

بسمه تعالی

طراحی اجزاء ۱
مرور بر مقاومت مصالح
بخش اول

محسن اصفهانیان
دانشکده مهندسی مکانیک
دانشگاه صنعتی اصفهان
زمستان ۱۳۹۸

در آخرین جلسه حضوری کلاس مراحل "روش طراحی برای شکست" را بررسی می کردیم. مراحل آن شامل:

۱. تحلیل بارهای خارجی بر روی دستگاه، ماشین یا سیستم
۲. تحلیل بارهای خارجی بر روی هر قطعه
۳. تحلیل بارهای داخلی در هر قطعه و تعیین مقطع (یا مقاطع) بحرانی
۴. تحلیل تنش در مقطع بحرانی و تعیین ابعاد (در طراحی مستقیم) یا ضریب ایمنی (در طراحی معکوس)

بود. برای مرحله سوم دو روش "مقطع زنی" و استفاده از "توابع تکین" معرفی شد و در یک مثال ساده تیر با یک بار متمرکز در وسط آن اجرا شد.

قرار بود که مثال دومی حل شود که در ادامه می آید:

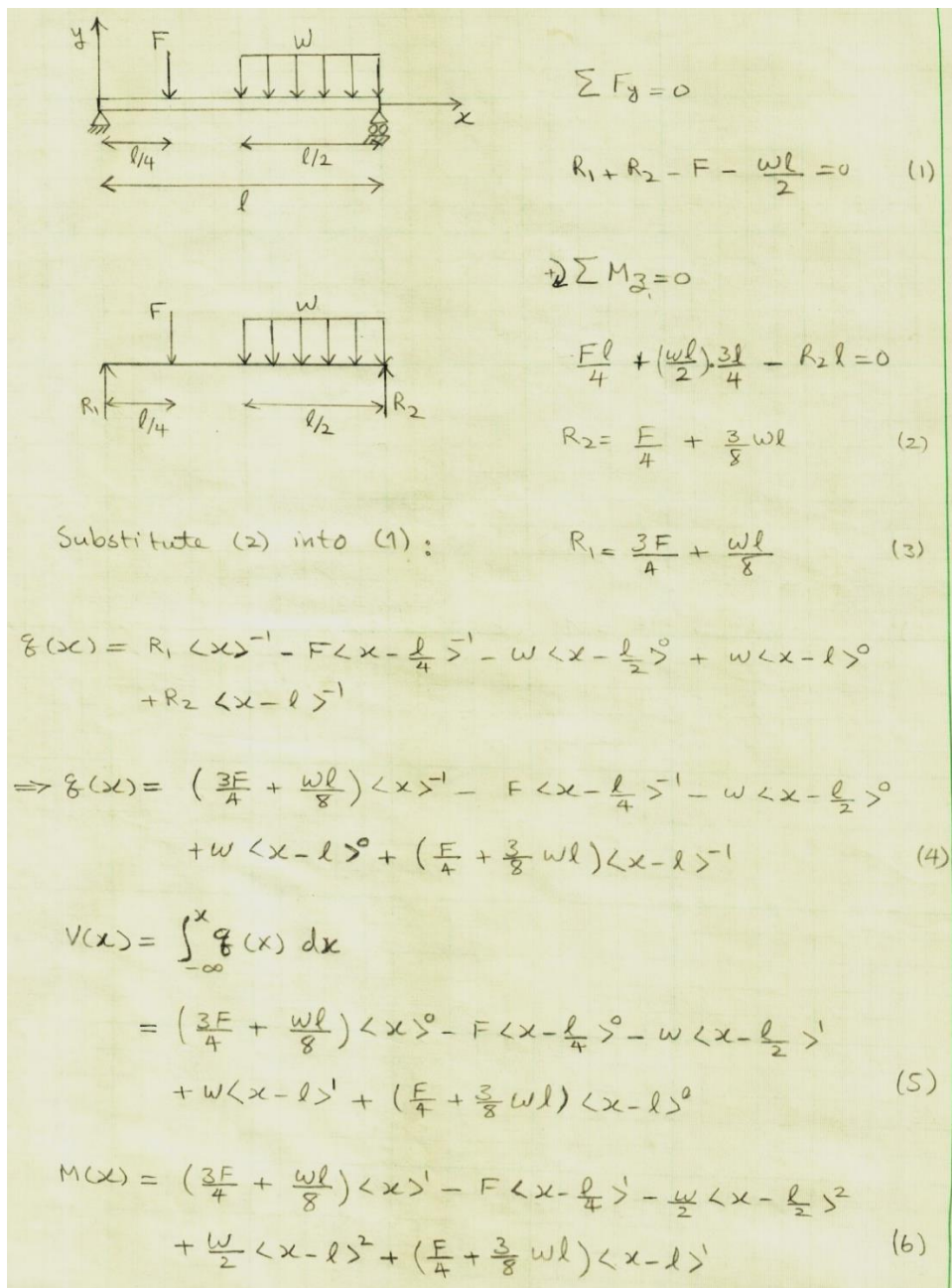


Diagram of a beam of length l with a point load F at $l/4$ and a distributed load w from $l/4$ to $3l/4$. Reactions R_1 and R_2 are at the ends.

Equilibrium equations:

$$\sum F_y = 0 \quad R_1 + R_2 - F - \frac{wl}{2} = 0 \quad (1)$$

$$\sum M_z = 0 \quad \frac{F l}{4} + \left(\frac{wl}{2}\right) \cdot \frac{3l}{4} - R_2 l = 0$$

$$R_2 = \frac{F}{4} + \frac{3}{8} wl \quad (2)$$

Substitute (2) into (1):

$$R_1 = \frac{3F}{4} + \frac{wl}{8} \quad (3)$$

Singularity functions for shear force $V(x)$:

$$V(x) = R_1 \langle x \rangle^{-1} - F \langle x - \frac{l}{4} \rangle^{-1} - w \langle x - \frac{l}{2} \rangle^0 + w \langle x - l \rangle^0 + R_2 \langle x - l \rangle^{-1}$$

$$\Rightarrow V(x) = \left(\frac{3F}{4} + \frac{wl}{8}\right) \langle x \rangle^{-1} - F \langle x - \frac{l}{4} \rangle^{-1} - w \langle x - \frac{l}{2} \rangle^0 + w \langle x - l \rangle^0 + \left(\frac{F}{4} + \frac{3}{8} wl\right) \langle x - l \rangle^{-1} \quad (4)$$

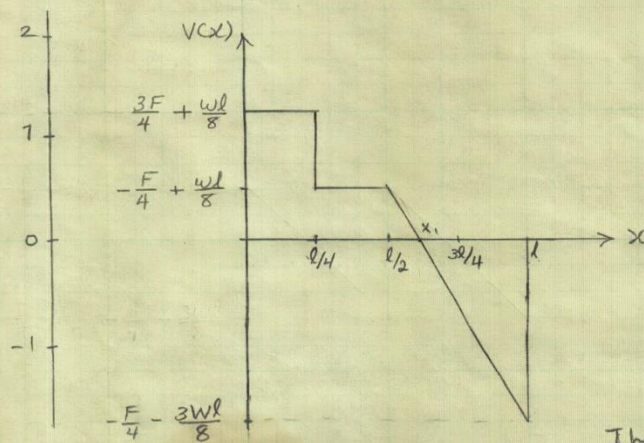
Integration to find bending moment $M(x)$:

$$M(x) = \int_{-\infty}^x V(x) dx$$

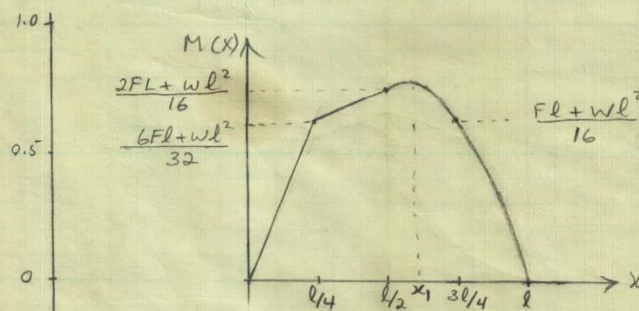
$$= \left(\frac{3F}{4} + \frac{wl}{8}\right) \langle x \rangle^0 - F \langle x - \frac{l}{4} \rangle^0 - w \langle x - \frac{l}{2} \rangle^1 + w \langle x - l \rangle^1 + \left(\frac{F}{4} + \frac{3}{8} wl\right) \langle x - l \rangle^0 \quad (5)$$

$$M(x) = \left(\frac{3F}{4} + \frac{wl}{8}\right) \langle x \rangle^1 - F \langle x - \frac{l}{4} \rangle^1 - \frac{w}{2} \langle x - \frac{l}{2} \rangle^2 + \frac{w}{2} \langle x - l \rangle^2 + \left(\frac{F}{4} + \frac{3}{8} wl\right) \langle x - l \rangle^1 \quad (6)$$

Assume $F=1$, $W=2$, and $l=2$

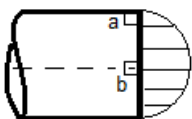


The shape of the curve depends on the values of F and l .



Note: The shape of these curves depends on the values of F , W , and l .

با بررسی منحنی‌های بار برشی و بار خمشی تیر و با مقایسه مقادیر آنها در مقاطع مختلف تیر، می‌توان به دو مقطع بحرانی دست یافت. در مقطع اول $x=l/4$ هم ممان خمشی قابل ملاحظه‌ای داریم و هم بیشترین مقدار بار برشی. در مقطع دوم $x=x_1$ مقدار بار خمشی بیشینه است. با استفاده از اطلاعات دروس مقاومت مصالح، می‌دانیم که هر یک از بارهای داخلی تنش خاص خود را ایجاد می‌کند:

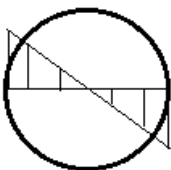


(۲) بار برشی V
 $\tau = kV/A^2$

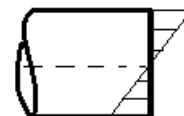
$$V = dM/dx$$



(۱) بار محوری F
 $\sigma = F/A^2$



(۴) بار پیچشی T
 $\tau = Tr/J$



(۳) بار خمشی M
 $\sigma = Mc/I$

مقطع بحرانی در واقع مختصات X را تعیین می کند. Y و Z با انتخاب المان سطح تعیین می شود. به توزیع تنش های بالا توجه کنید. بعضی از تنش ها در یک المان جمع نمی شوند. به عنوان مثال تنش محوری با تنش برشی در المان بالا (a) یا پایین مقطع توامان حضور ندارند. تنش های خمشی و برشی هم این گونه هستند. در المان بالا (a) یا پایین مقطع تنش خمشی بیشینه است در حالی که تنش برشی صفر است. در تار خشی (b) تنش برشی بیشینه است ولی تنش خمشی صفر است. بنابراین باید بین این دو المان انتخاب کنیم. این دو تنش را به هم مقایسه می کنیم:

اگر M از مقیاس Fl باشد و V از مقیاس F، پس مقدار بیشینه این تنش ها برای یک مقطع دایره به صورت زیر به دست می آید:

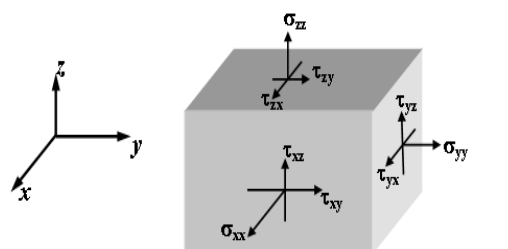
$$\tau = k \frac{V}{A} = \frac{4}{3} \frac{4V}{\pi d^2} = 5.3 \left(\frac{F}{\pi d^2} \right)$$

$$\sigma = \frac{Mc}{I} = \frac{32 Fl}{\pi d^3} = \frac{32l}{d} \left(\frac{F}{\pi d^2} \right)$$

برای قطعاتی همچون تیرها، شافت ها و اکسل ها که نسبت l به d آنها زیاد است (در شافت ها ۱۰ تا پانزده برابر است)، مقدار تنش خمشی به مراتب بیشتر از تنش برشی است. برای نسبت l/d=15، تنش خمشی بیش از ۹۰ برابر تنش برشی می شود. در این قطعات تنش خمشی حرف اول را می زند و هر جا تنش خمشی بیشینه است، آنجا به القوه یک مقطع بحرانی است. پس برای مثال بالا X1 مقطع بحرانی تیر است.

تحلیل تنش

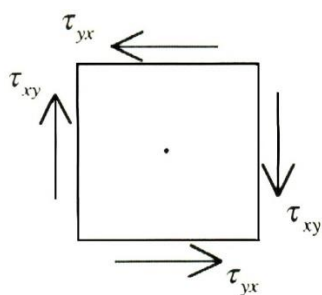
مرحله چهارم "طراحی برای شکست" تحلیل تنش در مقطع بحرانی است. در مرور این بخش از مقاومت مصالح اول باید مشخص شود تعریف تنش چیست؟ چنانچه قبلاً گفته شد بارهای داخلی منتج از اعمال بارهای خارجی بر روی قطعه است و در مقاطع قطعه جریان دارد. پس می توان تنش را اینگونه تعریف کرد: "شدت جریان بارهای داخلی در مقطع قطعه". بنابراین تنش هم مقدار دارد و هم وابسته به مقطعی است که در آن جریان دارد. پس تنش را به صورت ریاضی می توان با یک ماتریس درجه ۲ نشان داد.



$$(\tilde{\sigma}) = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

ایندیس اول صفحه ای که تنش در آن اعمال می شود و ایندیس دوم جهت تنش را نشان می دهد. چونکه صفحه با بردار عمود به آن نام گذاری می شود، تنش های با ایندیس های یکسان تنش های عمودی هستند و بقیه تنش ها، تنش های برشی هستند. با نمادهای مقاومت مصالح تنش های عمودی را با σ و تنش های برشی را با τ نشان داده می شوند.

یکی از خواص ماتریس تنش تقارن قطری آن است که با تعادل ممان اثبات می شود:



$$\sum M_{zi} = 0 = [(\sigma_{xy})d_z d_y]d_x - [(\sigma_{yx})d_x d_z]d_y$$

$$\Rightarrow \sigma_{xy} = \sigma_{yx}$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$

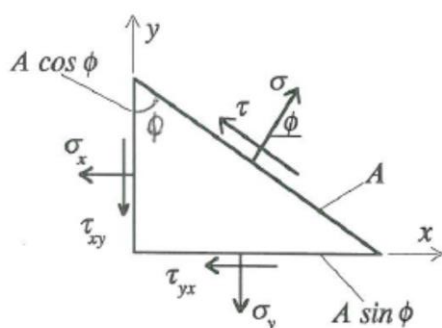
همچنین

از نظر ریاضی می توان اثبات کرد که برای ماتریسی درجه دو که تقارن قطری دارد، مختصات متعامدی با همان مبدا وجود دارد که در آن مختصات ماتریس فقط در قطر مقدار دارد.

$$\tilde{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

چونکه هر دو ماتریس ها برابرند و حالت تنش در همان نقطه را نشان می دهند، پس مقادیر قطر تنش های بیشینه هستند. این مقادیر را تنش های اصلی نامیده می شوند و جهت های آنها نیز جهات اصلی هستند.

در واقع ما مختصات را به طرز دلخواه انتخاب می کنیم. معمولاً به صورتی که با هندسه مسئله تطابق بیشتری داشته باشد و کمیت ها را بتوان در راستای آنها راحت تر تعریف و ارزیابی کرد. اما ماده مختصات انتخابی ما را نمی شناسد و در جهتی که بیشترین تنش ها به او وارد می شود شکست رخ می دهد. بنابراین مقادیر و جهات تنش های اصلی برای ماده و در فرایند طراحی اهمیت دارند. در این کلاس به دلیل اینکه با تنش های سه بعدی کار نداریم، ادامه تحلیل را در دوبعد انجام می دهیم. هدف این است که با داشتن حالت تنش دوبعدی در مختصات متعارف همچون مختصات دکارتی (X, Y, Z) آیا می توانیم در یک راستای دیگر تنش ها را به دست آوریم؟



یک المان مثلثی را در نظر بگیرید. با داشتن حالت تنش در X و Y و σ_x

(σ_y, τ_{xy})، می خواهیم تنش عمودی σ و برشی τ را در یک زاویه ϕ از

محور X به دست آوریم. تنش های $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ را به مولفه هایی در

راستای σ و τ تقسیم می کنیم و رابطه تعادل در راستای σ و τ را

می نویسیم:

تعادل در راستای σ :

$$\sigma \cdot A = \tau_{xy} \sin \phi \cdot A \cos \phi + \tau_{yx} \cos \phi \cdot A \sin \phi + \sigma_x \cos \phi \cdot A \cos \phi + \sigma_y \sin \phi \cdot A \sin \phi$$

با حذف A و ساده سازی معادله:

$$\sigma = 2\tau_{xy} \sin \phi \cos \phi + \sigma_x \cos^2 \phi + \sigma_y \sin^2 \phi$$

با استفاده از روابط مثلثاتی:

$$\sigma = 2\tau_{xy} \sin \phi \cos \phi + \sigma_x \cos^2 \phi + \sigma_y \sin^2 \phi$$

$$2 \sin \phi \cos \phi = \sin 2\phi$$

$$\cos^2 \phi = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\phi)$$

$$\sin^2 \phi = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\phi)$$

$$\sigma = \tau_{xy} \sin 2\phi + \frac{\sigma_x}{2} (1 + \cos 2\phi) + \frac{\sigma_y}{2} (1 - \cos 2\phi)$$

(۱)

تعادل در راستای τ نیز نتایج زیر را می‌دهد:

$$\tau \cdot A = \tau_{xy} \cos \phi \cdot A \cos \phi - \tau_{yx} \sin \phi \cdot A \sin \phi - \sigma_x \sin \phi \cdot A \cos \phi + \sigma_y \cos \phi \cdot A \sin \phi$$

$$\tau = \tau_{xy} (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) - (\sigma_x - \sigma_y) \cos \phi \sin \phi$$

$$\tau = \tau_{xy} \cos 2\phi - \frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2} \sin 2\phi$$

(۲)

روابط (۱) و (۲) تنش عمودی σ_ϕ و تنش برشی τ_ϕ برای صفحه که زاویه ϕ با محور X دارد را می‌دهد. با این دو معادله با داشتن حالت تنش در مختصات دل‌خواهی که انتخاب کردیم می‌توانیم تنش‌های عمودی و برشی را در هر صفحه دیگر به‌دست آوریم.

برای به‌دست آوردن مقادیر بیشینه، روابط (۱) و (۲) را بر حسب مشتق می‌گیریم و زوایایی که در آن تنش‌های عمودی و برشی بیشینه هستند به‌دست می‌آیند.

$$\frac{d\sigma}{d\phi} = -(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\phi + 2\tau_{xy} \cos 2\phi = 0$$

$$\tan 2\phi_\sigma = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

(۳)

معادله (۳) دو مقدار تنش اصلی (σ_1 بیشترین مقدار و σ_2 کمترین مقدار) را می‌دهد. برای به‌دست آوردن مقدارهای بیشینه و کمینه تنش‌های اصلی، زاویه ϕ_σ را در رابطه (۱) قرار می‌دهیم:

$$\sin 2\phi_\sigma = \frac{2\tau_{xy} \cos 2\phi_\sigma}{\sigma_x - \sigma_y}$$

$$\sigma = \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} + \frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2} \cos 2\phi_\sigma + \frac{2\tau_{xy}^2 \cos 2\phi_\sigma}{(\sigma_x - \sigma_y)}$$

$$\cos 2\phi_\sigma = \frac{\left[\sigma - \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} \right]}{\left[\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2} + \frac{2\tau_{xy}^2}{(\sigma_x - \sigma_y)} \right]}$$

$$\sin 2\phi_\sigma = \frac{2\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)} \frac{\left[\sigma - \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} \right]}{\left[\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2} + \frac{2\tau_{xy}^2}{(\sigma_x - \sigma_y)} \right]}$$

$$\sin^2 2\phi_\sigma + \cos^2 2\phi_\sigma = 1$$

$$\frac{4\tau_{xy}^2}{(\sigma_x - \sigma_y)^2} \left[\sigma - \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} \right]^2 + \left[\sigma - \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} \right]^2 = \left[\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2} + \frac{2\tau_{xy}^2}{(\sigma_x - \sigma_y)} \right]^2$$

$$\left[\sigma - \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} \right]^2 = \frac{\left[\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2} + \frac{2\tau_{xy}^2}{(\sigma_x - \sigma_y)} \right]^2}{\left[\frac{4\tau_{xy}^2}{(\sigma_x - \sigma_y)^2} + 1 \right]}$$

٤

$$\left[\sigma - \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} \right]^2 = \frac{\left[\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}{2(\sigma_x - \sigma_y)} \right]^2}{\left[\frac{4\tau_{xy}^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2}{(\sigma_x - \sigma_y)^2} \right]}$$

$$\left[\sigma - \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} \right]^2 = \tau_{xy}^2 + \frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4}$$

$$\therefore \sigma_1, \sigma_2 = \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} \pm \sqrt{\tau_{xy}^2 + \frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4}}$$

(٤)

برای به دست آوردن تنش های برشی بیشینه، معادله (۳) را بر حسب مشتق می گیریم و همانند بالا به این تنش ها می رسم:

$$\frac{d\tau}{d\phi} = -2\tau_{xy} \sin 2\phi - (\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\phi = 0$$

$$\tan 2\phi_\tau = -\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2\tau_{xy}}$$

$$\therefore \tau_1, \tau_2 = \pm \sqrt{\tau_{xy}^2 + \frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4}} \quad (۶)$$

حال می توان σ_ϕ و τ_ϕ را نیز بر حسب تنش های اصلی نوشت:

$$\sigma_\phi = \frac{(\sigma_1 + \sigma_2)}{2} + \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)}{2} \cos 2\phi$$

$$\tau_\phi = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)}{2} \sin 2\phi$$

تحلیلی که عرضه شد از آن آقای مور (Mohr) بود که توسط آن می توان با داشتن حالت تنش در مختصات از پیش انتخاب شده مقادیر تنش های عمودی و برشی را در هر زاویه ای به دست آورد. همچنین می توان تنش های اصلی و جهات آنرا محاسبه کرد. در زمان های قبل از ماشین حساب و کامپیوتر، برای سهولت انجام محاسبات عددی، اگر می شد فرمول بندی های ریاضی را به صورت گرافیکی نشان داد و بر اساس مقیاس عددها را خواند، نمایش گرافیک برای محاسبات انجام می دادند.

با توجه به المان مثلثی اولیه، زاویه ϕ می تواند از -90° تا $+90^\circ$ تغییر یابد. در معادلات حاصل شده همواره مقدار 2ϕ استفاده شده که تغییرات زاویه ای را از -180° تا $+180^\circ$ باعث می شود. مور به این نتیجه رسید که می تواند این فرمول بندی را با یک دایره نشان دهد. برای رسم معادله (۲) بر حسب معادله (۱) و به صورت یک دایره نکاتی را باید در نظر گرفت:

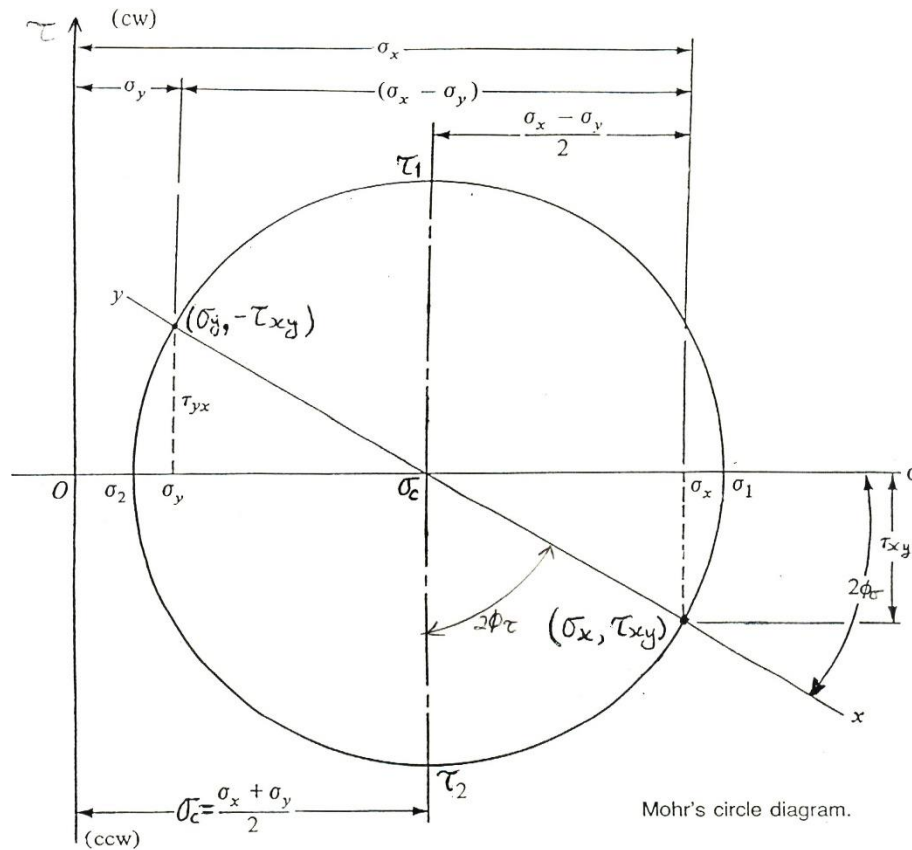
۱. برای تنش های عمودی کشش مثبت و فشار منفی در نظر گرفته می شود. برای تنش های برشی ساعتگرد مثبت و پادساعتگرد منفی اطلاق می شود. همین علامت گذاری هم برای زاویه ϕ استفاده می شود. این البته بر خلاف قرارداد هندسی است ولی مختصات دایره مور هم هندسی نیست.

۲. هر نقطه بر روی دایره مور یک جهت هندسی را نشان می دهد. محور X با مختصات (σ_x, τ_{xy}) و محور Y با مختصات (σ_y, τ_{yx}) مشخص می شوند. با عنایت به اینکه محورهای X و Y عمودند و زاویه در دایره مور دوبرابر می شود، نقاط X و Y دو طرف قطر دایره مور قرار دارند.

۳. همانطور که قبلاً گفته شد، زاویه ϕ از محور X اندازه گیری می شود. پس نقطه X معادل با زاویه صفر است.

۴. زوایای ϕ_σ و ϕ_τ از نقطه X اندازه گیری می شوند و به نقاط تنش های اصلی عمودی و برشی می رسند.

شکل زیر یک نمونه از دایره مور را نشان می دهد. برای هر حالت تنش دوبعدی می توان یک دایره مور رسم کرد.



حال دو مثال در این رابطه حل می شود.

مثال اول:

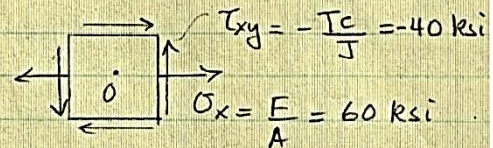
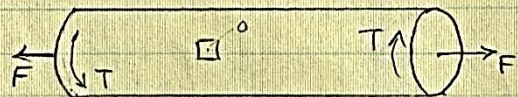
Given: A straight round bar.
An element on the outer surface
is subjected to:

$$\sigma_x = 60 \text{ ksi}, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = -40 \text{ ksi}$$

Find: Represent the stress state by
a Mohr's circle and determine
the principal stresses.

Solution: From eq (4-18) and (4-16) we can write:

$$\tau_1, \tau_2 = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \pm \sqrt{(30)^2 + (-40)^2} = \pm 50 \text{ ksi}$$



$$\sigma_c = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = 30 \text{ ksi}$$

$$\sigma_1 = \sigma_c + \tau = 80 \text{ ksi}$$

$$\sigma_2 = 30 - 50 = -20 \text{ ksi}$$

$$\tan 2\phi_o = \frac{2(-40)}{60} = -\frac{4}{3}$$

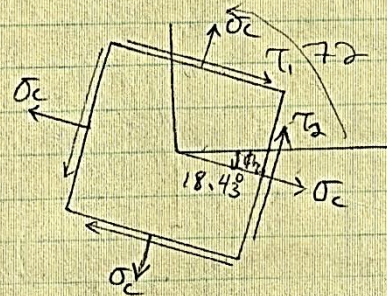
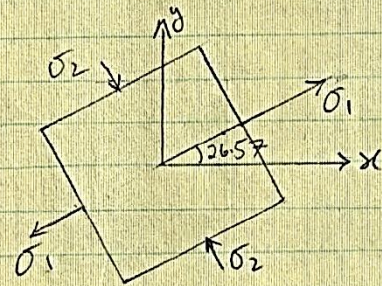
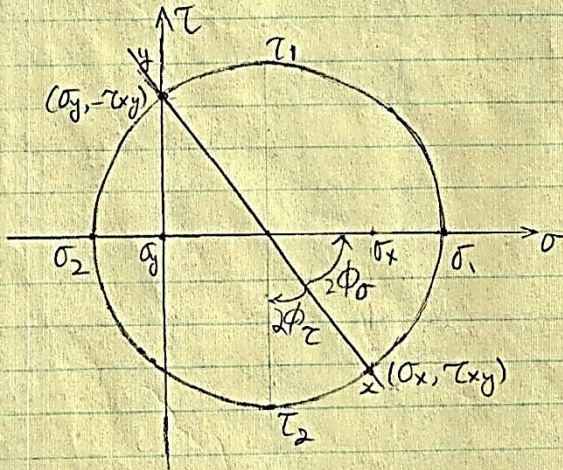
$$\tan 2\phi_r = \frac{-60}{2(-40)} = \frac{3}{4}$$

$$\alpha_2 \quad 2\phi_o = -53.13^\circ \text{ CCW}$$

$$2\phi_r = 36.87^\circ \text{ CW}$$

$$\phi_r = 18.43^\circ$$

Thus we are able to draw the following diagram:



Invest in a protractor

مثال دوم:

Given: $\sigma_x = 9 \text{ MPa}$, $\sigma_y = 19 \text{ MPa}$, $\tau_{xy} = 8 \text{ MPa (CW)}$

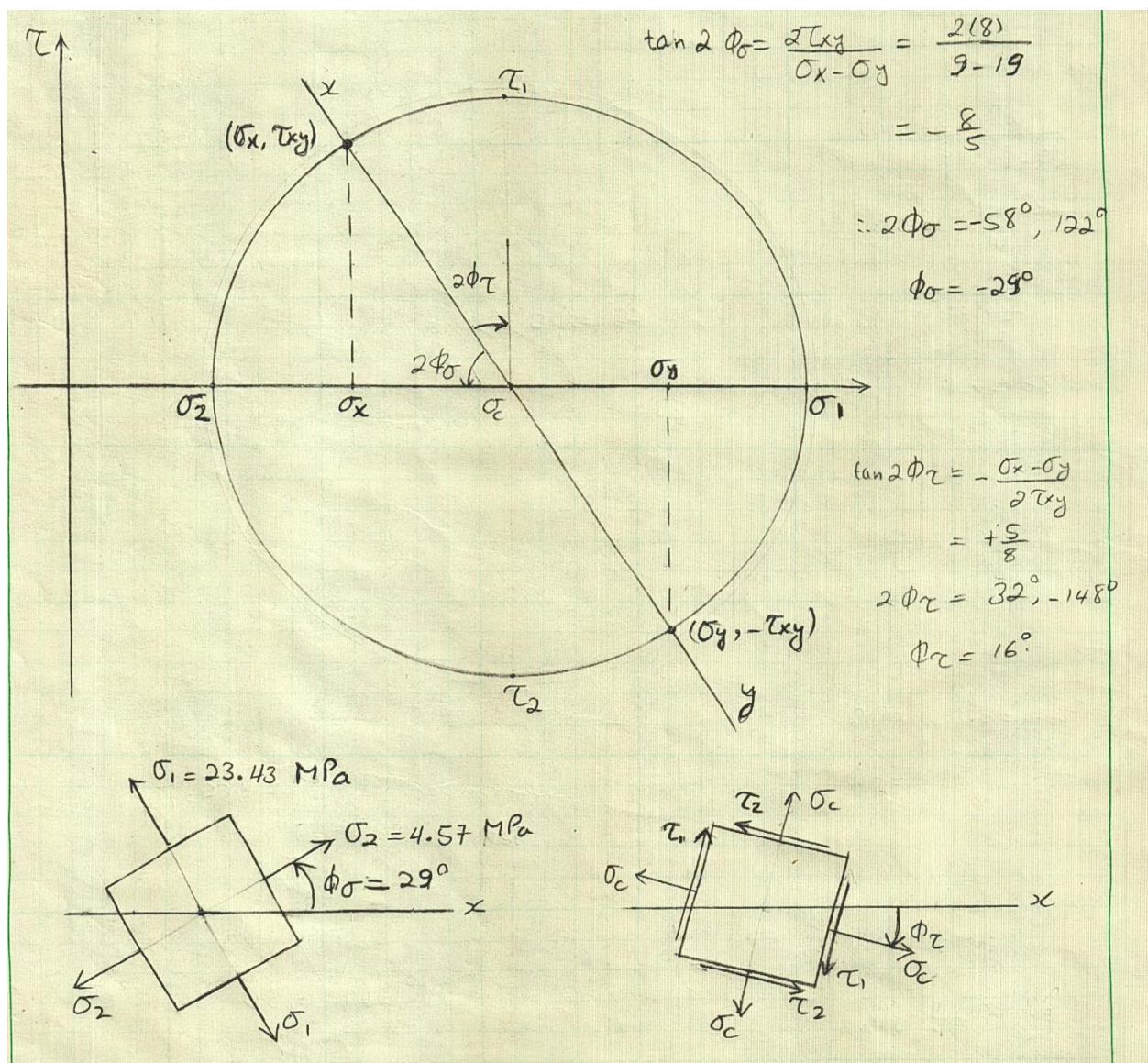
Solution: $\sigma_c = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{9 + 19}{2} = 14 \text{ MPa}$

$$\tau_1, \tau_2 = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \pm \sqrt{\left(\frac{9 - 19}{2}\right)^2 + 8^2} = \pm 9.43 \text{ MPa}$$

$$\therefore \tau_1 = 9.43 \text{ MPa} \quad \tau_2 = -9.43 \text{ MPa}$$

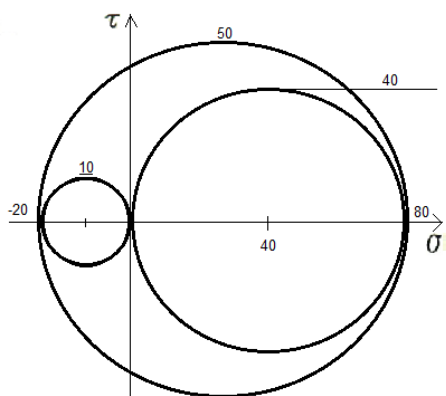
$$\sigma_1 = \sigma_c + \tau_1 = 23.43 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \sigma_c + \tau_2 = 4.57 \text{ MPa}$$



همانطور که قبلاً اشاره شد، برای هر حالت تنش در صفحه می‌توان از تحلیل مور استفاده کرد و دایره مور را برای آن رسم کرد. برای هر دو مثال اخیر، به دلیل اینکه در صفحه سوم تنش نداریم، و دایره مور برای هر سه بعد به صورت زیر خواهد بود:

برای مثال اول:



$$\sigma_1 = 80 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = -20 \text{ MPa}, \quad \sigma_3 = 0$$

$$\tau_{1/2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = 50 \text{ MPa} \quad \text{ماکزیم تنش برشی تحلیل سه بعدی}$$

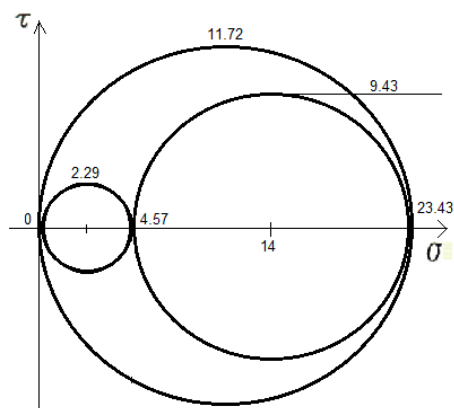
$$\tau_{1/3} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = 40 \text{ MPa}$$

$$\tau_{2/3} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} = 10 \text{ MPa}$$

$$\tau_{bmax} = 50 \text{ MPa}$$

ماکزیم تنش برشی تحلیل دوبعدی

برای مثال دوم:



$$\sigma_1 = 23.43 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = 4.57 \text{ MPa}, \quad \sigma_3 = 0$$

$$\tau_{1/2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = 9.43 \text{ MPa}$$

$$\tau_{1/3} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = 11.72 \text{ MPa} \quad \text{ماکزیمم تنش برشی تحلیل سه بعدی}$$

$$\tau_{2/3} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} = 2.29 \text{ MPa}$$

$$\tau_{bmax} = 9.43 \text{ MPa} \quad \text{ماکزیمم تنش برشی تحلیل دوبعدی}$$

با مقایسه نتیجه دو مثال به این جمع بندی می رسیم که در مثال دوم تحلیل تنش دوبعدی کافی نیست و تنش برشی بیشینه در صفحه سوم رخ می دهد ولی برای مثال اول تحلیل تنش دوبعدی کافیت و تنش برشی بیشینه حاصل می شود. به طور کلی می توان نوشت که:

هر گاه در تحلیل دوبعدی تنش های صفحه ای، تنش های عمودی اصلی هم علامت باشند، تحلیل تنش دوبعدی کافی نیست و تنش برشی بیشینه در صفحه سوم رخ می دهد.

هنگامی که حالت تنش سه بعدی است، می توان تنش های اصلی را از رابطه زیر به دست آورد:

$$\sigma^3 - I_\sigma \sigma^2 + II_\sigma \sigma - III_\sigma = 0$$

که ریشه های $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ به دست آمده همان تنش های اصلی هستند. در اینجا $I_\sigma, II_\sigma, III_\sigma$ ضرایب ثابت تانسور تنش می باشند و بدین گونه داده شده اند:

$$I_\sigma = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

$$II_\sigma = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_1 \sigma_3$$

$$III_\sigma = \sigma_x \sigma_y \sigma_z - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$$

