy = v_{max}^2 \times \frac{2^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{v_{max}^2}{3}$$

جایگذاری در فرمول اصلی :

$$\beta = \frac{\frac{1}{r}\int_0^r u^2 dy}{v_{avg}^2} = \frac{\frac{v_{max}^2}{3}}{\left(\frac{v_{max}}{2}\right)^2} = \frac{4}{3} \longrightarrow \text{گزینه ④}$$

3.5)

$$u = -\frac{U_0}{(1 - r_0^3/x^3)} \qquad a = \frac{du}{dt} \qquad u = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dt = \frac{dx}{u} \qquad a = \frac{du}{dx/u} = u\frac{du}{dx}$$

$\frac{du}{dx} \Longrightarrow$ مشتق از u نسبت به x $\quad \therefore \quad -\frac{U_0}{\left(1 - \frac{r_0^3}{x^3}\right)} = -U_0\left(1 - \frac{r_0^3}{x^3}\right)^{-1} \xrightarrow[\text{نسبت به } x]{\text{مشتق}}$

$$-U_0 \times -1 \times \left(\frac{3r_0^3}{x^4}\right)\left(1 - \frac{r_0^3}{x^3}\right)^{-2} \quad , \quad a = u\frac{du}{dx} = -\frac{U_0}{(1 - r_0^3/x^3)} \times \frac{U_0}{(1 - r_0^3/x_3)^2} \times \left(\frac{3r_0^3}{x^4}\right)$$

$$a_{(x)} = -\frac{U_0^2}{\left(1 - \frac{r_0^3}{x_3}\right)^3} \times \frac{3r_0^3}{x^4}$$

جواب سوال 10-3 : سرعت متوسط (v_{avg}) در یک مقطع کانال از طریق انتگرال گیری پروفیل سرعت روی ارتفاع مقطع بدست می آید. با فرض اینکه متغیر n (در راستای عمودی از ۰ تا n_0) تغییر می کند، رابطه سرعت متوسط به شکل زیر است:

$$v_{avg} = \frac{1}{n_0}\int_0^{n_0} v\,dn \qquad v = 2v_{max}\left(\frac{n}{n_0} - \frac{n^2}{n_0^2}\right)$$

$$\Rightarrow v_{avg} = \frac{1}{n_0}\int_0^{n_0} 2v_{max}\left(\frac{n}{n_0} - \frac{n^2}{n_0^2}\right)dn \Rightarrow v_{avg} = \frac{2v_{max}}{n_0}\left[\frac{n^2}{2n_0} - \frac{n^3}{3n^2}\right]_0^{n_0}$$

$$\Rightarrow v_{avg} = \frac{2v_{max}}{n_0}\left(\frac{n_0^2}{2n_0} - \frac{n_0^3}{3n_0^2}\right) \Rightarrow v_{avg} = \frac{2v_{max}}{n_0}\left(\frac{n_0}{2} - \frac{n_0}{3}\right)$$

$$v_{avg} = 2v_{max}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = 2v_{max} \times \left(\frac{1}{6}\right) \Rightarrow \boxed{v_{avg} = \frac{1}{3}v_{max}}$$

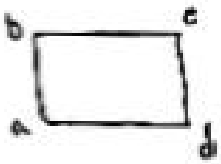
طبق صورت سوال $v_{max} = 1\ m/s \Rightarrow v_{avg} = \frac{1}{3}\ m/s \Rightarrow$ گزینه (۲)

3.19) $b = 1.5\,m$ $\quad \frac{u}{V} = 3\left(\frac{y}{\delta}\right) - 2\left(\frac{y}{\delta}\right)^{1.5}$ $\quad \delta = 1.5\,mm$ $\quad V = 3\,m/s$

مشخصات سیال نسبت به زمان تغییری نمی‌کند پس جریان پایدار است

$$\int_{cs} \rho(\vec{V}\cdot\hat{n})\,dA = 0$$

حجم کنترل ثابت متطابق $abcd$



$$\int_{ab} \rho(\vec{V}\cdot\hat{n})\,dA + \int_{bc} \rho(\vec{V}\cdot\hat{n})\,dA + \int_{cd} \rho(\vec{V}\cdot\hat{n})\,dA + \int_{ad} \rho(\vec{V}\cdot\hat{n})\,dA = 0$$

$$\int_{ab} \rho(\vec{V}\cdot\hat{n})\,dA = -\rho V_{ab} A_{ab} = -(1000\,kg/m^3)(3\,m/s)(1.5\times10^{-3}\,m)(1.5\,m) = -6.75\,kg/s$$

$$\int_{ad} \rho(\vec{V}\cdot\hat{n})\,dA = +\rho V_{ad} A_{ad} = +(1000\,kg/m^3)(0.0002\,m/s)(2\,m)(1.5\,m) = 0.6\,kg/s$$

$$\int_{cd} \rho(\vec{V}\cdot\hat{n})\,dA = \rho b \int_{cd} u\,dy = \rho b \int_0^{\delta} V\left(3\frac{y}{\delta} - 2\left(\frac{y}{\delta}\right)^{1.5}\right) dy = \rho b V \int_0^{\delta}\left[\frac{3}{\delta}y - \frac{2}{\delta^{1.5}}y^{1.5}\right] dy$$

$$= \rho b V \left(\frac{3}{2\delta}y^2 - \frac{2\delta}{2.5}\left(\frac{y}{\delta}\right)^{2.5}\right)\Bigg|_0^{\delta} = \rho b V\left(\frac{3}{2}\delta - \frac{2\delta}{2.5}\right) = 0.7\,\rho b V \delta$$

$$= 0.7\,(1000\,kg/m^3)(1.5\times10^{-3}\,m)(3\,m/s)(1.5\,m) = 4.725\,kg/s$$

$$\int_{bc} \rho(\vec{V}\cdot\hat{n})\,dA = \dot{m}_{bc} = 6.75 - 0.6 - 4.725 = \boxed{1.425\,kg/s}$$

جواب سوال 3-14 : سیال : هوا ، $W = 0.8\ m$ ، $H = 1\ m$ و $V_{max} = 10\ m/s$

پروفیل سرعت : مثلثی با سرعت ماکزیمم در مرکز

برای یک پروفیل سرعت مثلثی در یک کانال، سرعت متوسط نصف سرعت ماکزیمم است.

$$V_{avg} = \frac{1}{2} V_{max}$$

$$\Rightarrow V_{avg} = \frac{1}{2} \times 10 = 5\ m/s$$

سرعت متوسط از طریق انتگرال گیری پروفیل سرعت روی سطح مقطع به دست می آید:

$$V_{avg} = \frac{1}{A} \int_A V\,dA \Rightarrow V_{avg} = \frac{1}{H} \int_{-H/2}^{H/2} V(y)\,dy$$

معادله سرعت برای پروفیل مثلثی

$$V(y) = V_{max}\left(1 - \frac{|y|}{H/2}\right)$$

$$V_{avg} = \frac{1}{1} \int_{-0.5}^{0.5} 10\left(1 - \frac{|y|}{0.5}\right) dy = 10 \times 2 \int_0^{0.5} \left(1 - \frac{y}{0.5}\right) dy$$

$$V_{avg} = 20\left[y - \frac{y^2}{1}\right]_0^{0.5} = 20 \times 0.25 = 5\ m/s \longrightarrow \text{سرعت متوسط}$$

دبی حجمی از حاصل ضرب سرعت متوسط در مساحت سطح مقطع حاصل می شود

$$Q = V_{avg} \times A$$

$$A = W \times H = 0.8 \times 1 = 0.8\ m^2$$

$$Q = 5 \times 0.8 = 4\ m^3/s \longrightarrow \text{دبی حجمی}$$

دبی جرمی از حاصل ضرب چگالی سیال (ρ) در دبی حجمی بدست می آید.

$$\dot{m} = \rho_{air} \times Q$$

$$\dot{m} = 1.23\ kg/m^3 \times 4\ m^3/s = 4.92\ kg/s \longrightarrow \text{دبی جرمی}$$

جواب سوال 25-3 : $Q_A = 0.1t$ ، $Q_B = 0.05t^2$ ، $A_c = 0.1\ m^2$ ، $t = 1S$

سیال تراکم ناپذیر است ($\rho = constant$)

بر اساس قانون بقای جرم برای سیال تراکم ناپذیر، مجموع دبی های ورودی برابر مجموع دبی های خروجی است.

$$Q_{in} = Q_{out}$$

با توجه به شکل جریان از لوله های A,B وارد و از C خارج می شود

$$Q_C(t) = Q_A(t) + Q_B(t) \Rightarrow Q_C(t) = 0.1t + 0.05t^2$$

سرعت در لوله C : $V_c(t) = \frac{Q_c(t)}{A_c} = \frac{0.1t + 0.05t^2}{0.1} \Rightarrow V_c(t) = t + 0.5t^2$

$$V_c(1) = 1 + 0.5 \times (1)^2 = 1.0\ m/s$$

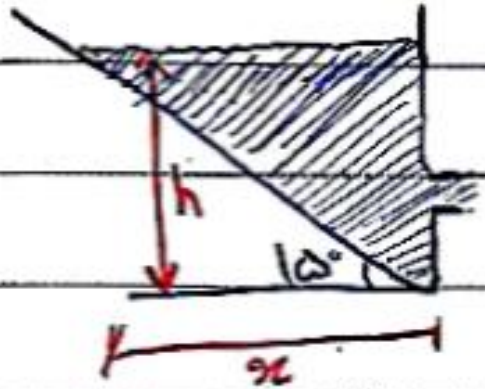
حالا سرعت متوسط را در زمان $t = 1S$ حساب می کنیم

از آن جایی که سطح مقطع لوله C ثابت است و سیال تراکم ناپذیر است سرعت در طول لوله تغییر نمی کند پس شتاب جابجایی صفر است، شتاب فقط از نوع موضعی است :

$$a_c(t) = \frac{\partial V_c}{\partial t} - \frac{d}{dt}(t + 0.5t^2) \Rightarrow a_c(t) = 1 + t \xrightarrow{t=1s}$$

$$a_c(1) = 2\ m/s^2$$

۳۵-۳



$$\tan\theta = \frac{h}{x} \rightarrow x = \frac{h}{\tan\theta}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\forall_m) - Q = 0$$

$$\forall_{m^3} = \frac{1}{2} x h \times x \times 1 = \frac{1}{2} h \times \frac{h}{\tan\theta} = \frac{w h^2}{\tan\theta} = 18{,}44\, h^2$$

$$\rightarrow \frac{d(18{,}44\, h^2)}{dt} = 100 \frac{lit}{s} \times \frac{1\, m^3}{1000\, lit} = 0{,}1 \frac{m^3}{s}$$

$$37{,}22 \frac{dh}{dt} = 0{,}1 \rightarrow h\frac{dh}{dt} = 0{,}00268 \rightarrow \int_1^{1{,}2} h\,dh = \int_{t_1}^{t_2} 0{,}00268\,dt$$

$$0{,}00268\,\Delta t = 0{,}22 \rightarrow \Delta t = 82{,}09\ s$$

جواب سوال 3-30 : برای محاسبه دبی جرمی ورودی و خروجی، باید سرعت جریان را نسبت به موتور هواپیما بدست آوریم

سرعت هوای ورودی (V_1): هواپیما با سرعت $971\ km/hr$ (رهوای ساکن حرکت می‌کند، بنابراین از دید موتور، هوا با همین سرعت وارد می‌شود :

$$V_1 = 971\ km/hr = 971000\ m/hr$$

سرعت گاز خروجی (V_2) : مسئله گفته سرعت گاز خروجی نسبت به ناظر ثابت (روی زمین) $1050\ km/hr$ است از آنجا که هواپیما با سرعت $971\ km/hr$ به سمت جلو می‌رود و گاز با سرعت $1050\ km/hr$ به سمت عقب پرتاب می‌شود، سرعت گاز نسبت به موتور برابر مجموع این دو مقدار است :

$$V_2 = 1050 + 971 = 2021\ km/hr = 2021000\ m/hr$$

دبی جرمی هوای ورودی ($\dot{m}_{air}$)

$$\dot{m}_{air} = \rho_1 \times A_1 \times V_1 \Rightarrow \dot{m}_{air} = 0.736 \times 0.8 \times 971000 = 571\,774.8\ kg/hr$$

دبی جرمی گاز خروجی ($\dot{m}_{gas}$)

$$\dot{m}_{gas} = \rho_2 \times A_2 \times V_2 = 0.55 \times 0.558 \times 2021000 \approx 580\,774.77\ kg/hr$$

معادله بقای جرم :

$$\dot{m}_{in} = \dot{m}_{out} \Rightarrow \dot{m}_{air} + \dot{m}_{fuel} = \dot{m}_{gas} \Rightarrow 571\,774.8 + \dot{m}_{fuel} = 580\,774.77$$

$$\Rightarrow \dot{m}_{fuel} = 9049.97\ kg/hr \approx 9050\ kg/hr$$

جواب سوال 42-3 : $b=2m$, $V_1=1\ m/s$, $y_1=2m$, $y_2=1m$, $\rho=1000\ kg/m^3$, $g=10\ m/s^2$

دبی جمعی (Q) در طول مسیر ثابت است :

$$Q_1=Q_2 \Rightarrow V_1\times A_1=V_2\times A_2 \Rightarrow V_1\times(y_1\times b)=V_2\times(y_2\times b)$$
$$\Rightarrow 1\times(2\times 2)=V_2\times(1\times 2)\Rightarrow V_2=2\ m/s$$

و $Q=4\ m^3/s$ دبی جمعی

نیروی فشار هیدرواستاتیک (یک مقطع مستطیلی)

$$F=\frac{1}{2}\rho g y^2 b$$

نیروی فشار در بالادست (مقطع 1) :

$$F_1=\frac{1}{2}\rho g y_1^2 b=\frac{1}{2}\times 1000\times 10\times(2^2)\times 2=40000\ N$$

نیروی فشار در پایین دست (مقطع 2) :

$$F_2=\frac{1}{2}\rho g y_2^2 b=\frac{1}{2}\times 1000\times 10\times(1)^2\times 2=10000\ N$$

حجم کنترلی را بین مقطع 1 (بالادست) و مقطع 2 (پایین دست) در نظر می گیریم :

$$\sum F_x=\dot{m}V_2-\dot{m}V_1=\rho Q(V_2-V_1)$$

نیروهای وارد بر حجم کنترلی سیال در راستای افق عبارتند از :

۱- نیروی فشار F_1 ۲- نیروی فشار F_2 ۳- نیروی که دریچه به سیال وارد می کند (F_{gate})

$$F_1-F_2-F_{gate}=\rho Q(V_2-V_1)\Rightarrow F_{gate}=24000\ N$$

طبق قانون سوم نیوتن، نیروی که سیال به دریچه وارد می کند برابر و در خلاف جهت نیروی است که دریچه به سیال وارد می کند :

$$F_{fluid}=24000\ N$$

نیروهای عمودی وارد بر بلوک :

۱- وزن بلوک $W = mg$ ۲- نیروی عمودی ناشی از جت آب ۳- نیروی عمودی سطح (N)

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N - W - F_{y,\ \text{water on block}} = 0 \Rightarrow N = mg + 5 \Rightarrow N = 14{,}81\ N$$

بیشترین مقدار اصطکاک ایستایی $f_{s,max} = \mu_s \times N = 0{,}1 \times 14{,}81 = 1{,}481\ N$

نتیجه‌گیری : نیروی افقی محرک توسط آب : $1{,}34\ N$

بیشترین نیروی اصطکاک بازدارنده : $1{,}481\ N$

از آن جا که نیروی افقی وارد از طرف آب ($1{,}34\ N$) کمتر از حداکثر نیروی اصطکاک ($1{,}481\ N$) است این نیرو توانایی غلبه بر اصطکاک را ندارد در نتیجه بلوک حرکت نمی‌کند .

جواب سوال 3-48 : $\dot{m} = 1\ kg/s$, $V = 10\ m/s$, $\theta = 30^\circ$, $M = 1\ kJ$, $\mu = 0.1$

ابتدا حجم‌کنترلی را شامل آب درحال عبور از روی بلوک در نظر می‌گیریم

در راستای افق (x) :

سرعت ورودی $V_{1x} = V = 10\ m/s$ سرعت خروجی $V_{2x} = V\cos(30)$

معادله ممنتوم در راستای x :

$$\Sigma F_x = \dot{m}(V_{2x} - V_{1x}) \Rightarrow F_{x,\text{block on water}} = 1 \times (10\cos 30^\circ - 10) = -1.34\ N$$

علامت منفی نشان می‌دهد بلوک نیرویی به سمت چپ به آب وارد می‌کند

طبق قانون سوم نیوتن $F_{x,\text{water on block}} = +1.34\ N$

در راستای (y) :

سرعت ورودی $V_{1y} = 0$ سرعت خروجی $V_{2y} = V\sin(30^\circ) = 5$

$$\Sigma F_y = \dot{m}(V_{2y} - V_{1y}) \Rightarrow F_{y,\text{block on water}} = 1 \times (10\sin 30^\circ - 0) = 5\ N$$

برای محاسبه اصطکاک ، ابتدا باید نیروی عکس‌العمل عمودی سطح را پیدا کنیم

3-53) $\sum_{CS} \rho Q V \cdot \sum_{CV} F_x \longrightarrow (-\rho Q)(V_0) + (\rho \frac{Q}{2})(-V_0)(2) = -R_x$

$R_x = 2\rho Q V_0$

لزينة مدم

جواب سوال 61-3 : ترازوی A (نیروی کلی را تحمل می‌کند :

نیروی استاتیکی : شامل وزن مخزن خالی و وزن آب درون آن

نیروی دینامیکی : نیروی ناشی از برخورد جت آب به کف مخزن

محاسبه نیروی استاتیکی (وزن کل)

$\forall = Ah = 1 \times 0{,}3 = 0{,}3\ m^3$ حجم آب

وزن مخزن خالی $W_{empty} = 1000\ N$

$W_{water} = \rho \times \forall \times g = 10^3 \times 0{,}3 \times 10 = 3000\ N$ وزن آب

$W_{total} = W_{empty} + W_{water} = 3800\ N$

نیروی وزن کل استاتیکی :

محاسبه نیروی دینامیکی (نیروی جت آب)

دبی جرمی ($\dot{m}$) :

$\dot{m} = \rho \times Q = 10^3 \times 0{,}04 = 40\ kg/s$

نیروی دینامیکی ناشی از برخورد :

$F_{jet} = \dot{m} \times V = 40 \times 7{,}7 = 308\ N$

محاسبه نیروی کل روی ترازو :

$F_A = W_{total} + F_{jet} = 3800 + 308 = 4108\ N$ ⟸ گزینه (۱)

جواب سوال 3-56 :

معادله پیوستگی (پایستگی جرم)

$$\dot{m}_{in} = \sum \dot{m}_{out} \Rightarrow \dot{m}_1 = \dot{m}_2 + \dot{m}_3 \Rightarrow \rho_x (b_1 \times 1) V_1 = \rho (d_2 \times 1) V_2 + \rho (d_3 \times 1) V_3$$

$$\Rightarrow \boxed{b_1 = d_2 + d_3} \quad (1)$$

معادله مومنتوم در راستای x :

$$\sum F_x = \sum (\dot{m} V_x)_{out} - \sum (\dot{m} V_x)_{in} = 0$$

مؤلفه سرعت در راستای x :

$$\vec{V}_{1x} = V\cos\theta \quad , \quad \vec{V}_{2x} = -\vec{V} \quad , \quad \vec{V}_{3x} = +\vec{V}$$

جای گذاری :

$$0 = (\dot{m}_3 \vec{V}_{3x} + \dot{m}_2 \vec{V}_{2x}) - (\dot{m}_1 \vec{V}_{1x}) \Rightarrow 0 = (\rho d_3 V)(V) + (\rho d_2 V)(-V) - (\rho b_1 V)(V\cos\theta) \Rightarrow \boxed{d_3 - d_2 = b_1 \cos\theta} \quad (2)$$

$$\left.\begin{array}{l} (1) \rightarrow b_1 = d_2 + d_3 \\ (2) \rightarrow d_3 - d_2 = b_1 \cos\theta \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{d_3 = \frac{b_1}{2}(1+\cos\theta)} \rightarrow \text{گزینه (3)}$$