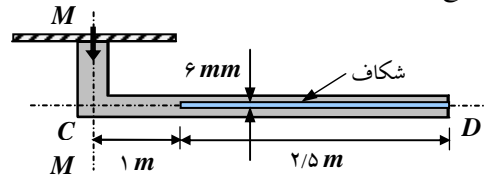
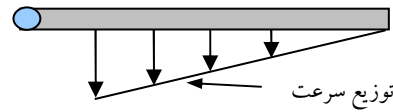


۷۰-۳ آب در لوله‌ای که انتهای آن مسدود است به مساحت 0.04 m^2 جریان دارد و در لوله شکافی به ارتفاع 6 mm و عرض $2/5 \text{ m}$ تعبیه شده است. جریان آب از این شکاف عمود بر صفحه خارج می‌شود. توزیع سرعت آب خروجی از شکاف به صورت مثلثی است. اگر دبی آب L/s ۳۰ باشد، مقدار لنگر تکیه‌گاه حول محور $M-M$ را به دست آورید.



دید از روبرو



دید از بالا

پاسخ:

ابتدا باید توزیع سرعت آب خروجی از شکاف به دست آید. توزیع سرعت به صورت زیر است:

$$v = \frac{3.5-r}{2.5} v_{max}$$

که در آن r فاصله از محور $M-M$ و v_{max} حداکثر مقدار سرعتی است که از شکاف خارج می‌شود. با انتخاب حجم کنترل ثابت شامل آب در لوله، از رابطه‌ی پیوستگی برای تعیین v_{max} به صورت زیر استفاده می‌شود:

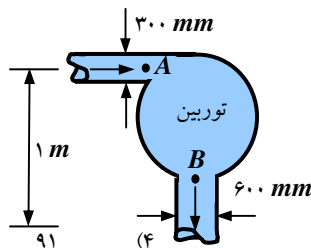
$$Q = (0.03 \text{ m}^3/\text{s}) = \int_A (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA = \int_1^{3.5} \frac{3.5-r}{2.5} v_{max} (h dr) = h v_{max} \left[\frac{3.5}{2.5} r - \frac{1}{5} r^2 \right]_1^{3.5} ; \quad v_{max} = 4 \text{ m/s}$$

که در آن h ارتفاع شکاف است. حال رابطه‌ی لنگر اندازه حرکت [رابطه‌ی (۳-۵۰)] برای جریان پایدار به صورت زیر به کار برده می‌شود:

$$T_{MM} = \int_{cs} (\vec{r} \times \vec{v}) \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA = - \int_{cs} r v^2 \rho dA = - \int_1^{3.5} r \left(\frac{3.5-r}{2.5} v_{max} \right)^2 \rho (h dr)$$

$$M_m = -\rho h \left[15.68 r^2 + 0.64 r^4 - 5.97 r^3 \right]_1^{3.5} = - (1000 \text{ kg/m}^3) (0.006 \text{ m}) (1972.8)$$

$$\underline{\underline{M_m = -131 \text{ N.m}}}$$



۷۹-۷۴، ۴، ۷۹ آب از توربین نشان داده شده در شکل با دبی $0.36 \text{ m}^3/\text{s}$ می‌گذرد و فشار در نقاط A و B به ترتیب 150 kPa و 40 kPa می‌باشد. قطر لوله‌ها نیز در شکل نشان داده شده است. مقدار توان هیدرولیکی توربین بر حسب کیلووات چقدر می‌باشد؟ ($g = 10 \text{ m/s}^2$ ، $\gamma_{\text{آب}} = 10^4 \text{ kN/m}^3$)

پاسخ:

گزینه‌ی (۳). حجم کنترل ثابت شامل آب از مقطع بالادست پمپ [مقطع (A)] تا مقطع پایین دست پمپ [مقطع (B)] است. از انتقال گرما و انرژی داخلی صرف نظر شده است. رابطه‌ی انرژی [رابطه‌ی (۳-۶۱)] به صورت زیر در می‌آید:

$$\dot{W}_{shaft} = \sum_{out} \dot{m} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gZ \right) - \sum_{in} \dot{m} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gZ \right) \quad (1)$$

مقادیر دبی جرمی و سرعت به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\dot{m}_{out} = \dot{m}_{in} = \rho Q = (1000 \text{ kg/m}^3) (0.36 \text{ m}^3/\text{s}) = 360 \text{ kg/s}$$

$$V_A = \frac{Q}{A_A} = \frac{(0.36 \text{ m}^3/\text{s})}{\pi/4(0.30 \text{ m})^2} = 5.09 \text{ m/s} \quad ; \quad V_B = \frac{Q}{A_B} = \frac{(0.36 \text{ m}^3/\text{s})}{\pi/4(0.60 \text{ m})^2} = 1.27 \text{ m/s}$$

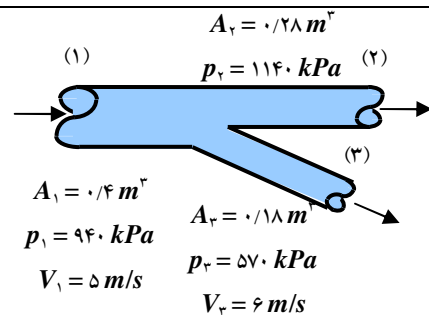
لذا رابطه‌ی (۱) به صورت زیر ساده می شود:

$$\dot{W}_{shaft} = \dot{m} \left[\left(\frac{p_B}{\rho} + \frac{V_B^2}{2} + gZ_B \right) - \left(\frac{p_A}{\rho} + \frac{V_A^2}{2} + gZ_A \right) \right]$$

$$\dot{W}_{shaft} = (360 \text{ kg/s}) \left\{ \left[\frac{(-40000 \text{ Pa})}{(1000 \text{ kg/m}^3)} + \frac{(1.27 \text{ m/s})^2}{2} + 0 \right] - \left[\frac{(150000 \text{ Pa})}{(1000 \text{ kg/m}^3)} + \frac{(5.09 \text{ m/s})^2}{2} + (10 \text{ m/s}^2)(1 \text{ m}) \right] \right\}$$

$$\dot{W}_{shaft} = -76373 \text{ W} \cong -76 \text{ kW}$$

این مساله را می توان از رابطه‌ی (۳-۶۶) نیز حل کرد.



۳-۷۷ در یک سهراهی نشان داده شده در شکل، آب در لوله‌ی شماره (۱) با سرعت 5 m/s و فشار 940 kPa جریان دارد. مقادیر سرعت و فشار در لوله‌های (۲) و (۳) نیز در شکل نشان داده شده است. مقدار توان تلف شده در این سهراهی که در صفحه‌ی افق قرار دارد، چقدر است؟

پاسخ:

به مانند مثال (۳-۱۶) رابطه‌ی انرژی در واحد جرم [رابطه‌ی (۳-۶۱)] برای حجم کنترل ثابت که شامل آب بین مقاطع ورودی و خروجی است به صورت زیر درمی آید:

$$\dot{W}_L = \sum_{out} \dot{m} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} \right) - \sum_{in} \dot{m} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} \right) = \dot{m}_3 \left(\frac{p_3}{\rho} + \frac{V_3^2}{2} \right) + \dot{m}_2 \left(\frac{p_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} \right) - \dot{m}_1 \left(\frac{p_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} \right) \quad (۱)$$

با استفاده از رابطه‌ی پیوستگی، مقادیر دبی جرمی در لوله‌ی و سرعت در لوله‌ی (۲) به صورت زیر به دست می آید:

$$\dot{m}_1 = \rho V_1 A_1 = (1000 \text{ kg/m}^3)(5 \text{ m/s})(0.4 \text{ m}^2) = 2000 \text{ kg/s}$$

$$\dot{m}_3 = \rho V_3 A_3 = (1000 \text{ kg/m}^3)(6 \text{ m/s})(0.18 \text{ m}^2) = 1080 \text{ kg/s}$$

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 + \dot{m}_3 \quad ; \quad \rho V_1 A_1 = \rho V_2 A_2 + \rho V_3 A_3$$

$$V_2 = \frac{V_1 A_1 - V_3 A_3}{A_2} = \frac{(5 \text{ m/s})(0.4 \text{ m}^2) - (6 \text{ m/s})(0.18 \text{ m}^2)}{(0.28 \text{ m}^2)} = 3.29 \text{ m/s}$$

$$\dot{m}_2 = \rho V_2 A_2 = (1000 \text{ kg/m}^3)(3.29 \text{ m/s})(0.28 \text{ m}^2) = 921 \text{ kg/s}$$

لذا رابطه‌ی (۱) به صورت زیر درمی آید:

$$\dot{W}_L = (1080 \text{ kg/s}) \left(\frac{570000 \text{ Pa}}{1000 \text{ kg/m}^3} + \frac{(6 \text{ m/s})^2}{2} \right) + (921 \text{ kg/s}) \left(\frac{1140000 \text{ Pa}}{1000 \text{ kg/m}^3} + \frac{(3.29 \text{ m/s})^2}{2} \right) - (2000 \text{ kg/s}) \left(\frac{940000 \text{ Pa}}{1000 \text{ kg/m}^3} + \frac{(5 \text{ m/s})^2}{2} \right)$$

$$\dot{W}_L = 635040 + 1054924 - 1905000 = -215036 \text{ W} = \underline{\underline{-215 \text{ kW}}}$$

این مساله را می توان از رابطه ی (۳-۶۶) نیز حل کرد.

۳-۸۰، م، ع، ۸۳ در شکل زیر $L = 1000 \text{ m}$ طول لوله، $D = 200 \text{ mm}$ قطر لوله، جریان آبی با دبی Q از بالا به پایین حرکت می نماید. در صورتی که پمپی در A قرار دهیم و با همان دبی آب را به سمت بالا پمپاژ کنیم، انرژی در واحد وزن که پمپ به آب می دهد (h_p) چقدر است؟ در این مساله فقط افت تلفات انرژی ناشی از اصطکاک در نظر گرفته می شود.

(۱) ۲۵ متر (۲) ۲۰ متر (۳) ۱۵ متر (۴) ۱۰ متر

پاسخ:

گزینہ ی (۲). حجم کنترل ثابت شامل آب از سطح مخزن بالادست (A) تا مخزن پایین دست (B) است. جریان های ورودی و خروجی همان سطوح مخازن است. در حالت اول که آب از مخزن A به سمت مخزن B جریان دارد، رابطه ی هد انرژی [رابطه ی (۳-۶۹)] با فرض $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ به صورت زیر درمی آید:

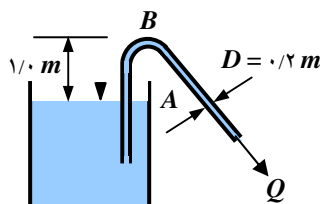
$$\frac{p_A}{\gamma} + \frac{\bar{V}_A^2}{2g} + Z_A = \frac{p_B}{\gamma} + \frac{\bar{V}_B^2}{2g} + Z_B + h_L \quad ; \quad 0 + 0 + 10 = 0 + 0 + 0 + h_L \quad ; \quad h_L = 10 \text{ m}$$

برای جریان برعکس که از پمپ استفاده می شود، افت هد انرژی برابر همان مقدار قبلی است و لذا می توان نوشت:

$$\frac{p_B}{\gamma} + \frac{\bar{V}_B^2}{2g} + Z_B + h_p = \frac{p_A}{\gamma} + \frac{\bar{V}_A^2}{2g} + Z_A + h_L \quad ; \quad 0 + 0 + 0 + h_p = 0 + 0 + 10 + 10$$

$$\underline{\underline{h_p = 20 \text{ m}}}$$

۸۱-۸۴، م، ک، ۸۱ برای سیفون شکل زیر، اگر فشار منفی مجاز در B برابر منفی ۶ متر آب باشد، حداکثر دبی سیفون چند لیتر بر ثانیه است؟ از افت انرژی صرف نظر شود. ($g = 10 \text{ m/s}^2$).



- (۱) ۱۰۰
(۲) ۲۱۶
(۳) ۳۱۴
(۴) ۴۲۰

پاسخ:

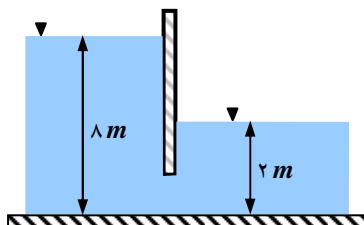
گزینہ ی (۱). حجم کنترل ثابت شامل آب از سطح مخزن [مقطع (A)] تا مقطع اوج سیفون [مقطع (B)] است. از افت هد صرف نظر شده است. رابطه ی هد انرژی [رابطه ی (۳-۶۶)] به صورت زیر درمی آید:

$$\frac{p_A}{\gamma} + \frac{V_A^2}{2g} + Z_A = \frac{p_B}{\gamma} + \frac{V_B^2}{2g} + Z_B + h_L \quad ; \quad 0 + 0 + 0 = (-6 \text{ m}) + \frac{V^2}{2g} + 1 + 0$$

$$\frac{V^2}{2g} = \frac{Q^2}{2gA^2} = \frac{Q^2}{2g \left[\pi/4 (0.20m)^2 \right]^2} = 5m \quad ; \quad \underline{\underline{Q = 0.1 \text{ m}^3/\text{s} = 100 \text{ L/s}}}$$

در کانال مستطیل شکل زیر با عرض ۱۰ متر، دبی جریان چند متر مکعب بر ثانیه است؟ از افت انرژی صرف نظر شود. (m/s^2)

۳-۸۸، م، ک، ۸۱



($g = 10$)

(۱) ۱۱۳

(۲) ۱۸۳

(۳) ۲۲۶

(۴) ۲۸۱

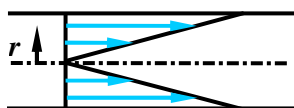
پاسخ:

هیچکدام از گزینه‌ها جواب صحیح نیست. در این مساله، مقدار فشار در مقاطع هیدرواستاتیک فرض می‌شود. چون فشار متغیر است، باید مقدار متوسط آن در رابطه‌ی انرژی استفاده شود. فشار هیدرواستاتیک به صورت خطی تغییر می‌کند و مقدار آن $p = \gamma h$ است. لذا مقدار متوسط آن برابر $\gamma h/2$ خواهد بود. رابطه‌ی هد انرژی [رابطه‌ی (۳-۶۶)] برای حجم کنترل ثابت که شامل آب بین مقاطع (۱) و (۲) است با صرف نظر کردن از افت هد انرژی، به صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + Z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + Z_2$$

$$\frac{\gamma h_1}{2\gamma} + \frac{Q^2}{2gA_1} + \frac{h_1}{2} = \frac{\gamma h_2}{2\gamma} + \frac{Q^2}{2gA_2} + \frac{h_2}{2} \quad ; \quad h_1 + \frac{Q^2}{2gA_1} = h_2 + \frac{Q^2}{2gA_2}$$

$$(8m) + \frac{Q^2}{2(10m/s^2)[(8m)(10m)]} = (2m) + \frac{Q^2}{2(10m/s^2)[(2m)(10m)]} \quad ; \quad \underline{\underline{Q = 56.6 \text{ m}^3/\text{s}}}$$



۳-۹۲ اگر توزیع فرضی سرعت در یک لوله

به صورت شکل روبه‌رو باشد، مقدار ضریب

تصحیح انرژی، α ، چه مقدار است؟

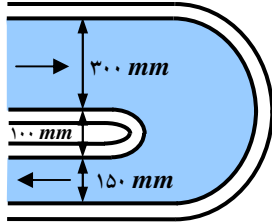
پاسخ:

توزیع سرعت داده شده به صورت $v = kr$ است. اگر شعاع دایره باشد، سرعت متوسط از رابطه‌ی (۳-۱۳) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\bar{V} = \frac{1}{A} \int_A v dA = \frac{1}{\pi r_0^2} \int_0^{r_0} kr (2\pi r dr) = \frac{2k}{r_0^2} \left| r^2 dr \right|_0^{r_0} = \frac{2}{3} kr_0$$

ضریب تصحیح انرژی از رابطه‌ی (۳-۷۰) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\alpha = \frac{1}{A} \int_A \left(\frac{v}{\bar{V}} \right)^3 dA = \frac{1}{\pi r_0^2} \int_0^{r_0} \left(\frac{kr}{2/3 kr_0} \right)^3 (2\pi r dr) = \frac{27}{4r_0^5} \int_0^{r_0} r^4 dr = \frac{27}{4r_0^5} \left| \frac{1}{5} r^5 \right|_0^{r_0} = \underline{\underline{\frac{27}{20}}}$$



۹۷-۳ آب در یک خم عمودی 180° که دو طرف آن دو لوله به قطر 300 mm و 150 mm است با دبی $0.25 \text{ m}^3/\text{s}$ در جریان است. فشار در مقطع ورودی 150 kPa و حجم آب در این خم 0.1 m^3 است. اگر وزن مصالح خم 500 N باشد، مقدار نیروی عکس العمل برای نگهداری خم چه مقدار است؟

پاسخ:

رابطه‌ی اندازه حرکت، رابطه‌ی (۳-۳۸)، برای حجم کنترل ثابت شامل آب در خم و جریان پایدار و یکنواخت در راستای افقی به صورت زیر درمی آید:

$$\sum_{CS} \rho Q V_x = \sum_{CV} F_x \quad ; \quad V_{1x} \rho (-V_1 A_1) + (-V_{2x}) \rho (V_2 A_2) = R_x + p_1 A_1 + p_2 A_2$$

$$R_x = -p_1 A_1 - p_2 A_2 - \rho V_1^2 A_1 - \rho V_2^2 A_2 = -p_1 A_1 - p_2 A_2 - \rho Q (V_1 + V_2) \quad (1)$$

که در آن R_x نیروی عکس العمل، V سرعت یکنواخت مقطع، اندیس ۱ مربوط به مقطع ورودی خم و اندیس ۲ مربوط به مقطع خروجی خم است. مقادیر سرعت در مقاطع به صورت زیر به دست می آید:

$$V_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{(0.25 \text{ m}^3)}{(\pi/4)(0.30 \text{ m})^2} = \frac{(0.25 \text{ m}^3)}{(0.0707 \text{ m}^2)} = 3.54 \text{ m/s}$$

$$V_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{(0.25 \text{ m}^3)}{(\pi/4)(0.15 \text{ m})^2} = \frac{(0.25 \text{ m}^3)}{(0.0177 \text{ m}^2)} = 14.15 \text{ m/s}$$

برای به دست آوردن مقدار فشار در مقطع (۲) از رابطه‌ی انرژی به صورت زیر استفاده می شود:

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + Z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + Z_2$$

$$\frac{(150000 \text{ Pa})}{(9810 \text{ N/m}^3)} + \frac{(3.54 \text{ m/s})^2}{2(9.81 \text{ m/s}^2)} + (0.4 \text{ m}) = \frac{p_2}{(9810 \text{ N/m}^3)} + \frac{(14.15 \text{ m/s})^2}{2(9.81 \text{ m/s}^2)} + (0.075 \text{ m}) \quad ; \quad p_2 = 59300 \text{ Pa}$$

با جایگزینی مقادیر سرعت و فشار در رابطه‌ی (۱) خواهیم داشت:

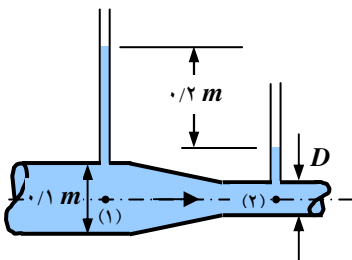
$$R_x = -(150000 \text{ Pa})(0.0707 \text{ m}^2) - (59300 \text{ Pa})(0.0177 \text{ m}^2) - (1000 \text{ kg/m}^3)(0.25 \text{ m}^3/\text{s})(3.54 + 14.15) \text{ m/s}$$

$$R_x = -(10605 \text{ N}) - (1049.6 \text{ N}) - (4422.5 \text{ N}) = -16077 \text{ N}$$

نیروی عکس العمل در جهت عمودی و نیروی کل عکس العمل به صورت زیر به دست می آید:

$$\sum_{cv} F_y = 0 \quad ; \quad R_y - W_b - W_w = 0 \quad ; \quad R_y - (500 \text{ N}) - (0.1 \text{ m}^3)(9810 \text{ N/m}^3) = 0 \quad ; \quad R_y = 1481 \text{ N}$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(16077 \text{ N})^2 + (1481 \text{ N})^2} \quad ; \quad \underline{\underline{R = 16145 \text{ N}}}$$



۵۵-۵ جریان از یک تنگ شده گوی لوله (انقباض تدریجی)

عبور می کند. اگر اختلاف سطح دو مانومتر که برای تعیین اختلاف فشار دو نقطه‌ی (۱) و (۲) به کار رفته است برابر 0.2 m باشد، مقدار دبی را بر حسب قطر لوله کوچک تر، D به دست آورید.

پاسخ:

رابطه‌ی برنولی، رابطه‌ی (۵-۳۶)، به صورت زیر در می‌آید:

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho V_1^2 + \gamma Z_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho V_2^2 + \gamma Z_2 \quad (۱)$$

با استفاده از قانون مانومتر که در فصل (۲) به آن اشاره شد، اختلاف فشار دو نقطه‌ی (۱) و (۲) که در امتداد یک خط جریان قرار داده شوند به صورت زیر در می‌آید:

$$p_1 - p_2 = \gamma(h_1 - h_2) = 0.2\gamma \quad (۲)$$

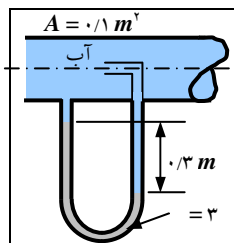
که در آن h ارتفاع سطح آب در مانومترها است. چون نقاط (۱) و (۲) بر روی محور تقارن (وسط لوله) قرار گرفته‌اند، $Z_1 = Z_2$ است. برای به دست آوردن سرعت‌های نقاط (۱) و (۲) فرض می‌شود که سرعت مقاطع جریان واقع بر نقاط (۱) و (۲) یکنواخت است. درحقیقت، سرعت نقاط (۱) و (۲) همان سرعت یکنواخت مقطع فرض می‌شود. بنابراین، رابطه‌ی پیوستگی بین مقاطع (۱) و (۲) به صورت زیر در می‌آید:

$$V_1 A_1 = V_2 A_2 \quad ; \quad V_1 \frac{\pi}{4} (0.1 \text{ m})^2 = V_2 \quad ; \quad \frac{\pi}{4} D^2 V_2 = \left(\frac{0.1}{D} \right)^2 V_1 \quad (۳)$$

با جایگزینی رابطه‌های (۲) و (۳) در رابطه‌ی (۱) مقدار سرعت و از آنجا دبی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$0.2 + \frac{1}{2g} \rho V_1^2 = \frac{1}{2g} \rho \left[\left(\frac{0.1}{D} \right)^2 V_1 \right]^2 \quad ; \quad V_1 = \sqrt{\frac{39.2}{\left[(0.1/D)^4 - 1 \right]}}$$

$$Q = A_1 V_1 = \frac{\pi}{4} (0.1)^2 \sqrt{\frac{39.2}{\left[(0.1/D)^4 - 1 \right]}} \quad ; \quad Q = \frac{0.0156 D^2}{\sqrt{0.00001 - D^4}}$$



برای جریان سیال ایده‌آل در لوله‌ی شکل زیر، دبی عبوری چند مترمکعب بر ثانیه است؟ ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

۵-۶۰، م، ک، ۸۱

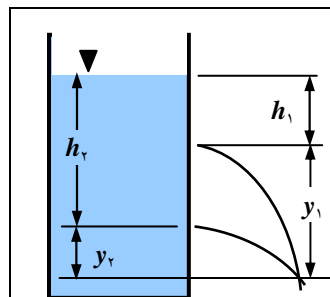
- (۱) ۰/۱۷
- (۲) ۰/۲۱
- (۳) ۰/۳۵
- (۴) ۰/۴۲

پاسخ:

گزینه‌ی (۳). این وسیله پیتوت تیوپ است که برای اندازه‌گیری سرعت به کار می‌رود. رابطه‌ی سرعت در مساله‌ی (۵-۵۶)، با تغییر جزئی، به صورت زیر به کار برده می‌شود:

$$V = \sqrt{2gh \left(\frac{\gamma_m}{\gamma} - 1 \right)} = \sqrt{2(10 \text{ m/s}^2)(0.3 \text{ m}) \left(\frac{3\gamma_w}{\gamma_w} - 1 \right)} \quad ; \quad V = 3.5 \text{ m/s}$$

$$Q = AV = (0.1 \text{ m}^2)(3.5 \text{ m/s}) \quad ; \quad Q = 0.35 \text{ m}^3/\text{s}$$



سیالی مطابق شکل از دو روزنه که به فواصل h_1 و h_2 بر روی دیواره‌ی

۵-۶۴، م، ع، ۸۴

یک مخزن نصب شده‌اند، تخلیه می‌شود. جت‌های خروجی از این دو روزنه در نقطه‌ای با یکدیگر برخورد کرده‌اند. با فرض عدم تلفات انرژی تا قبل از نقطه‌ی تلاقی، کدام گزینه صحیح است؟

$$h_1 h_2 = y_1 y_2 \quad (۱)$$

$$h_1 y_1^2 = h_2 y_2^2 \quad (۲)$$

$$h_1 h_2^2 = y_2 y_1^2 \quad (۳)$$

$$h_1 y_1 = h_2 y_2 \quad (۴)$$

پاسخ:

گزینہ ۱) برای روزنه‌ی اولی که به فاصله‌ی h_1 از سطح آب مخزن قرار دارد، مقدار سرعت خروجی جت برابر $V = \sqrt{2gh_1}$ و سرعت جت در نقطه‌ی برخورد $V_i = \sqrt{2g(h_1 + y_1)}$ است. سرعت افقی جت آب به دلیل نبودن شتاب افقی همیشه در طول مسیر ثابت است. لذا، مسافت افقی طی شده تا نقطه‌ی برخورد به صورت زیر بیان می‌شود:

$$x = Vt = \sqrt{2gh_1} t \quad (۱)$$

در جهت قائم، شتاب حرکت شتاب ثقل است و لذا رابطه‌ی حرکت در جهت قائم به صورت زیر درمی‌آید:

$$V_{iy} - V_y = gt \quad ; \quad V_i \sin \alpha - 0 = gt \quad ; \quad t = \frac{V_i \sin \alpha}{g} = \frac{\sqrt{2g(h_1 + y_1)} \sin \alpha}{g} \quad (۲)$$

که در آن V_i سرعت جت در نقطه‌ی برخورد و α زاویه‌ی این سرعت با افق است. مقدار زاویه به صورت زیر به دست می‌آید:

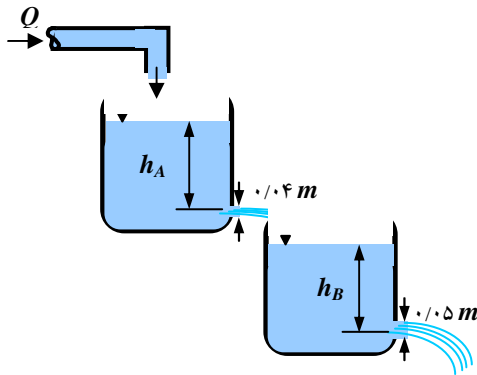
$$\cos \alpha = \frac{V_{ix}}{V_i} = \frac{\sqrt{2gh_1}}{\sqrt{2g(h_1 + y_1)}} \quad ; \quad \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{2gh_1}{2g(h_1 + y_1)}} = \sqrt{\frac{y_1}{h_1 + y_1}} \quad (۳)$$

با ترکیب رابطه‌های (۱) الی (۳) خواهیم داشت:

$$x = \frac{\sqrt{2g(h_1 + y_1)} \sqrt{\frac{y_1}{h_1 + y_1}}}{g} \sqrt{2gh_1} = 2\sqrt{h_1 y_1}$$

به همین روش می‌توان اثبات کرد که مسافت افقی طی شده برای جت دوم برابر با $x = 2\sqrt{h_2 y_2}$ است. لذا خواهیم داشت:

$$2\sqrt{h_1 y_1} = 2\sqrt{h_2 y_2} \quad ; \quad \underline{\underline{h_1 y_1 = h_2 y_2}}$$



۶۸-۵ اگر جریان در سیستم نشان داده شده در شکل، پایدار و $h_B = 2 \text{ m}$ باشد، ارتفاع آب، h_A را به دست آورید.

پاسخ:

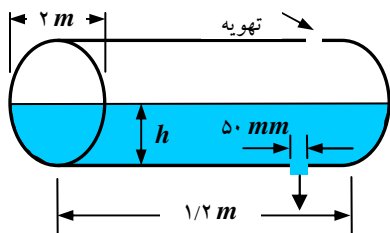
جریان در مخزن تراکم‌ناپذیر، غیرلزج و پایدار در نظر گرفته می‌شود. اگر رابطه‌ی برنولی، رابطه‌ی (۴۰-۵)، بین دو نقطه واقع در سطح مخزن B و در خروجی روزنه‌ی همین مخزن که بر یک خط جریان قرار دارند، با صرف نظر کردن از هد سرعت سطح مخزن به کار برده شود، مقدار سرعت آب خروجی از روزنه $V_1 = \sqrt{2gh_B}$ به دست می‌آید. برای مخزن A نیز سرعت آب خروجی از روزنه برابر $V_1 = \sqrt{2gh_A}$ به دست می‌آید. چون جریان پایدار است، دبی سیستم در دو مخزن یکی است. لذا، رابطه‌ی پیوستگی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$Q_A = Q_B \quad ; \quad V_A A_A = V_B A_B \quad ; \quad \sqrt{2gh_A} \frac{\pi}{4} d_A^2 = \sqrt{2gh_B} \frac{\pi}{4} d_B^2$$

$$h_A = \left(\frac{d_B}{d_A} \right)^4 h_B = \left(\frac{0.05 \text{ m}}{0.03 \text{ m}} \right)^4 (2 \text{ m}) \quad ; \quad \underline{\underline{h_A = 4.9 \text{ m}}}$$

۷۴-۵

یک استوانه به قطر 1 m تا نصف آن از آب پر شده است. آب مخزن از طریق یک روزنه به قطر 50 mm در حال تخلیه است. رابطه‌ای برای زمان تخلیه‌ی آب از مخزن برحسب ارتفاع آب در مخزن در هر لحظه، به دست آورید. جریان را شبه پایدار فرض کنید.



پاسخ:

فرض کنید که ارتفاع سطح آب در مخزن به کندی کاهش می‌یابد و می‌توان جریان را شبه پایدار فرض کرد. اگر رابطه‌ی برنولی بین نقطه‌ی (۱) واقع در سطح مخزن و نقطه‌ی (۲) در روزنه که بر روی یک خط جریان قرار دارند برقرار گردد، مقدار سرعت برابر $V_2 = \sqrt{2gh}$ می‌گردد. در اینجا از فشار دینامیکی جریان در سطح آب مخزن صرف نظر شده است. از طرفی دیگر فرض می‌شود که سرعت جریان در مقاطع ورودی (سطح مخزن) و خروجی (روزنه) یکنواخت است و لذا سرعت نقطه‌ای V_1 برابر سرعت یکنواخت مقطع است. رابطه‌ی پیوستگی برای جریان شبه پایدار شبیه جریان پایدار است. اگر L طول استوانه و x عرض سطح آب در هر لحظه باشد، رابطه‌ی پیوستگی، رابطه‌ی (۳-۳۱)، برای این جریان به صورت زیر درمی‌آید:

$$A_1 V_1 = A_2 V_2 \quad ; \quad 2Lx \left(-\frac{dh}{dt} \right) = A_2 \sqrt{2gh} \quad ; \quad 2L \sqrt{R^2 - (R-h)^2} dh = A_2 \sqrt{2gh} dt$$

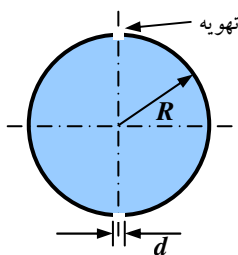
$$dt = -\frac{2L}{A_2 \sqrt{2g}} \frac{\sqrt{2Rh-h^2}}{\sqrt{h}} dh = -\frac{2L}{A_2 \sqrt{2g}} (\sqrt{2R-h}) dh$$

$$dt = -\frac{2(1.2\text{ m})}{\left[\pi/4 (0.05\text{ m})^2 \right] \sqrt{2(9.81\text{ m/s}^2)}} (\sqrt{2(1\text{ m})-h}) dh \quad ; \quad \int_0^t dt = -\int_1^h 275.95 \sqrt{2-h} dh$$

$$t = (275.95) \frac{2}{3} \left[(2-h)^{3/2} \right]_1^h \quad ; \quad t = 183.97 \left[(2-h)^{3/2} - 1 \right]$$

۷۷-۵

در کف یک مخزن کره‌ای به قطر D (شعاع R)، روزنه‌ای به قطر d قرار دارد. در ابتدا مخزن پر از آب است و فشار بالای سطح آب (با تهویه مناسب) فشار اتمسفر است. رابطه‌ای برای تغییرات سطح آب بر حسب زمان به دست آورید.



پاسخ:

فرض کنید که ارتفاع سطح آب در مخزن به کندی کاهش می‌یابد و می‌توان جریان را شبه پایدار فرض کرد. اگر رابطه‌ی برنولی بین نقطه‌ی (۱) واقع در سطح مخزن و نقطه‌ی (۲) در روزنه که بر روی یک خط جریان قرار دارند برقرار گردد، مقدار سرعت برابر $V_2 = \sqrt{2gh}$ می‌گردد. در اینجا از فشار دینامیکی جریان در سطح آب مخزن صرف نظر شده است. از طرفی دیگر فرض می‌شود که سرعت جریان در مقاطع ورودی (سطح مخزن) و خروجی (روزنه) یکنواخت است و لذا سرعت نقطه‌ای V_1 برابر سرعت یکنواخت مقطع است. رابطه‌ی پیوستگی برای جریان شبه پایدار شبیه جریان پایدار است. اگر r شعاع سطح آب در هر لحظه باشد، رابطه‌ی پیوستگی، رابطه‌ی (۳-۳۱)، برای این جریان به صورت زیر درمی‌آید:

$$A_1 V_1 = A_2 V_2 \quad ; \quad \pi r^2 \left(-\frac{dh}{dt} \right) = \frac{\pi}{4} d^2 \sqrt{2gh} \quad ; \quad -\sqrt{R^2 - (h-R)^2} dh = \frac{d^2 \sqrt{2gh}}{4} dt$$

$$\frac{d^2 \sqrt{2g}}{4} dt = (h^{3/2} - 2Rh^{1/2}) dh$$

$$\frac{d^2 \sqrt{2g}}{4} \int_0^t dt = \int_{2R}^h (h^{3/2} - 2Rh^{1/2}) dh$$

$$\frac{d^2\sqrt{2g}}{4}t = \frac{2}{5}\left[h^{5/2} - (2R)^{5/2}\right] - \frac{4}{3}R\left[h^{3/2} - (2R)^{3/2}\right]$$

